

FACULTAD DE EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE PEDAGOGÍA MEDIAS Y DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS  
PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA



**UNIVERSIDAD  
ALBERTO HURTADO**

# Una Secuencia de Enseñanza y Aprendizaje para el volumen del cilindro y del cono

---

Seminario de Título para optar al título de Profesor de  
Matemáticas

**Nathalie Patricia Gaete Fuentes  
Esteban Alexis Vidal Sobarzo**

**Profesora guía Dr. María Soledad Montoya**

**Santiago de Chile – Diciembre, 2020**



## **Agradecimientos**

### *Nathalie Patricia Gaete Fuentes:*

Si pudiera agradecer a cada una de las personas que me acompañaron en este camino universitario sin duda sería una lista sin fin. Pero, no puedo dejar de agradecer a quienes son mi pilar fundamental en la vida, mis padres Roberto y Patricia, quienes nunca me han dejado caer y cuando estoy a punto de hacerlo me sostienen de la mano firmemente, agradecer a mi familia y a la parte de ella que ya no están físicamente pero siempre se encuentran presente en mis pensamientos y logros, mis abuelos Beatriz y Francisco.

Sin duda alguna, un agradecimiento especial mis amigos que también son parte importante de este logro en un año tan difícil, donde no puedo dejar de mencionar a quien me ha enseñado a mirar mi entorno de forma más cautelosa, ha dado lecciones de vida y reforzado el lazo de amistad, a pesar de que ya no está presente, la pequeña mariposa XAVIERA ROJAS. Agradezco al arte, la danza y la música por unirnos.

Finalmente quiero agradecer a todos los profesores que me acompañaron en el camino universitario, quienes siempre estuvieron con una palabra de aliento e impulsándome a seguir en la senda del saber y enriqueciéndome aún más dentro del ámbito profesional. En general a todos y cada uno (mencionados o no) les dedico este trabajo y agradezco por estar siempre cuando más los necesite.

¡TOI TOI ...!



Esteban Alexis Vidal Sobarzo:

Agradezco cada momento vivido en la universidad desde mi primer día en ella hasta el día de hoy. A los profesores, de quienes hemos adquirido todos los conocimientos que llevaremos el día de mañana a nuestro trabajo como profesionales. A cada persona que estuvo presente y me acompañó en los distintos momentos vividos en estos seis años. A mis padres quienes me han apoyado en cada momento importante o no durante mis 26 años de vida. A mis compañeros, quienes han estado a mi lado, me han apoyado en cada paso que hemos dado durante la carrera. A mi novia, quien estuvo a mi lado en los peores y mejores momentos y con quién comenzaré una nueva vida como nuevos profesionales de la salud y educación.

Agradezco lo llorado, lo aprendido, las felicidades, a cada alumno que tuve en mis experiencias laborales y ayudantías. A cada oportunidad que se me dio y a cada experiencia vivida.

## ÍNDICE

<b>Resumen</b>	<b>Pág.</b>
<b>Introducción</b>	<b>8</b>
<b>Problemática, Antecedentes y Objetivos</b>	
<b>1.1 Problemática</b>	<b>10</b>
<b>1.2 Antecedentes</b>	
<b>1.2.1 Antecedentes de referentes teóricos</b>	<b>12</b>
<b>1.2.2 Antecedentes de Tipo Didáctico</b>	
<b>1.2.2.1 Análisis del Programa de Estudio</b>	<b>14</b>
<b>1.2.2.2 Análisis de Textos Escolares</b>	<b>18</b>
<b>1.3 Objetivos</b>	
<b>1.3.1 Objetivo general de la investigación</b>	<b>24</b>
<b>1.3.2 Objetivos específicos de la investigación</b>	<b>24</b>
<b>Objeto matemático</b>	
<b>2.1 Elementos de la epistemología del objeto matemático</b>	<b>25</b>
<b>2.2 Contenido matemático</b>	
<b>2.2.1 Cilindro</b>	<b>28</b>
<b>2.2.2 Cono</b>	<b>29</b>
<b>2.2.3 Volumen</b>	<b>29</b>
<b>2.2.3.1 Cilindro</b>	<b>30</b>
<b>2.2.3.2 Cono</b>	<b>31</b>
<b>Marco de Referencia</b>	
<b>3.1 Enfoque teórico del diseño didáctico</b>	<b>33</b>
<b>3.2 Utilización del enfoque teórico para el diseño didáctico</b>	<b>35</b>
<b>Metodología</b>	
<b>4.1 Elementos de la Ingeniería Didáctica</b>	<b>37</b>
<b>4.2 Etapa del diseño de las cápsulas educativas</b>	<b>40</b>
<b>Secuencia de enseñanza aprendizaje</b>	
<b>5.1 Descripción Secuencia de Enseñanza Aprendizaje</b>	<b>42</b>
<b>5.2 Plan de Clases</b>	<b>43</b>

<b>5.2.1 Plan de Clases sesión 1</b>	<b>44</b>
<b>5.2.2 Plan de clase sesión 2</b>	<b>46</b>
<b>5.3 Guías de trabajo</b>	<b>49</b>
<b>5.3.1 Sesión 1</b>	<b>49</b>
<b>5.3.2 Sesión 2</b>	<b>50</b>
<b>5.4 Análisis a priori de las situaciones de aprendizajes</b>	<b>53</b>
<b>Estudio de Cápsulas</b>	
<b>6.1 Descripción cápsulas educativas</b>	<b>56</b>
<b>6.1.1 Cápsula 1: “Observando el mundo con ojos matemáticos”</b>	<b>60</b>
<b>6.1.2 Cápsula 2: “Comprendiendo nuestro entorno desde una perspectiva matemática”</b>	<b>62</b>
<b>6.1.3 Cápsula 3: “Realizando matemática con objetos a nuestro alcance”</b>	<b>64</b>
<b>6.1.4 Cápsula 4: “Experimentando y demostrando”</b>	<b>65</b>
<b>6.2 Discusión con expertos</b>	<b>66</b>
<b>Análisis de los resultados</b>	
<b>7.1 Análisis descriptivo de las cápsulas educativas a partir de la discusión.</b>	<b>69</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>71</b>
<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>73</b>
<b>Anexos</b>	<b>73</b>



## INTRODUCCIÓN

El siguiente informe corresponde al seminario final para optar al Título de Profesor de Matemática en el programa impartido por la Universidad Alberto Hurtado.

Para esto, el informe presenta lo que es tanto el diseño de una secuencia didáctica innovadora en el desarrollo de uno de los contenidos considerados en los programas de estudios que el Ministerio de Educación ha dispuesto y la formación de la didáctica de la matemática es la que nos ha facilitado las herramientas para realizar la siguiente secuencia de enseñanza-aprendizaje y el material utilizado.

Esta investigación se encuentra dividida en 7 capítulos, de los cuales algunos poseen subdivisiones.

En el capítulo I, se presentará el fenómeno didáctico detectado que causa un problema en el contenido seleccionado, además se dará a conocer los antecedentes encontrados frente a dicho problema, mostrando cómo se trata el contenido en algunos textos escolares y en los planes y programas del Ministerio de Educación. Y finalmente se plasmarán los objetivos de la investigación.

En el capítulo II, se abordará el objetivo matemático desde su visión epistemológica y se presentarán algunos contenidos desde la matemática formal, que serán necesarios para resolver problemas que involucran el contenido del Volumen del cilindro y el cono.

El capítulo III, se dará a conocer el Marco de Referencia que se investigó y utilizó para la realización de la secuencia de enseñanza-aprendizaje propuesta, es por esto por lo que se abordará la Teoría de Razonamiento Configural de Germán Torregrosa y Humberto Quezada, como el foco principal para realizar la investigación y la propuesta de enseñanza.

La metodología utilizada para la investigación se mostrará en el capítulo IV, haciendo énfasis en la Ingeniería Didáctica propuesta por Michelle Artigue.

En el capítulo V, se presentará un plan de clases diseñado para la investigación, este dado el tipo de investigación debe ser innovador.

En el capítulo VI, una vez validada la secuencia didáctica, es necesario analizar las retroalimentaciones realizadas por los expertos que observaron el material. Estos análisis, denominados a posteriori, serán de utilidad para contrastar las conclusiones de la investigación.

# CAPÍTULO I

## Problemática, Antecedentes y Objetivos

### 1.1 Problemática

A partir de nuestras experiencias en prácticas escolares, la noción de volumen de cuerpos redondos, específicamente del cilindro y el cono, resultan difícil de comprender y fácil de confundir, ya que en el aula se presenta de manera esquemática y algorítmica, pues suele en la mayoría de los casos solo estudiarse con un registro simbólico, en pocas ocasiones bajo un registro pictórico y limitadamente en un registro concreto. Camou (2012) nos señala que para aprender Geometría del Espacio no alcanza con usar un solo tipo de representación, sino que es imperioso utilizar un conjunto de representaciones, que, de diferentes formas, aproximan el mismo objeto geométrico. La comprensión en matemáticas supone la coordinación de al menos dos registros de representación semiótica (Raymond Duval, 2005).

Remitiéndose a la revisión de la literatura sobre matemática, específicamente en geometría, en investigaciones, estudios y planes y programas, observamos que se recae usualmente en un modelo de educación tradicional. Clements y Battista (1992) consideran que, la visualización integra los procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones a partir de las representaciones de los objetos bi o tridimensionales observadas en construcciones y manipulaciones. Por lo cual, la utilización de registros para aportar a la calidad del aprendizaje del estudiante sería un buen recurso para complementar dicha experiencia. En base a esto, podemos asegurar que la actividad en geometría, así como en toda la matemática, se realiza necesariamente en un contexto de representación. Duval (2005), señala que la actividad matemática requiere una coordinación interna, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados; sin esta coordinación dos representaciones diferentes significaran dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso

si son dos contextos de representación diferentes del mismo objeto, por esto es importante que exista una conversión adecuada para que las representaciones se complementen y no sean incongruentes. Bajo el contexto anterior, la problemática central de nuestro estudio recae en la confusión del estudiantado al momento de tratar la noción de volumen y capacidad, como también la relación que existe entre el volumen de los cuerpos cilindro y cono. Es usual que, por parte de docentes y estudiantes se planteen preguntas como: ¿cuál es la diferencia entre volumen y capacidad?, ¿cuál es la relación entre el volumen del cilindro con el del cono? Annie Berté (1999) señala que a menudo los alumnos no entienden lo que se les enseñó. Si saben hacer algunos ejercicios, es aplicando “recetas”; que olvidan cuando no las usan más, y es fácil confundirlos variando un poco la forma de hacer las preguntas. Se consideran reglas, a las fórmulas para obtener el volumen de un cilindro o cono y recetas al paso a paso de resolución de estas fórmulas. Tanto las reglas como las recetas, para la resolución de ejercicios y problemas en geometría, son soluciones por las que optan o deben optar algunos docentes, en donde prima lo memorístico por sobre lo significativo, lo que genera incertidumbre y a largo plazo obstáculos, esta situación la consideramos como el fenómeno didáctico en cuestión.

Por otra parte, frente a los acontecimientos actuales que se viven a nivel mundial, con la pandemia que generó el nuevo coronavirus (COVID-19), se incentivó a la existencia necesaria de un distanciamiento social. Debido a esto una de las primeras medidas implementadas ha sido el cierre de establecimientos educacionales, dejando a los estudiantes sin clases presenciales en todos los niveles y generó la necesidad de utilizar estrategias de enseñanza-aprendizaje en formato virtual. Como señalan Failache, Katzkowicz y Machado (2020), la implementación de formas de aprendizaje alternativas mediante el uso de la tecnología es imprescindible para paliar la situación actual, siendo una de estas alternativas la creación de cápsulas educativas, las cuales se han presentado por parte de los establecimientos y docentes, que según Herмосilla (2018) son una propuesta innovadora,

creativa y motivadora con el fin de generar o reforzar nuevos y antiguos conocimientos, y que, además, las instala como material didáctico para proveer de información práctica a los estudiantes, en las que se muestran contenidos cortos explicando de forma descriptiva un concepto clave en educación (Vidal, 2019).

Es por esto por lo que, como futuros docentes, no nos podemos marginar de la responsabilidad de generar propuestas acordes a nuestra realidad que nos permitan fortalecer el aprendizaje de los estudiantes en cuanto a volumen de cuerpos redondos, específicamente del cilindro y del cono, a través de una propuesta de enseñanza-aprendizaje mediante la utilización de una cápsula educativa y que ellos puedan realizar desde sus hogares. Además, es necesario saber que herramientas utilizan al momento de enfrentarse a una situación problema que involucren a dichos cuerpos geométricos. En este marco, planteamos el siguiente cuestionamiento ¿Qué elementos se deben considerar, en el estudio del volumen del cilindro y del cono, para vincular la visualización y el razonamiento en la resolución de problemas?

## **1.2 Antecedentes**

Para llevar a cabo esta investigación se hace necesaria una recopilación de antecedentes. Debido a esto, se realizó una exhaustiva revisión de la literatura que se relaciona con el contenido matemático que se trabajará, volumen del cilindro y cono.

### **1.2.1 Antecedentes de referentes teóricos**

Según investigaciones la matemática, en el ámbito escolar, es una de las asignaturas donde más se presentan dificultades y más específicamente en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría (Báez e Iglesias, 2007). También, hemos observado que la Unidad de Geometría se enfoca en la enseñanza-aprendizaje de fórmulas y cálculos, limitando el desarrollo de habilidades para visualizar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas,

conjeturar, razonar deductivamente y argumentar de manera lógica en procesos de prueba o demostración (Jones, 2002).

Radatz (1979) menciona que:

Existen errores debidos a la rigidez de pensamiento. Estos surgen por la falta de flexibilidad en el pensamiento, es decir el alumno no puede adaptar lo que ya sabe a situaciones nuevas. En esta categoría están los errores de asociación, de inferencia, de asimilación y los errores generados por la aplicación de reglas y propiedades válidas sólo en algunos casos.

Por su parte Astolfi (1999) es clara en decir que los errores los encontramos como:

Resultado de hábitos escolares o de una mala interpretación de las interpretaciones, donde los alumnos en la escuela incorporan hábitos tales como creer que el problema propuesto se resuelve solo utilizando los nuevos conceptos aprendidos, no responder conforme a su propio razonamiento, sino a lo que piensan que el profesor espera que se haga, desconfiar cuando no obtienen un número simple como resultado, dar respuestas mecánicas sin razonar por la viabilidad y la lógica de esta, etc.

Mediante una investigación realizada anteriormente, sabemos que una cápsula educativa es definida como, entidad de información digital que puede presentarse en diferentes formatos y utilizarse como recurso en actividades educativas, que agrupa un conjunto de unidades de aprendizaje, objetos de aprendizaje y recursos digitales coherente, jerárquicamente articulados y secuenciados. Según Hernández (2019), en el aspecto de la información en general se les describe como un segmento informativo con una variedad de temas útiles de interés público, cuya función es difundir información actualizada. Pues bien, bajo el contexto actual que vive la educación

resaltamos que, a partir de esta investigación realizada sobre las cápsulas educativas se obtuvo como resultado, luego de analizar varias de estas, que no garantizan el desarrollo adecuado de habilidades reincidiendo en el método de enseñanza tradicional.

### **1.2.2 Antecedentes de Tipo Didáctico**

Para comenzar, se analizará el Programa de Estudio de los niveles de 8° Básico y 1° Medio (MINEDUC, 2016), donde el contenido de estudio es el Volumen del Cilindro y el Volumen del Cono, respectivamente.

#### **1. 2.2.1. Análisis del Programa de Estudio**

En el nivel de 8° Básico, el contenido sobre el volumen del cilindro se encuentra en la tercera unidad de Geometría, cuyo objetivo propone el que “las y los estudiantes descubren y aplican las fórmulas del área de superficies y del volumen de prismas rectos y de cilindros. Para ello, comienzan con cuerpos conocidos, como el cubo, y trabajan con sus redes para determinar las relaciones entre largo, ancho y alto, necesarias para desarrollar el nuevo conocimiento”. En este nivel y unidad, es necesario tener como conocimientos previos los siguientes (MINEDUC, 2016):

- Operaciones con números racionales.
- Ecuaciones con soluciones racionales.
- Construcción de triángulos.
- Área de superficie de cubos y paralelepípedos.
- Traslaciones, reflexiones y rotaciones.

En el nivel de 1° Medio, el contenido sobre el volumen del cono se encuentra en la primera unidad de Números, cuyo objetivo propone que “las y los estudiantes operan con los números racionales, ejercitan con ellos y utilizan algoritmos para determinar relaciones y responder a problemas”. En este nivel y unidad, es necesario tener como conocimientos previos los siguientes (MINEDUC, 2016):

- Multiplicación de números enteros.
- División de números enteros.
- Números racionales.
- Multiplicación y división de potencias de base y exponente entero.
- Raíces cuadradas de números naturales.
- Factorización de expresiones algebraicas.

Las orientaciones didácticas de cada programa de estudio (MINEDUC, 2016) se dan de manera general para todas las unidades. Las orientaciones que guardan relación con las unidades a trabajar se resumen en la siguiente idea: se requiere que las y los estudiantes den un sentido a los contenidos matemáticos propuestos. Para construir y aprender su propio significado desarrollando una base sólida, logrando una comprensión profunda de los conceptos y procedimientos que utilizarán más adelante.

En el programa ministerial (MINEDUC, 2016), se detallan las habilidades que los estudiantes deben desarrollar en cada unidad en cuestión. Estas habilidades son:

- 8° Básico, Explicar y fundamentar:
  - Soluciones propias y los procedimientos utilizados.
  - Resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas. (OA e)
  - Fundamentar conjeturas, dando ejemplos y contraejemplos. (OA f)
  - Evaluar la argumentación de otros, dando razones. (OA g)
  - Describir relaciones y situaciones matemáticas de manera verbal y usando símbolos.
  - Usar modelos, tanto manualmente como con ayuda de instrumentos, para resolver problemas de otras asignaturas y de la vida diaria. (OA h)

- 1° Medio, Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes:
  - Simplificar el problema y estimar el resultado.
  - Descomponer el problema en subproblemas más sencillos.
  - Buscar patrones.
  - Usar herramientas computacionales. (OA a)
  - Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático. (OA b)
  - Fundamentar conjeturas usando lenguaje algebraico para comprobar o descartar la validez de los enunciados. (OA f)
  - Representar y ejemplificar utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas. (OA o)

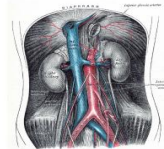
Durante las unidades con las que se está trabajando, se nos presentan objetivos de aprendizaje. Este trabajo se enfocará en el nivel de 8° Básico con el objetivo de aprendizaje 11 y en el nivel de 1° Medio con el objetivo de aprendizaje 7. En el OA11 hace referencia al volumen del cilindro y en el OA07 al volumen del cono (MINEDUC, 2016).

- OA11, Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros:
  - Estimando de manera intuitiva área de superficie y volumen.
  - Desplegando la red de prismas rectos para encontrar la fórmula del área de superficie.
  - Transfiriendo la fórmula del volumen de un cubo (base por altura) en prismas diversos y cilindros.
  - Aplicando las fórmulas a la resolución de problemas geométricos y de la vida diaria.
  
- OA07, Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de la superficie y el volumen del cono:

- Desplegando la red del cono para la fórmula del área de superficie.
- Experimentando de manera concreta para encontrar la relación entre el volumen del cilindro y el cono.
- Aplicando las fórmulas a la resolución de problemas geométricos y de la vida diaria.

Los programas utilizados nos proponen diversas actividades a propósito de los OA de cada unidad. Se presentarán las actividades sugeridas por el programa para los OA11 y OA07 respectivamente.

1. En el cuerpo humano, la arteria del abdomen tiene un diámetro interior de 5,2 mm en promedio y un largo aproximado de 80 cm. Las dos arterias de la pierna tienen un largo de 120 cm cada una y un diámetro interior promedio de 3,8 mm.

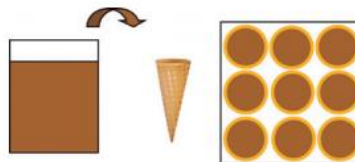


- Calculan el volumen de sangre que cabe en la arteria del abdomen y lo expresan en mililitros.
- Calculan el volumen de sangre que cabe en total en ambas arterias de la pierna.
- El volumen total de la sangre en el cuerpo de un adulto es de aproximadamente 5 litros. Calculan el porcentaje de la sangre total que está en las arterias del abdomen y de las piernas. Redondean el porcentaje al primer decimal.

*Ilustración 1 Extraído del Programa de estudio de 8° Básico*

Podemos observar, que la actividad propuesta por el programa de estudio en el caso del nivel de 8° Básico (MINEDUC, 2016) se plantea como un problema, pero que a su vez lo podemos considerar ejercicio pues, lo que se espera es que los estudiantes solo calculen y lleguen a un resultado final.

- En una pastelería, se echa crema de chocolate a los barquillos y luego estos se empacan en cajas de 9 unidades, como se muestra en las figuras siguientes:



Responden: ¿qué cantidad de chocolate se necesita aproximadamente para elaborar una caja de 9 barquillos rellenos de crema de chocolate?

Y en el caso de la actividad propuesta por el programa de estudio en el caso del nivel de 1° Medio (MINEDUC, 2016), plantea al igual que el anterior un problema.

Donde se espera que los alumnos y las alumnas estimen el diámetro y la altura de un barquillo, reconozcan que el barquillo tiene la forma de un cono y posteriormente calculen su volumen, y la cantidad de crema de chocolate que se necesita para llenar el cono. Luego calcular cuánta crema de chocolate cabe en 9 conos. Esta actividad resulta favorable para fomentar las habilidades de argumentar y comunicar.

### 1. 2.2.2. Análisis de Textos Escolares

Para el siguiente análisis, se revisarán dos textos escolares actuales y vigentes. El primero será el Texto Escolar actual que poseen los estudiantes y que es entregado por el Ministerio de Educación (Ed. Santillana, 2016), para luego finalizar con el análisis del otro texto escolar, denominado “Geometría”, cuya autoría es de Ximena Carreño y Ximena Cruz.

Con respecto al primer texto para estudiante, se analizaron los niveles de 8° Básico y 1° Medio (Ed. Santillana, 2016), el contenido matemático a tratar respecto al “Volumen del Cilindro” y “Volumen del Cono”, respectivamente, se encuentra en la 3 unidad que corresponde a Geometría, la que se compone de la siguiente manera (MINEDUC, 2016):

8° Básico <b>Unidad 3: “La geometría del arte”</b> <u>Lección 1:</u> Área y volumen de prisma y cilindros - Área de prismas y cilindros (118)	1° Medio <b>Unidad 3: “Geometría”</b> <u>Tema 1:</u> Sectores y segmentos circulares
--	--

<ul style="list-style-type: none"> <li>- Volumen de prisma y cilindros (126)</li> <li>- Evaluación (134)</li> </ul> <p><u>Lección 2: Teorema de Pitágoras</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Teorema de Pitágoras (136)</li> <li>- Aplicaciones del teorema de Pitágoras (140)</li> <li>- Evaluación (146)</li> </ul> <p><u>Lección 3: Transformaciones isométricas</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Traslación (148)</li> <li>- Rotación (152)</li> <li>- Reflexión (156)</li> <li>- Composición de transformaciones isométricas (160)</li> <li>- Transformaciones isométricas en el espacio (164)</li> <li>- Evaluación (168)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Elementos de la circunferencia y del círculo (148)</li> <li>- Perímetro de un sector y segmento circular (152)</li> <li>- Área de un sector y segmento circular (156)</li> <li>- ¿Cómo voy? (160)</li> </ul> <p><u>Tema 2: Área y volumen del cono</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Área del cono (164)</li> <li>- Volumen del cono (168)</li> <li>- ¿Cómo voy? (172)</li> </ul> <p><u>Tema 3: Homotecia y Teorema de Tales</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Homotecia</li> <li>- Homotecia de forma vectorial (182)</li> <li>- Teorema de Tales (188)</li> <li>- División proporcional de segmentos (194)</li> <li>- ¿Cómo voy? (198)</li> </ul> <p><u>Tema 4: Semejanza</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Semejanza de figuras (pág. 202)</li> <li>- Criterios de semejanza (pág. 206)</li> <li>- Teorema de Euclides (pág. 210)</li> <li>- ¿Cómo voy? (pág. 214)</li> </ul>
--	--

Respecto a la distribución del contenido nos centraremos en la “Lección 1: Área y volumen de prisma y cilindro” en el nivel de 8° Básico y en el “Tema 2: Área y volumen del cono” en el nivel de 1° Medio (MINEDUC, 2016), que son los ítems que contiene el objeto matemático para nuestro estudio. Dentro de ellos, se presentan actividades para comprender y desarrollar el contenido, y concluir con la definición formal de los conceptos en juego.

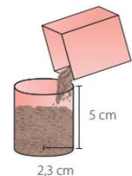
■ Aprende

El volumen de un cilindro se asemejará cada vez más al volumen de un prisma recto de base un polígono regular a medida que la cantidad de lados de la base del prisma aumenta.

Ejemplo 6

Si se llena al ras un prisma de base cuadrada con arena y se vacía todo el contenido en un cilindro de la misma altura y cuya área de la base es igual a la del prisma, ¿cuánta arena puede contener el cilindro?

- La cantidad de arena que contiene el prisma es igual al producto entre su área basal y su altura, pues este se encuentra completamente lleno con arena.
- Notamos que el cilindro se llenará completamente con la arena, ya que tiene igual área basal y altura que el prisma, por lo tanto su volumen es igual al del prisma.
- Calculamos el volumen (V) del cilindro utilizando la expresión que permite determinar el volumen de un prisma. Consideramos  $\pi \approx 3,14$ .



• Para calcular el volumen (V) entre dos cuerpos geométricos se determina el volumen de cada uno y luego se resta el mayor con el menor volumen.

$V_1 - V_2 = V_3$

Altura del cilindro.  
 $V = (A_b) \cdot (h) = \pi r^2 \cdot h = 3,14 \cdot (2,3)^2 \cdot 5 \text{ cm}^3 = 83,053 \text{ cm}^3$   
 Área de la base del cilindro.      Cantidad de arena.

■ Aprende

El volumen (V) de un cilindro se asemeja al de un prisma. Para calcularlo se determina el área de la base ( $A_b$ ) y se multiplica por la medida de su altura. Es decir, el volumen (V) de un cilindro está dado por:

$$V = A_b \cdot h = \pi r^2 \cdot h$$

donde r es el radio de la base y h la altura del cilindro.

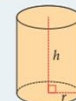


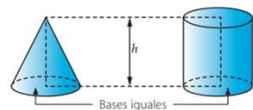
Ilustración 3 Extraído del Texto del Estudiante de Matemática 8° Básico, Ed. Santillana (2016)

Volumen de un cono

Objetivo

- Desarrollar la fórmula para calcular el volumen de un cono.

En una tienda Cristian compra un recipiente con forma de cono y otro con forma de cilindro. Ambos tienen igual base y altura.



Luego el recipiente con forma de cono lo llena y lo vierte en el recipiente con forma de cilindro, tantas veces hasta llenarlo.



Actitud

Al momento de resolver un problema no olvides explicar tus ideas propias de manera clara y coherente.

- ¿Con cuántos recipientes cónicos se llenó el cilindro? Explica.
- Si supieras el volumen del cilindro, ¿qué podrías afirmar con respecto del volumen de un cono? ¿Cómo lo calcularías? Explica.

Conceptos

El volumen (V) de un cono corresponde a un tercio del volumen de un cilindro con igual área de la base e igual medida de la altura. Se encuentra dado por la expresión:

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \cdot V_{\text{cilindro}}$$

$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$$

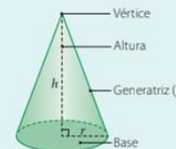


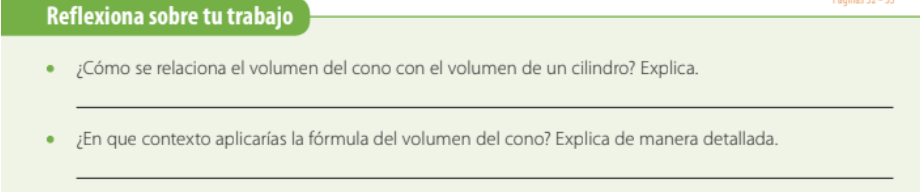
Ilustración 4 Extraído del Texto del Estudiante de Matemática 1° Medio, Ed. Santillana (2016)

Posterior a ello, se presentan dos ejemplos en cada nivel con sus respectivos paso a paso, es decir, se muestran ejercicios resueltos cuyo fin es esbozar una resolución mecánica para que el estudiante se guíe por este modelo y desarrolle, casi de la misma manera, otros ejercicios que proponga el texto.

Respecto a las actividades propuestas por el libro de texto del estudiante (MINEDUC, 2016) estas son idénticas o similares a las que se proponen en el

apartado de demostración paso a paso. Donde lo que, aparentemente, se juzga es si el estudiante logra seguir las indicaciones antes dadas.

Para finalizar la unidad el texto propone una serie de preguntas para la reflexión del estudiante, que deberán ser contestadas respecto a su avance frente a la unidad y tema correspondiente.



Reflexiona sobre tu trabajo

Páginas 52-53

- ¿Cómo se relaciona el volumen del cono con el volumen de un cilindro? Explica.
- ¿En que contexto aplicarías la fórmula del volumen del cono? Explica de manera detallada.

*Ilustración 10 Extraído del Texto del Estudiante de Matemática 1° Medio, Ed. Santillana (2016)*

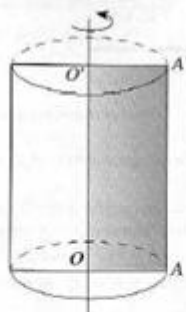
Respecto al segundo texto del estudiante en el nivel de 1° Medio (Carreño Campos y Cruz Schmidt, 2012), el contenido matemático a tratar respecto al “Volumen de Cilindro” y “Volumen del Cono”, se encuentra en el capítulo 9 que corresponde a Cuerpos Geométricos, el cual se compone de la siguiente manera:

#### Capítulo 9: “Cuerpos Geométricos”

- Elementos de la geometría del espacio (pág. 387)
- Definición de cuerpos geométricos (pág. 391)
- Clasificación de cuerpos geométricos (pág. 393)
- Área y volumen de cuerpos geométricos (pág. 398)

Respecto a la distribución del contenido nos centraremos en el segundo y el cuarto ítems, pues trabajan directamente el contenido matemático de la investigación. En el primer ítem podemos observar que se presentan directamente las definiciones de los cuerpos geométricos estudiados, cilindro y cono, además de sus respectivos elementos (Carreño, X. y Schmidt, X. 2012).

**Cilindro** es el sólido de revolución generado al rotar un rectángulo en torno a uno de sus lados.

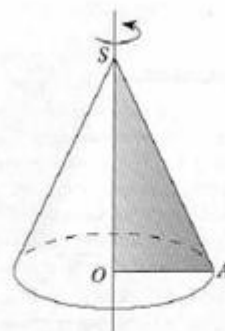


$\overline{AA'}$ : generatriz.  
 $\overline{OO'}$ : eje de rotación.  
 $\overline{OA}$ : radio basal.  
 $\overline{OO'}$ : altura del cilindro.

El manto del cilindro se puede considerar como un rectángulo cuyos lados miden  $(2 \cdot OA \cdot \pi)$  y  $OO'$ . Sus bases son circunferencias de radio  $OA$ .

**Cono** es el sólido de revolución generado al rotar un triángulo rectángulo en torno a uno de sus catetos.

El cono se denomina también **cono recto circular**.



$\overline{AS}$ : generatriz.  
 $\overline{OA}$ : radio basal.  
 $\overline{OS}$ : altura del cono.  
 $\overline{OS}$ : eje de rotación.

Ilustración 11 Extraído del Texto Geometría de 1º Medio, Carreño, X. y Cruz, X. Ed. MC Graw Hill Education (2012).

Posteriormente en el cuarto ítem, el libro nos presenta un recuadro donde se proponen las fórmulas y nombres correspondiente a cada cuerpo geométrico que fue abordado en el primer ítem.

Para calcular el volumen:

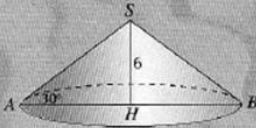
Cuerpo	Forma de calcular su volumen
Prisma o cilindro	Área de la base $\times$ altura
Pirámide o cono	$\frac{1}{3}$ área de la base $\times$ altura
Esfera	$\frac{4}{3} \pi r^3$ ( $r$ : radio de la esfera)
Tronco de prisma triangular	$\frac{1}{3} B (a + b + c)$ (ver ejercicio resuelto nº 14)

Ilustración 12 Extraído del Texto Geometría de 1º Medio, Carreño, X. y Cruz, X. Ed. MC Graw Hill Education (2012).

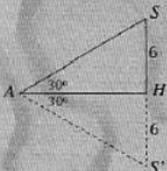
Luego, se presenta una lista de ejercicios resueltos con el fin de comprender el uso de las ecuaciones anteriormente descritas y para que luego el

estudiante desarrolle ejercicios similares de la misma manera propuesta por el texto (Carreño, X. y Schmidt, X. 2012).

Calcular el volumen de un cono recto circular si su generatriz tiene una inclinación de  $30^\circ$  respecto de la base y su altura es 6 cm.




Para calcular el volumen debemos conocer el radio de la base. El  $\triangle AHS$  es rectángulo en  $H$ .



Generamos el triángulo equilátero de lado 12, donde  $AH = 6\sqrt{3}$   
 Por lo tanto,  $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (6\sqrt{3})^2 \cdot 6 = 216\pi \text{ cm}^3$

¿Qué altura aproximada debe tener un cilindro cuyo diámetro basal es 8 cm para que su capacidad sea de 750 cc ( $\text{cc} = 1 \text{ cm}^3$ )?



El volumen del cilindro es igual al área de la base por su altura.  
 Por lo tanto,  $V = \pi r^2 \cdot h$   
 Luego:  $h = \frac{V}{\pi r^2}$   
 $h = \frac{750}{\pi \cdot 4^2} \approx 14,92 \text{ cm}$   
 El cilindro debe tener una altura de 15 cm, aproximadamente.

Ilustración 13 Extraído del Texto Geometría de 1ºMedio, Carreño, X. y Cruz, X. Ed. MC Graw Hill Education (2012).

Finalmente, el capítulo presenta dos actividades para practicar lo anteriormente mencionado. La primera actividad propone una lista de ejercicios que finaliza con las respuestas correctas para cada uno de ellos. Estos ejercicios se amplían del cálculo del volumen al cálculo de alguna de las componentes de las ecuaciones propuestas como la altura o el radio (Carreño, X. y Schmidt, X. 2012).

La segunda actividad, se propone como tipo prueba de selección múltiple del capítulo, que al igual que la lista anterior, termina con las respuestas correctas de cada selección múltiple.

Con lo anteriormente descrito, podemos observar que las actividades corresponden a ejercicios, ya que para dar respuesta a estos solo es necesario la aplicación directa de las fórmulas que presenta el capítulo y no es necesario para esto poner en juego conocimientos diversos, matemáticos o no, y buscar relaciones nuevas entre ellos (Pérez, R. 2008).

# Objetivos

## 1.3.1 Objetivo general de la investigación

- Caracterizar las estrategias necesarias, cuando se vincula la visualización y el razonamiento para dar solución a problemas que involucran el volumen del cilindro y cono.

## 1.3.2 Objetivos específicos de la investigación

- Diseñar una secuencia didáctica que aborde los contenidos relacionados con el volumen del cilindro y del cono en la resolución de problemas, a través de cápsulas educativas.
- Exponer, una secuencia didáctica a través de cápsulas educativas, que involucren interacción entre los registros algebraico y geométrico, para analizar la relación entre el volumen del cilindro y del cono.

## CAPÍTULO II

### Objeto Matemático

Dada la problemática y los antecedentes mencionados con anterioridad, se ve también la necesidad de estudiar la epistemología del objeto matemático central de esta investigación, donde se describirán los elementos esenciales de la epistemológica, realizando un recorrido por la historia del como nacieron en las antiguas civilizaciones el volumen del cilindro y del cono. Además, se analizarán los aspectos formales de la matemática respecto al contenido de la investigación, para luego dar a conocer el cómo serán utilizados en la propuesta de enseñanza-aprendizaje propuesta, respectivamente.

#### **2.1 Elementos de la epistemología del objeto matemático**

Hasta el siglo XIX la agricultura ha sido la principal actividad del hombre, por lo que resulta normal que fuese en este campo donde más se usaron las unidades isométricas.

Según Olmo, M. Moreno, M. Gil, F. (1993), se usaron dos tipos de unidades, las basadas en la cantidad de trabajo que había que dedicar a la tierra para que ésta diese sus frutos y las basadas en la cantidad de grano necesario para sembrar la tierra.

Bajo lo anterior, los autores explican que, la medida de la superficie agrícola por la cantidad de grano puede invertirse y medir el volumen de grano por la cantidad de tierra necesaria para sembrarlo. Cuando las antiguas civilizaciones comenzaron su producción agrícola, se produjo un problema de almacenamiento de alimentos, en especial los granos. Es por esto, que aparece la necesidad de crear receptáculos para su almacenamiento tales como silos bajo tierra y vasijas modeladas con arcilla.

Según Hernández (2017), el historiador griego Heródoto (alrededor del siglo V a.C.) señala a los egipcios como los creadores de la geometría. Sin

embargo, otras civilizaciones antiguas como la Babilónica, Egipcia y Griega, también poseían un respetable conocimiento sobre esta y destacaron en sus estudios sobre el volumen.

En la civilización Babilónica, el uso de conceptos geométricos se basó en la solución de problemas reales, esto se obtiene de sus tablillas de arcilla halladas desde el siglo XIX. Entre las relaciones geométricas, podrían determinar volúmenes de prismas rectos, cilindros o troncos de cono si tenían la altura  $h$  y el perímetro de las bases  $P_1$  y  $P_2$ . Describiendo su fórmula de la siguiente manera:

$$V = \frac{1}{2}h(P_1^2 + P_2^2)$$

*Baquero, C. D. (2014). Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de volumen dirigida a estudiantes de octavo grado.*

En la civilización egipcia, aparecen problemas en diferentes papiros provocados por las necesidades de almacenar granos o derivados de la agrimensura, por lo que el desarrollo de su geometría era considerado una herramienta útil para la solución de problemas de áreas y volúmenes. Poseían fórmulas para el cálculo de volúmenes como cubos, cilindros o pirámides, a pesar de que no todas eran correctas se llegaba a una aproximación. La fórmula utilizada era la siguiente:

$$V = \frac{h}{12} \left[ \frac{3}{2}(D + d) \right]^2$$

*Baquero, C. D. (2014). Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de volumen dirigida a estudiantes de octavo grado.*

En lo que respecta a la civilización griega, matemáticos como Demócrito, Euclides y Arquímedes desarrollaron en sus obras aspectos de la geometría y medición, en especial conceptos y procedimientos relacionados con el volumen de los sólidos. Demócrito, estableció correctamente la fórmula del volumen de un cono o de una pirámide. Para alcanzar sus conclusiones

consideró estos sólidos como si estuvieran formados por innumerables capas paralelas.

Euclides destaca desarrollando las fórmulas para hallar el volumen de esferas, pirámides y conos por medio de comparaciones y haciendo uso del método de exhaustión, para encontrar relaciones entre los volúmenes. Los aportes de Euclides se inician con la demostración de la descomposición de una pirámide triangular en dos pirámides semejantes a la original e iguales entre sí, y dos prismas iguales. De estas proposiciones el avance al concepto de volumen se consigue cuando descompone un prisma triangular en tres pirámides iguales, deducción que lo lleva al corolario, “el volumen de toda pirámide es la tercera parte del volumen del prisma con la misma base y altura”. Así, de manera análoga se enuncia para el volumen del cono y el cilindro, hallando también la razón entre el volumen de los conos y cilindros semejantes.

Arquímedes presentó, en uno de sus trabajos, el principio que lleva su nombre, que se refiere al empuje que actúa sobre un cuerpo sólido al estar sumergido en un líquido, esto le permite saber el volumen del cuerpo sumergido. Este principio fue descubierto por Arquímedes al sumergirse en una tina repleta de agua.

Visto desde la matemática moderna Baquero (2014), presenta el volumen con las ideas de Cavalieri, Fermat, Newton, Leibniz, Cauchy, entre otros, quienes trabajan los sólidos como regiones en el plano cartesiano limitadas por una función que se rota a través de un eje, la cual genera una aproximación de su volumen mediante métodos numéricos.

Los elementos de la epistemología considerados en nuestra investigación serán incorporados en nuestra propuesta de enseñanza-aprendizaje en nuestra primera capsula dando un inicio histórico del contenido a tratar, con esto se espera que el estudiante sociabilice, se introduzca y se interese por el contenido para entender su aparición en la matemática y cuál fue la razón de esta.

## 2.2. Contenido matemático

Antes de iniciar con las propiedades relevantes para la investigación, nos centraremos en las definiciones de volumen y capacidad, las cuales Olmo, M. Moreno, M. Gil, F. (1993), definen como:

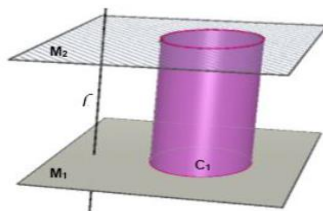
- Volumen: se suele entender como el espacio ocupado por un objeto o cuerpo.
- Capacidad: espacio vacío con posibilidad de ser llenado.

Además, señalan que, el volumen se refiere a cuerpos o regiones geométricas. Para trabajar con ellos pueden venir, o no, expresados mediante fórmulas. También pueden ser de revolución; o pueden estar limitados por diferentes tipos de superficies. Para el volumen, la matemática realiza una primera aproximación sobre los prismas, en los que se puede distinguir tres dimensiones: largo, ancho y alto, y generaliza después a otros cuerpos geométricos y regiones espaciales.

Ahora bien, en cuanto a los aspectos formales, tomaremos las definiciones actuales de los cuerpos geométricos definidos por Moise, E y Downs. F. (1970).

### 2.2.1 Cilindro

“Se tienen dos planos paralelos  $M_1$  y  $M_2$ , una región circular  $C_1$  ubicada sobre  $M_1$ , y una recta  $l$  que intersecta a  $M_1$  y  $M_2$ . Si formamos la reunión de todos los segmentos paralelos a  $l$  y cuyos extremos pertenecen a la región  $C_1$  y al plano  $M_2$ . El cuerpo resultante se denomina cilindro”.

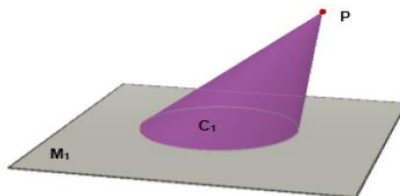


Observaciones:

1. La región poligonal  $C_1$  se le denomina *base inferior* o, simplemente, la *base del cilindro*.
2. La región del prisma que está en  $M_2$  se le denomina base superior.
3. La distancia entre  $M_1$  y  $M_2$  se denomina *altura del cilindro*.
4. Si  $l$  es perpendicular a  $M_1$  y  $M_2$ , entonces el cilindro se denomina *cilindro recto*.

### 2.2.2 Cono

“Dado el plano  $M_1$ , con un polígono circular en su interior  $C_1$  y un punto  $P$  en el exterior de  $M_1$ , Si formamos la reunión de todos los segmentos cuyos extremos sean  $P$  y un punto que pertenezca a la región  $C_1$  y al plano  $M_2$ . El cuerpo resultante se denomina cono”.



Observaciones:

1. La región  $C_1$  es la base del cono.
2. Llámese al punto  $P$  vértice del cono.
3. La altura del cono es un segmento perpendicular a  $M_1$  y que pasa por  $P$ .
4. La altura del cono es la distancia entre el vértice y el plano  $M_1$ .

### **2.2.3 Volumen**

Antes de mencionar los teoremas y demostraciones que nos competen, es necesario enunciar algunos aspectos matemáticos que se encuentran involucrados.

#### **Principio de Cavalieri**

Dados dos sólidos de igual altura y con sus bases pertenecientes al mismo plano  $M$ , se tiene que para todo plano paralelo a  $M$  que genere con cada sólido una sección transversal de igual área, entonces, los cuerpos tienen igual volumen. Bajo un análisis de lo planteado, Cavalieri desarrolló el volumen de un sólido como la comparación entre las áreas de todas las secciones transversales de otro sólido con igual altura y del que se pueda estimar fácilmente su volumen.

#### **Secciones transversales**

Una sección transversal es la interacción de un cuerpo geométrico con un plano paralelo al plano de la base (con tal que la intersección no sea vacía). Por lo tanto, todas las secciones transversales del cuerpo en cuestión serán congruentes con su base.

#### **Postulado de la unidad**

“Dado un paralelepípedo recto, su volumen es el producto del área de la base por su altura”

### 2.2.3.1 Cilindro

“El volumen de un cilindro circular es el producto de su altura y el área de la base”

Demostración 1:

Sean  $h$  y  $A$  la altura y el área de la base del cilindro dado. Considérese un paralelepípedo rectangular con la misma altura  $h$  y la misma área  $A$  de la base y con ésta en el mismo plano que la del cilindro dado. Sabemos, por la definición de sección transversal, que todas las secciones transversales para ambos cilindros tienen la misma área. Además, por el principio de Cavalieri, los cilindros tienen el mismo volumen. En virtud del postulado de la unidad, el volumen del paralelepípedo rectangular es  $A \cdot h$  de donde se deduce la validez del teorema.

Si  $h$  es la altura y  $A$  el área de la base. Sabemos que el cilindro tiene base circular, por lo que el área de su base será:

$$A_{base} = \pi r^2$$

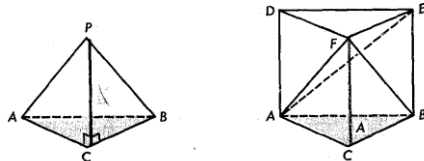
Por consiguiente:

$$V_{cilindro} = h \cdot A_{base} = h \cdot \pi r^2$$

### 2.2.3.2 Cono

“El volumen de un cono circular es un tercio del producto de su altura y el área de su base”

Demostración: Dada una pirámide triangular formamos un prisma triangular con las mismas base y altura.



Sean  $a$  el área del  $\triangle ABC$  y  $h$  la altura de PABC. Entonces, el volumen del prisma es  $a \cdot h$ . Si  $V$  es el volumen de cada una de las pirámides tenemos  $3V = a \cdot h$ . Por consiguiente:

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3}ah$$

*Observación: el mismo resultado es válido para las pirámides, en general.*

Luego, si se da una pirámide de altura  $h$  y área de la base  $a$ . Tómesese un cono de base circular de la misma altura y área de la base, con ésta en el mismo plano. Por definición de la sección transversal, las secciones transversales al mismo nivel tienen la misma área. Por tanto, en virtud del principio de Cavalieri, la pirámide y el cono tienen el mismo volumen. Luego, el volumen de cada uno de ellos es  $\frac{1}{3}ah$ , como queríamos demostrar.

Para la propuesta de enseñanza-aprendizaje el contenido matemático investigado será utilizado para recrear la creación de los cuerpos geométricos del cilindro y del cono. Se pensó una actividad con materiales concretos que será parte de las capsulas educativas para que los espectadores tengan la posibilidad de recrear la construcción y así comprender de mejor manera la definición formal presentada de cada cuerpo en esta investigación. Posteriormente, a través de un experimento de rellenado podremos inferir cual será el volumen de cada cuerpo y el espectador mediante este podrá sacar sus propias conclusiones por medio de la visualización y construcción.

## **CAPÍTULO III**

### **Marco de Referencia**

El siguiente capítulo de la investigación presenta el marco teórico en el que se encuentra basada la propuesta de enseñanza-aprendizaje. Se menciona la teoría que fue previamente investigada y posteriormente relacionada con el contenido matemático en cuestión. Luego de hacer una descripción del marco utilizado se mencionará de qué manera fue considerado para nuestra propuesta de enseñanza.

Para nuestra investigación y posterior propuesta de enseñanza-aprendizaje, nos basaremos principalmente en la Teoría de razonamiento configural de Torregrosa y Quezada. (2007)

#### **3.1 Enfoque teórico del diseño didáctico**

Germán Torregrosa y Humberto Quezada (2007), tomando distintos elementos de Hershkowitz (1996) y Duval (1998), abordan como hipótesis que la actividad geométrica involucra distintos procesos cognitivos, tales como la visualización, el razonamiento y la construcción.

Con relación a la visualización, según Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996, p.163), es la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual y viceversa. Esto incluye también la transferencia de un tipo de representación visual a otra. Para Duval (1995), las asociaciones de afirmaciones matemáticas a configuraciones o sub-configuraciones, se pueden realizar de dos maneras según el sentido de la transferencia realizada:

1. del anclaje visual al anclaje discursivo (a un dibujo se le asocian afirmaciones matemáticas)

2. del anclaje discursivo al anclaje visual (ante una afirmación matemática el estudiante tiene la capacidad para realizar un dibujo que cumpla alguna de las características de la afirmación enunciada).

Ya sea desde el punto de vista matemático, en relación con el desarrollo de la prueba, o desde el punto de vista cognitivo, el alumno debe coordinar los distintos procesos y los distintos registros de representación para ordenar y construir pruebas en la resolución de problemas. Este proceso de coordinación es caracterizado por Duval (1993) mediante tres actividades relacionadas con la semiosis (o sea, aprehensión o producción de una representación semiótica):

1. La identificación de una representación.
2. El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada.
3. La conversión que consiste en la transformación de una representación en un registro a otra representación realizada en otro registro.

Los términos utilizados para definir la visualización se han concretado, empezando a entenderla como acto por el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso es adquirido a través de los sentidos (Zazkis, Dubinsky y Dautermann, 1996).

Con respecto al razonamiento, Hershkowitz (1998) considera los procesos de razonamiento como toda acción que realiza el estudiante para comunicar y explicar a otros (o entre ellos mismos), lo que ven, descubren, piensan y concluyen. Así, Torregrosa y Quezada (2007) comprenden como razonamiento cualquier tipo de procedimiento que permita generar nueva información, ya sea por sus conocimientos previos o la información que se entregue en un problema en geometría. Además, hacen referencia al concepto de “*bucle*”, que refiere a cuando el razonamiento conduce a una situación de bloqueo del proceso de resolución debido a que se establecen

afirmaciones matemáticas que no son útiles para desarrollar un razonamiento lógico, de forma que los resolutores vuelven a la situación inicial una o varias veces ante la imposibilidad de avanzar hacia la solución.

Con respecto a la construcción, Quesada, H. (2014), señala que los procesos de construcción (mediante herramientas), sirven para construir configuraciones como modelos en los que la acción sobre los representantes y los resultados obtenidos están relacionados con los objetos matemáticos representados.

Finalmente, estas tres clases de procesos deben ser desarrollados separadamente, no obstante, estos procesos cognitivos están íntimamente conectados y su sinergia es necesaria para la adquisición de competencia en la resolución de problemas geométricos. Durante el desarrollo del currículo escolar, desde la educación Primaria hasta el fin de la Educación Secundaria, la coordinación entre los procesos de visualización, razonamiento y construcción puede ocurrir realmente solo después de un trabajo de diferenciación entre diferentes procesos de visualización y entre diferentes procesos de razonamiento, pues existen varias formas de ver una figura; de la misma manera que hay varias formas de razonar.

Por consiguiente, debemos tener en consideración ciertos conceptos que serán parte indiscutible de este trabajo y que nos acompañarán a lo largo de esta investigación. Los siguientes conceptos toman en consideración lo dicho y propuesto por Duval (1998). El primero al cual aludiremos será al concepto de visualización, pues permite la ilustración de proposiciones, la exploración heurística de situaciones complejas, miradas sinópticas sobre ellas y verificaciones subjetivas. El segundo concepto para utilizar es de construcción, que alude al diseño de configuraciones mediado por instrumentos geométricos y el último concepto será el razonamiento, que relacionado con procesos discursivos y la visualización, cuya atención recae en las representaciones espaciales. Cada actividad tiene funciones epistemológicas distintas; la visualización, por ejemplo.

## CAPÍTULO IV

### Metodología

Desde el punto de vista de la investigación, uno de los sucesos más importantes es poder indagar sobre los procesos de aprendizajes que presenta el estudiantado al momento de enfrentarse a ciertas problemáticas. Como investigadores debemos poner mucho énfasis y atención a las estrategias, conjeturas, procedimientos y representaciones que los estudiantes aplican y desarrollan al momento de estar frente a dicho problema. Con relación a lo anterior, se debe dejar en claro y establecido que la investigación es de carácter cualitativo, ya que el objetivo es describir las reproducciones de los estudiantes que utilizan al momento de resolver ciertos problemas que estén asociados a situaciones que involucren tanto el principio aditivo como el principio multiplicativo (y la combinación de éstos) en el cálculo de probabilidades.

La metodología utilizada para desarrollar esta investigación será la Ingeniería Didáctica, la cual se caracteriza por tener un esquema experimental basado en la concepción, realización y análisis de secuencias de enseñanza-aprendizaje y por realizar estudios de casos basados en la confrontación del análisis a priori y a *posteriori* (Artigue, 1995).

A continuación, se presentarán los aspectos la metodología que son necesarios para comprender esta investigación.

#### 4.1 Elementos de la Ingeniería Didáctica

Edson De Faria (2006) menciona que la Ingeniería Didáctica (ID), surge en la didáctica de las matemáticas a comienzo de los años ochenta como una metodología para las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la teoría de las Situaciones Didácticas y de la Transposición Didáctica, con el objetivo de dar respuestas a las investigaciones educativas.

El término de ID, se utiliza en la didáctica de las matemáticas con una doble función, según mencionó Douady (1996, parafraseado por De Faria, 2006): Como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje. Es así como el término ID designa una secuencia de clases, previamente escritas por un docente para efectuar un proyecto de enseñanza de un contenido matemático que será impartido a un grupo de estudiantes.

Como metodología de investigación, para Artigue (1998, citada por De Faria, 2006) la ingeniería didáctica se caracteriza por:

- Un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en el aula.
- El registro de los estudios de casos y la validación que es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

La primera caracterización se divide en dos niveles: Nivel de micro ingeniería y Nivel de Macro ingeniería. Cabe señalar que, para esta investigación, se utilizó el nivel de Micro ingeniería, que tiene por objeto el estudio de un determinado tema. Son más locales y toman principalmente en cuenta la complejidad de los fenómenos en el aula. Además De Faria (2006) afirma que esta metodología, consta de cuatro fases:

- Análisis preliminares

Para la realización de una Ingeniería Didáctica es necesario realizar diversos análisis preliminares en relación con los conocimientos adquiridos y que estén directamente relacionado con el tema. Estos toman en cuenta el cuadro teórico general como también los conocimientos didácticos adquiridos y relacionados con el tema de investigación. Los análisis ponen en juego las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica profundizadas a través del

marco teórico y la epistemología del objeto matemático en juego de la secuencia de aprendizaje.

- Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas

Se relaciona directamente con la validación a través del análisis a priori, donde este debe ser concebido como un *análisis de control de significado*. Cabe mencionar que lo que se entiende como análisis a priori es un conjunto de hipótesis, las cuales serán validadas en la cuarta fase y que tiene por objetivo determinar en qué situaciones didácticas seleccionadas se permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Este análisis es de tipo descriptivo y predictivo, en donde el estudiante es tomado en cuenta en ambas partes, como el actor principal de la acción. Las preguntas que se responderán en el análisis a priori son las siguientes:

- a. ¿Cuál es la respuesta a la situación? Escriba su procedimiento y explique.
- b. ¿Cuáles son los conocimientos en juego?
- c. ¿Cuáles serían las posibles estrategias para resolver la situación?
- d. ¿Cuáles son los posibles errores y/o dificultades?

- Experimentación

En esta fase se realiza la propuesta didáctica con los estudiantes, la cual se inicia desde el momento en que se obtiene contacto entre el investigador-docente-observador con los estudiantes. La experimentación consta de una explicitación de objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán, establecer el contrato didáctico, aplicación de instrumento y registro de observaciones realizadas durante esta fase.

- Análisis a posteriori y evaluación

En esta última fase se recolectan los datos obtenidos durante la secuencia de enseñanza (experimentación). Estos datos pueden ser completados mediante metodologías externas (cuestionarios, entrevistas, etc.) para así confrontarlo con el análisis a priori, realizando la validación de las hipótesis formuladas en la investigación. Para efectos de esta investigación y en relación con la propuesta didáctica, el análisis a posteriori será realizado luego que expertos analicen las cápsulas presentadas.

#### **4.2 Etapa de diseño de las cápsulas educativas**

González, A. (2018) propone las siguientes etapas para la creación de cápsulas educativas:

- Etapa 1: Preproducción de la cápsula educativa
- Etapa 2: Producción de la cápsula educativa
- Etapa 3: Post producción de la cápsula educativa
- Etapa 4: Aplicación de la cápsula educativa

La etapa 1 es la más extensa, pues consiste en la planeación de todos los elementos educacionales, técnicos, humanos y logísticos que se necesitará para la creación de las cápsulas (Gara, F. 2016). Aquí, se seleccionaron los temas a tratar en cada cápsula de la secuencia de enseñanza-aprendizaje. Para esto, se investigó y analizó profundamente en los planes y programas vigentes y distintas literaturas sobre los cuerpos geométricos conos y cilindro. Se acordó que crearían cuatro cápsulas dispuestas en dos sesiones de clases. Luego, se procedió a la creación de guiones para cada video, en estos, se explicita las narraciones, pausas que se realizarán e imágenes a ocupar (Gara, F. 2016). Por último, se concordó el uso de la plataforma Powtoon para

la creación de las capsulas y se asignaron las voces que grabarían cada una de ellas.

En la segunda etapa, se realizó la producción de cada cápsula por la plataforma ya mencionada Powtoon. Aquí se crearon según los guiones de la etapa anterior cada escena que las compondría, seleccionando los textos, imágenes, música y grabación de voces.

En la etapa de post producción se unió cada escena ya grabada para dar vida a cada cápsula educativa, luego, fueron subidas a la plataforma youtube para su fácil acceso.

La cuarta esta, de implantación, no se realizó por el contexto actual de educación al que nos enfrentamos, pero, se presentó cada una a un juicio de expertos compuesto por dos profesores del sistema educativo escolar y dos profesores del sistema educativo universitario, quienes dieron sus impresiones a través de una discusión y reflexión, además, de responder preguntas que relacionaban las cápsulas con la contextualización del trabajo realizado

Las cápsulas creadas podrán ser utilizadas tanto de manera presencial, como de forma sincrónica y de forma asincrónica. Cada una de las cápsulas consta de un moderador que explica el contenido, realiza experimentos, demostraciones y preguntas para el espectador. En cada actividad realizada, el moderador incentivo al espectador a pausar la cápsula y resolver autónomamente antes de dar la solución del problema.

## CAPÍTULO V

### Secuencia de Enseñanza Aprendizaje

El capítulo que a continuación se presenta, está centrado en el diseño de la secuencia de enseñanza aprendizaje. En primer lugar, se detalla una descripción general de la secuencia de enseñanza aprendizaje, explicitando el objetivo en general de la secuencia de clases, las sesiones de trabajos con sus respectivos objetivos o metas de aprendizaje y una descripción breve del contexto donde se presentará la secuencia. Posteriormente, se expondrá cada plan de clases de la secuencia y un análisis descriptivo y predictivo de los planes en general. Luego, se detallarán las guías y material de trabajo, los objetivos esperados y una descripción de cada guía. Por último, se mostrará una situación clave dentro de la secuencia junto a un análisis a priori.

#### 5.1 Descripción Secuencia de Enseñanza Aprendizaje

Para el diseño de la secuencia enseñanza aprendizaje se planteó un objetivo global, que permita responder a la problemática desarrollada en nuestra investigación. Este objetivo, es planteado por los planes y programas del Ministerio de Educación, donde se enmarcan en el OA11 de Octavo Básico: “Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros” y el OA07 de Primero Medio: “Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de la superficie y el volumen del cono”. (Ministerio de Educación [MINEDUC], 2016), el enfoque de la secuencia es desarrollar el volumen del cilindro y del cono orientado hacia la visualización y el razonamiento para relacionar ambos volúmenes. Por esto, se plantea el siguiente objetivo de la secuencia de enseñanza aprendizaje: “Comprender la relación entre el volumen del cilindro y del cono, razonando y visualizando distintas situaciones problemas”. De acuerdo con el objetivo se plantearon 4 cápsulas educativas y 2 sesiones de clases, donde se considera la presentación de 2 cápsulas por cada sesión.

Estas sesiones explicitadas en los planes de clases y en las guías de trabajo, poseen metas u objetivos específicos:

1. Visualizar los cuerpos geométricos en el entorno y, comprender y calcular el volumen de un cilindro.
2. Comprender los conceptos de volumen y capacidad y relacionar el volumen entre del cilindro y el cono.

Cada sesión de clases fue diseñada y orientada en los conocimientos previos de acuerdo con el nivel de enseñanza del contenido. Para esta instancia, se consideraron los conocimientos previos idóneos para los contenidos del volumen del cilindro y del cono planteados por el Programa de Estudio de Matemática de 8° Básico y 1° Medio, respectivamente.

## **5.2 Plan de Clases**

A continuación, se presenta el plan de clases considerado para el desarrollo de las 2 sesiones previstas las cuales consideran aproximadamente 1 hora cronológica de trabajo y fueron pensadas para el nivel de 1° Medio en la unidad de Geometría.

### 5.2.1 Plan de Clases sesión 1

<b>PLAN DE CLASE</b>				
<b>Eje Temático</b>	Geometría	<b>Unidad o Tema:</b>	Volumen del cilindro y cono	<b>Sesión</b>
<b>Objetivo General de la Unidad</b>		Visualizar los cuerpos geométricos en el entorno y, comprender y calcular el volumen de un cilindro.		Nº 1
<b>Habilidad</b>		Argumentar y comunicar		
<b>Actitud</b>		<p>Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas.</p> <p>Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.</p>		
<b>Momentos de la clase</b>	<b>Actividades de Aprendizaje</b>	<b>Intervención Docente</b>	<b>Recursos de Aprendizaje</b>	<b>Tiempo Estimado</b>
Inicio	Los estudiantes realizan las siguientes actividades en acompañamiento de la cápsula educativa n°1:	El docente inicia la clase asegurándose que los estudiantes cuenten con los recursos necesarios para realizar las actividades. Pausa en los momentos cruciales la video cápsula.	Video cápsula Guía de trabajo	10 min
	1.- Anota aquí los cuerpos geométricos que observaste en la cápsula:  2.- ¿Qué propiedades deben tener las redes que observaste en la cápsula para que	Al pausar el video, el docente recuerda las figuras que componen las redes de ambos cuerpos. pregunta: ¿De qué manera nos aseguramos de que la red de la	Video cápsula Guía de trabajo	15 min

	<p>puedan formar correctamente la figura?</p>	<p>figura se arme de manera correcta?</p> <p>cilindro: ¿Qué sucederá si el largo del manto es menor al perímetro de la circunferencia? ¿y si su medida es mayor?</p> <p>Cono: ¿qué sucederá si el arco del sector circular que forma el manto es menor al perímetro de la circunferencia? ¿y si su medida es mayor?</p>		
Desarrollo	<p>3.- ¿Se podrá representar la red del cilindro y del cono de una manera distinta a la usual? Inténtalo y anota aquí todo lo que descubriste.</p> <p>Los estudiantes realizan las siguientes actividades en acompañamiento de la cápsula educativa n°2:</p> <p>4.- ¿Cómo calcularías el volumen de una torre de monedas?</p>	<p>¿De qué manera diseñaría el manto de las redes para que estas calcen en su formación? ¿En qué deberíamos fijarnos?</p> <p>Recuerda que el volumen del volumen de un prisma está dado por la multiplicación entre el área de su base con su altura. Por esto, el área de la base, como es circular, siempre estará dada por el área de una circunferencia por lo que el volumen de un cilindro estará dado por la multiplicación entre el área de la circunferencia de su base por la medida de su altura.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Video cápsula</li> <li>● Guía de trabajo</li> <li>● Cartulina</li> <li>● Tijeras</li> <li>● Pegamento</li> <li>● Regla</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>● Monedas</li> <li>● Regla</li> <li>● Guía de trabajo</li> </ul>	<p>20 min</p> <p>10 min</p>
Cierre:	Resumen ideas claves	El profesor pide a los estudiantes comentar cuales son, según sus propios criterios, los aspectos fundamentales que nos presentan las cápsulas 1 y 2.		5 min

## 5.2.2 Plan de clase sesión 2

PLAN DE CLASE				
Eje Temático	Geometría	Unidad o Tema:	Volumen del cilindro y cono	Sesión
Objetivo General de la Unidad		Comprender los conceptos de volumen y capacidad y relacionar el volumen entre el cilindro y el cono.		Nº 2
Habilidad		Argumentar y comunicar		
Actitud		<p>Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas.</p> <p>Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.</p>		
Momentos de la clase	Actividades de Aprendizaje	Intervención Docente	Recursos de Aprendizaje	Tiempo Estimado
Inicio	<p>Los estudiantes realizan las siguientes actividades en acompañamiento de la cápsula educativa n°3:</p> <p>a. ¿Cuál es la capacidad de fideos (u otro) que tiene tu cilindro?</p> <p>b. ¿Cuál es la capacidad de lentejas (u otro) que se puede almacenar en</p>	<p>El profesor deberá asegurarse que todos los estudiantes posean el material necesario para la sesión y debe pausar en los puntos fundamentales la video cápsula para que el estudiante registre las ideas que tuvo para realizar cada actividad.</p> <p>Entrega técnicas a los estudiantes cómo; podemos contar los objetos para entender la capacidad del cilindro.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Video Cápsula</li> <li>● Guía de estudio</li> </ul> <p><b><u>Materiales:</u></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● Un tubo de confort, toalla nova</li> <li>● Una red armada del cilindro o cualquier objeto con esa forma y tapa una de sus</li> </ul>	20 min

	<p>el cilindro? ¿Qué puedes decir de ella?</p> <p>c. ¿Cuál es la capacidad de arroz (u otro) que se puede almacenar en el cilindro? ¿Qué puedes decir de ella?</p>	<p>Como las lentejas son muy pequeñas, no las contamos para saber cuántas hay exactamente, pero sí podemos estar seguros de que hay muchas más que fideos. Lo mismo sucederá con el arroz.</p>	<p>bases con cartulina o cartón.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● Por lo menos tres objetos pequeños para rellenar (fideos, legumbre, arroz, etc.)</li> </ul>	
desarrollo:	<p>d. ¿Cuál será la capacidad máxima de almacenamiento de nuestro cilindro?</p> <p>e. ¿Capacidad es igual a volumen? Escribe con tus palabras qué entiendes por ambos conceptos y cómo se relacionan.</p> <p>Video cápsula 4:</p> <p>Se muestra una animación en la cual un cilindro se vacía al llenar tres conos.</p> <p>Corta con cuidado las 6 redes y ármalas siguiendo las</p>	<p>El profesor guía a los estudiantes a que comprendan que entre más compacto sean los objetos de relleno, más espacio ocupamos dentro del cilindro, por lo que, en si llegáramos a llenar con harina, sal o agua, llenaríamos por completo la capacidad del cilindro, lo que lo convertiría en un cuerpo totalmente sólido, es por esto que la capacidad máxima podría ser igual al volumen del cuerpo siempre y cuando el hueco de relleno sea lo más grande posible y el mano lo más delgado que puede llegar a ser.</p> <p>Así se define capacidad: espacio vacío con posibilidad de ser llenado. Volumen: se suele entender como el espacio ocupado por un objeto o cuerpo.</p> <p>El profesor realiza el experimento en conjunto con los estudiantes. Debe recalcar que por lo menos uno de los conos comparte relleno de dos cilindros, por lo que esta manera de llenado aún no</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Material completo creado en la actividad de inicio.</li> <li>● Video cápsula.</li> <li>● Guía de estudio.</li> </ul> <p><b><u>Materiales</u></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● Tijeras</li> <li>● Pegamento de cualquier tipo</li> <li>● Cartulinas de colores</li> <li>● Regla</li> </ul>	10 min

	<p>indicaciones de la cápsula. Debes dejar una de sus bases sin pegar.</p> <p>¿Podemos llenar todos los conos con el relleno de nuestros cilindros? Explica lo que ves.</p> <p>¿Podremos vaciarlos sin mezclar el relleno de ambos cilindros? Explica tu estrategia.</p> <p>¿Qué características en común tienen los conos con los cilindros que los rellenaron? Para encontrar algunas, utiliza la regla.</p>	<p>puede confirmar que la animación sea verdadera.</p> <p>Preguntar respuestas de los estudiantes, pueden debatir si la respuesta es positiva o si no lo es.</p> <p>De esta manera los estudiantes argumentan que si se puede lograr este llenado de los conos y las características que creen son necesarias para que sea posible.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Lápiz</li> <li>● Una varita recta</li> <li>● 8 redes de cuerpos geométricos. (2 cilindros y 6 conos)</li> <li>● Objeto pequeño para rellenar, (legumbre, arroz, fideos) (nosotros utilizaremos arroz).</li> </ul>	20 min.
Cierre	<p>c. ¿Qué podemos decir con respecto a las características encontradas y la animación?</p> <p>d. Explica cuál es el volumen de un cono haciendo relación a la animación vista en la cápsula.</p>	<p>Para cerrar la sesión el profesor discutirá las ideas que escribieron los estudiantes de cada pregunta para formalizar que la animación mostrada en la video cápsula solo ocurre cuando las medidas del área de la base y la medida de la altura del cilindro y los tres conos son iguales.</p> <p>Es por esto por lo que, si dividimos el volumen de un cilindro en tres partes, el volumen de un cono estará dado por un tercio del volumen del cilindro.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Video cápsula</li> <li>● Experimento terminado</li> <li>● Guía de estudio</li> </ul>	10 min

### **5.3 Guías de trabajo**

A continuación, se explicarán cada una de las guías de trabajo que se utilizarán en la secuencia de enseñanza aprendizaje, describiendo brevemente las actividades a tratar y los objetivos de cada una de ellas.

#### **5.3.1 Sesión 1:**

Esta guía se trabaja directamente y a la par con la cápsula educativa destinada a la sesión. El objetivo de esta es ser apoyo para dejar registro del razonamiento con el cual los estudiantes logren identificar las características de las redes de los cuerpos cono y cilindro, también de las ideas que tendrán para calcular el volumen de un cilindro. Esto es a través de la visualización de las cápsulas educativas.

#### **Guía de estudio n°1**

**Nombre:**

**Curso:**

**Fecha:**

Sigue esta guía con la cápsula de geometría “observando el entorno con ojos matemáticos” y “Comprendiendo nuestro entorno con perspectiva matemática” para realizar las actividades y responder a las preguntas:

- 1.- Anota aquí los cuerpos geométricos que observaste en la cápsula:
- 2.- ¿Qué propiedades deben tener las redes que observaste en la cápsula para que puedan formar correctamente la figura?

Para la siguiente pregunta necesitaremos el siguiente material:

- Tijeras
- Pegamento
- Cartulina

- Regla

3.- ¿Se podrá representar la red del cilindro y del cono de una manera distinta a la usual? Inténtalo y anota aquí todo lo que descubriste.

4.- ¿Cómo calcularías el volumen de una torre de monedas?

#### **Para que recuerdes:**

En el mundo, manejamos con mucha destreza nuestro propio volumen con nuestros movimientos sin saberlo, cuando sabemos cabemos o no en el vagón del metro o cuando podemos darnos cuenta cuales tallas nos quedas o no sin probárnoslas.

También manejamos con destreza el volumen de los cuerpos que nos rodean, aunque no siempre, ¿has gastado energía moviendo algún mueble u otro objeto solo para darte cuenta de que no cabe en el espacio que habíamos pensado para él?

#### **5.3.2 Sesión 2:**

Esta guía se trabaja directamente y a la par con la cápsula educativa destinada a la sesión. El objetivo de esta es ser apoyo para dejar registro del razonamiento que les servirá a los estudiantes a lograr diferenciar el concepto de volumen y capacidad y, además, relacionarlos con el concepto de volumen máximo del cuerpo. De la misma forma actuará como registro de las ideas que tengan los estudiantes para reconocer las características que relacionan al cilindro con el cono y cómo esta relación les ayudará a definir la manera de calcular el volumen del cuerpo cono a través de la visualización de las cápsulas educativas.

## Guía de estudio n°2

**Nombre:**

**Curso:**

**Fecha:**

Sigue esta guía con las cápsulas de geometría “Realizando matemática con objetos a nuestro alcance” y “Experimentado y demostrando” para realizar las actividades y responder a las preguntas:

1.- Para esta actividad necesitamos los siguientes materiales:

- Un tubo de confort, toalla nova, una red armada del cilindro o cualquier objeto con esa forma y tapa una de sus bases con cartulina o cartón.
- Debes tener por lo menos tres objetos pequeños que te ayuden a rellenar tu cilindro te aconsejo que sean fideos, alguna legumbre, arroz, etc.

Sigue las indicaciones y responde las preguntas:

- a) Rellena tu cilindro con el objeto más grande que tengas. en nuestro caso, lo hicimos con fideos.



¿Cuál es la capacidad de fideos (u otro) que tiene tu cilindro?

- b) Rellena tu cilindro con un objeto más pequeño que el anterior. en nuestro caso, lo hicimos con lentejas.



c) ¿Cuál es la capacidad de lentejas (u otro) que se puede almacenar en el cilindro? ¿Qué puedes decir de ella?

- d) Rellena ahora con un objeto aún más pequeño que el anterior. Ahora nosotros, lo haremos con arroz.



- e) ¿Cuál es la capacidad de arroz (u otro) que se puede almacenar en el cilindro? ¿Qué puedes decir de ella?

- f) ¿Cuál será la capacidad máxima de almacenamiento de nuestro cilindro?
- g) ¿Capacidad es igual a volumen? Escribe con tus palabras qué entiendes por ambos conceptos y cómo se relacionan.

2.- Queremos comprobar la animación vista en la cápsula que muestra cómo se vacía el relleno de un cilindro en tres conos. Para esto necesitas los siguientes materiales:

- Tijeras
- Pegamento de cualquier tipo
- Cartulinas de colores
- Regla
- Lápiz
- Una varita recta.
- 8 redes de cuerpos geométricos:
  - 2 cilindros
  - 6 conos (asegúrate de haber recibido este material)
- Objeto pequeño para rellenar, te aconsejo que sea alguna legumbre o arroz. (nosotros utilizaremos arroz).

- a) Corta con cuidado las 6 redes y ármalas siguiendo las indicaciones de la cápsula. Debes dejar una de sus bases sin pegar.

- ¿Podemos llenar todos los conos con el relleno de nuestros cilindros? Explica lo que ves.
  - ¿Podremos vaciarlos sin mezclar el relleno de ambos cilindros? Explica tu estrategia. (puedes ver algunas estrategias en la cápsula)
- b) ¿Qué características en común tienen los conos con los cilindros que los rellenaron? Para encontrar algunas, utiliza la regla.
- c) ¿Qué podemos decir con respecto a las características encontradas y la animación?
- d) Explica cuál es el volumen de un cono haciendo relación a la animación vista en la cápsula.

#### 5.4 Análisis a priori

A continuación, se presentarán el análisis *a priori* de las situaciones principales de cada sesión en nuestro estudio, las cuales consideramos que son claves en la secuencia de enseñanza aprendizaje.

- **Sesión 1:** cápsula 1.

- ❖ Problema: Desafío planteado al final de la cápsula 1

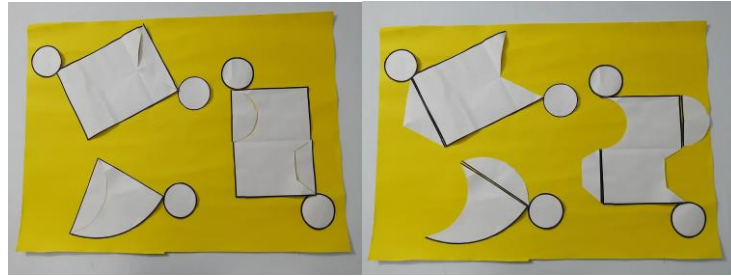
“¿Se podría representar la red del cilindro y el cono, de una manera distinta a la usada comúnmente?”

- ❖ Análisis a priori

- ¿Cuál es la respuesta a la situación?

Si es posible representar la red estos cuerpos de una manera distinta al prototipo enseñado. Se pueden formar distintas formas equivalentes al rectángulo y al sector circular que, al momento de juntar la red, esta

formará el cuerpo que representa. A continuación, se presentan algunos ejemplos:



- ¿Cuáles son los conocimientos en juego?
  1. Características esenciales de cada red.
  2. Figura plana Rectángulo.
  3. Sector circular.
  4. Figuras equivalentes
  
- ¿Cuáles serían las posibles estrategias para resolver la situación?

Experimentar con material concreto, mediante ensayo y error, si la red propuesta cumple con las condiciones necesarias para formar el cuerpo del cilindro o el cono según sea el caso.

- ¿Cuáles son los posibles errores y/o dificultades?
  1. Dificultad al creer que no es posible representar las redes de otra manera ya que, siempre se ha enseñado un prototipo de red.
  2. Error si no se consideran las características esenciales que debe tener cada red.

- **Sesión 1:** cápsula 2.

- ❖ Problema: “¿Cómo calcularías el volumen de una torre de monedas?”

- ❖ Análisis a priori:

- ¿Cuál es la respuesta a la situación?

Los valores numéricos dependen de la moneda que utilice el estudiante para formar su torre.

Considerando una moneda de \$100 antigua. Se identifica que la base de la torre es una de estas, medimos el diámetro de la moneda con una regla, es aproximadamente 2,5 cm por lo que su radio será la mitad de este 1,25cm. Con esto calculamos que su área es de aproximadamente 4,91 centímetros cuadrados. Luego, medimos que la altura de nuestra torre es de 2 cm.

Así, el volumen de la torre está dada por la multiplicación entre en área de la base por la altura de la figura que es de aproximadamente 48,22 centímetros cúbicos.

- ¿Cuáles son los conocimientos en juego?

1. Volumen de primas.
2. Área de la circunferencia.
3. Elementos de la circunferencia.
4. Número  $\pi$

- ¿Cuáles serían las posibles estrategias para resolver la situación?

Identificar que el área de la base corresponde al de una circunferencia y medir cada elemento necesario para encontrar esta área y para encontrar el volumen del cuerpo completo.

- ¿Cuáles son los posibles errores y/o dificultades?
  - 1) Dificultad si no comprenden que el cilindro es un prisma.
  - 2) Dificultad al no tener acceso a los materiales necesarios para la actividad.
  - 3) Dificultad si no comprenden el área de una circunferencia y comprensión de sus cálculos.
  - 4) Dificultad si no comprenden el número pi y su existencia en el cálculo del área figuras y volumen de cuerpos.

- **Sesión 2:** cápsula 3.

- ❖ Problema: Llenado del cilindro con distintos objetos. Preguntas importantes de análisis:

“¿Cuál será la capacidad máxima de almacenamiento de nuestro cilindro?”

“¿Capacidad es igual a volumen? Escribe con tus palabras qué entiendes por ambos conceptos y cómo se relacionan”.

- ❖ Análisis a priori

- ¿Cuál es la respuesta a la situación?

Se espera que los estudiantes comprendan que los conceptos de capacidad y volumen son distintos. Por un lado la capacidad se podría entender como un espacio con posibilidad de ser llenado. Mientras que el volumen se podría comprender como el espacio que ocupa un cuerpo en el mundo.

Ambos se relacionan cuando la capacidad del cilindro llega a un máximo, el cual sería igual al volumen de la figura.

- ¿Cuáles son los conocimientos en juego?
  1. Comprender la composición de las figuras planas que forman la red de un cilindro.
  2. Características del cuerpo cilindro.
  3. Volumen del cilindro
  
- ¿Cuáles serían las posibles estrategias para resolver la situación?

Rellenar el cilindro con objetos de distintos tamaños y cada vez más pequeños, hasta ocupar el objeto más pequeño y compacto con el que puedan realizar la actividad.

- ¿Cuáles son los posibles errores y/o dificultades?
  1. Dificultad si no comprende la diferencia entre los conceptos de volumen y capacidad.
  2. Error si se comprenden los conceptos anteriores como sinónimos, es decir, que los conceptos definan lo mismo.
  3. Dificultad al no saber si el estudiante puede tener acceso a los materiales necesarios para la actividad.

- **Sesión 2:** cápsula 4.

- ❖ Problema: Queremos comprobar la animación vista en la cápsula que muestra cómo se vacía el relleno de un cilindro en tres conos. Preguntas importantes de análisis:

¿Qué características en común tienen los conos con los cilindros que los rellenaron? Para encontrar algunas, utiliza la regla.

Explica cuál es el volumen de un cono haciendo relación a la animación vista en la cápsula.

❖ Análisis a priori

- ¿Cuál es la respuesta a la situación?

Los cuerpos tienen la misma medida del área de su base e iguales medidas de su diámetro y radio. también tienen la misma altura.

Al tener las características anteriores el relleno del cilindro se reparte en tres partes iguales, y como este valor sería igual a su volumen, entonces el volumen de un cono sería igual a un tercio del volumen del cilindro.

- ¿Cuáles son los conocimientos en juego?

1. Elementos de la circunferencia.
2. Área de la circunferencia
3. conceptos Volumen y capacidad.
4. Volumen del cilindro

- ¿Cuáles serían las posibles estrategias para resolver la situación?

Vaciar el relleno del cilindro tanteando las opciones para comenzar a realizar la actividad. algunas opciones pueden ser: comenzar vaciando el cono más grande en los cilindros más pequeños; comenzar vaciando el cilindro más grande en dos conos de igual tamaño y uno distinto; vaciar el relleno del cilindro más pequeño en los conos más pequeños. La última será la solución al problema. Luego, medir los diámetros de las bases y sus alturas para darnos cuenta de que tienen la misma medida de diámetro y altura.

Con esto, hay que reconocer que el cilindro se puede vaciar tres veces, y haciendo conexión con la capacidad máxima y el volumen de los cuerpos. Con esto podemos afirmar que el volumen de un cono es un tercio del volumen de un cilindro que igual área basal y misma altura. Así, encontramos que simbólicamente el cálculo del volumen de un

cono está dado por la expresión  $\frac{\pi r^2 h}{3}$ , donde  $r$  es el radio de su base y  $h$  la altura del cuerpo.

- ¿Cuáles son los posibles errores y/o dificultades?
  1. Dificultad al no saber si el estudiante puede tener acceso a los materiales necesarios para la actividad.
  2. Dificultad si no logran reconocer los elementos de la circunferencia de la base de los cuerpos.
  3. Dificultad si no logran asociar la capacidad máxima con el volumen del cuerpo.
  4. Dificultad si no comprende la asociación de los volúmenes del cilindro y el cono.

## **CAPÍTULO VI**

### **Estudio de Cápsulas**

En el siguiente capítulo se presentarán las capsulas educativas creadas para la propuesta de enseñanza-aprendizaje, este consta de dos partes.

En la primera se describirá de forma detallada cada una de las cápsulas educativas, donde esta descripción nos muestra el objetivo de cada una de ellas, el contenido y las actividades que presentan, los conocimientos previos que se deberían poseer, la duración, los materiales necesarios para la(s) actividades y la relación de estas cápsulas con el enfoque teórico de la investigación para trabajar la habilidad matemática de argumentar y comunicar.

En la segunda parte, se describe el escenario y la discusión que se sostuvo con expertos quienes revisaron cada cápsula educativa, mencionando los aspectos relevantes, innovadores y algunas reflexiones sobre las mismas.

#### **6.1 Descripción de las cápsulas educativas.**

##### **6.1.1 Cápsula 1: “Observando el mundo con ojos Matemáticos”**

Con esta cápsula se espera dar el inicio de la primera sesión de la secuencia de enseñanza-aprendizaje y tiene por objetivo la visualización de los cuerpos geométricos en un entorno real. La cápsula tiene una duración de cinco minutos con cuarenta y ocho segundos, sugerimos que al momento de planificar la clase se debe considerar el tiempo dedicado a cada pausa para realizar las actividades.

Los contenidos principales presentes en esta cápsula son la definición de cuerpo geométrico, su distinción y visualización en la naturaleza, en la arquitectura y en objetos de la vida diaria. Para continuar con el relato de como aparecieron los cuerpos cilindro y cono, mencionando que su aparición fue debido a una necesidad de las antiguas civilizaciones para almacenar sus alimentos, especialmente los granos, terminando con la construcción de estos cuerpos mediante planos, regiones circulares, puntos y rectas en el espacio, trabajándolos con material concreto.

Finalmente se presentan las figuras que conforman sus redes y las propiedades que poseen cada una de ellas.

Los conocimientos previos que se deben tener para la observación y participación en las actividades de esta primera cápsula tienen relación con conocer las características de los distintos cuerpos geométricos (cubo, cono, cilindro, esfera) y también de la circunferencia además de sus elementos esenciales como radio, arcos y sectores circulares.

Se presentan las siguientes tres actividades para trabajar con los estudiantes:

- Observar e identificar cuerpos geométricos presentes en objetos de la naturaleza, la arquitectura y la vida diaria.
- Identificar las propiedades que deben tener las figuras que conforman las redes de los cuerpos cilindro y cono para su correcta formación.
- Análisis sobre las redes convencionales del cilindro y cono, reflexionando si son las únicas.

En el video se sugiere dos instancias de pausa, para que el estudiante pueda desarrollar, analizar y argumentar lo planteado así, una vez realizadas se puede seguir con la visualización de la cápsula hasta el final, en donde se presentará un desafío siendo la tercera y última actividad para realizar. Para

trabajar estas actividades, se debe asegurar que los estudiantes cuenten con la guía construida para la clase y los siguientes materiales: lápiz, regla, cartulina, tijeras y pegamento.

En general, la cápsula trabaja desde la visualización y la construcción para que el estudiante, a través de sus razonamientos, comprenda con qué necesidad nacen estos cuerpos, cómo se forman y las características principales de las redes que los conforman. Así, se trabaja directamente la habilidad de argumentar y comunicar.

### **6.1.2 Cápsula 2: “Comprendiendo nuestro entorno desde una perspectiva Matemática”**

La cápsula número dos, fue creada con la intención de que sea expuesta antes de terminar la primera sesión de la secuencia propuesta y tiene por objetivo comprender y calcular el volumen de un cuerpo de forma cilíndrica. La cápsula tiene una duración de dos minutos con veintiocho segundos, sugerimos que al momento de planificar la clase se debe considerar el tiempo dedicado a cada pausa para realizar las actividades.

Los contenidos presentes en esta cápsula comienzan con un relato sobre cómo cada objeto en el mundo ocupa un espacio y posee cualidades que pueden ser medidas, como sus longitudes, superficies, capacidades o volúmenes, puesto que nuestro mundo no es plano todos los seres vivos u objetos son tridimensionales, es por eso por lo que el volumen es la magnitud de nuestro mundo. Luego se recuerda la manera de calcular volúmenes de prismas, multiplicando el área de su base por la altura que tienen, recordando con esto que el cilindro es un prisma con bases circulares. Posteriormente se presentará la actividad central que pretende calcular el volumen de un cuerpo con forma de cilindro, generando una fórmula general para esto.

Se finaliza con un relato para tomar conciencia de que todos manejamos nuestro propio volumen, al tomar decisiones como subirnos al transporte público o escoger tallas según nuestro cuerpo. De la misma manera somos conscientes del volumen que tienen objetos y seres ajenos a nosotros mismos en actividades como tomarlos para cambiarlos de posición.

Para esta cápsula, los contenidos previos que deberían poseer los estudiantes son el reconocimiento y cálculo del volumen de prismas, el área de la circunferencia y, las unidades de medidas para el área (unidades cuadradas) y volúmenes (unidades cúbicas).

Se presenta entonces la siguiente actividad principal que se trabajará:

- Calcula el volumen de una torre de monedas.

En el video se sugiere una única instancia de pausa para realizar la actividad y luego escuchar el relato de cierre del video. Para trabajar esta actividad los estudiantes tendrán que contar con la guía para la clase y los siguientes materiales: regla y una cantidad de monedas (del mismo tipo) para construir una torre, en nuestro caso la actividad se trabaja con diez monedas antiguas de \$100 chilenos.

Esta cápsula quiere generar, a través de la visualización y construcción, el razonamiento en los estudiantes que permita encontrar sentido al cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos y además comprender el cálculo del volumen de cuerpos cilíndricos encontrando una fórmula general.

### **6.1.3 Cápsula 3: “Realizando matemática con objetos a nuestro alcance”**

Con esta cápsula se espera dar el inicio de la segunda sesión de la secuencia de enseñanza-aprendizaje, la cual tiene por objetivo comprender y definir los conceptos de volumen y capacidad. La cápsula tiene una duración de tres minutos con treinta y ocho segundos, sugerimos que al momento de planificar la clase se debe considerar el tiempo dedicado a cada pausa para realizar las actividades

Los contenidos principales que están presente en esta cápsula se centran en una actividad de llenado con tres objetos cada uno más pequeño al anterior, esta consta de cuatro partes que se presentan a continuación y que ayudarán a la comprensión y definición de los conceptos de volumen y capacidad.

Como conocimientos previos para realizar esta actividad, los estudiantes deben comprender cómo se forma el cilindro a través de su red, conocer especialmente el manto y el volumen del mismo cuerpo.

Se presentan las siguientes actividades propuestas en la cápsula:

- ¿Cuál es la capacidad de fideos que entra en nuestro cilindro?
- ¿Cuál es la capacidad de lentejas que puede almacenar?
- ¿Cuál será la capacidad de arroz que almacena nuestro cilindro? ¿Cuál será la capacidad máxima de almacenamiento? ¿Qué puedes decir de ella?
- ¿Capacidad = Volumen?

Para realizar estas actividades, hay una instancia de pausa después de cada pregunta, seguida de su respectiva respuesta y una primera pausa para asegurarse que los estudiantes tengan a mano los siguientes materiales: guía de la clase, un objeto en forma de cono con al menos una de sus bases

formada o bien, una red de cilindro son solo una base pegada, tijeras, pegamento y objetos para rellenar de distintos tamaños cada uno más pequeño que el anterior. En el vídeo, se trabajará la actividad con fideos, lentejas y arroz.

Con esta actividad, a través de la construcción, se pretende que el estudiante razone para argumentar y comunicar que existe una diferencia entre los conceptos de volumen y capacidad, y que la capacidad máxima de un cuerpo es aproximadamente el volumen que ocupa.

La cápsula tiene una duración de tres minutos con treinta y ocho segundos. Al momento de planificar la clase se debe plantear el tiempo dedicado a cada pausa para realizar las actividades.

#### **6.1.4 Cápsula 4: “Experimentando y demostrando”**

Nuestra última cápsula será el pie para dar término a la segunda sesión de la secuencia planteada y tiene por objetivo encontrar el volumen de un cono relacionándolo con el volumen de un cilindro.

El contenido de este video comienza presentando una animación en la que se muestra como un cilindro es vaciado de manera perfecta en tres conos cuestionándonos como podemos afirmar que esto es verdaderamente cierto. A continuación, se presenta la actividad central que consiste en el llenado de cilindros y vaciado de estos en conos para comprobar la animación inicial. Con esto, se vincula ambos volúmenes para encontrar la forma general del cálculo del volumen de un cono.

El conocimiento necesario para que los estudiantes realicen la actividad de esta cápsula es el volumen del cilindro, comprender los conceptos de volumen y capacidad, y, concepto de capacidad máxima de la cápsula anterior.

Las actividades de esta cápsula comienzan rellenando los cilindros y luego se presentan las siguientes preguntas:

- ¿Podremos llenar todos los conos con nuestros cilindros?

- ¿Podremos vaciarlos sin mezclar el relleno de ambos cilindros en los conos? experimenta y anota las estrategias que utilizaste.
- ¿Qué características tienen en común los conos con los cilindros que los rellenaron? Para encontrar algunas, utilicemos nuestra regla.
- ¿Qué podemos decir con respecto a las características encontradas y la animación?
- ¿Cuál es el volumen de un cono?

En el video se sugiere distintas instancias de pausa para realizar la actividad, después de cada pregunta, para que el estudiante experimente con sus propios materiales. Cabe mencionar que las estrategias mostradas como solución en el video podrían no ser las mismas que realicen los estudiantes.

Para trabajar esta actividad, el estudiante debe contar con los siguientes materiales: guía de la clase, seis redes de conos (dos tamaños distintos, tres de cada uno, ver ANEXO 1), dos redes de cilindros (ver ANEXO 2), tijeras, pegamento, cartulinas de colores, regla, lápiz, una varita de madera, objetos pequeños y compactos para rellenar. En nuestro caso, se utilizará arroz. Mediante la construcción y la experimentación, el estudiante razonara, argumentara y comunicara como esta demostración nos entrega las características necesarias que deben tener los cuerpos para que la animación sea correcta y con estas, generar la fórmula para el cálculo del volumen de un cono.

## **6.2 Discusión con expertos**

Las cápsulas creadas para la investigación fueron revisadas por expertos de la Matemática y la didáctica, quienes por medio de una reunión sincrónica pudieron apreciar el material preparado y una breve descripción del trabajo completo el cual fue expuesto. Fueron presentadas las 4 cápsulas seguidas y posteriormente se dio la palabra a cada uno de ellos, quienes nos dieron su apreciación respecto al trabajo y material realizado, para posteriormente

responder una serie de preguntas formuladas por la profesora María Soledad Montoya de forma que éstas pudieran ser de ayuda en la mejora del trabajo.

Las preguntas por responder fueron las siguientes:

1. ¿Las cápsulas educativas están en línea con el enfoque teórico seleccionado?
2. ¿La noción matemática tratada se menciona sin errores?
3. ¿Es pertinente el recurso de la cápsula educativa en el marco de la secuencia y enseñanza aprendizaje propuesta?
4. ¿Qué agregaría en la cápsula educativa para que esta sea más robusta en cuanto al enfoque didáctico matemático? ¿por qué?
5. ¿Qué quitaría en la cápsula educativa para que esta sea más robusta en cuanto al enfoque didáctico matemático? ¿por qué?
6. Comentario General

Para la siguiente reflexión, consideraremos las respuestas a las preguntas de las expertas Paula Molina y Paola Ramírez. En estas discusiones se presentaron los siguientes puntos fundamentales:

- Se debiese generar una experiencia en donde los estudiantes intentasen crear los cuerpos del cilindro y cono, antes de la explicación sobre cómo se crean estos en la cápsula 1.
- En las fórmulas utilizadas, se debería especificar cada componente de esta. Esto se hizo solo para indicar que el parámetro " $h$ " corresponde a la altura del cuerpo, pero no se realizó lo mismo con el parámetro " $r$ " que se asocia con el radio de la circunferencia.
- Cuando se define capacidad se debe tener cuidado, ya que, no es "un espacio vacío que puede ser llenado" pues los espacios en general no lo están, como mínimo poseen aire y esta de igual manera ocupa un espacio.

- Los relatos históricos explicativos son fundamentales para responder los ¿Por qué? y ¿Para qué? de la creación de los cuerpos geométricos y el cálculo de sus volúmenes.
- ¿Por qué se escogió la creación de los cuerpos como cono y cilindro mediante planos y recta, en vez de la rotación de las figuras geométricas rectángulo, para formar el cilindro, y triángulo rectángulo para formar el cono?

Con lo anteriormente mencionado, es importante darle al estudiante un espacio para el desarrollo propio de la actividad, de forma que por sus propios medios genere un nuevo conocimiento analizando sus procedimientos y argumentando sus resultados. Según Jean Piaget (1968), el constructivismo concibe el conocimiento como una construcción propia del sujeto que se va produciendo día con día resultado de la interacción de los factores cognitivos y sociales, este proceso se realiza de manera permanente y en cualquier entorno en los que el sujeto interactúa.

Además, es necesario considerar que, no se debe asumir que el estudiante reconocerá los parámetros propuestos de manera verbal o escrita, pues de la matemática formal se debe encargarse el docente pudiendo describirla de una manera más sencilla para la comprensión del estudiante. Según Chevallard, el saber científico no puede ser enseñado en la forma como se encuentra redactado en los textos técnicos-científicos y esto constituye un obstáculo a considerar en el proceso de aprendizaje. Por lo cual, es transformado en un Saber a Enseñar, el cual ocupa lugar en los programas de estudio (currículo). Se trata de un saber ligado a una forma didáctica que sirve para presentar el saber al estudiante.

Finalmente se hace oportuno mencionar que la propuesta didáctica presentada no contempla los sólidos de revolución, pues de esta manera los cuerpos creados no nacen de manera natural y se encuentran ligados al cálculo infinitesimal. En esta investigación, se busca generar un conocimiento de relación entre volúmenes más que la creación de los cuerpos en cuestión.

## **Capítulo VII**

### **Análisis de los resultados**

En este capítulo se considerarán los focos relevantes de la discusión con los expertos para reflexionar sobre las posibles mejoras o modificaciones, ya sean matemáticas o didácticas, que se puedan realizar a la propuesta de enseñanza-aprendizaje o a las cápsulas educativas creadas. Frente a los aspectos mencionados en el capítulo anterior bajo la mirada de los expertos, es relevante realizar algunos cambios en algunas cápsulas educativas. Los cambios por realizar no afectarían al objetivo ni propósito de nuestra propuesta de enseñanza- aprendizaje, sino más bien sería para mejorarla.

#### **7.1 Análisis descriptivo de las cápsulas educativas a partir de la discusión.**

En los cambios consideraremos el plantear una experiencia en donde los estudiantes intenten crear los cuerpos del cilindro y cono por sí solos, bajo el mecanismo de ensayo y error, para posteriormente realizar una formalización matemática respecto a la actividad propuesta. Pues es el primer punto importante que se dio a conocer, desde las respuestas entregadas por los profesionales. Esta opción es de mucha importancia pues, si la actividad se hiciera de esta manera, ayudaría aún más a la comprensión de las características de los cuerpos geométricos y también ayudaría a que el mismo estudiante sea el que descubra con qué figuras geométricas se conforma la red que arma cada cuerpo y con esto se trabajaría mejor la actividad siguiente que consta de encontrar las características que deben tener las figuras que conforman la red para que esta se arme de manera correcta.

El siguiente punto por cambiar, que habla sobre la explicitación de los parámetros que componen cada una de las fórmulas utilizadas, se acoge de manera positiva ya que es fundamental para el entendimiento y comprensión

al momento de seleccionar los datos que se reemplazaran para hacer los cálculos para encontrar el volumen de los cuerpos.

En cuanto a la definición de capacidad, estamos de acuerdo en que existe un error en está. Ningún lugar está vacío, pues tienen aire, y está formada por oxígeno, nitrógeno y otros gases. Estos gases tienen masa y, por lo tanto, el aire que está conformado por estos es materia, por lo que ocupa un lugar en el espacio llamado atmósfera y, como sabemos, al ocupar un espacio en este mundo, tiene volumen. Un experimento sencillo para comprobar esta deducción es con una jeringa vacía y sin aguja. Si la llenamos y luego tapamos el agujero por donde ingresó el aire, nos damos cuenta de que no podemos volver a apretar la jeringa por lo que se entiende que el aire comprimido dentro ocupa todo el espacio dispuesto para él (Torres, C. Ruiz, M. 2010). Se podría decir, que, al entrar a una habitación, sale la misma cantidad de aire que el cuerpo que entra a esta.

Por lo tanto, de la discusión y las reflexiones realizadas, se generan dos tipos de modificaciones a las cápsulas educativas una matemática y una didáctica.

En cuanto a la modificación matemática, se especificará cada componente de las ecuaciones mostradas en las cápsulas educativas. Y en cuanto a lo didáctico, en la primera cápsula se modificaría la explicación y muestra sobre cómo se forman los cuerpos geométricos cilindro y cono, por una actividad que invite a los estudiantes a crear a través de los materiales ocupados (palos de brocheta y plumavit) sus propios cuerpos geométricos, con esto también se puede guiar a los estudiantes a que ellos mismos conjeturen y encuentren los elementos importantes que forman parte de estos cuerpos. Además, de poder experimentar y encontrar la manera correcta de formar las redes de estos.

## Conclusiones

Ante la investigación realizada, es importante mencionar los crecimientos profesionales que se lograron adquirir a pesar de la situación actual que vive el país con la pandemia del COVID-19, lo que ha llevado a que la educación y la enseñanza sea a distancia por medio de plataformas digitales.

Logramos profundizar nuestros aprendizajes a través de la investigación y las distintas instancias de reflexión que se generaron en las exposiciones del trabajo de título. Estas instancias compartidas con nuestros compañeros nos hacen ser conscientes de la gran importancia del trabajo colaborativo que se debe tener entre los docentes de matemática. A esto, se le suma un gran aprendizaje en las discusiones formativas, la toma de decisiones al momento de escoger los elementos importantes que se presentarán en el trabajo y en la elaboración del diseño didáctico. Una de las mejores cosas que podemos rescatar es que, a pesar de todo, el trabajo de los profesores en Chile es muy arduo, pero una de las cosas que los incentiva es el poder transmitirles a todos aquellos que lo necesitan del conocimiento que ellos recibieron, esto tanto a alumnos como colegas.

Es de considerar que cada alumno tiene una forma distinta de aprender y aplicar el contenido, formas que son totalmente aprobadas por el profesor quien les da la libertad de buscar el método que más les resulte conveniente y no los obligue a utilizar solo una forma de desarrollo. Pues aquí es donde Chevallier se hace presente con la transposición didáctica pues todos los alumnos tienen distintos tipos de saberes.

Además, fuimos capaces de adaptarnos, en conjunto al sistema educativo chileno, al contexto de educación virtual que se ha presentado este año donde nace la necesidad de crear nuevo material didáctico para las secuencias de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes. Modernizarnos como docentes y buscando nuevas plataformas que serán favorables para los tiempos que se

viven en la actualidad y los que vendrán. Esto nos llevó a comprender que tener solo una estructura de clases nunca es asertivo, ya que, no siempre esa estructura será certera a la otra de plasmarla en una clase por diferentes factores (clima, hora de la clase, cantidad de alumnos, entre otros). Es por eso por lo que de este punto podemos rescatar que tener un “plan b” o “plan c” siempre será una buena estrategia para poder sobrellevar de buena manera una clase en la que estos factores pueden influenciar.

Creemos firmemente que la educación matemática no solo debe estar basada en el aprendizaje de fórmulas ni métodos de desarrollo del tipo receta, sino que sea una educación matemática integral que permita descubrir, innovar, recrear y comunicar los procesos de los estudiantes. Es por eso por lo que, la historia y la epistemología de los objetos matemáticos son fuertes componentes que nos ayudan a que los estudiantes encuentren sentido al estudio y al trabajo de los objetos matemáticos. Además, esta instancia de educación virtual es una gran oportunidad para trabajar la habilidad matemática de argumentar y comunicar a través de las diferentes e innovadoras estrategias que se han presentado, como lo son las cápsulas educativas, para lograr los objetivos de aprendizaje propuestos para este año escolar. En este sentido, los apuntes de Quezada y Torregrosa (2007), pueden ser una herramienta fundamental pues se logra trabajar la visualización, el razonamiento y la demostración de la mano con las presentaciones de las cápsulas educativas

## Bibliografía

Artigue, M. Douday, R.; Moreno, L. (1995) *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica S.A., Bogotá, Colombia.

Berté, Annie.(1999) *Matemática Dinámica*. A-Z, Bs As.

Baquero, C. D. (2014). *Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de volumen dirigida a estudiantes de grado octavo. Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de: Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales*. Universidad Nacional de Colombia. <http://bdigital.unal.edu.co/49269/1/2806991.2014.pdf>.

Chevallard (2006). *Transposición didáctica*. CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA 2006

Clements, D. & Battista, M. (1992). *Geometry and spatial reasoning. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. 34-67.(PDF)  
Geometry and spatial reasoning, Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning

De Faria, E. (2006). *Ingeniería Didáctica*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Asociación de Matemática Educativa, Universidad de Costa Rica. Año 1, Número 2.

Duval, Raymond. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. LA GACETA DE LA RSME, Vol. 9.1, 143–168.

Duval, R. (2007). *Funcionamiento cognitivo y comprensión de los procesos matemáticos de prueba, en Boero, P. (ed.). Teoremas en la escuela. De la historia, la epistemología y la cognición a la práctica en el aula*, pp.137-162. Róterdam, Holanda: Sense Publishers

Duval, R. (1998). *Geometry from a cognitive point of view*. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 37-51.

Failache, E. Katzkowicz, N. Machado, A. (2020, 3 de Abril). *La educación en tiempos de pandemia. Y el día después*. consultado el 20 de Junio de 2020. <https://hdl.handle.net/20.500.12008/24008>.

Gara, F. (2016). *Manual de Producción de Videocápsulas educativas*. Universidad Nacional autónoma de México, Facultad de Estudios superiores Aragón. <http://manualdeproducciondevideocapsulas.blogspot.com/>

González, A. (2018). *Proyecto de cápsulas educativas (CED); una experiencia de innovación para el aprendizaje significativo*. Revista Interdisciplinaria de Formación Docente, año IV N°6. <http://ppct.caicyt.gov.ar/index.php/kimun/article/download/12794/45454575758566>

González, P. *Estudio crítico de tres obras cumbre de la literatura matemática: los elementos de Euclides, el método de Arquímedes y la geometría de descartes*, pp 112 -154

Hernández, P. (2019) *¿Qué es una Cápsula Informativa?* <https://www.lifeder.com/capsula-informativa/>

Hershkowitz, R., Parzysz, B. y Van Dermolen, (1996). *Space and Shape, en Bishop y otros, A.J. (eds.). Manual internacional de educación matemática*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers

Jones, K. (2002). *Issues in the Teaching and Learning of Geometry*. En L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics. Perspectives on practice*, C8, 121-139.

MINEDUC (2018). *Matemática. Texto del estudiante 8° básico*. Santillana del pacífico S.A. Santiago de Chile.

MINEDUC. (2016). Matemática. Programa de estudio 8° medio. Santiago: autor.

MINEDUC (2016). Matemática. Texto del estudiante 1° medio. Santillana del pacífico S.A. Santiago de Chile.

MINEDUC. (2016). Matemática. Programa de estudio 1° medio. Santiago: autor.

MINEDUC. (2016). Bases Curriculares de 7mo a 2do medio. Santiago: autor.

Mineducación (2019). *Contenidos educativos digitales para la enseñanza del área de las ciencias Naturales, Matemáticas y Lenguaje, para educación básica y media*. Colombia. <http://aprende.colombiaaprende.edu.co/es/cursos-digitales>

Moise, E. y Downs, F. (1989), *Geometría moderna*. Addison-Wesley Iberoamericana, México.

Piaget, J. (1968 b): *Los estadios del desarrollo intelectual del niño y del adolescente*. Editorial Revolucionaria. La Habana.

Olmo, M., Moreno, M., Gil, F. (1993), *Superficie y Volumen ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?*, Madrid, España, Síntesis

Quesada, H. (2014). *Análisis de la coordinación entre los procesos de visualización y los procesos de razonamiento en la resolución de problemas en geometría*.

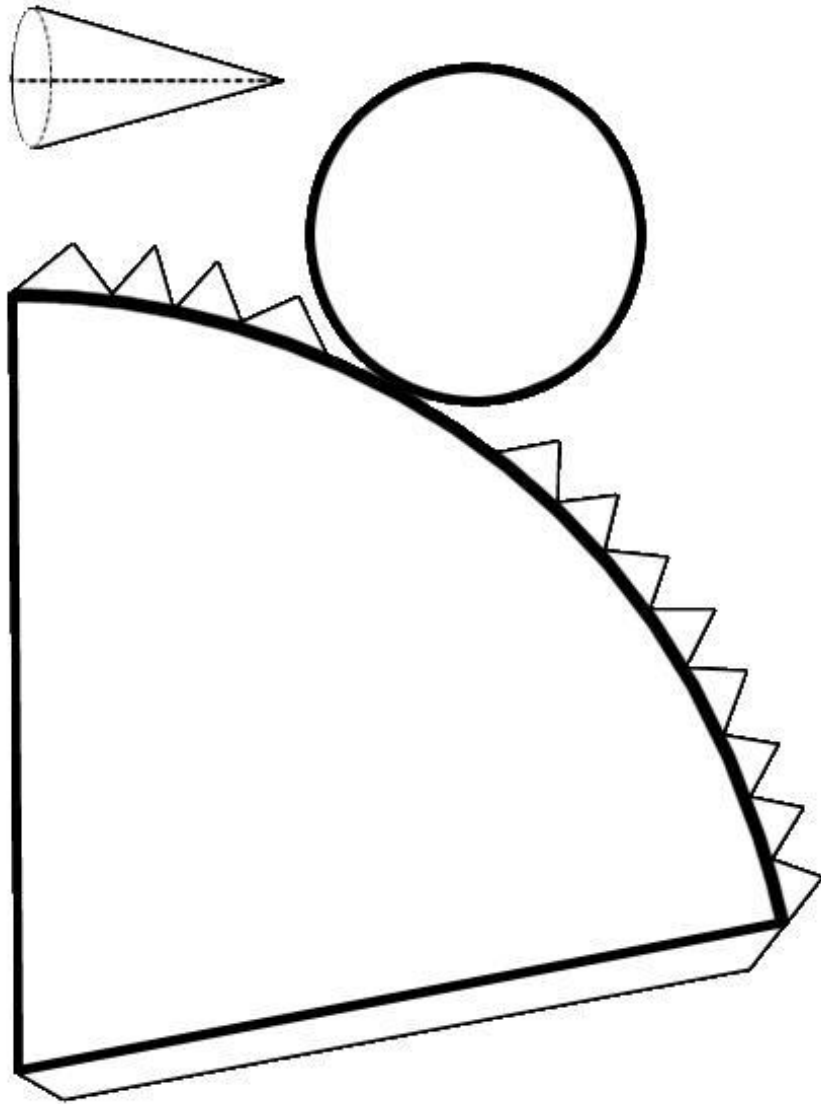
Torregrosa, G. Quesada, H. (2007). *Coordinación de procesos cognitivos en Geometría*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 10, núm. 2, j, pp. 275-300. [https://www.researchgate.net/publication/28182867\\_Coordinacion\\_de\\_procesos\\_cognitivos\\_en\\_Geometria](https://www.researchgate.net/publication/28182867_Coordinacion_de_procesos_cognitivos_en_Geometria).

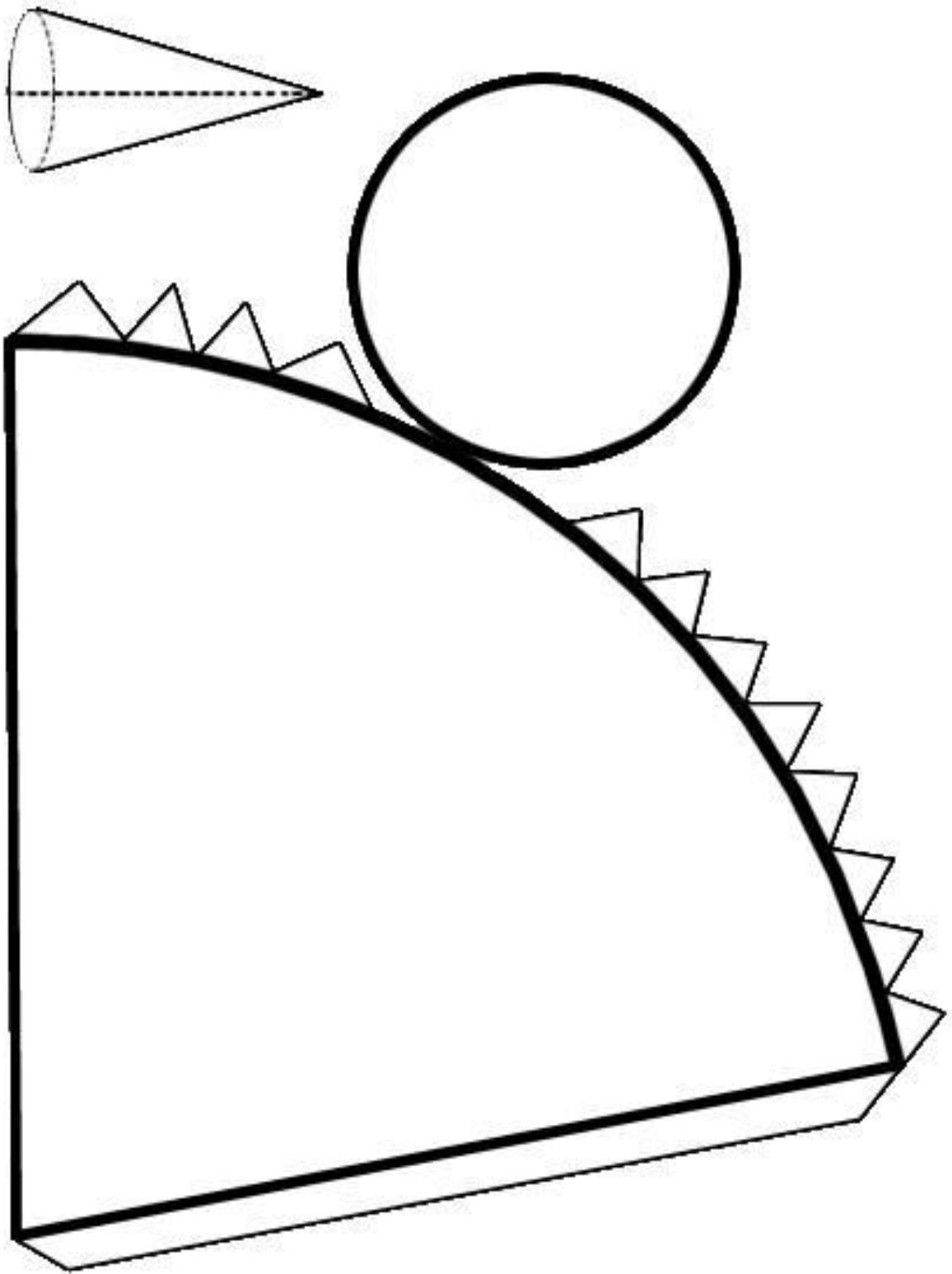
Torres, C. Ruiz, M. (2010). La ley de Boyle, el análisis de dos experimentos. Escuela Nacional Preparatoria No. 2, Universidad Nacional Autónoma de México, Churubusco y Tezontle, C.P. 08040, México D. F

Vidal, M. (2019). *Cápsulas educativas o informativas. Un mejor aprendizaje significativo*. Escuela Nacional de Salud Pública. La Habana. Cuba.  
<http://www.ems.sld.cu/index.php/ems/article/view/1904/865>

# ANEXOS

## Anexo 1: Redes del cono





Anexo 2: Redes del cilindro

