UNIVERSIDAD

ALBERTO HURTADO

Facultad de Educación
Departamento de Pedagogías Medias y Didácticas Específicas
Programa de Magíster en Didáctica de la Matemática

Una propuesta de enseñanza aprendizaje para el área de figuras compuestas con énfasis en la visualización

Informe de Trabajo Final

para optar al Grado de Magíster en Didáctica de la Matemática

Por:

María Cecilia Allende Segovia

Director de Tesis: Dra. María Soledad Montoya González

Profesor Informante: Mg. Cecilia Rojas Pardo

Santiago – Chile 2017

Índice

Introducción

El presente estudio se encuentra motivado por la formación en el Magíster en Didáctica de las Matemáticas, a través de él, contribuir a la comprensión de la geometría, en particular el tema referido al cálculo de áreas de figuras compuestas por regiones poligonales y círculos, o partes de un círculo.

Se presenta una propuesta de situaciones de aprendizaje fundamentada en los procesos cognitivos de visualización y de razonamiento, considerando las diferentes acepciones para visualización acuñadas por investigadores en didácticas de las matemáticas y teniendo como referente teórico el Modelo de Van Hiele.

Reportamos el estudio en ocho capítulos que ilustran el trabajo que se llevó a cabo. En las siguientes líneas se presenta una descripción general del desarrollo de los capítulos que conforman el estudio.

En el capítulo uno se plantea la problemática y objetivos del estudio que proponen el diseño, aplicación y evaluación de una propuesta de enseñanza aprendizaje para el área de figuras compuestas que favorezca e impulse la visualización y el razonamiento en estudiantes de octavo año básico cuyas edades fluctúan entre 13 a 14 años.

En el capítulo dos se proporcionan antecedentes que respaldan el estudio, en torno al objeto matemático área de figuras compuestas, a la visualización en geometría proceso cognitivo ligado al razonamiento; se presenta un análisis del programa de estudio de Matemática año 2016 y de dos libros de textos de matemáticas proporcionados por el MINEDUC 2014 y 2016 focalizando la atención en nuestro objeto de estudio.

En el capítulo tres referido al objeto matemático área de figuras compuestas, su epistemología y estatus actual, fundamentos del área de triángulos, rectángulos y del círculo que emplearemos en nuestro estudio.

En el capítulo cuatro se presenta el marco referencial de nuestro estudio el Modelo de Van Hiele que explica cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes, se describen los niveles y fases en que se fundamenta el progreso del razonamiento.

En el capítulo cinco, se propone el tipo de metodología del estudio, cualitativo con un enfoque descriptivo e interpretativo; y se presentan los aspectos a aplicar de la metodología de Ingeniería a Didáctica; se relatan la etapas del trabajo que incluyó la aplicación de un estudio exploratorio a un grupo de estudiantes de primero medio, considerando los insumos que arrojaron sus producciones en cuanto al objeto de estudio y a los proceso de visualización y razonamiento. Se diseñó la propuesta de enseñanza aprendizaje en base al Modelo de razonamientos de Van Hiele que se aplicó a estudiantes de octavo básico de un liceo científico humanista.

En el capítulo seis se presenta la propuesta de enseñanza aprendizaje con las descripciones de las tres situaciones que incluyen cinco actividades diseñadas para la consecución del objetivo de nuestro estudio, con sus respectivos objetivos y su análisis apriori que contiene los conocimientos involucrados y adquiridos a considerar en ellas, así como las dificultades y los errores que se puede presentar; además la descripción de los procesos involucrados en cada nivel de razonamiento de acuerdo al modelo de Van Hiele.

En el capítulo siete, se presenta el análisis de los resultados a través del análisis aposteriori con respecto al referente teórico y la confrontación de éste con el análisis apriori del capítulo anterior, para dar cuenta de lo que hicieron y lo que les podría haber faltado a los estudiantes, las estrategias no contempladas o errores que emergen de sus producciones.

En el capítulo ocho se presentan las conclusiones en base a las evidencias de los análisis en el uso de la visualización en la resolución de las actividades de la propuesta, así como de los niveles de razonamiento geométrico expuestos por los estudiantes en sus procesos de resolución plasmados en sus producciones; se incluyen ciertas proyecciones para realizar estudios en otro tipo de objetos geométricos usando el Modelo de Van Hiele y el impacto que se puede dar en la discusión didáctica con otros docentes respecto a la aplicación de teorías o modelos que surgen en el seno de la didáctica de las matemáticas, que conlleven a contribuir en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de nuestros estudiantes.

Capítulo I

Problemática y Objetivos

1.1 Problemática

La geometría resulta ser para algunos estudiantes difícil, según mi experiencia en aula y lo que varios investigadores sostienen, por ejemplo, (Gamboa y Ballestero, 2009), muestran que los estudiantes tienen una actitud de aversión porque por un lado no la entienden y por otro no le encuentran sentido. En ocasiones, los estudiantes se ven enfrentados a problemáticas para las que no tienen las herramientas o algoritmos que permitan resolver la actividad de forma adecuada. Por ejemplo, se abordan situaciones que requieren ser trabajadas tanto con figuras geométricas como también con conceptos abstractos para describir los objetos y permitir su reconocimiento (Figueroa, 2009). Con respecto a esto el proceso de construir conceptos figurales en la mente del estudiante no debería ser considerado un efecto espontaneó de los cursos de geometría. Debería constituir una principal, continua y sistemática preocupación del docente (Fischebein, 1993; citado por Micelli, (2010)).

El aprendizaje de la geometría, ocurre necesariamente mediante la coordinación de actividades de visualización, razonamiento y construcción, siendo la visualización el soporte para estas dos últimas (Duval, 1999; citado por Marmolejo y Vega (2012)).

Diferentes investigaciones evidencian que hacer de las figuras geométricas herramientas heurísticas potentes para la comprensión y la resolución de problemas geométricos, no es obvio y espontáneo Duval 1999; Padilla 1992; Marmolejo, 2007; citados por Marmolejo y Vega (2012)).

Los problemas que presentan ciertos estudiantes de 13 a 14 años , en geometría, en el cálculo del área figuras compuestas y descompuestas por regiones poligonales y círculos se pueden ocasionar por una parte por la confusión entre el concepto de área y el de perímetro que ellos tienen, lo que los conduce a cometer errores (Dickson,1991; Olmo, Moreno y Gil, 1988) y por otra parte la dificultad que tienen los estudiante para visualizar las figuras geométricas en las que se puede descomponer ; Marmolejo y Vega (2012) señalan que esta actividad cognitiva no se adquiere de forma inmediata ni simple, debe ser enseñada.

Por ejemplo, en la figura 1, la tarea que se solicita a los estudiantes es calcular el área de la región sombreada que se constituye a partir de un semicírculo inscrito en un rectángulo de alto **a** y largo **l.**

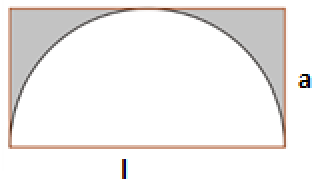


Figura 1

En la figura 2, la consigna es calcular el área de la región sombreada determinada por la cuerda y arco de extremos E y G, en el círculo de centro O y radio 12 cm.

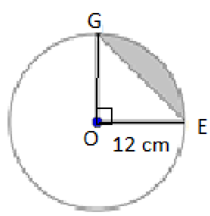


Figura 2

Además, lo que he observado en mi práctica es que ciertos estudiantes presentan dificultades en la visualización de estas figuras en este tipo de problemas (figura 1 y 2) porque no reconocen las figuras que la forman o no logran descomponerlas en otras figuras para realizar los cálculos correspondientes.

Las dificultades de los estudiantes en este tipo de problemática en muchas ocasiones se deben a que la figura geométrica se transforma en un obstáculo para ellos, sea por las líneas que la componen o por su posición (Marmolejo y

González, 2013); estas dificultades se presentan en estudiantes de diferentes niveles escolares, educación superior o en formación inicial.
El currículo nacional, específicamente en el programa de estudio de matemáticas de Octavo Año Básico 2011 en los aprendizajes esperados señala:

(AE10) Calcular el área del círculo y de sectores de él

(AE11) Resolver problemas, en contextos diversos, relativos a cálculos de perímetros y áreas de círculos.

Por otra parte, en el programa de estudio de matemática de Séptimo Año Básico 2014 en los objetivos de aprendizajes señalan:

(OA11) Mostrar que comprenden el círculo aplicando las aproximaciones del perímetro y del área en la resolución de problemas geométricos, de otras asignaturas y de la vida diaria; para desarrollar la habilidad de argumentar y comunicar.

En el programa de estudio de Séptimo Básico 2016 en el objetivo de aprendizaje (OA11) se declara Mostrar que comprenden el círculo: describiendo las relaciones entre el radio, el diámetro y el perímetro del círculo; estimando de manera intuitiva el perímetro y área de un círculo; aplicando las aproximaciones del perímetro y del área en la resolución de problemas geométricos, de otras asignaturas y de la vida diaria; identificándolo como lugar geométrico; para desarrollar las habilidades de representar, resolver problemas argumentar y comunicar.

A partir de los antecedentes anteriores podemos manifestar que en estos programas de estudios no se hace referencia al proceso cognitivo de visualización en forma explícita como objetivo o habilidad.

Sin embargo, los libros de textos de matemática para octavo año básico(2014) y séptimo año básico (2016) , que el MINEDUC entrega a los establecimientos ,se abordan tipos de problemas relacionados con cálculo de áreas de figuras compuestas por regiones poligonales y círculos, y partes de un círculo, trabajando la habilidad de calcular o resolver en forma algebraica, utilizando fórmulas, sin hacer la conexión con el proceso de visualización; cabe mencionar que en el libro de texto del año 2016 para Séptimo Año Básico aparece en las orientaciones didácticas una referencia a los niveles razonamiento de Van Hiele.

En consecuencia, problematizamos en el sentido que se proponen actividades referidas al cálculo de áreas de figuras compuestas o que son posibles de descomponer, pero con énfasis en procedimientos algebraicos, uso de fórmulas y no en procesos cognitivos como la visualización y el razonamiento. Por lo cual, planteamos una pregunta de investigación que nos permitirá indagar, al respecto y observar que es lo que realmente realizan los estudiantes frente a un conjunto de actividades que permiten desarrollar la visualización y el razonamiento. La pregunta es ¿Qué características tienen las respuestas de los estudiantes frente a tareas de visualización y que promueven el razonamiento para el cálculo de áreas de figuras compuestas y descompuestas por regiones poligonales y círculos, o partes de un círculo?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General:

Diseñar y evaluar una propuesta de enseñanza y aprendizaje considerando la visualización y el razonamiento en problemáticas geométricas que incluyen el cálculo de área en figuras compuestas y descompuestas por regiones poligonales y círculos, o partes de un círculo.

1.2.2 Objetivos Específicos:

1. Indagar mediante un estudio exploratorio sobre los conocimientos adquiridos de área de figuras compuestas y descompuestas por regiones poligonales y círculos, o partes de un círculo en estudiantes de primero medio.
2. Diseñar situaciones de enseñanza aprendizaje en torno al área de figuras compuestas y descompuestas por regiones poligonales y círculos, o partes de un círculo, fundamentadas en la visualización y en el modelo de Van Hiele.
3. Aplicar la propuesta en estudiantes de Octavo año Básico con el fin de contribuir a la enseñanza y aprendizaje de la temática en estudio.
4. Caracterizar las acciones y estrategias de los estudiantes frente a las situaciones enseñanza y de aprendizajes contenidas en la propuesta para evaluarla.

Capítulo II

Antecedentes

2.1 Antecedentes relacionados con la problemática

En el proceso de revisión de antecedentes no se encuentra documentación de trabajos realizados en torno al tema específico, área de figuras compuestas por regiones poligonales y círculos o partes de un círculo, relacionado con la matemática escolar y su enseñanza; el enfoque que se dará se basará en el proceso cognitivo de visualización, habilidad que no está contemplada en el currículum nacional, en general tampoco se trabaja a nivel de formación inicial de docentes de matemática.

Actualmente, por lo general, los contenidos de la geometría son presentados a los estudiantes como un producto acabado de las matemáticas; colocando énfasis en la memorización de definiciones, fórmulas y propiedades, en construcciones mecanicistas y descontextualizadas (Gamboa y Ballesteros, 2010); frecuentemente hay exclusión de la intuición del conocimiento geométrico (Barrantes, 2004, citado por Gamboa y Ballesteros)

En cuanto a las teorías cognitivas y a la geometría, investigaciones han evidenciado que la caracterización de los procesos de visualización y razonamiento, así como la coordinación de estos son fundamento básico para la resolución de problemas geométricos e inicio del razonamiento deductivo(Duval (1998) , citado por Torregrosa y Quesada);por otra parte la visualización no está solamente relacionada con la ilustración, sino también es una componente clave del razonamiento (unido a lo conceptual) , de la resolución de problemas y de la prueba Arcavi (1999) (citado por Torres y Racedo).Para Arcavi (2003) la visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes , diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar en la comprensión(Gómez –Chacón citada por Martinho, M. H.,2014) .

Vargas y Gamboa (2013) señalan que los docentes de matemática para obtener los beneficios de la riqueza que posee la geometría requieren de explorar diversas formas para abordarla, y deben tratar de romper los esquemas que subyacen a sus prácticas para dedicarse a la búsqueda, exploración y aplicación de nuevas actividades.

El National Council of Teachers of Matematics (NCTM) (2003) describe la geometría como la materia mediante la cual el estudiante estudia las formas y estructuras geométricas y aprende a analizar sus características y relaciones. Considera a la vez la visualización espacial como un aspecto relevante del pensamiento geométrico, sin dejar de mencionar la construcción de modelos geométricos y el razonamiento espacial como formas de describir el entorno.; todo lo cual se constituye en una herramienta importante en la resolución de problemas, ya sea geométricos o del conocimiento en general (Vargas y Gamboa,2013).

Si indagamos en los orígenes de la geometría nos encontramos que desde tiempos antiguos por parte de los egipcios y de los hindúes se encuentran evidencias de una geometría que surge frente a necesidades prácticas, como también de ritos, se ocupan de distribuir espacios en un plano lo que implícitamente contiene la idea de medida de estas regiones y de las que usaban para hacer sus distribuciones o diseños en ellas. (Boyer, 2010)

En esa época se trabajaba, sin explicitar, la descomposición y composición de figuras geométricas sencillas por medio de triángulos rectángulos y rectángulos, algunas muestras de estas se pueden encontrar en los problemas del Papiro de Ahmes (escriba del año 1650 a.C), conocido como papiro de Rhin, está el cálculo del área de un triángulo isósceles que se obtiene al compararla con el área de un rectángulo; el área aproximada de un círculo a partir de un octógono inscrito en un círculo y este a su vez en un cuadrado.(Boyer,2010)

De los trabajos realizados en esos tiempos se puede conjeturar que la forma de “ver” para ocupar una región plana en forma adecuada anticipa a los cálculos. Esta idea de observación para una mejor comprensión sobre lo que se tiene que hacer, es lo que hace algún tiempo interesa a los investigadores en didáctica de la matemática, que se ponga en juego en la enseñanza de la geometría a nivel escolar el proceso de visualización, el cual se constituye en un enorme potencial para devolver el lugar que corresponde a la geometría, como concluye (Marmolejo y Vega, 2012).

El quiebre en esta forma de tratar la geometría, énfasis en las fórmulas y procedimientos algebraicos se encuentra en la historia de las matemáticas entre el siglo XVII y gran parte del siglo XX, en este periodo se produjo una “desvisualización” o “desespacialización” en la geometría (Davis, 1993), no se la consideró necesaria, en otros casos se constituía en un obstáculo para el desarrollo de las matemáticas.

Duval (1998), citado por Torregrosa y Quesada (2007), considera que la caracterización y coordinación de los procesos de visualización y razonamiento resultan de gran importancia para resolver los problemas geométricos; son elementos esenciales de un modelo conceptual que permite conocer comprender los procedimientos usados por los estudiantes. Pero esta actividad cognitiva no se adquiere de forma inmediata, investigaciones como la de Marmolejo y Vega (2012) sobre la visualización en las figuras geométricas, aportan información suficiente para reconocer que ésta debe ser incluida en procesos de enseñanza y, desde ahí, promover y apoyar su aprendizaje.

Marmolejo y Vega (2012), señalan estudios sobre la incidencia que pueden tener los educadores en el desarrollo cognitivo de los estudiantes gracias al uso de elementos visuales por parte de los estudiantes para ello cita a Presmeg, 1986; Markovits, Rosenfeld y Eylon, 2006; menciona también a Marmolejo y González (2012) con su estudio sobre cómo los manuales escolares promueven o inciden en el aprendizaje de la visualización.

Para los docentes conocer la caracterización de los procesos cognitivos que evidencia un estudiante al resolver un problema de geometría es fundamental ya que deben frecuentemente interpretar las producciones de sus estudiantes y ofrecer actividades para mejorar sus capacidades geométricas; el acercarse a una interpretación sobre los procesos de resolución de los problemas geométricos permite intervenir más eficazmente en el aprendizaje de los estudiantes, teniendo una mejor comprensión de sus respuestas, lo que contribuye a establecer métodos de enseñanza ajustados a sus necesidades. (Torregrosa y Quesada, 2007).

En este estudio, sobre el área de figuras compuestas, nos interesa la visualización asociada a figuras geométricas de naturaleza bidimensional.

Gamboa y Ballestero (2009) en su artículo sobre didáctica de la geometría declaran que el estudio de la geometría debe desarrollar las capacidades de visualización de los estudiantes, desarrollar estrategias creativas para resolver problemas y ser capaz de justificar toda actividad geométrica apoyada en construcciones geométricas.

Distintos investigadores han definido el proceso de visualización, Hershkowitz et al. (1996) citado por Torregrosa y Quesada (2007) lo describen como "el proceso o acción de transferencia de un dibujo a una imagen mental de un objeto (no necesariamente igual para todos) o viceversa"; Clements y Batista (1992) citado en Castiblanco et al (2004) (Gamboa y Ballestero, 2009) establecen "la visualización integra los procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones a partir de las representaciones de los objetos bi o tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones" ;Cantoral y Montiel(2003), citado por Meavilla y Oller (2013), "es la habilidad para representar ,transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende", ellos promueven el uso de la geometría para alcanzar y argumentar resultados aritméticos y algebraicos.

Las definiciones anteriores dejan ver que al ser considerada la visualización como un proceso eso implica que debe darse en forma paulatina y que está ligada a la argumentación y al lenguaje natural(o simbólico).

Gamboa y Ballestero (2009) citan a Castiblanco et al (2004) quien considera que para progresar en el aprendizaje de la geometría los estudiantes deben pasar de un discurso informal basado en una argumentación descriptiva, a un discurso formal, que apoyado en la visualización se genere un razonamiento que no se base en una simple descripción de una figura, sino que enlace proposiciones usando inferencia lógica, enunciando definiciones y teoremas.

Para Duval y equipo, citado por Marmolejo y Vega (2005), el aprendizaje de los objetos matemáticos en geometría han de pasar por dos registros como mínimo el de la lengua natural y el de las figuras. Con respecto a la figura geométrica se debe hacer explícito un trabajo de distinción entre los diferentes elementos de la visualización (operaciones, cambios figúrales, focalización bidimensional y flujos visuales) que el registro figural permite.
El proceso de formación de la comprensión en geometría involucra tres estructuraciones: una perceptiva, una lingüística y otra lógica (Van Hiele, 1957); según se progresa en geometría se elimina cada vez más el lenguaje, se pasa directamente de la estructuración perceptiva a la simbología.

Lo anterior nos lleva a replantear nuestras prácticas pedagógicas, y renovar las estrategias metodológicas para la enseñanza de la geometría en base a propuestas didácticas que involucren actividades en las cuales el estudiante asuma un rol activo en su aprendizaje.

2.2 Análisis del Programa de estudio

Se realizó un análisis descriptivo del programa de estudio de Séptimo Año Básico de Matemática del Ministerio de Educación nacional publicado en junio del año 2016.

El análisis descriptivo del programa de estudio se realizó según los criterios:

- Hábitat del contenido matemático en estudio
- Objetivos transversales fundamentales y objetivos de aprendizajes
- Actividades que se proponen como ejemplo relacionado con el contenido.

El contenido de estudio se encuentra en la unidad 3 del programa de estudio, en la cual se abordan las relaciones entre la suma de ángulos interiores y exteriores de polígonos; el área de superficies de triángulos, paralelogramos y trapecios. Se define el círculo y sus elementos, se proponen mediciones concretas de manera experimental para relacionar la medida del diámetro y el perímetro del círculo encontrando una estimación de pi. Se elabora la fórmula del área del círculo y se utiliza en la resolución de problemas relacionados con geometría y en contextos diferentes de la vida real. Se define la circunferencia como lugar geométrico, se utiliza la circunferencia en la construcción de rectas perpendiculares, paralelas, puntos medios y bisectrices con regla y compás, triángulos y cuadriláteros congruentes. Se incluye la noción de vectores representados en el plano cartesiano.

El programa incluye orientaciones didácticas, sugiriendo al docente situaciones de aprendizajes que promuevan el diálogo, la discusión matemática y el desarrollo de habilidades matemáticas respecto de los contenidos; estas situaciones a su vez deben estimular en los estudiantes la curiosidad y la capacidad de elaborar conceptos que permitan establecer conexiones entre la matemática, la realidad y diferentes áreas del conocimiento.

Las habilidades que se proponen desarrollar en la unidad son :fundamentar conjeturas, dando ejemplos y contraejemplos; evaluar la argumentación de otros, dando razones; describir relaciones y situaciones matemáticas de manera verbal y usando símbolos; explicar y fundamentar: soluciones obtenidas y los procedimientos utilizados, los resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas; usar modelos (manuales o con *software* educativo) para resolver problemas en distintos contextos, de otras áreas del conocimiento y de la vida diaria.

Los Objetivos de Aprendizajes Transversales (OAT) se mantienen de acuerdo a lo declarado en las bases curriculares del 2011, estos objetivos incluyen actitudes y valores que se integran con los conocimientos y las habilidades; en el ciclo de la Educación Media, involucran las distintas dimensiones del desarrollo – físico, afectivo, cognitivo, sociocultural, moral y espiritual - , además de las actitudes frente al trabajo y al dominio de la tecnologías de la información y la comunicación.

El objetivo de aprendizaje relacionado con la temática de interés es “Mostrar que comprenden el círculo aplicando las aproximaciones del perímetro y del área en la resolución de problemas geométricos, de otras asignaturas y de la vida diaria”, los contenidos relacionados con este objetivo son elementos del círculo (centro, diámetro y radio) área de triángulos, paralelogramos y área del círculo.

Las actividades que se proponen son dos problemas relacionados con el contenido en estudio, en uno de los cuales tienen que estimar el área de un círculo utilizando material concreto y realizando cálculo de áreas de cuadrados inscritos y circunscritos al círculo y realizar comparaciones entre ellas.

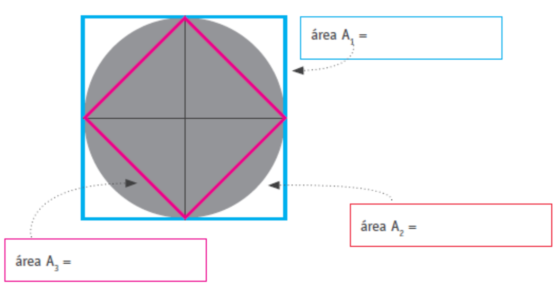


Figura 3

El otro problema se enmarca en un contexto cotidiano respecto a la confección de etiquetas circulares, sobre lo cual se solicitan tareas de cálculo de áreas, conjeturar sobre la cantidad de material que se usa para ello si se modifican algunas características de la etiqueta

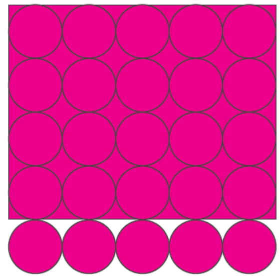


Figura 4

2.3 Análisis de dos textos escolares

Se realizó el análisis de dos libros de textos entregados por el MINEDUC, el texto 1 se titula: Matemática 8° Básico del año 2014 cuyos autores son Alfaro S., Espinoza Y.; Chala J., Guajardo I. y Hurtado M. de la Editorial Galileo. El texto 2 titulado Matemática 7°Básico del año 2016, cuyos autores son Merino, R., Muñoz V., Pérez, B., Rupin P. de Ediciones SM Chile S.A.

Los criterios de análisis utilizados fueron:

- Contenidos matemáticos que se exponen y cómo están organizados
- Tipos de actividades que se proponen y sus descripciones.
- Tipos de Actividades propuestas

Texto1:

Se analizaron páginas de la Unidad 3 desde la p.108 a la p.114, se observa una estructura basada en definiciones, ejemplos y ejercicios; agregando algunas notas como recordatorio. Los ejercicios que se proponen los conectan con el ejemplo modelo para que el estudiante reproduzca el procedimiento; los contenidos matemáticos que se exponen son: circunferencia y círculo: sus elementos, área y perímetro.

El texto 1 declara que su enfoque es usar fórmulas para calcular áreas y perímetros; resolver problemas relacionados con medición y fórmulas.

Proporciona la definición de la circunferencia y de sus elementos; la simbología de estos; entrega ejemplos. La misma estructura para el círculo: definición, elementos; y ejemplos. Incluye secciones de Ejercicios: prácticas (supervisada e independiente) y resolución de problemas; Repaso; Pruebas de lecciones. En las páginas 144 -145 se presenta una guía de estudio y en las páginas 148 - 149 una prueba del capítulo.

El tipo de tareas están referidas a habilidades de reconocimiento y cálculo, apuntando al uso de fórmulas más que al razonamiento o argumentación.

Se incluyen secciones de práctica con supervisión, práctica independiente y práctica y resolución de problemas; para finalizar el capítulo con una conexión a otras disciplinas.

Propone actividades en las que se solicita calcular el perímetro de una circunferencia y el área de un círculo dados algunos elementos; en la resolución de problemas se solicita construir circunferencias, calcular el radio o diámetro conocido su perímetro o área, cálculos en contexto, cálculo del área sombreada. También incluyen actividades de repaso, replicando los procesos de los ejemplos; y otras para razonar y comentar, explicar y comentar algún procedimiento propuesto.

Además se consideran pruebas por lecciones y por capítulo, que se presentan con el mismo formato de los ejemplos; apoyadas en una guía de estudio para repaso.

La mayoría de las actividades son ejercicios que apuntan al cálculo de medidas de perímetro, área, radio y diámetro del círculo o circunferencia, dados algunos de sus elementos o condiciones, en la resolución de estos deben utilizar una fórmula y procedimientos aritméticos; replicando alguno de los propuestos en los ejemplos.

En un ejemplo para deducir la fórmula del área del círculo se comete un error pragmático al establecer la igualdad entre las fórmulas de área del polígono regular y la del círculo.

Así obtendremos la fórmula del área del círculo en forma aproximada:

$$\frac{n \cdot b \cdot h}{2} = \frac{2\pi \cdot r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$$

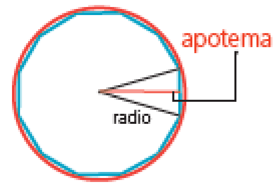


Figura 5

Texto 2

Se analizaron páginas desde la p.210 a la p.213 del capítulo 3, el contenido a desarrollar es la estimación del área de un círculo; se hace una breve reflexión en base a la pregunta ¿para qué?; se continúa el desarrollo de la temática basándose en la pregunta ¿cómo estimar el área de un círculo? Para dar respuesta se proponen dos situaciones: en la situación 1 "Calcular el área a partir de un cuadrado inscrito y uno circunscrito"; se plantea en un contexto escolar, suponiendo que dos estudiantes realizan el cálculo del área de los cuadrados, uno del inscrito y el otro del circunscrito al círculo de diámetro 8 cm, deduciendo que él área del círculo queda comprendida entre las áreas de estos cuadrados; en la situación 2 "Calcular el área a partir de un círculo fraccionado", los estudiantes buscan otra forma de estimar el área del círculo; se divide en partes iguales el círculo, separándolas y se disponen estas una al lado de la otra, para formar una figura similar a un paralelogramo, en la medida que se aumentan la cantidad de particiones en el círculo ésta se asemeja más a un paralelogramo deduciendo la fórmula para calcular el área de un círculo como una aproximación al área del paralelogramo. Luego de estas situaciones se concluye la fórmula para calcular el área del círculo.

Las actividades que se plantean están enmarcadas en dos secciones una rotulada Practiquemos lo aprendido en la cual se incluyen ejercicios de repaso (potencias y área del triángulo), ejercicios de Práctica guiada para el cálculo de áreas de círculos, cálculo del radio/diámetro y cálculo de áreas sombreadas, dando un ejemplo resuelto para cada tipo, detallando los pasos a seguir para dar solución a lo solicitado; además en otra subsección denominada Aplica se proponen situaciones en contexto matemático o de otra disciplina, para el cálculo de área de círculos; se agregan actividades para reflexionar y reforzar al final de la sección. En otra sección rotulada Como Voy se proponen actividades para ejercitar las lecciones que incluye el capítulo 3; como reconocer radio y diámetro de un círculo; calcular: perímetro y área de círculos; radios y diámetros de círculos; perímetro y área sombreada generada por figuras compuestas; incluyendo ejercicio repetitivos y otros tipo problema al final de la sección se agrega un Desafío de integración.

De las actividades propuestas en este texto, se puede establecer que un primer grupo de ejercicios rutinarios porque son cálculos directos del área y del radio/diámetro del círculo conocido el perímetro o el área del círculo, en los cuales solo deben emplear fórmulas; un segundo grupo de actividades son ejercicios del tipo problemas que mediante un registro figural se representan figuras compuestas por triángulos, cuadrados o rectángulos y círculos para las cuales el estudiante debe emplear procesos cognitivos de visualización y razonamiento para organizar sus procedimientos de resolución; un tercer grupo de actividades son problemas dados en lenguaje natural en un contexto cotidiano, algunos con una figura de apoyo, en estos se requiere que el estudiante ponga en juego habilidades de resolver, comunicar y argumentar ejecutando acciones que le permita resolverlos.

Con respecto a la Guía Didáctica del Docente para este texto, p.120 – p.121, en la sección Información complementaria didáctica se sugiere el modelo de Van Hiele: estrategia para ordenar y enseñar la geometría; realizando una descripción del mismo y proporcionando una tesis como referencia que orienta cómo aplicar este modelo a una secuencia de aprendizaje para la circunferencia; entrega algunas descripciones de los niveles y fases incluidos en ella. Al final se da una Actividad Complementaria, tipo taller, para realizar en grupos que incluye trabajar con material concreto para calcular perímetros y áreas; contrastar igualdad de áreas.

Estos dos textos muestran distintas formas de presentar el objeto matemático de interés: área de un círculo; el texto1 con una forma deductiva, de un ejemplo parte de lo general a lo particular, y en el texto 2 con una forma inductiva, en base a situaciones propuestas para que el estudiante descubra y concluya; las actividades que contiene el texto 1 son del tipo ejercicios en contexto matemático o en otro contexto, estos conllevan a procesos rutinarios y uso de algoritmos; en el texto 2 se presentan actividades que incluyen ejercicios y problemas, se utilizan algoritmos pero también se requiere que el estudiante ponga en juego acciones o estrategias que surjan de sus experiencias, dentro de estos problemas se impulsa la conjetura, el descubrimiento y la prueba; por lo anteriormente explicitado y de acuerdo a los modelos epistemológicos propuesto por Gascón (2001) el texto 1 tiende hacia un Modelo Tecnicista (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997) que considera aplicaciones, en cambio el texto 2 tiene características de un Modelo Cuasi-empírico (Lakatos, 1978) supone el desarrollo de la teoría desde su informalidad.

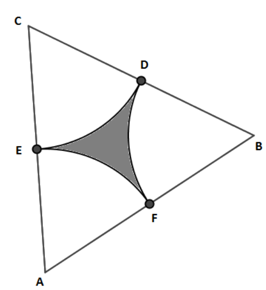
2.4 Análisis preliminar estudio exploratorio

Se aplicó un estudio exploratorio a un grupo de 18 estudiantes cuyas edades fluctúan entre 14 a 15 años, que ya han adquirido el conocimiento sobre el área del cuadrado, del rectángulo y del círculo, el estudio se compone de tres tareas sobre área de figuras compuestas (Anexo 1), preguntas similares a las de los libros de textos del MINEDUC de tal modo de observar los procedimientos que realizan los estudiantes para detectar estrategias y errores.

En este estudio se incluye el área de figuras compuestas por cuadrados, rectángulos, triángulos y círculos, se diseña de tal forma que proporcione información sobre lo que saben o no saben los estudiantes, de cómo comprenden, cómo visualizan las figuras, cómo resuelven y cómo argumentan, Se realizó un análisis de las producciones de los estudiantes (Anexo 2) teniendo como criterios de análisis:

- Comprensión de la consigna
- Estrategias o acciones utilizadas
- Errores que se presentan

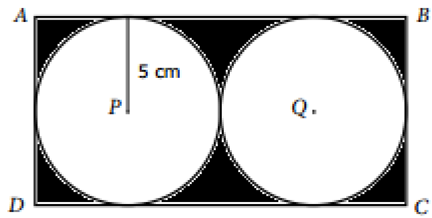
Tarea 1: Observa la figura e identifica qué figuras geométricas forman la superficie pintada; represéntalas con un dibujo y escribe el nombre de ellas. (Imagina que la recorta, qué se forma).
Los puntos D, E y F son puntos medios de los respectivos lados del triángulo equilátero ABC.



De las estrategias utilizadas por los estudiantes en la tarea 1 se concluye que algunos de los estudiantes colocan su atención en la figura completa, visualizan el triángulo y los sectores circulares de 60° sobrepuestos en él, lo que origina la figura sombreada, otros se focalizan en la figura sombreada visualizando los arcos de circunferencia (1/6 de circunferencia) que la limitan.

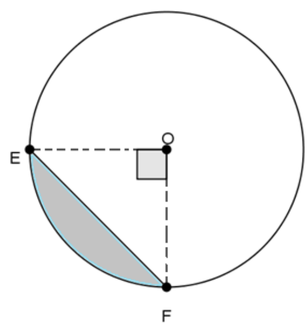
Los errores son de tipo semántico, confunden círculo con circunferencia, no identifican a qué parte del círculo o de la circunferencia corresponden los sectores circulares o arcos de circunferencia.

Tarea 2: En la figura ABCD es un rectángulo, los círculos de centro P y Q tienen un radio de 5 cm cada uno. Explica cómo tendrías que calcular el área de la región pintada. (¿Qué tendrías que hacer?, escribe el procedimiento)



La tarea 2 no presentan mayor dificultad para los estudiantes en la visualización de las figuras geométricas a las que deben calcular el área para obtener la de la región sombreada; hay claridad en el proceso que deben realizar a pesar que cometen errores sintácticos, como restar al revés las áreas, y errores semánticos, confunden circunferencia con círculo.

Tarea 3: En la figura, O es el centro de un círculo de radio 10 cm y $\sphericalangle EOF = 90°$. Identificar qué figuras originan la región pintada y calcular el área de la figura pintada.



En la tarea 3, a los estudiantes les resultó difícil descomponer la figura, las estrategias utilizadas son muy similares a las de la tarea 2, por una parte algunos visualizan el traslape y reconocen las figuras geométricas, otros se focalizan en la parte sombreada y los elementos que la delimitan (cuerda y radio).

Los errores tienen que ver con errores semánticos al confundir conceptos circunferencia con círculo y el triángulo rectángulo con el triángulo equilátero, errores algebraicos/aritméticos restar al revés las áreas y sumar términos no semejantes, la mayoría tiene claridad en el proceso a realizar.

Capítulo III

Objeto Matemático

3.1 Ideas de la epistemología del objeto matemático

La historia del área y del perímetros se pierde en la antigüedad, se encuentran referencia a estos temas en problemas que incluía medidas del contorno de figuras y de sus áreas (parcelas de terrenos, planos de palacios, etc., o simples figuras) en tabletas sumerias como en los papiros egipcios (3000 años a. C). (Lluch y Valenzuela, 2001)

Herodoto (historiador griego, 484 a. C) sostenía que la geometría se había originado en Egipto a partir de una necesidad práctica, trazar los lindes de las tierras después de la inundación anual del valle del río Nilo. Por otra parte, Aristóteles (filósofo griego, 380 a. C) sostenía en cambio, que el desarrollo de la geometría en Egipto se había visto impulsado por la existencia de una amplia clase sacerdotal ociosa (Boyer, 2010).

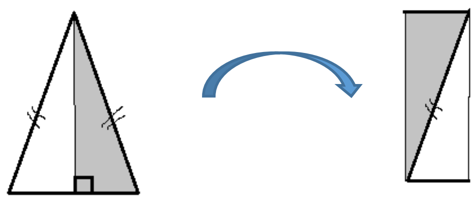
A los geómetras egipcios se les llamó “los tensadores de cuerda”(o agrimensores) este hecho apoya cualquiera de las dos posturas, porque las cuerdas se usaron tanto para bosquejar los planos de los templos como para reconstruir los límites borrados entre los terrenos (Boyer, 2010)

Figura 6

Heras, J. (2014)

En la India los resultados geométricos más antiguos descubiertos son los llamados sulvasutras o “reglas de la cuerda” que trataban de relaciones sencillas que al parecer utilizaban en la construcción de altares y de templos. Se piensa que las motivaciones geométricas en ambas culturas, surge de una fuente común relacionada con algunos ritos primitivos como la ciencia que se desarrolló a partir de la mitología (Boyer, 2010).

Sobre lo anterior se encuentran evidencias en el papiro de Ahmes[1] (escriba del año 1650 a.C), en el problema 51 “para calcular el área de un triángulo isósceles hay que tomar la mitad de lo que hoy llamamos base y multiplicarlo por sus altura”



Ahmes, justifica con lo que podríamos actualmente asociar con una descomposición de una figura en otra equivalente.

Figura 7

En el problema 48 aproximación al área de un círculo: egipcios muestran un procedimiento sencillo “un cuadrado de lado 9 unidades, se divide en tres partes iguales cada lado y suprimiendo las esquinas se forma un octógono cuya área, de 63 unidades, no difiere demasiado del área del círculo inscrito en el cuadrado inicial, la cual no difiere demasiado del área del cuadrado de lado 8 unidades”.

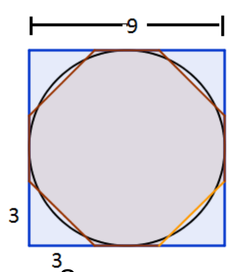


Figura 8

$$á_{octogono} = á_{cuadrado} - 4á_{\Delta}$$

$$á_{octogono} = 9^2 - 4 \cdot \frac{9}{2} = 63$$

$$63 < á_{circulo} < 64$$

En estos problemas geométricos, se observan transformaciones que pueden considerarse como los comienzos de una teoría de congruencia y de la idea de demostración, pero los egipcios no desarrollaron más estos principios (Boyer, 2010).

[1] Se conoce como papiro de Rhind, escoses que lo compró en al año 1858. (Boyer, Carl B., Historia de la Matemática .Ciencia y Tecnología. Alianza Editorial.2010)

3.2 Estatus actual del objeto matemático

Área de regiones poligonales

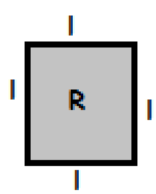
En Moise (1968), se considera el conjunto $\mathcal{R}$ de todas las regiones poligonales y $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, se define una función área[2] a para regiones poligonales como $a: \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de modo que $y = a(r)$ para cada región $r \in \mathcal{R}$.
Le siguen los siguientes postulados:

Postulado 1. Para toda región poligonal $r, a(r) > 0$

Postulado 2. Si dos regiones triangulares son congruentes, entonces tienen la misma área.

Postulado 3.Si dos regiones triangulares se intersectan en fronteras y vértices (o no se intersectan), entonces el área es la suma de sus áreas (postulado de aditividad).

Postulado 4.El área de una región cuadrada es el cuadrado de la longitud de su lado (postulado de la unidad)



R: región cuadrada de lado
de medida l

$$a(R) = l^2$$

Figura 9

A partir de estos postulados se demuestran los siguientes teoremas para área de: rectángulos, triángulos y cuadriláteros.

[2] Se da como postulado (A1) en Moise, E.E. (1968). Elementos de Geometría Superior. Compañía Editorial Continental,

Teorema 1: El área de una región rectangular es el producto de la medida de su base y la de su altura.

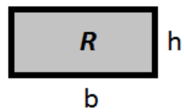


Figura 10

R: región rectangular; b: medida de la base, h: medida de la altura

$$a(R) = bh$$

Demostración: consideremos la figura11; en ella A denota el área desconocida del rectángulo.

Se ha construido un cuadrado de lado $(b + h)$ que por el postulado 4 su área a es

$$a = (b + h)^2$$

Como la figura está compuesta de dos cuadrados, que de acuerdo al postulado 4, sus áreas son b^2 y h^2 .

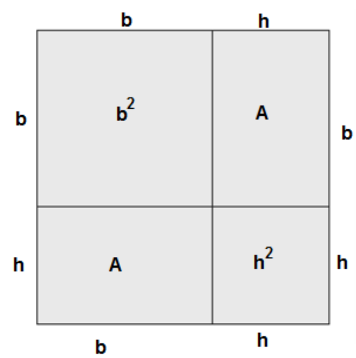


Figura 11

Así por el postulado 3 de aditividad de área, $a = b^2 + 2A + h^2$ luego por la propiedad de transitividad de la igualdad,

$b^2 + 2A + h^2 = (b + h)^2$

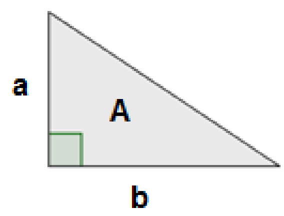
$b^2 + 2A + h^2 = b^2 + 2bh + h^2$ / desarrollando

$2A = 2bh$ / cancelando los términos semejantes

$A = bh$ / simplificando

Como se quería demostrar.

Teorema 2: El área de un triángulo rectángulo es la mitad del producto de las longitudes de las medidas de sus catetos.



$$a_{\Delta} = \frac{a \cdot b}{2}$$

Demostración: se considera un triángulo rectángulo de área A con catetos de medidas a y b; se forma un rectángulo CDEF dos de cuyos lados son los catetos del triángulo rectángulo (figura 12); se traza la diagonal $\overline{FD}$ dando origen a dos triángulos congruentes por criterio LAL:$\Delta CDF \cong \Delta EFD$.

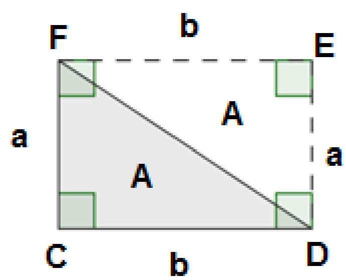


Figura 12

Por postulado 2 las áreas de los triángulos son iguales, es decir,

$a(\Delta CDF) = a(\Delta EFD)$ y como $a(\Delta CDF) = A$, entonces $a(\Delta EFD) = A$.

Se puede afirmar que

(1) $a(CDEF) = ab$ por teorema 1

(2) $a(CDEF) = a(\Delta CDF) + a(\Delta EFD)$ por el postulado 3 de aditividad

(3) $a(CDEF) = A + A$

Luego por transitividad entre (1) y (3)

$2A = ab$, por lo tanto

$$A = \frac{a\ b}{2}$$

Que es lo que se quería demostrar.

Teorema 3: El área de un triángulo es la mitad del producto de cualquier base y su correspondiente altura.

Demostración: se considera las medidas b y h para la base y altura respectiva; y A para el área del triángulo.

Debemos considerar tres casos para estos tipos de triángulos, como se muestra en la figura 13.

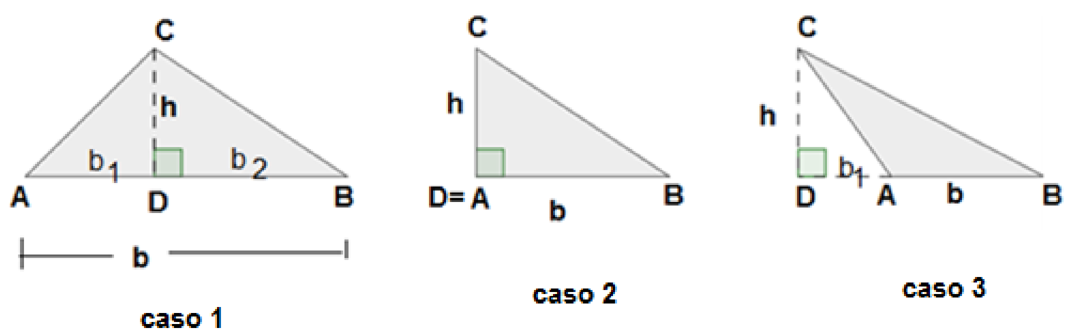


Figura 13

Caso 1:

La altura $\overline{CD}$ divide al triángulo ABC en dos triángulos con bases b_1 y b_2 además

$b\ =\ b_1 +\ b_2;$ se puede afirmar que:

- $a(\Delta ADC) = \frac{b_1\ h}{2}$ y $a(\Delta DBC) = \frac{b_2\ h}{2}$ (teorema 2)
- $a(\Delta ABC) = \frac{b_1\ h}{2} + \frac{b_2\ h}{2}$ (postulado 3 aditividad de áreas)
- $a(\Delta ABC) = \frac{(b_1 + b_2)h}{2}$ sustituyendo $b\ =\ b_1 +\ b_2$
- $a(\Delta ABC) = \frac{bh}{2}$ entonces $A = \frac{bh}{2}$ como se quería demostrar.

Caso 2:

A = D, el triángulo ABC es un triángulo rectángulo y por teorema 2

$$A = \frac{bh}{2}$$

Caso 3

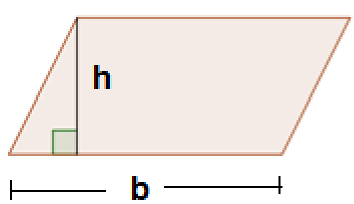
Si el pie D de la altura está en la prolongación de la base ($\overline{AB}$),

- $a(\Delta ADC) = \frac{b_1\, h}{2}$ (teorema 2) (a)
- $a(\Delta DBC) = \frac{(b_1+b)\, h}{2}$ (teorema 2) (b)
- $a(\Delta ADC) + A = a(\Delta DBC)$ (postulado 3 aditividad de áreas) (c)
- $\frac{b_1\, h}{2} + A = \frac{(b_1+b)\, h}{2}$ (sustituyendo a y b en c)

Luego, cancelando términos se obtiene

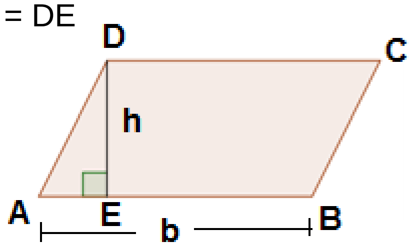
$$A = \frac{b\, h}{2}.$$

Teorema 4: El área de un paralelogramo es el producto de cualquier base por su altura correspondiente.



$$a_{\#} = bh$$

Demostración: se considera el paralelogramo ABCD de base AB= b y altura h = DE



Por el vértice C (figura 14) trazamos una perpendicular a la recta que contiene el lado $\overline{AB}$, determinando el punto F en la prolongación de $\overline{AB}$, tal que CF=h.

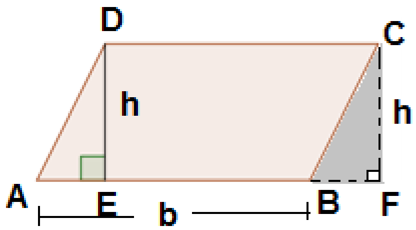


Figura 14

Se puede afirmar que

- se genera $\Delta BFC \cong \Delta AED$ por criterio LLA y por postulado 2 sus áreas son iguales. (a)
- $a(ABCD) = a(\Delta AED) + a(\boldsymbol{EBCD})$ (postulado 3 aditividad de áreas) (b)
- $a(EFCD) = a(\Delta BFC) + a(\boldsymbol{EBCD})$ (postulado 3 aditividad de áreas) (c)
- $a(ABCD) = a(\boldsymbol{EFCD})$ sustituyendo (a) en (b) y (c); y aplicando transitividad (d)
- EFCD rectángulo de base $EF = CD = b$ y altura h entonces su área es

$a(EFCD) = bh$ (Teorema 1) (e)

Por lo tanto, $a(ABCD) = bh$ sustituyendo (e) en (d).

Área del círculo

Según Maza (1998) el método de Arquímedes(s III a. C) es una estrategia que por medio del proceso de exhaustividad se aproxime al área del círculo; partiendo de hexágonos inscritos y circunscritos en un círculo de radio r, se duplicó sucesivamente el número de lados, generando una sucesión, se calcula por exceso y defecto el área de estas regiones poligonales regulares. Se obtiene una aproximación del área del círculo, llegando hasta la región poligonal regular de 96 lados.

Figura 15

En la siguiente tabla se muestra el área de las regiones poligonales del hexágono inscrito y circunscrito al círculo, y las que se obtienen duplicando sus lados

$á_n$: Área d la región poligonal regular inscrita a un círculo en función del radio r del círculo	A_n : Área de la región poligonal regular circunscrita a un círculo, en función del radio r del círculo.
$á_6 = \frac{3\sqrt{3}r^2}{2}$	$A_6 = 2\sqrt{3}r^2$
$á_{12} = 3r^2$	$A_{12} = 12\, r^2\sqrt{2-\sqrt{3}}$
$á_{24} = 6r^2\sqrt{2-\sqrt{3}}$ …………	$A_{24} = 24\, r^2\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}-2-\sqrt{3}\right)$ ……..

Continuando con este proceso, es posible, establecer el área del círculo de manera precisa, se deduce que el área de las regiones poligonales inscritas y circunscritas al círculo se puede expresar como$a_n = k_n r^2$ y $A_n = k'_n r^2$, siendo $k_n\ y\ k'_n$: sucesiones que depende del número n de lados, son sucesiones monótonas, crecientes y acotadas superiormente tal que $\lim_{n\to\infty} k_n = \boldsymbol{\pi}$, del mismo modo para k'_n. El aumento de la cantidad de lados de la región poligonal, hace que su área sea próxima a la del círculo, es decir, $\lim_{n\to\infty}(k_n r^2) = \boldsymbol{\pi} r^2$.Luego, el área del círculo es πr^2.

Capítulo IV

Marco Referencial

La teoría que da sustento al estudio es el Modelo de Van Hiele (1957,1986), el cual se usa en primera instancia en el diseño de la propuesta de enseñanza aprendizaje sobre el área de figuras compuestas, en la selección y presentación de las actividades de modo que éstas desarrollen la visualización y los niveles de razonamiento en los cuales los estudiantes de octavo año básico deben cumplir ciertos procesos de logro y aprendizaje. En segunda instancia el modelo se utiliza en la aplicación y evaluación de la propuesta, de modo de apreciar en qué forma los estudiantes evidencian en sus producciones el paso de la descripción de la figura a un proceso más formal, basado en razonamientos y argumentación.

El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele tiene su origen en los trabajos doctorales de dos profesores holandeses de Matemáticas de enseñanza secundaria, Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele, quienes expusieron un modelo de enseñanza y aprendizaje de la geometría. Este modelo explica cómo se origina la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes distinguiendo cinco niveles consecutivos: la visualización o reconocimiento, el análisis, la deducción informal, la deducción formal y el rigor, los cuales se repiten con cada aprendizaje nuevo. El estudiante se ubica en un nivel al inicio del aprendizaje y, según vaya cumpliendo con un proceso, avanza al nivel superior. Dentro de cada nivel se proponen cinco fases de aprendizaje que proporcionan indicadores para apoyar a los estudiantes a mejorar la calidad de su razonamiento, estas fases guían al docente en el diseño y organización de las experiencias de aprendizaje adecuadas para el progreso del estudiante en su paso de un nivel a otro (Gamboa y Vargas, 2013).

Según Jaime (1993) el modelo de Van Hiele incluye dos aspectos fundamentales:

- Descriptivo: mediante este se identifican diferentes formas de razonamiento geométrico de los individuos y se puede valorar su progreso.
- Instructivo: da directrices a los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en el nivel de razonamiento geométrico en el que se encuentran.

Para dominar el nivel en que se encuentra y así poder pasar al nivel inmediatamente superior, el estudiante debe cumplir ciertos procesos de logro y aprendizaje. Este modelo distribuye el conocimiento escalonadamente en cinco niveles de razonamiento, secuenciales y ordenados. Dentro de cada nivel propone una serie de fases de aprendizaje que el estudiante debe cumplir para avanzar de un nivel a otro, lo que constituye la parte formativa del modelo. Ningún nivel de razonamiento es independiente de otro y no es posible saltarse ninguno: el individuo debe pasar y dominar un nivel para subir al siguiente.

En esta investigación se consideran los tres primeros niveles, por las características de los estudiantes con los cuales se trabajó, cuyas edades fluctúan entre13 a 14 años.

A continuación, se describen los niveles y fases de aprendizajes que el estudiante debe cumplir para avanzar de un nivel a otro, de acuerdo a Fouz y De Donosti (2005), Jaime (1993), Jaime y Gutiérrez (1994) y Beltranetti, Esquivel y Ferrari (2005).(Vargas y Gamboa, 2013).

Niveles de razonamiento

Nivel 1:(visualización o reconocimiento) El estudiante reconoce las figuras geométricas por su forma como un todo, no diferencia partes ni componentes de la figura. Puede, sin embargo, producir una copia de cada figura particular o reconocerla. No es capaz de reconocer o explicar las propiedades determinantes de las figuras, las descripciones son principalmente visuales y las compara con elementos familiares de su entorno. No hay un lenguaje geométrico básico para referirse a figuras geométricas por su nombre.

Nivel 2:(Análisis) El estudiante puede ya reconocer y analizar las partes y propiedades particulares de las figuras geométricas y las reconoce a través de ellas, pero no le es posible establecer relaciones o clasificaciones entre propiedades de distintas familias de figuras. Establece las propiedades de las figuras de forma empírica, a través de la experimentación y manipulación. Como muchas de las definiciones de la geometría se establecen a partir de propiedades, no puede elaborar definiciones.

Nivel 3: (Deducción informal) El estudiante determina las figuras por sus propiedades y reconoce cómo unas propiedades se derivan de otras, construye interrelaciones en las figuras y entre familias de ellas. Establece las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir las figuras geométricas, por lo que las definiciones adquieren significado. Sin embargo, su razonamiento lógico sigue basado en la manipulación. Sigue demostraciones pero no es capaz de entenderlas en su globalidad, por lo que no le es posible organizar una secuencia de razonamientos lógicos que justifique sus observaciones. Al no poder realizar razonamientos lógicos formales ni sentir su necesidad, el individuo no comprende el sistema axiomático de las Matemáticas.

Fases de aprendizaje

Estas fases guían al docente en el diseño y organización de las experiencias de aprendizajes del estudiante adecuadas para su progreso en su paso de un nivel a otro. No son exclusivas de un nivel sino, en cada nivel, el estudiante comienza con actividades de la primera fase y continúa así, de tal forma que al terminar la quinta fase debe haber alcanzado el nivel de razonamiento siguiente según Jaime 1993.Se entrega la descripción de las fases, según Jaime (1993) y Fouz y De Donosti (2005), citado por Vargas y Gamboa (2013).

Fase 1: Información. En esta fase se toma contacto con el objeto de estudio; el docente debe identificar los conocimientos previos que puedan tener sus estudiantes referidos a la temática y su nivel de razonamiento en cuanto a este. Los estudiantes reciben la información para conocer el estudio que van a iniciar, los tipos de actividades que van a desarrollar y que se utilizará para ello.

Fase 2: Orientación dirigida. Se guía a los estudiantes mediante actividades y problemas (dados por el docente o planteados por los estudiantes), para que estos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos de la red de conocimientos por formar. Los problemas propuestos han de conducir directamente a los resultados y propiedades. En esta fase el docente tiene un rol fundamental, ya que debe seleccionar las actividades adecuadas para permitir al estudiante aprender los conceptos, propiedades o definiciones fundamentales para el nuevo nivel de razonamiento.

Fase 3: Explicitación. Los estudiantes deben tratar de expresar en palabras o por escrito los resultados que han obtenido, intercambiar sus experiencias y discutir sobre ellas con el docente y con sus pares, de modo que sean conscientes de las características y relaciones descubiertas y consoliden el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio. Los estudiantes tienen que utilizar el vocabulario adecuado para describir la estructura sobre la que han estado trabajando. Deben aprender y afianzar el vocabulario propio del nivel. En esta fase se produce una revisión del trabajo realizado con anterioridad, a partir de conclusiones, práctica y perfeccionamiento de la forma de expresarse, todo lo cual origina un afianzamiento de la nueva red de conocimientos que se está formando.

Fase 4: Orientación libre. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, quizás más complejos. El docente debe limitar su ayuda a los estudiantes en la resolución de los problemas. Los problemas incluidos en esta fase deben obligar a los estudiantes a combinar sus conocimientos y utilizarlos en estas nuevas.

Fase 5: Integración. Los estudiantes establecen un enfoque global de todo lo aprendido sobre el tema y de la red de relaciones que están terminando de formar, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente. El docente dirige resúmenes que ayuden a los estudiantes a lograr esta integración, las actividades deben contribuir a la organización de los conocimientos adquiridos.

El tránsito por cada una de estas fases y la observación de las mismas fortalece, en gran medida, la posibilidad de que un estudiante avance del nivel en el que se encuentra y así pueda desarrollar sus habilidades y capacidad de razonamiento geométrico. (Vargas y Gamboa, 2013)

Consideramos además a Duval (1998), citado por Castiblanco et al., 2004 quien señala tres niveles de razonamiento en geometría (Gamboa y Ballestero, 2009):

- **Nivel global de percepción visual**: permite relacionar figuras con objetos físicos, donde se destaca la forma total de la imagen a partir de la posición o el tipo de trazo.
- **Nivel de percepción de elementos constitutivos**: se percibe la imagen formada por elementos de una misma dimensión o inferiores. No son importantes la posición o tamaño, el foco está en establecer las relaciones entre los elementos que conforman la imagen.
- **Nivel operativo de percepción visual**: permite la manipulación mental de los elementos constitutivos de la figura.

Gamboa y Ballestero (2009) citan a Castiblanco et al (2004) quien señala que para avanzar en el aprendizaje de la geometría los estudiantes deben transitar desde un discurso informal basado en una argumentación descriptiva, a un discurso formal que apoyado en la visualización se de origen a un razonamiento lógico, que encadena proposiciones usando inferencia lógica, donde se enuncian definiciones y teoremas.

Los procesos de visualización y razonamiento que resultan de gran importancia para resolver los problemas geométricos; son elementos esenciales de un modelo conceptual que permite conocer la actividad de los estudiantes(Duval,1998) ,citado por Torregrosa y Quesada(2007); en este estudio tendremos en cuenta la visualización como un proceso para que el estudiante pueda discriminar las diferentes maneras de ver que permiten las figuras geométricas y de esta manera acceder a las figuras como verdaderos soportes intuitivos en el desarrollo de actividades geométricas(Marmolejo y Vega, 2012).

Se atiende a la visualización asociada a las figuras geométricas de naturaleza bidimensional y asumimos que la visualización, como menciona Marmolejo y Vega (2012), está compuesta por dos formas de proceder sobre las figuras geométricas:

1. La acción de discernir en una figura geométrica inicial (figura de partida) y las transformaciones que permiten modificarla en otra (figura de llegada), (Duval, 2003)
2. Los cambios de focalización aplicados sobre la figura, u otras que se derivan de ella, que constituyen la figura de partida y que han de considerarse en el desarrollo y comprensión de la situación propuesta.

Capítulo V
Metodología

5.1 Tipo de Estudio

Este estudio es de tipo cualitativo que tiene como metas describir, comprender e interpretarlos fenómenos, a través de las percepciones y significados derivados por las experiencias de los estudiantes (Sampieri, 2006), puesto que deseamos observar y analizar lo que ocurre cuando se proponen situaciones de enseñanza y aprendizaje a educandos para desarrollar la visualización y el razonamiento en problemas geométricos, que requieren calcular el área de figuras compuestas por regiones poligonales y círculos o partes de un círculo, para lo cual se exponen estas situaciones basadas en el Modelo de Van Hiele referente teórico para su diseño con el objetivo de contribuir al aprendizaje de los estudiantes. Se aplicó un Estudio Exploratorio (Anexo 1)con tres preguntas, a estudiantes de primer año medio cuyas edades fluctúan entre 14 a 15 años quienes ya han adquirido el conocimiento de área de regiones poligonales y del círculo, con el objetivo de identificar el dominio que tienen ellos sobre el área de figuras compuestas, categorizar sus estrategias de solución y errores, detectar las dificultades que se les presentan para considerar todo esto en la elaboración de la propuesta a aplicar en este estudio.

5.2 Metodología de Ingeniería Didáctica

La metodología seleccionada para realizar este estudio está enfocada en la Ingeniería Didáctica, surgió a comienzos de los años ochenta, la cual se fundamenta en la teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997) y la teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1991).Ésta metodología de investigación se caracteriza primero por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en el aula, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza; y segundo por el registro de los estudios de caso y por la validación que se funda en la confrontación entre el análisis apriori y aposteriori.(Artigue, M.(1995) citado por Campos ,E.,2006).

Esta metodología consta de cuatro fases: análisis preliminares, concepción y análisis apriori de las situaciones didácticas, experimentación y análisis aposteriori y evaluación.

En este estudio se emplearon algunas fases de la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, en el análisis preliminar fueron revisados libros de historia de las matemáticas, programas de estudio, libros de texto, para los análisis epistemológicos y didáctico; se elaboró un cuestionario exploratorio para identificar las concepciones de los estudiantes respecto al objeto de estudio; se diseñaron las situaciones de enseñanza aprendizaje con su respectivo análisis a priori que fueron utilizadas en la fase experimental, para observar los distintos niveles de razonamiento de los estudiantes. En seguida se analizan los datos recolectados para proceder a hacer el análisis a posteriori con la respectiva valoración de los resultados obtenidos para finalmente realizar la confrontación de los análisis apriori y aposteriori, a modo de validación de la situación de enseñanza aprendizaje.

5.3. Etapas del trabajo

Este estudio se planeó en cuatro etapas:

Etapa 1: Análisis preliminares

Se aplicó un estudio exploratorio a un grupo de 18 estudiantes cuyas edades fluctúan entre 14 a 15 años, que ya han adquirido el conocimiento sobre el área del cuadrado, del rectángulo y del círculo, el estudio se compone de tres actividades sobre área de figuras compuestas, preguntas similares a las de los libros de textos del MINEDUC de tal modo de observar los procedimientos que realizan los estudiantes para detectar estrategias y errores.

En este estudio se incluye el área de figuras compuestas por cuadrados, rectángulos, triángulos y círculos, se diseña de tal forma que proporcione información sobre lo que saben o no saben los estudiantes, de cómo comprenden, cómo visualizan las figuras, cómo resuelven y cómo argumentan, Se realizó un análisis de las producciones de los estudiantes (Anexo 2) teniendo como criterios de análisis:

- Comprensión de la consigna
- Estrategias o acciones utilizadas
- Errores que se presentan

Este análisis se tomó como base para diseñar la propuesta de enseñanza aprendizaje.

Se revisó el programa de estudio de 7º Básico del año 2016 y dos libros de textos entregado por el MINEDUC, para analizar el objeto de estudio área de figuras compuestas de cómo se presentan, cuál es el tratamiento que le dan y qué tipo de actividades se proponen.

Etapa 2: Diseño de situaciones de aprendizaje y análisis apriori

Se diseñaron tres situaciones de aprendizaje basadas en el modelo de Van Hiele de acuerdo al nivel 1(visualización o reconocimiento), nivel 2 (análisis) y nivel 3 (deducción informal).En la primera de ellas se incluyen actividades de geometría para trabajar la visualización; en la segunda se consideran preguntas referidas al análisis y se debe explicar cómo calcular el área de figuras compuestas por regiones poligonales y círculos o partes del círculo y en la tercera situación las actividades apuntan a deducciones informales para calcular el área de ese tipo de figuras compuestas.

Se realizó un análisis apriori de cada situación de acuerdo al referente teórico, y teniendo presente la visualización de las figuras geométricas, proceso cognitivo que se pretende instalar como herramienta de aprendizaje y el razonamiento que se desarrollara.

Etapa 3: Experimentación y análisis aposteriori de las producciones de los estudiantes

Se aplicó a estudiantes de 13 a 14 años, que cursan 8° básico , los cuales tienen adquiridos los conceptos de área de regiones poligonales y del círculo; el curso se compone de 32 estudiantes, el trabajo es individual siendo posible interactuar con otro compañero(a).

Se analizó las producciones de los estudiantes que se obtuvieron de la aplicación de la secuencia de enseñanza aprendizaje, para observar y categorizar sus respuestas de acuerdo a las estrategias que utilizan los estudiantes y también tipificar sus errores todo ello bajo nuestro referente teórico el modelo de Van Hiele y los antecedentes respecto a los procesos cognitivos de visualización y razonamiento.

Etapa 4: Confrontación de los análisis apriori y aposteriori

En esta etapa se produce la evaluación, es decir se validan o refutan las hipótesis a través de la confrontación entre los análisis de las producciones de los estudiantes, con lo que se esperaba respondieran y lo que efectivamente respondieron.

5.4 Selección de participante y escenarios y estrategias de recolección de resultados

Va dirigido a estudiantes de Octavo año Básico de un Liceo Científico Humanista, se consideró a los 32 integrantes del curso, el cual es elegido porque tengo a cargo el curso. Ellos han estudiado el área de figuras planas que interesa en este estudio. El propósito es contribuir al aprendizaje del área de figuras compuestas a través de una propuesta de enseñanza aprendizaje con actividades que favorezcan el desarrollo de la visualización y del razonamiento geométrico. Se aplicó en la sala de clases del curso en tres clases, de 90 minutos cada una.

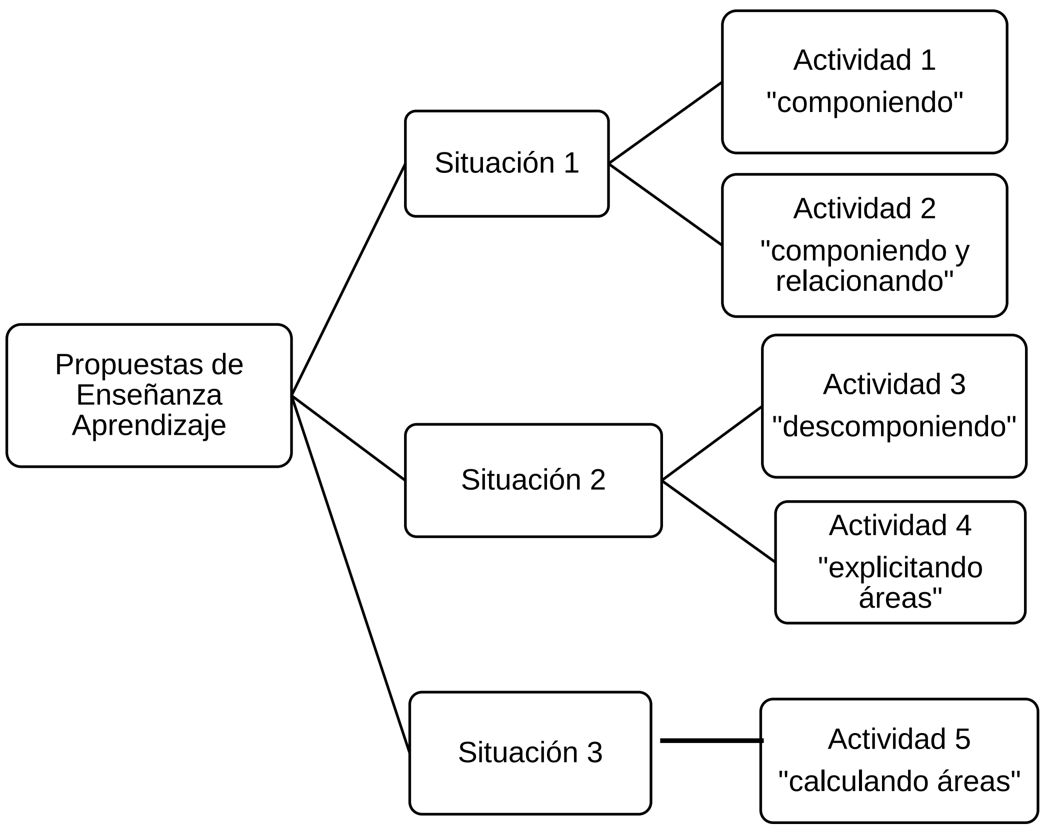
La propuesta de enseñanza aprendizaje se compone de tres situaciones, fue entregada impresa a cada uno de los estudiantes, en las cuales deben registrar todas sus explicaciones, desarrollos y respuestas, estas pasaron a ser sus producciones que fueron analizadas de acuerdo a lo descrito en la etapa 3 de trabajo.

Capítulo VI

Propuesta de enseñanza aprendizaje

6.1 Descripción de la propuesta de enseñanza aprendizaje

La propuesta de enseñanza aprendizaje está constituida por tres situaciones que contienen cinco actividades, las cuales se aplicaron en tres clases. Se aplicó en 6 horas pedagógicas de 45 minutos cada una, distribuidas de la siguiente manera:



Las situaciones que conforman la propuesta de enseñanza aprendizaje están confeccionadas de forma gradual, en términos de la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes con respecto a los niveles del modelo de Van Hiele, estos son Nivel 1(visualización o reconocimiento), Nivel 2 (Análisis) y Nivel 3 (Deducción informal) en actividades referidas al cálculo de área de la figuras compuestas por triángulos, cuadrados, rectángulos y círculos. La propuesta fue diseñada y aplicada a estudiantes de 8° año Básico de 12 a 13 años, el objeto matemático en estudio es el área de figuras compuestas por regiones poligonales y el círculo o partes del círculo, se ubica en el eje de geometría en la unidad 3 del programa de estudio del año 2016 entregado por el MINEDUC.

El objetivo general de la secuencia es calcular el área de figuras compuestas por regiones poligonales y círculos o partes de estos, mediante el reconocimiento de las figuras geométricas que la forman y utilizando algún procedimiento de composición, descomposición y aditividad de áreas.

En la propuesta las situaciones han sido diseñadas de tal forma que en la situación 1 se proponen dos actividades en la que los estudiantes deben componer una figura en otras figuras geométricas, estableciendo relaciones entre ellas. En la situación 2 se proponen otras dos actividades en las que debe descomponer identificando las figuras geométricas que forman la figura compuesta, dibujarlas explicar cómo calcula su área. Para que en la situación 3 resuelva tareas que implican calcular el área de figuras compuestas.

La metodología de trabajo aplicada es individual, a cada estudiante se le entrega una hoja con las actividades a trabajar en la sesión, las que deben ser devueltas al final de cada clase, en el desarrollo de las actividades los estudiantes pueden interactuar con sus pares. Se requiere que los estudiantes tengan adquirido el concepto de área de una figura plana y en particular del área del triángulo, cuadrado, rectángulo y círculos; conocimiento de las características de esas figuras geométricas (lados, ángulos, arcos congruentes, radio, diámetro).

6.2 Propuesta de enseñanza aprendizaje

A continuación, se exponen todas las guías de trabajo, cada una con una breve descripción en que se mencionan los objetivos, el tiempo, y las actividades que la constituyen. Además, se incluye el nivel de razonamiento, de acuerdo al Modelo de Van Hiele, que se espera que los estudiantes desarrollen en cada una de las actividades.

Se entrega el análisis apriori de la propuesta que contiene una descripción de los conocimientos involucrados, conocimientos adquiridos, posibles dificultades, posibles errores y nivel de razonamiento en las actividades a aplicar.

6.2.1 Guía de Trabajo: Área de figuras compuestas por regiones poligonales y círculos

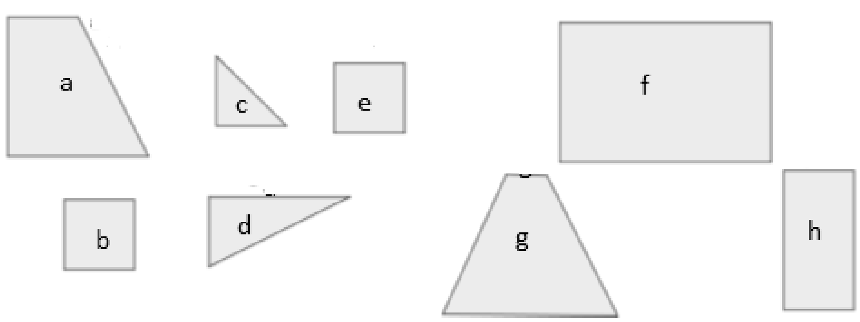
SITUACIÓN 1

Descripción: mediante la visualización y la composición de una figura compuesta, identificar las figuras geométricas que la forman, con un patrón conocido o arbitrariamente.

ACTIVIDAD 1 "componiendo"

Objetivo de Aprendizaje: Utilizar la visualización para componer una figura dadas algunas figuras geométricas u otras.	**Tiempo: 15 min.**
Modelo de Van Hiele. Nivel 1 (visualización o reconocimiento) :el estudiante • Reconoce figuras geométricas para componer otra figura • Describe las figuras por percepciones visuales.	

1) ¿Con cuál o cuáles de las figuras geométricas dadas a continuación se forma la figura 1?



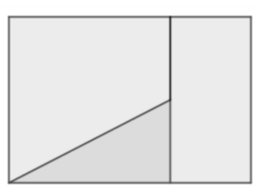
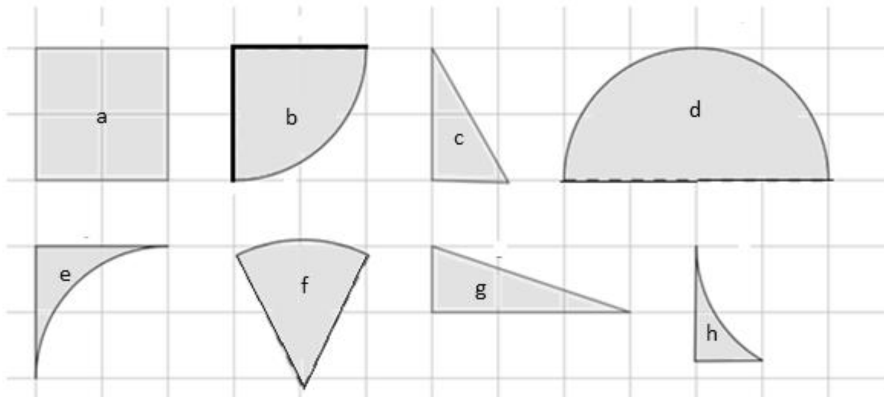


Figura 1

2) ¿Con cuál o cuáles de las figuras geométricas dadas a continuación se puede formar la figura 2?



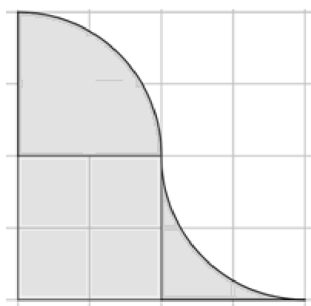
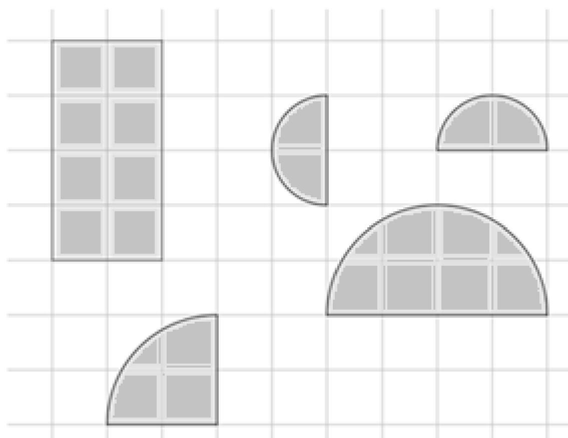


Figura 2

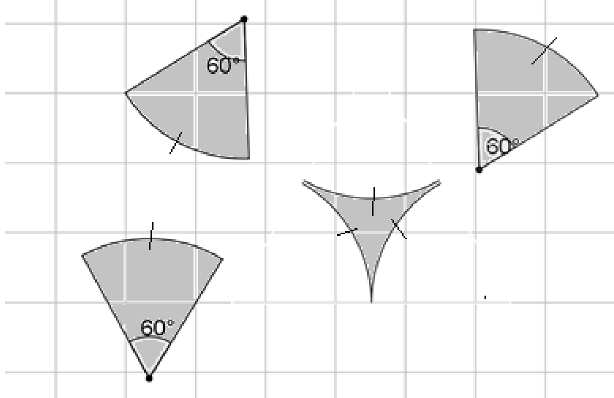
ACTIVIDAD 2 “componiendo y relacionando”

Objetivo de Aprendizaje: Argumentar la composición de una figura y la descomposición de otra en figuras geométricas simples utilizando dibujos y lenguaje natural.	**Tiempo :30 min**
Modelo de Van Hiele. Nivel 1(visualización o reconocimiento). El estudiante : • Reconoce figuras geométricas para componer o descomponer otra figura • Describe las figuras por percepciones visuales. • Relaciona las figuras dadas en base a reconocimiento de elementos geométrico que visualiza en ellas.	

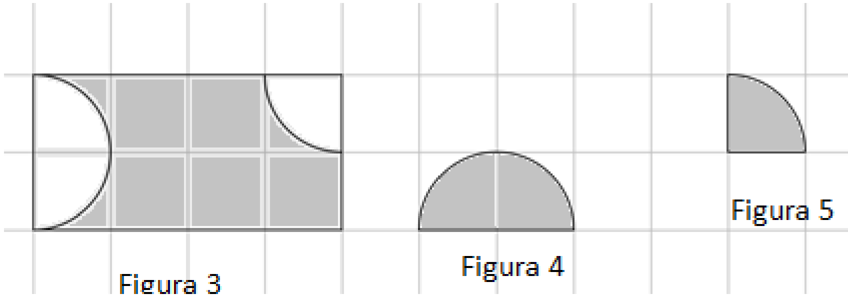
1) ¿Qué figuras puedes formar utilizando todas las figuras geométricas dadas, sin superponerlas? Dibujar tres de ellas



2) ¿Se podrá formar un triángulo con las figuras dadas? Muestra cómo y explica por qué.



3) ¿Qué relación tiene la figura 3, con las figuras 4 y figura 5? Explicar



¿Qué características tienen las figuras 4 y 5?

¿Qué relación observas entre las tres figuras?

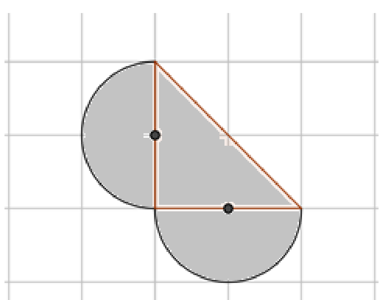
SITUACIÓN 2

Descripción: mediante la visualización identificar en primera instancia las figuras geométricas que componen una figura compuesta (sombreada) dibujarlas y caracterizarlas, para luego poder explicar cómo calcular el área de estas figuras compuestas utilizando lenguaje natural o simbólico.

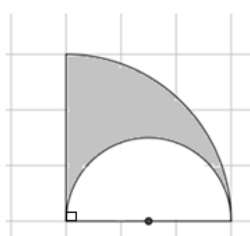
ACTIVIDAD 3 “descomponiendo”

Objetivo de Aprendizaje: Utilizar la visualización para reconocer y analizar las figuras geométricas en una figura compuesta (sombreada), argumentando por medio de un dibujo y lenguaje natural o simbólico.	**Tiempo : 45 min**
Modelo de Van Hiele. Nivel 2(Análisis). El estudiante : • Reconoce y analiza las partes y características particulares de las figuras geométricas • Caracteriza las figuras en las que se descompone una figura de forma empírica, a través de la experimentación y manipulación.	

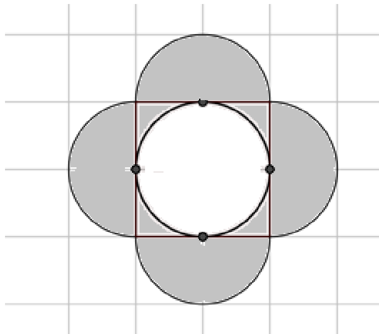
1) ¿Qué figuras geométricas forman la figura sombreada? Dibújalas y explica qué características tienen.



2) ¿Qué figuras geométricas al superponerlas dan origen a la figura sombreada? Dibújalas y explica qué características tienen.



3) ¿En qué figuras geométricas se puede descomponer la figura siguiente? Dibújalas y explica qué características tienen.

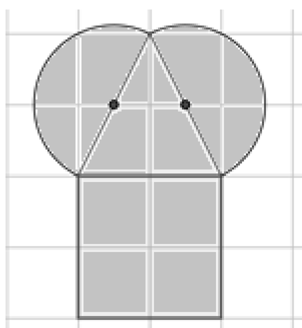


ACTIVIDAD 4 "explicitando áreas"

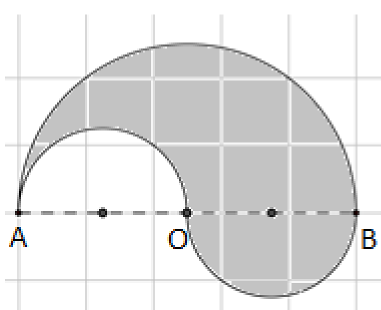
Objetivo de Aprendizaje: Explicar cómo calcular el área de figuras compuestas visualizando las figuras que la forman.	**Tiempo : 45 min**
Nivel 2 (Análisis). El estudiante : • Reconoce y analiza las partes y propiedades particulares de las figuras geométricas • Analiza y explica el cálculo del área de figuras compuestas.	

¿Cómo calcular el área de la parte sombreada en cada una de las siguientes figuras? Explica.

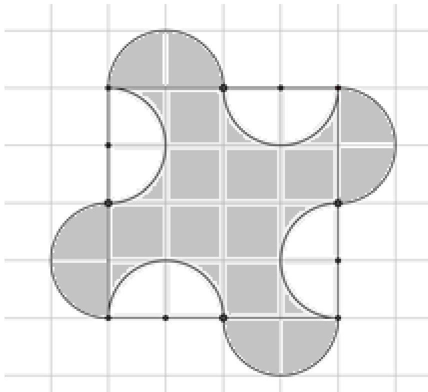
1)



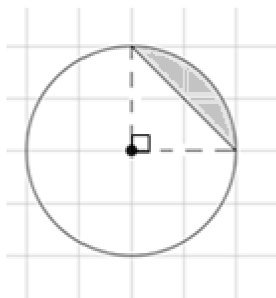
2) En la figura , O es el centro , $AO = BO$



3) Los semicírculos de la figura son congruentes



4) La cuadrícula está formado por cuadrados de 1 unidad por lado:



SITUACIÓN 3

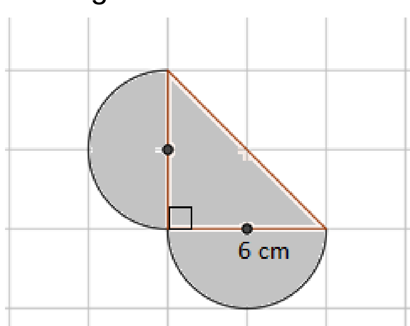
Descripción: se emplean los razonamientos trabajados en las situaciones anteriores, de modo que la visualización y análisis sobre la figura compuesta les permita utilizar procedimientos algebraicos o numéricos para calcular el área de figuras compuestas empleando un lenguaje simbólico.

ACTIVIDAD 5 “calculando áreas”

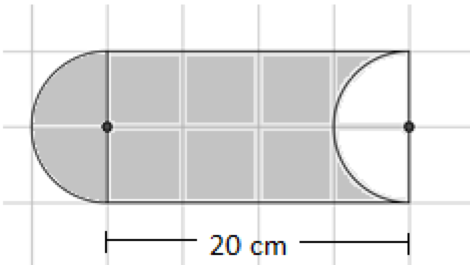
<table>
<tr><td>Objetivo de Aprendizaje: Resolver problemas que implican calcular el área de figuras compuestas por triángulos, rectángulos, cuadrados y círculos describiendo el procedimiento empleado.</td><td>Tiempo: 135 min.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Modelo de van Hiele. Nivel 3 (Deducción informal)

El estudiante :
• Analiza las partes y características particulares de las figuras geométricas que componen a la figura compuesta.
• Reconoce las figuras por sus propiedades y cómo algunas se derivan de otras figuras geométricas.
• Calcula el área de figuras compuestas por triángulos, cuadrados, rectángulos, círculos o partes de un círculo utilizando la descomposición y procedimientos algebraicos (fórmulas).</td></tr>
</table>

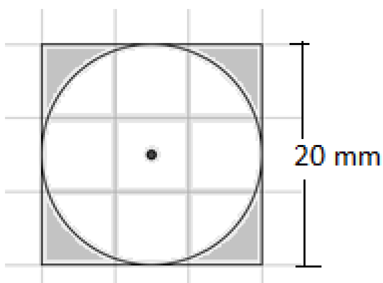
1) ¿Cuál es el área de la figura sombreada, si cada cateto del triángulo rectángulo isósceles mide 6 cm? Explica tu procedimiento.



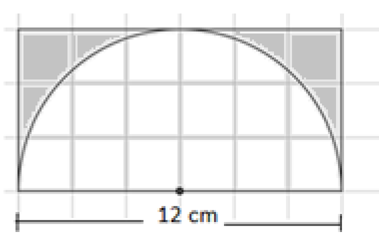
2) ¿Cuál es el área de la figura sombreada que está formada por un rectángulo cuyo alto mide la mitad de su largo? Explica tu procedimiento.



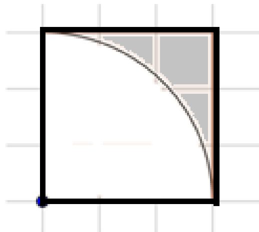
3) ¿Cuál es el área de la figura sombreada que está formada por un cuadrado cuyo lado mide 20 mm? (considere $\pi \approx 3{,}14$) Explica tu procedimiento.



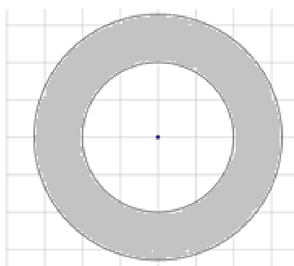
4) ¿Cuál es el área de la figura sombreada formada por un rectángulo? Explica tu procedimiento.



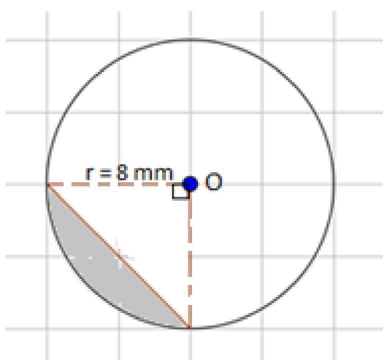
5) ¿Cuál es el área de la figura sombreada formada por un cuadrado cuyo lado mide 10 cm? (considere $\pi \approx 3{,}14$) Explica tu procedimiento.



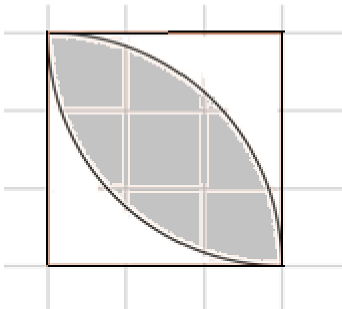
6) ¿Cuál es el área de la figura sombreada formada por circunferencias concéntricas de radios 3cm y 7 cm respectivamente? Explica tu procedimiento.



7) ¿Cuál es el área de la figura sombreada formada por una circunferencia de centro O? Explica tu procedimiento.



8) ¿Cuál es el área de la figura sombreada formada por un cuadrado cuyo lado mide 4 cm? Explica tu procedimiento.



6.2.2 Análisis apriori de las situaciones de aprendizaje

Situación 1

Actividad 1 “componiendo”

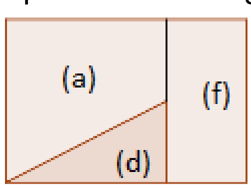
Conocimientos matemáticos involucrados: composición de figuras
Conocimientos adquiridos: triángulo, rectángulo, cuadrado, círculo y arco de circunferencia.
Posibles dificultades: que las figuras simples dadas para componer la figura 1 y la figura 2 las consideran rígidas, es decir, que las deban colocar en esa misma posición; medidas de las figuras simples
Posibles errores: trazan líneas auxiliares a la figura 1 o a la figura 2 dando origen a la necesidad de otras figuras
Nivel 1 (visualización o reconocimiento) :el estudiante • Reconoce figuras geométricas para componer otra figura • Describe las figuras por percepciones visuales.

Soluciones a las tareas de la actividad 1

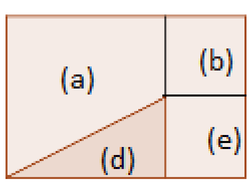
- Utilizan lenguaje natural

1) Dos posibles respuestas

R1) Componen el rectángulo con un trapecio, triángulo y rectángulo.

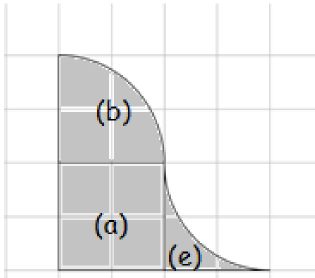


R2) Componen el rectángulo con dos cuadrados

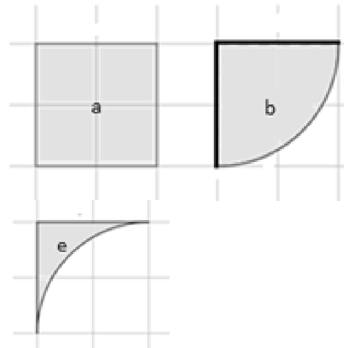


2) Dos posibles repuestas

R1) Selecciona la figura y escribe las letras sobre la figura 2



R2) Escribe solo las letras de las respectivas figuras que componen la figura: (a), (b) y (e)



Actividad 2 “componiendo y relacionando”

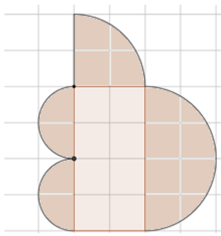
Conocimientos matemáticos involucrados : composición de figuras; superposición de figuras; descomposición de figuras
Conocimientos adquiridos : triángulo **,**triángulo equilátero, rectángulo, círculo, sectores circulares(partes de un círculo) ; propiedad de los ángulos interiores de un triángulo
Posibles dificultades: **-**en la tarea 2 no reconoce la congruencia entre los arcos, no recuerda las características del triángulo equilátero, no recuerda la propiedad de los ángulos interiores de un triángulo; - en la tarea 3 no reconoce las características (radios, diámetros lados) de las figuras; no establece relaciones entre los sectores circulares y el círculo.
Posibles errores: en la tarea 1 utilizan algunas figuras; en la tarea 2 no forman el triángulo; en la tarea 3 no logran establecer relaciones ni las características de las figuras
Nivel 1 (visualización o reconocimiento) El estudiante: • Reconoce figuras geométricas para componer o descomponer otra figura • Describe las figuras por percepciones visuales. • Relaciona las figuras dadas en base a reconocimiento de elementos geométricos simples que visualiza en ellas.

Soluciones a las tareas de la actividad 2

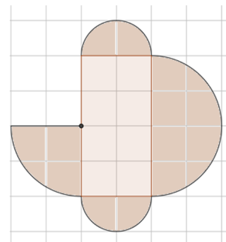
Se representan en registro figural y/o lenguaje natural.

1)

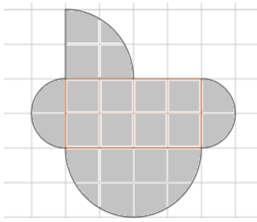
a)



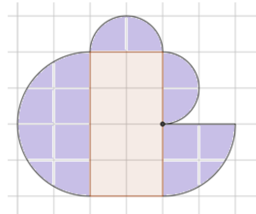
b)



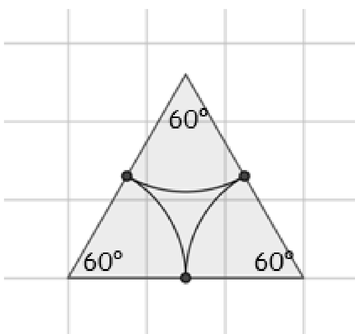
c)



d)

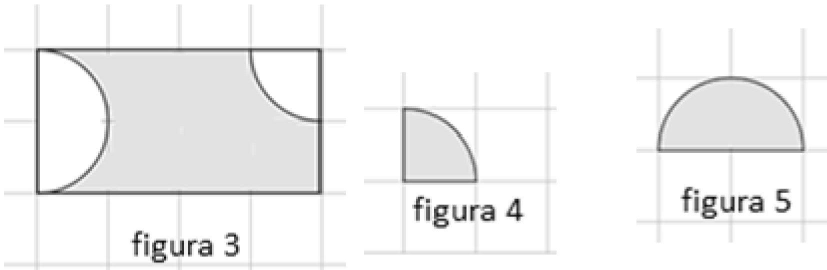


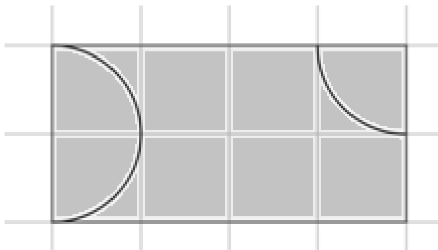
2)



Las partes del circulo encajan en la forma curva porque sus arcos son congruentes formándose los lados de un triángulo porque los ángulos suman 180°o bien 3 x60° = 180 °. Además los lados son de igual medida (2r), por tanto es un triángulo equilátero.

3)





Si en la figura 3 se superpone el cuarto de círculo y la mitad del círculo sombreado se forma un rectángulo.

¿Qué características tienen las figuras 4 y 5?

- La figura 4 es un semicírculo y la figura 5 es un cuarto de círculo
- Tienen el mismo radio (1u)
- La figura 5 es la mitad de la figura 4

¿Qué relación observas entre las tres figuras?

- La figura 4 y 5 al superponerlas en la figura 3 forman un rectángulo.
- A la figura 3 se superpuso un cuarto de círculo y un semicírculo de igual radio
- El diámetro de la figura 4 corresponde al alto del rectángulo

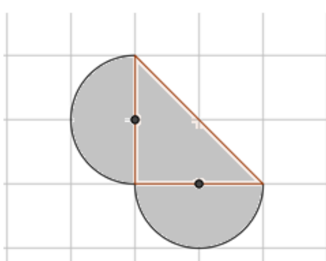
Situación 2

Actividad 3 "descomponiendo"

Conocimientos matemáticos en juego (involucrados): composición de figuras, descomposición de figuras; superposición de figuras
Conocimientos adquiridos: triángulo rectángulo isósceles, cuadrado , circulo, sectores circulares;
Posibles dificultades: en la tarea 1 y 2 reconocer que se trata de triángulo rectángulo y semicírculo; establecer relaciones entre las medidas del radio, lados y diámetro.
Posibles errores: referirse a circunferencias o semicircunferencias
Nivel 2 (Análisis) El estudiante : • Reconoce y analiza las partes y características particulares de las figuras geométricas. • Caracteriza las figuras en las que se descompone una figura de forma empírica, a través de la experimentación y manipulación

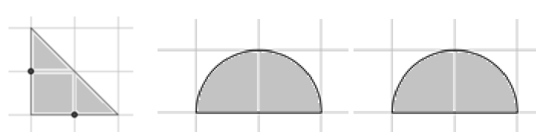
Soluciones a las tareas de la actividad 3: se representan en un registro figural y lenguaje natural

1)

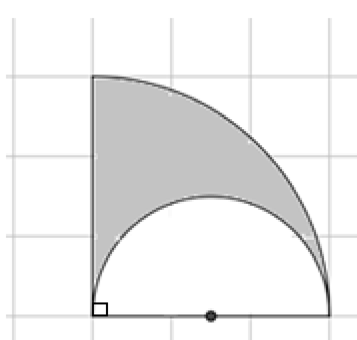


Está compuesta por 2 semicírculos de igual diámetro y un triángulo rectángulo isósceles

- El diámetro de los semicírculos son los lados del triángulo
- Los dos semicírculos forman un círculo



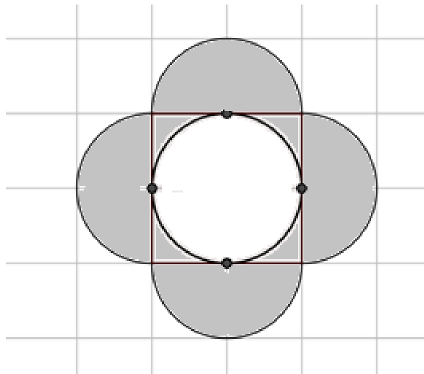
2)



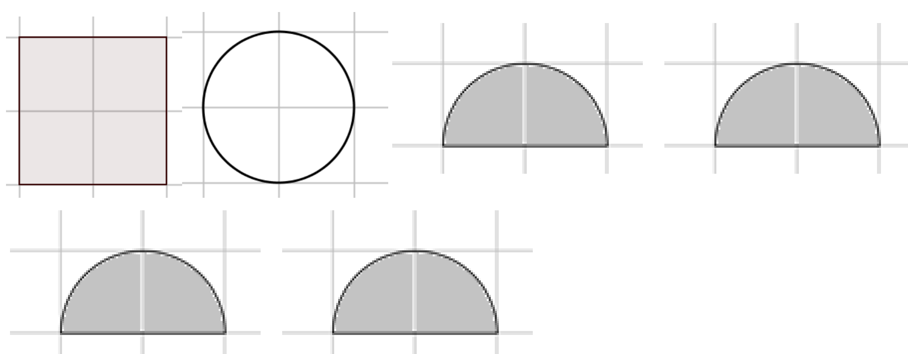
Está compuesta por un semicírculo de radio $\frac{r}{2}$ que se superpone a un cuarto de círculo de radio r.

- el radio del cuarto de círculo es el diámetro del semicírculo

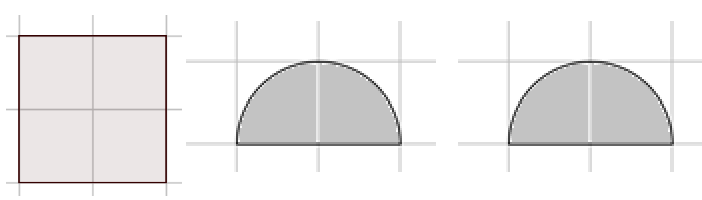
3) Tres posibles respuestas



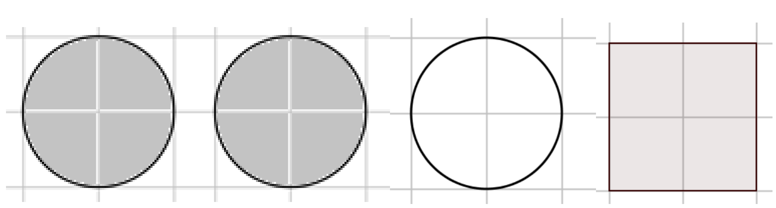
R1) Está compuesta por 4 semicírculo de radio r, por un cuadrado de lado de medida 2r con un círculo de radio r superpuesto al cuadrado



R2) Está compuesta por 2 semicírculo de radio r y un cuadrado de lado de medida 2r (considera que al cuadrado se le quitó un círculo compuesto por los otros 2 semicírculos).



R3) Tres círculos y un cuadrado

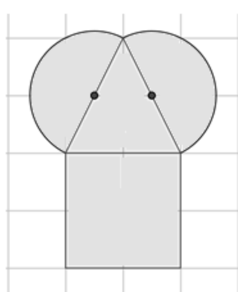


Actividad 4“explicitando áreas”

Conocimientos matemáticos en juego (involucrados) : descomposición de figuras; superposición de figuras
Conocimientos adquiridos : triángulos, cuadrado y circulo **;**
Posibles dificultades: en la tarea 4 no logran visualizar la figura superpuesta, el triángulo rectángulo, sobre el cuarto de círculo.
Posibles errores: en la tarea 2 calcular el área de 2 círculos; o bien el área de 1 semicírculo y de 1 círculo; en la tarea 3 calcular el área de los semicírculos y del cuadrado y sumarlas; en la tarea 4 al área del círculo restar la del triángulo.
Nivel 2 (Análisis) El estudiante : • Reconoce y analiza las partes y características particulares de las figuras geométricas. • Analiza y explica el cálculo de área de figuras compuestas

Soluciones a las tareas de la actividad 4: representadas en registro figural y lenguaje natural

1)

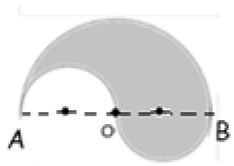


Dos posibles respuestas:

R1) Se calcula la suma del área de un círculo (formado por dos semicírculos), de un triángulo y de un cuadrado.

R2) Se calcula la suma del área de dos semicírculos, de un triángulo y de un cuadrado

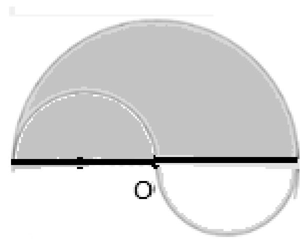
2)



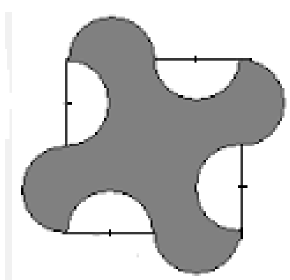
Dos posibles respuestas:

R1) Se calcula el área de un semicírculo de radio r y se le resta el área de un semicírculo de radio r/2; para luego sumar el área de otro semicírculo de radio r/2.

R2) Se calcula el área de un semicírculo de radio r, compone el semicírculo de radio r con el semicírculo de radio r/2; es decir, considera esta figura



3)



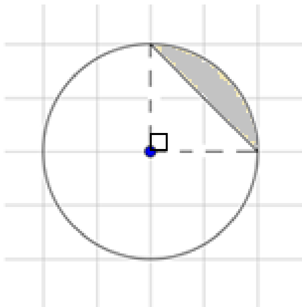
Tres posibles respuestas

R1) Calcula el área de un cuadrado y le resta 4 área de semicírculos del mismo radio, a esta diferencia se suma 4 área de semicírculos del mismo radio.

R2) Calcula el área de un cuadrado y le restas el área de dos círculos, y a ésta diferencia sumar el área de dos círculos de igual diámetro.

R3) Visualiza el cuadrado descompuesto por 4 semicírculos congruentes, que puede componer por los otros 4 semicírculos congruentes formándose un cuadrado; finalmente calcula el área de un cuadrado.

4)



Dos posibles respuestas,

R1) Calcula el área de un círculo la divide en 4 y a ésta resta el área de un triángulo rectángulo.

R2) Calcula el área del sector circular de 90° y le resta el área de un triángulo rectángulo.

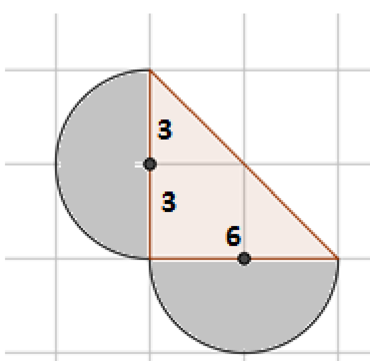
Situación 3

Actividad 5 “calculando áreas”

Conocimientos matemáticos en juego (involucrados) : descomposición de figuras; superposición de figuras, área de figuras planas.
Conocimientos adquiridos: área de: triángulos, cuadrado, rectángulo y círculo**.**
Posibles dificultades: recordar las fórmulas para calcular área de círculo, triángulo, cuadrado o rectángulo.
Posibles errores: uso de las fórmulas**;** no calcula la mitad del área de un círculo, un cuarto del área de círculos; el radio no lo eleva a 2 o lo multiplica por 2.
Nivel 3: (Deducción informal) El estudiante : • Analiza las partes y características particulares de las figuras geométricas que componen a la figura compuesta. • Reconoce las figuras por sus propiedades y como algunas se derivan de otras figuras geométricas • Calcula el área de figuras compuestas por triángulos, cuadrados, rectángulos, círculos o partes de un círculo utilizando la descomposición y procedimientos algebraicos (fórmulas).

Soluciones a las tareas de la actividad 5: en lenguaje numérico y algebraico

1)



Dos respuestas posibles:

R1) $A_{\Delta} = \frac{6x6}{2} = 18$cm^2;

$A_{semicirculo} = \frac{9\pi}{2}$ cm^2

$A_{fig} = 18 + \frac{9\pi}{2} + \frac{9\pi}{2}$

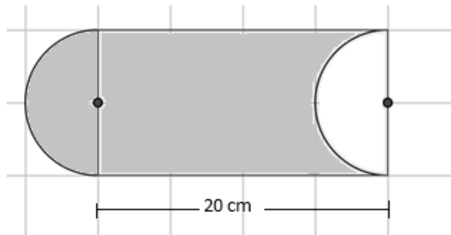
$A_{fig} = (18 + 9\pi)$ cm^2

R2) $A_{\Delta} = \frac{6x6}{2} = 18$cm^2;

$A_{circulo} = 9\pi$ cm^2

$A_{fig} = (18 + 9\pi)$ cm^2

2)



Dos posibles respuestas:

R1) Visualiza que el semicírculo componen a la figura en un rectángulo, así:

$$A_{fig} = 20\ x\ 10 = 200\text{cm}^2$$

R2) calcula el área de cada figura geométrica, resta y suma áreas

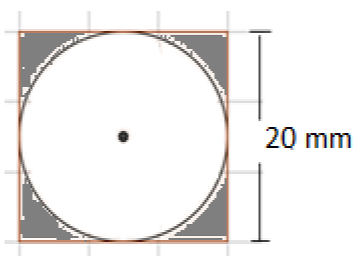
$A_{rect} = 200\text{cm}^2$

$A_{semicirculo} = 25\pi\ \text{cm}^2$

$A_{fig} = 200 - 25\pi + 25\pi$

$A_{fig} = 200\text{cm}^2$

3)



$$A_{cuadrado} = 400\ cm^2$$

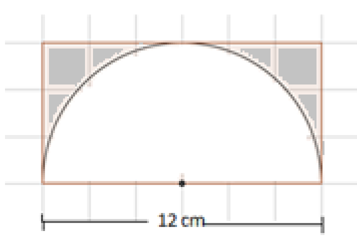
$$A_{círculo} = 100\pi$$

$$A_{círculo} = 100x\ 3{,}14$$

$$A_{círculo} = 314\ cm^2$$

$$A_{fig} = 400 - 314 = 86\text{cm}^2$$

4)



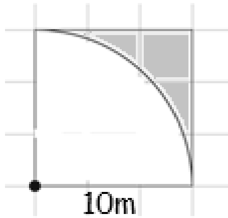
$$A_{rectángulo} = 12x6 = 72cm^2$$

$A_{círculo} = 36\pi$;

$$A_{semicírculo} = 18\pi cm^2$$

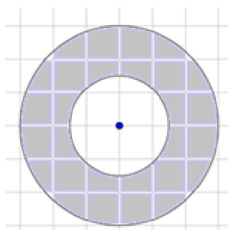
$$A_{figura} = (72 - 18\pi)cm^2$$

5)



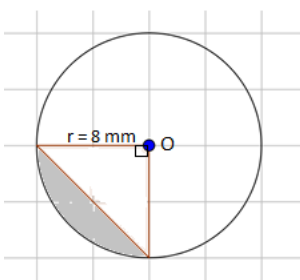
$$A_{cuadrado} = 100cm^2 \quad ;$$
$$A_{circulo} = 100\pi \approx 314$$
$$A_{\frac{1}{4}circ} = 314 : 4 = 78{,}5cm^2$$
$$A_{figura} = (100 - 78{,}5) = 21{,}5cm^2$$

6)



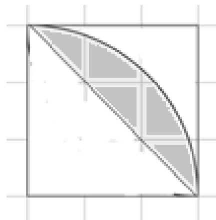
$$A_{círculo1} = 49\pi cm^2 \quad ;$$
$$A_{círculo2} = 9\pi cm^2$$
$$A_{figura} = 40\pi cm^2$$

7)



$$A_{circulo} = 64\pi\ cm^2$$
$$A_{\frac{1}{4}circulo} = 16\pi cm^2$$
$$A_{\Delta} = \frac{8\ x\ 8}{2} = 32cm^2$$
$$A_{figura} = (16\pi - 32)cm^2$$

8) Se calcula una parte del área de la figura;

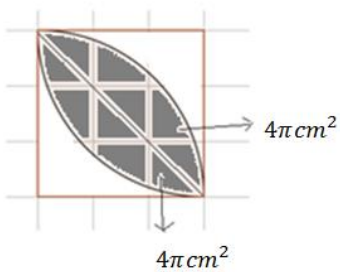


$$A_{\Delta} = \frac{4x4}{2} = 8 \text{ cm}^2$$

$$A_{sectorcircular} = \frac{16\,\pi}{4} = 4\pi\text{cm}^2$$

$$A_{figura} = (4\pi - 8)\ cm^2$$

Como la otra parte de la figura es congruente con esta, se suman o multiplican por 2 para obtener el área completa $4\pi cm^2$



Luego, $A_{totalfig} = 2(4\pi - 8)cm^2$

Capítulo VII

Análisis de resultados

A continuación se presentan los análisis realizados a las producciones de los estudiantes de octavo año básico (32 estudiantes), después de haber aplicado la propuesta de enseñanza y aprendizaje.

Como se explicó previamente, la propuesta consta de tres situaciones en las que se proponen cinco actividades, se utiliza la modalidad individual o en parejas, para su desarrollo.

7.1 Análisis Aposteriori

Se consideraron dos categorías de análisis con respecto a las producciones de los estudiantes:

- Categorías de Estrategias: simbolizadas por Estrategia1, Estrategia 2; etc.

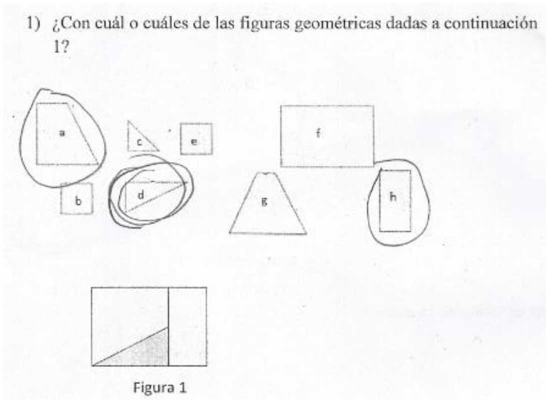
  Estas contienen una descripción del proceso realizado por el estudiante para dar solución a la tarea.
- Categorías de Errores: simbolizadas por Err1, Err2; etc.

  Estas contienen una descripción de los errores efectuados por el educando en su proceso de resolución de la tarea.

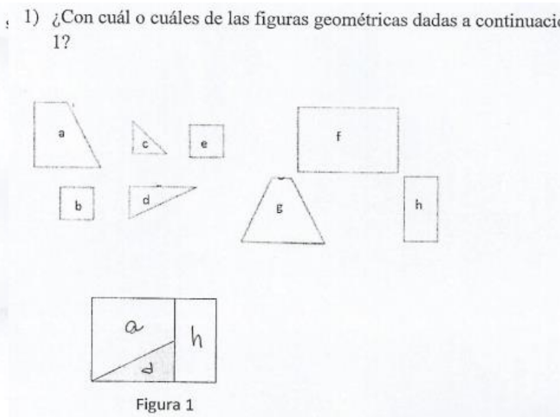
Actividad 1 “componiendo”

En esta actividad la mayoría de los estudiantes, 30 de 32 utilizan en sus producciones como estrategia un registro pictórico y/o lenguaje natural, categorizada como:

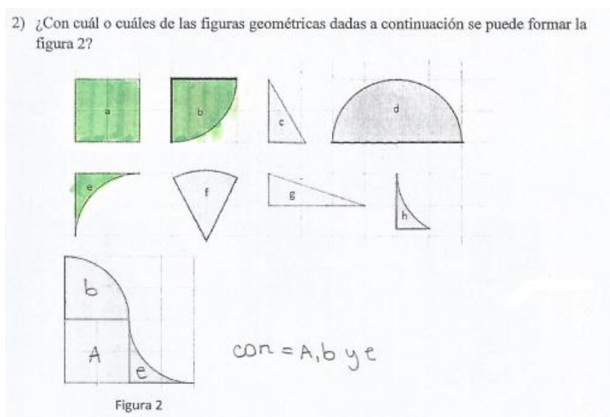
Estrategia 1: Encierra con una línea curva las figuras geométricas que componen a la figura modelo; escribe las letras sobre o fuera de la figura modelo.



Estudiante 1



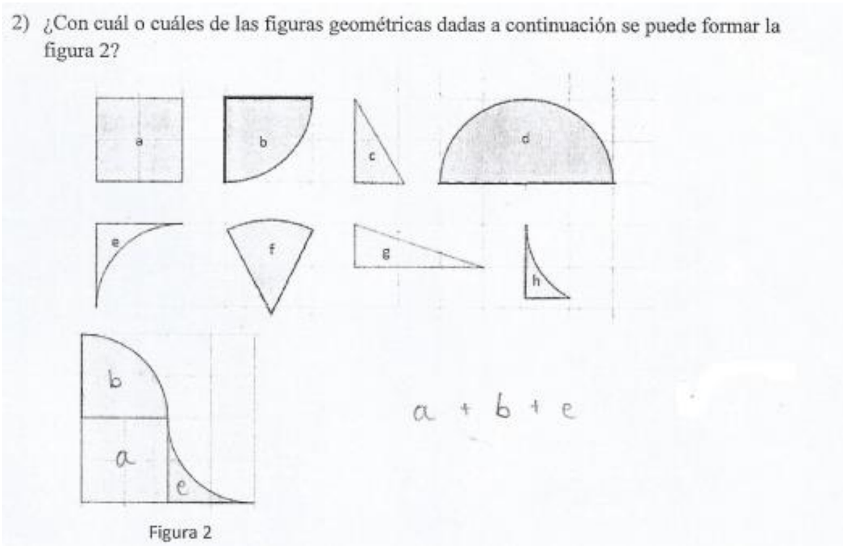
Estudiante 5



Estudiante 6

Otros 2 estudiantes de los 32 utilizan una estrategia en lenguaje algebraico, categorizada como:

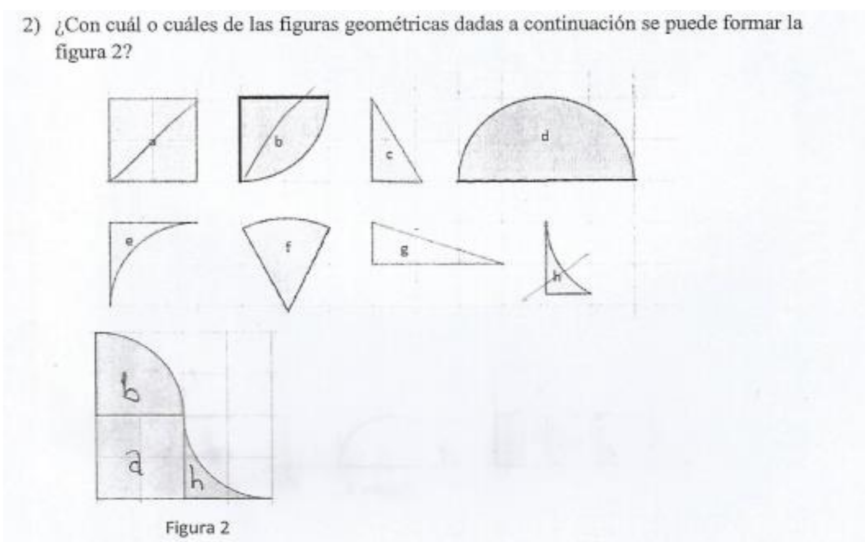
Estrategia 2: Escribe la letra correspondiente a la figura seleccionada para componer la figura 2, y luego las suma.



Estudiante 12

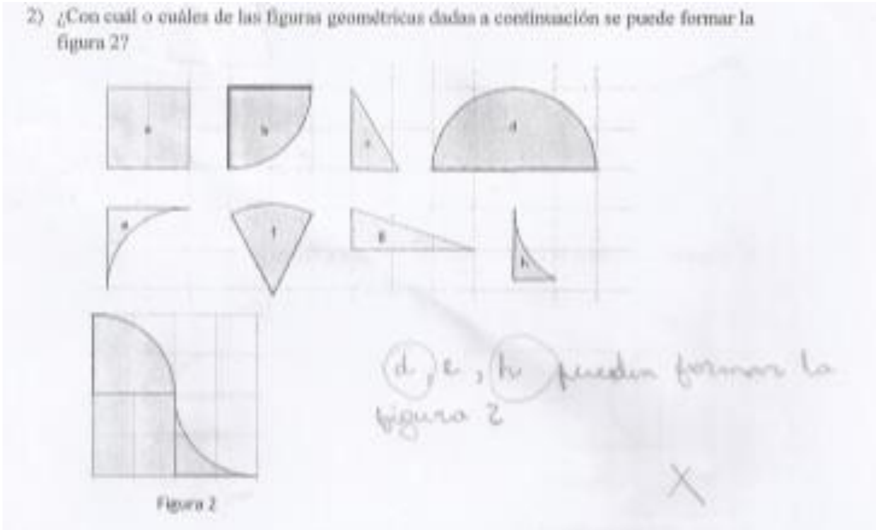
En esta actividad, en 4 producciones de los estudiantes se presentan errores tipificados en las siguientes categorías:

Err1: Elige una figura equivocada por la forma no por el tamaño; (h) en vez de (e);



Estudiante 28

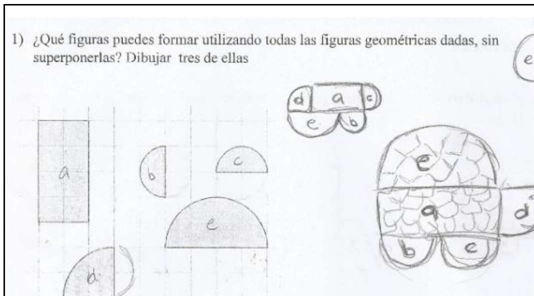
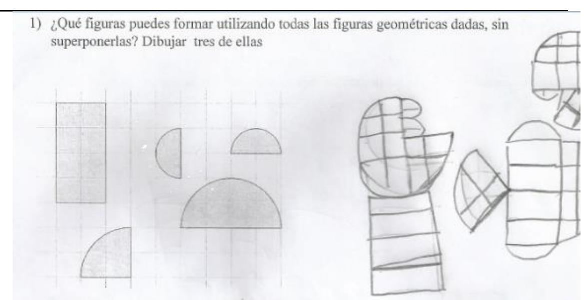
Err2: Elige dos figuras equivocadas, (h) y el semicírculo (d);

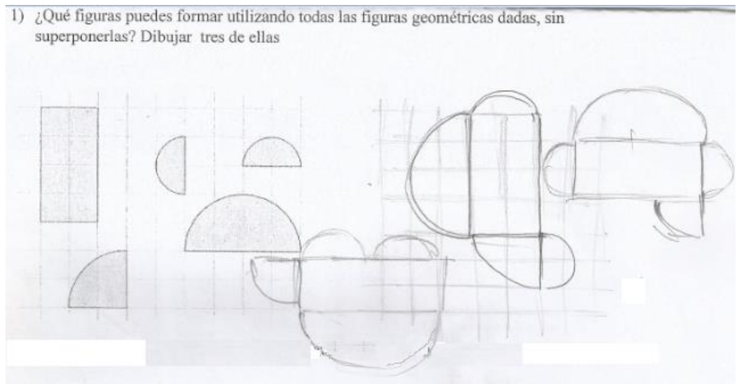


Actividad 2 “componiendo y relacionando”

En relación a la tarea 1, las producciones de 12 de los 32 estudiantes presentan como estrategias representaciones en registro pictórico categorizadas como:

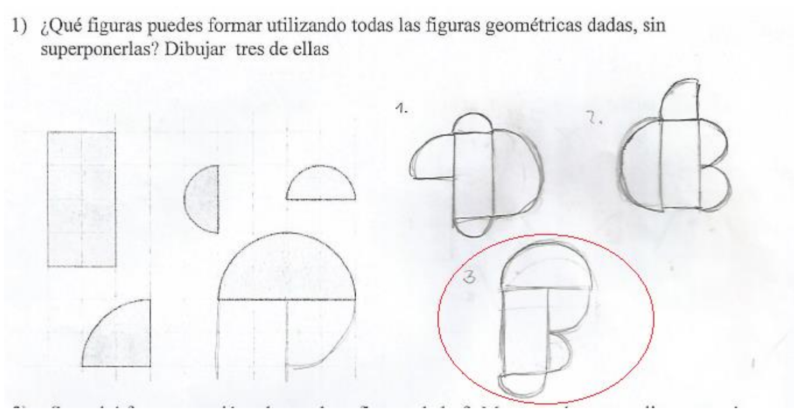
Estrategia 1: Dibuja las figuras compuestas, algunos escriben letras o números sobre las figuras simples a modo de indicar como las usa, algunas no quedan unidas por los segmentos.

	
Estudiante 13	**Estudiante 30**



Estudiante 5

Estrategia 2: Dibuja lo solicitado e incluye otras figuras no contempladas en el análisis.

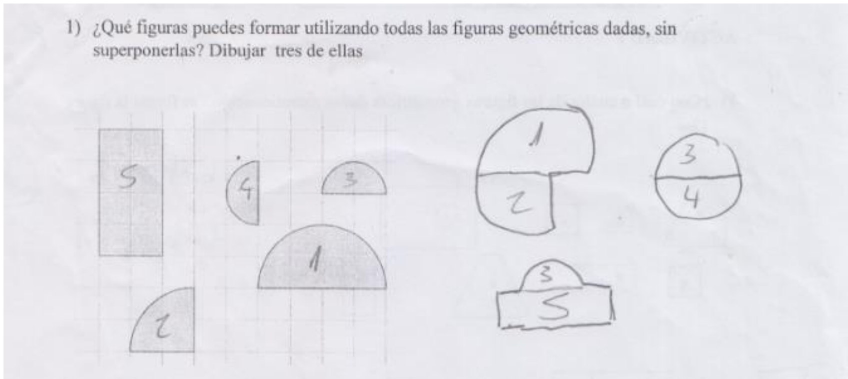


Estudiante 27

Se presentaron 7 respuestas de estudiantes categorizadas como producciones inconclusas pues dibujaron una o dos figuras compuestas.

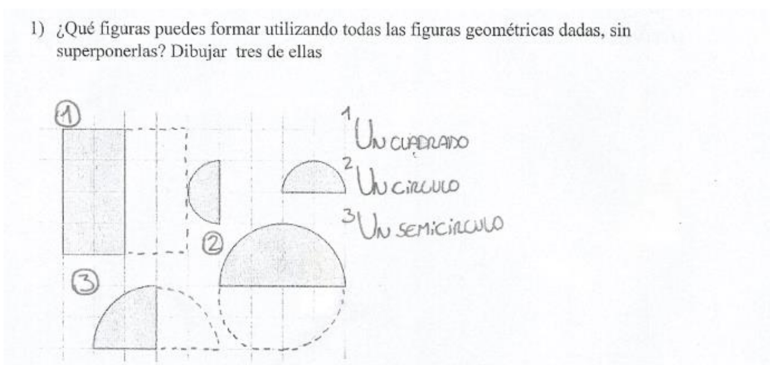
En las producciones de los estudiantes se encuentran errores tipificados en las siguientes categorías:

Err1: Dibuja 3 figuras compuestas pero no utiliza todas las figuras geométricas o superponen figuras



Estudiante 3

Err2: No dibujan, solo escribe el nombre de la figura geométrica

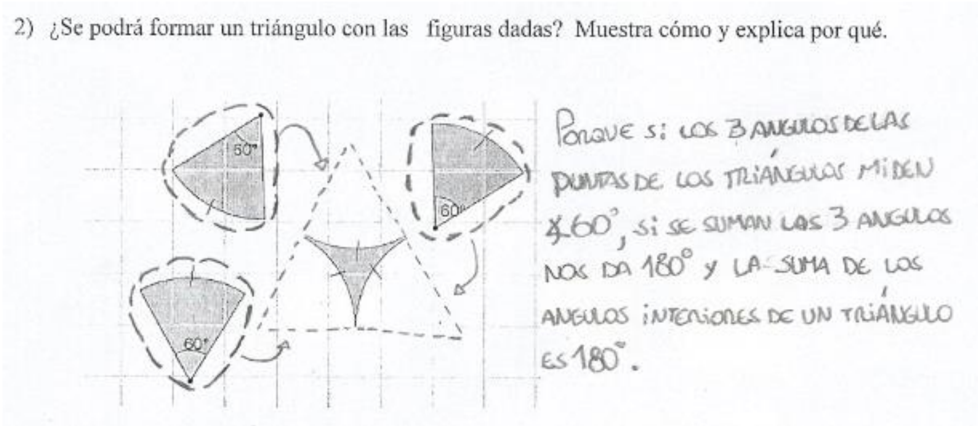


Estudiante 4

De las producciones de los estudiantes es posible inferir que ellos consideraron la forma no el tamaño para componer, así también algunos no se guiaron por los segmentos para unir las figuras o que las medidas de los segmentos coincidan.

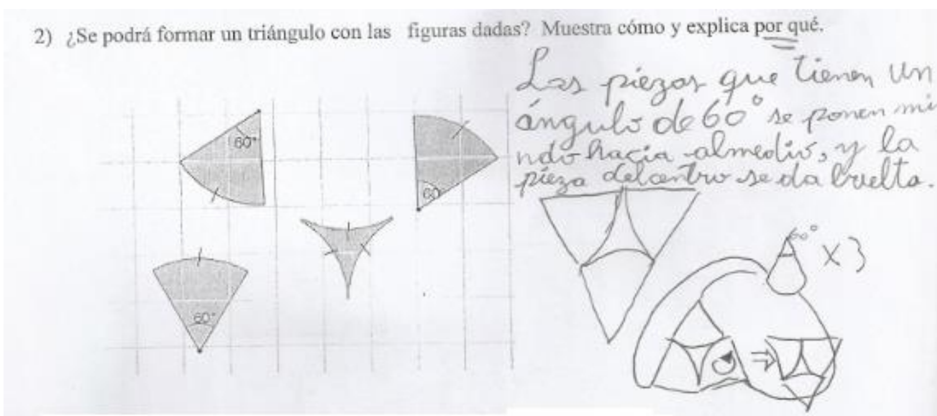
En la tarea 2**,** la mayoría de los estudiantes, 21 de 32, componen el triángulo equilátero pero no todos explican por qué; las estrategias que utilizan en un registro figural y/o lenguaje natural están categorizadas como:

Estrategia 1: Dibuja el triángulo e indica la propiedad, que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180º.



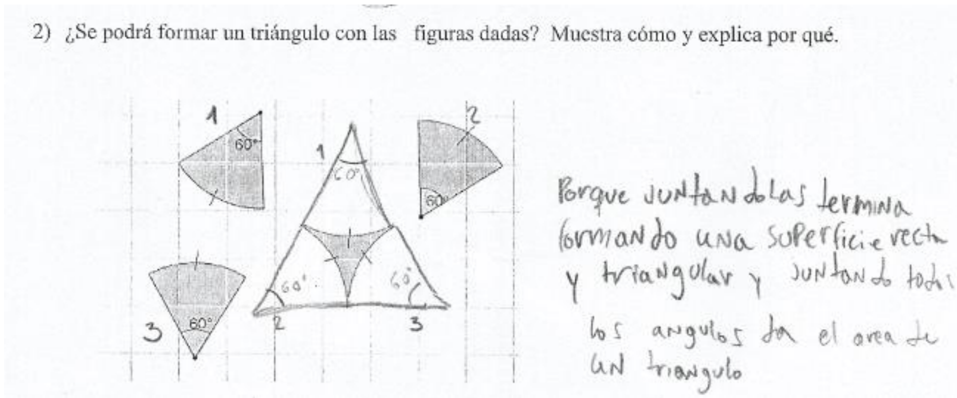
Estudiante 4

Estrategia 2: Dibuja el triángulo hace referencia a los ángulos de 60° y/o al triángulo equilátero



Estudiante 21

Estrategia 3: Dibuja el triángulo, hace referencia a que juntando las partes se forma un triángulo o da el “área” de un triángulo



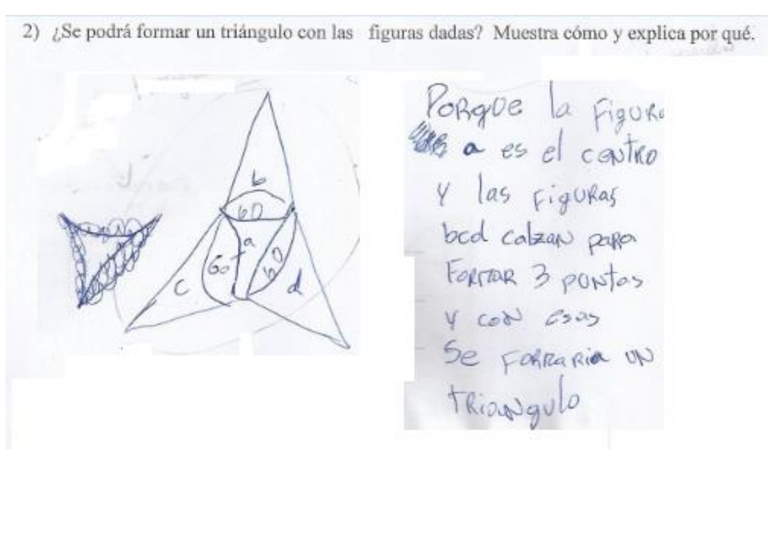
Estudiante 2

Los estudiantes se guiaron por los arcos congruentes para componer los sectores circulares con la figura curva, visualizaron que las figuras debían moverlas para formar el triángulo; establecieron la relación entre sus ángulos ya sea por la medida conocida 60° o bien porque las tres medidas suman 180°;

Se presentaron 6 de las 32 respuestas inconclusas, ya que los estudiantes solo dibujan y no dan argumentos.

En esta tarea, se encuentran 2 de 32 producciones con errores tipificados en las siguientes categorías:

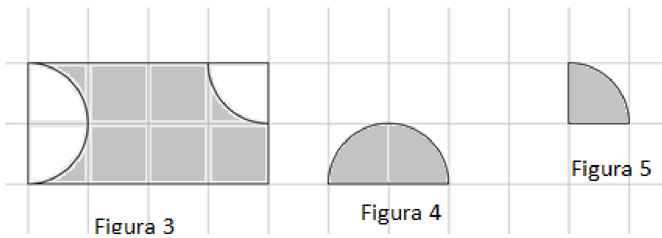
Err1: Dibuja otra figura, no quedan rectos los segmentos para que se forme un triángulo



Estudiante 29

Para la tarea 3, se analizaron las respuestas de los estudiantes correspondientes a cada pregunta.

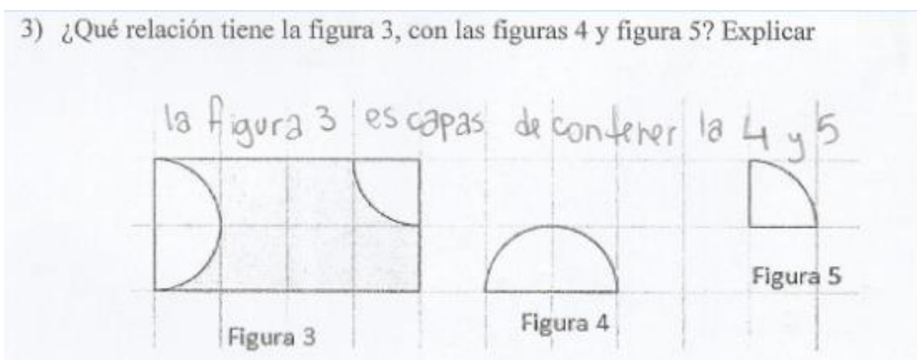
3) ¿Qué relación tiene la figura 3, con las figuras 4 y figura 5? Explicar



¿Qué características tienen las figuras 4 y 5?

¿Qué relación observas entre las tres figuras?

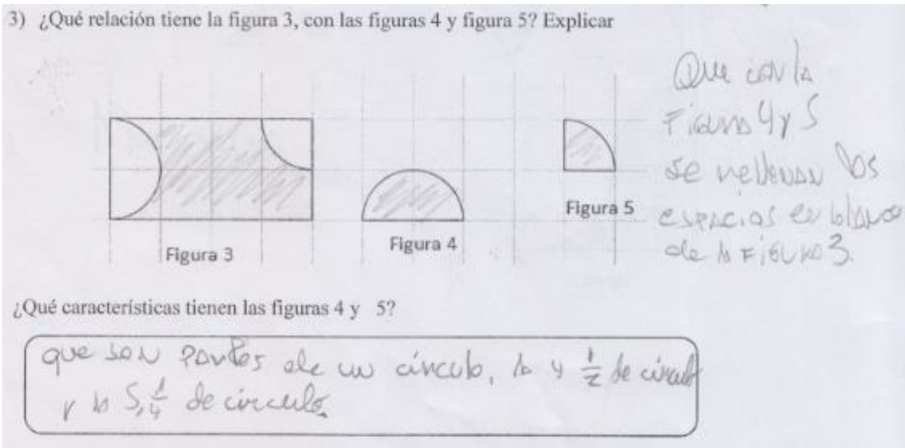
La primera pregunta solo la respondieron 2 estudiantes de los 32, quienes argumentan que las figuras 4 y 5 son partes de la figura 3.



Estudiante 6

Las respuestas de los estudiantes a la segunda pregunta, ¿Qué características tienen las figuras 4 y 5?, están dadas en un registro figural y/o en lenguaje natural; 17 de los 32 estudiantes utilizan en sus producciones estrategias categorizadas como:

Estrategia 1: Establece que estas figuras son partes del círculo, caracterizando la figura 4 como un semicírculo y figura 5 como un cuarto de círculo.

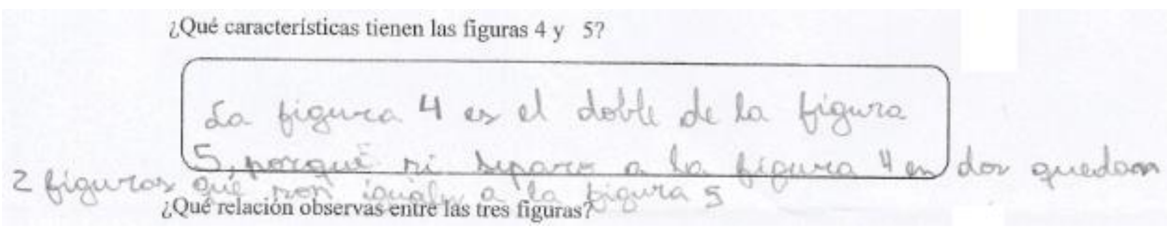

3) ¿Qué relación tiene la figura 3, con las figuras 4 y figura 5? Explicar

Que con la figura 4 y 5 se rellenan los espacios en blanco de la figura 3.

¿Qué características tienen las figuras 4 y 5?

que son partes de un círculo, la 4 $\frac{1}{2}$ de círculo y la 5, $\frac{1}{4}$ de círculo

Estudiante 3

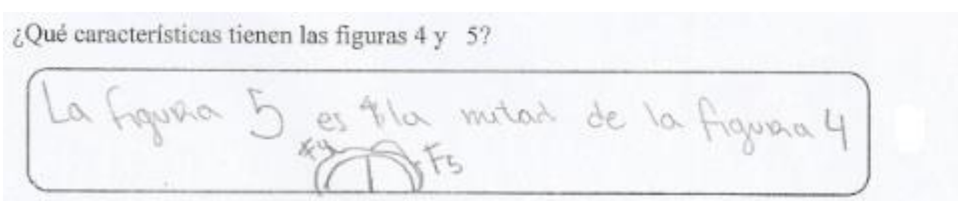

¿Qué características tienen las figuras 4 y 5?

La figura 4 es el doble de la figura 5, porque si separo a la figura 4 en dos quedan 2 figuras que son igual a la figura 5

¿Qué relación observas entre las tres figuras?

Estudiante 30: “la figura 4 es el doble de la figura 5, porque si se separa a la figura 4 en dos quedan 2 figuras que son igual a la figura 5”.

Estrategia 2: La figura 5 es la mitad de la figura 4


¿Qué características tienen las figuras 4 y 5?

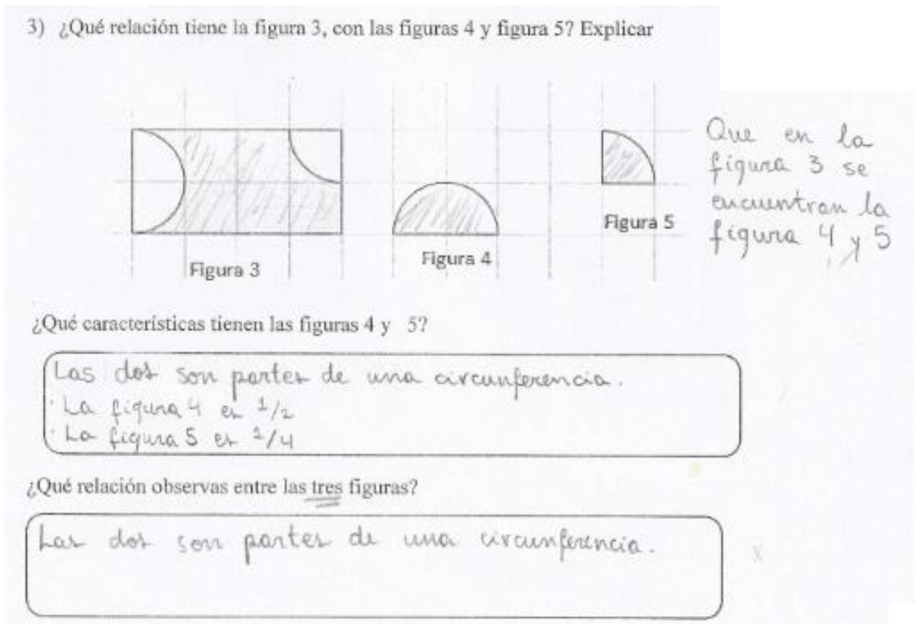
La figura 5 es $\frac{1}{2}$ la mitad de la figura 4

Estudiante 22

Se presentan alguna respuesta inconclusa, en las que los estudiantes se focalizan en la forma al referirse a que ambas figuras son partes de un círculo o bien al ángulo recto de la figura 5.

Se encuentran 10 errores en las producciones de los estudiantes tipificados en las siguientes categorías:

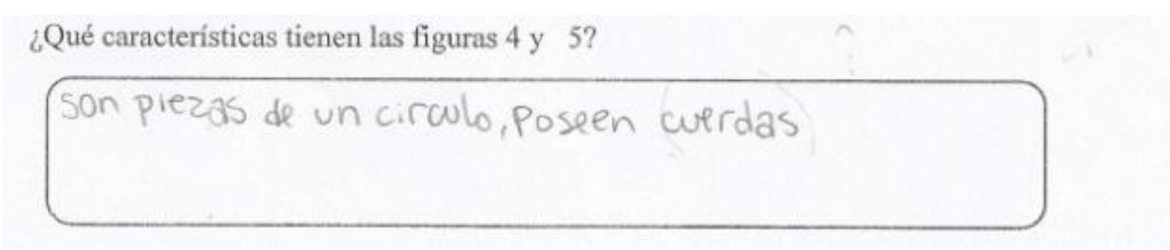
Err1: Establece entre las figuras las relaciones ¼ y ½ de una circunferencia; o que son fragmentos de una circunferencia.



Estudiante 12

Los estudiantes en esta categoría identifican o no la relación entre las partes, pero cometen un error semántico, confundiendo el significado de circunferencia con el de círculo.

Err2: Son piezas de un círculo que poseen cuerdas; son semicírculos; ambos pueden formar un círculo.



Estudiante 6

Los estudiantes no identifican que partes del círculo son las figuras, confundiendo algunos, el radio con una cuerda.

En la tercera pregunta, ¿qué relación observas entre las tres figuras?, la mayoría de los estudiantes, 21 de los 32, establecen relaciones entre las tres figuras expresándolas en lenguaje natural; utilizaron las siguientes estrategias categorizadas como:

Estrategia 1: Establecen relaciones de inclusión entre las figuras, argumentando que la figura 4 y figura 5 son parte de la figura 3; o bien que en todas esta la figura 5.

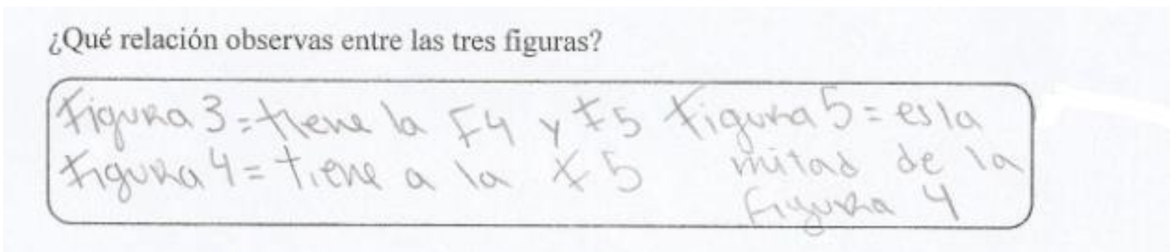
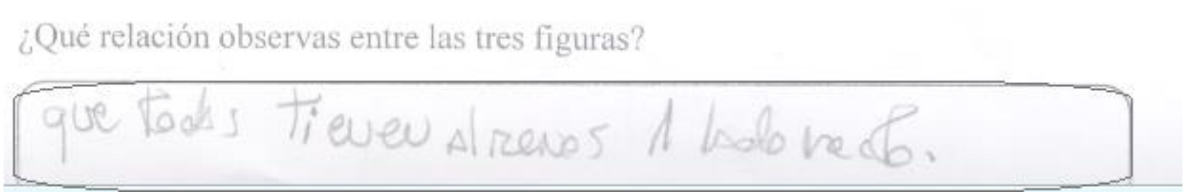

¿Qué relación observas entre las tres figuras?

Figura 3 = tiene la F4 y F5
Figura 4 = tiene a la F5
Figura 5 = es la mitad de la figura 4

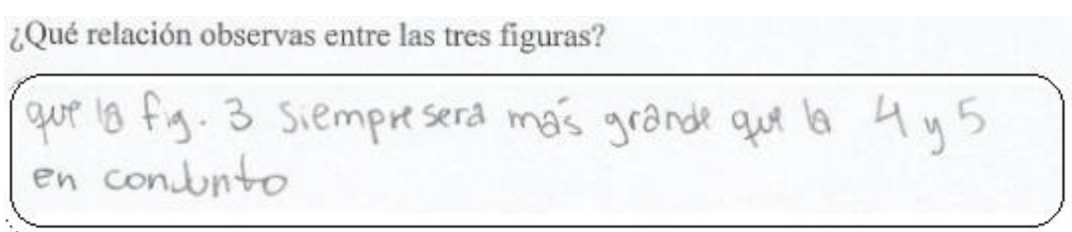
Estudiante 22

Estrategia 2: sus argumentos se refieren a la forma de la figura (curva o recta); o bien que la figura 3 es más grande que las otras dos figuras.


¿Qué relación observas entre las tres figuras?

que todas tienen almenos 1 lado recto.

Estudiante 3

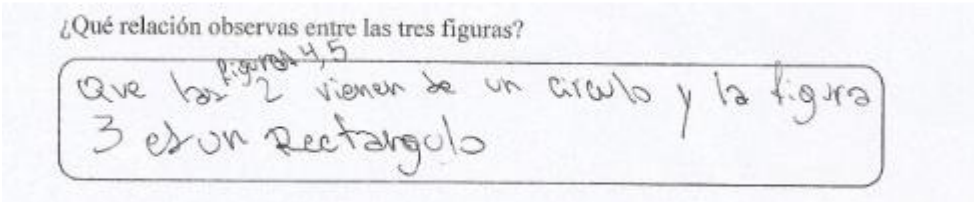

¿Qué relación observas entre las tres figuras?

que la fig. 3 siempre sera más grande que la 4 y 5 en conjunto

Estudiante 6

En las producciones de los estudiantes se encuentran errores tipificados en las siguientes categorías:

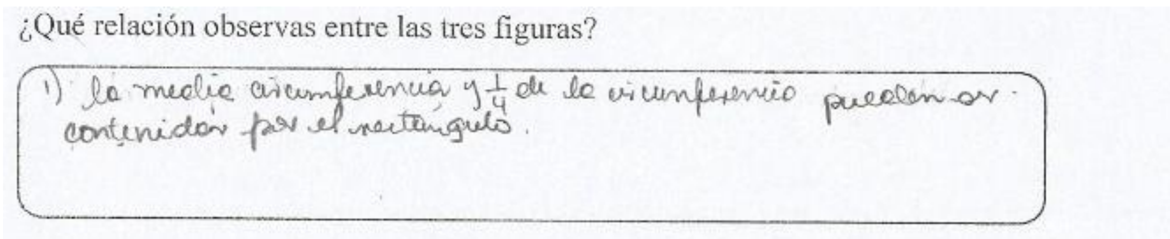
Err1: Observa la forma de la figura, círculo o rectángulo, no establece relaciones entre ellas.


¿Qué relación observas entre las tres figuras?

Que las figuras 4,5 2 vienen de un circulo y la figura 3 es un Rectangulo

Estudiante 11

Err2: Se refiere a la circunferencia al establecer las relaciones entre las figuras


¿Qué relación observas entre las tres figuras?

1) la media circunferencia y $\frac{1}{4}$ de la circunferencia pueden ser contenidos por el rectangulo.

Estudiante 5

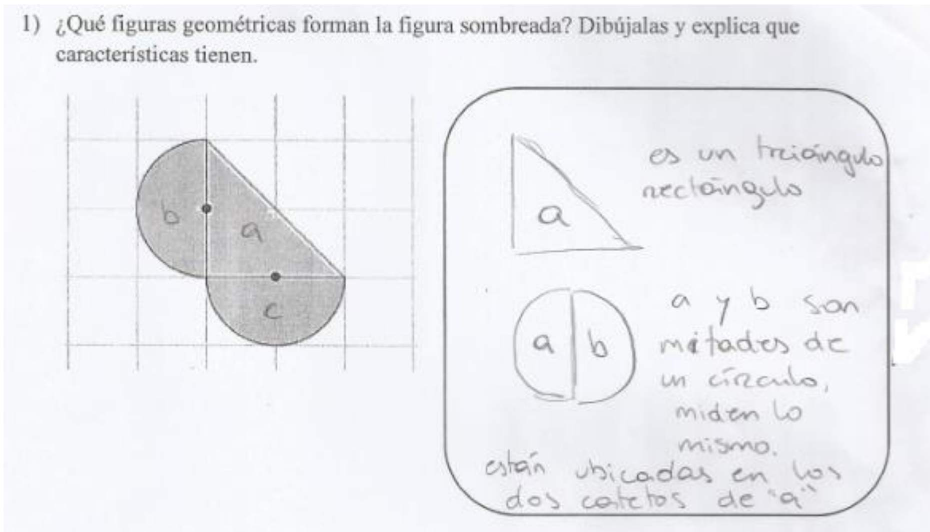
Como se ha mencionado antes, los estudiantes en esta categoría reiteran el error semántico al argumentar con la circunferencia en vez del círculo.

Actividad 3 “descomponiendo”

En relación a la tarea 1 las producciones de los estudiantes están expresadas en lenguaje natural y en un registro figural, caracterizan las figuras geométricas en cuanto a la forma: medio círculo o semicírculo, un cuarto de círculo; triángulo.

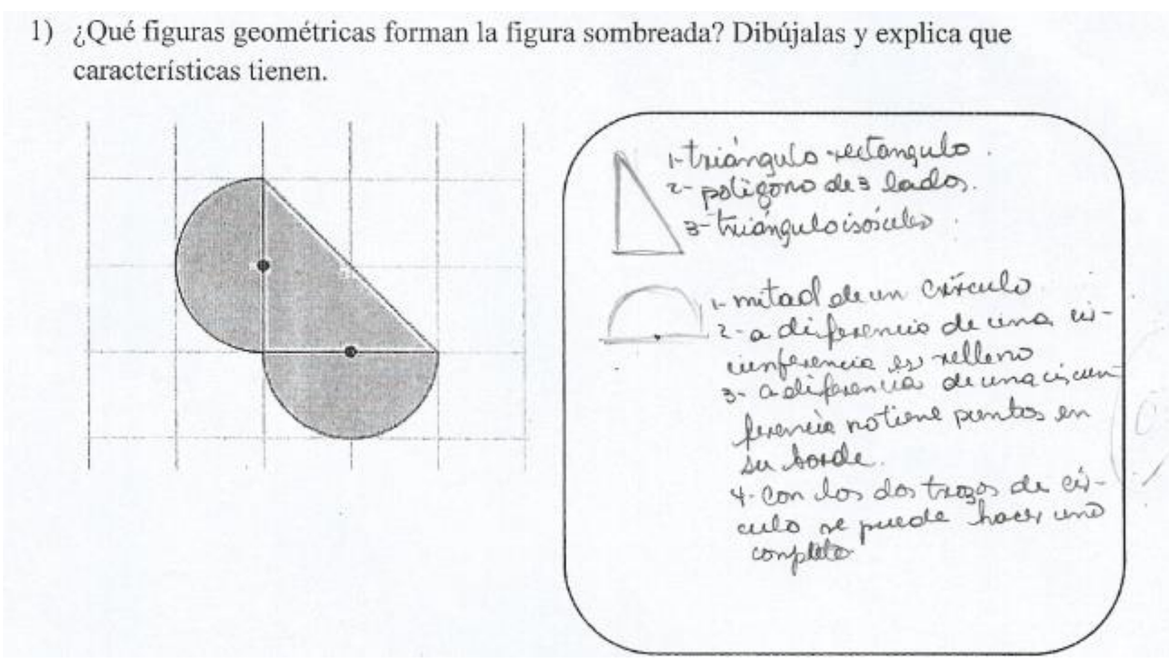
La mayoría de los estudiantes, 20 de 32, emplean las estrategias categorizadas como siguen:

Estrategia 1: Dibuja las figuras y las caracteriza por su forma, las nombra olas clasifica (triángulo rectángulo, semicírculos, círculo), caracteriza los semicírculos: congruentes, miden 180°.



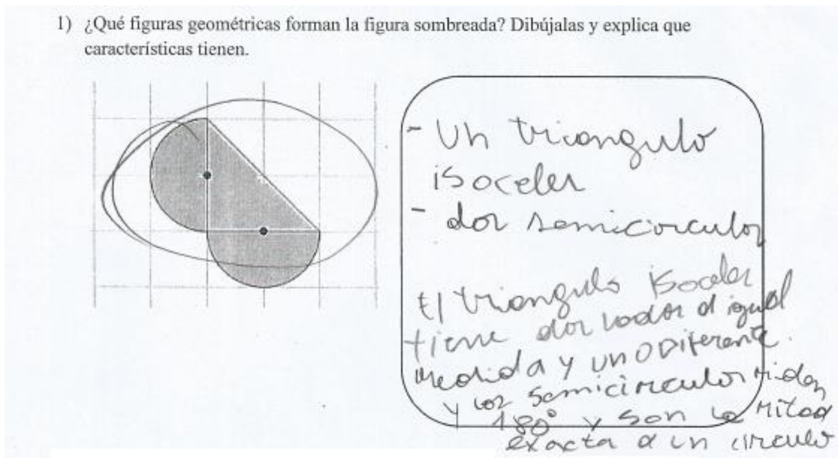
Estudiante 13

Estrategia 2: Dibuja las figuras y las caracteriza como triángulo isósceles y semicírculos o mitad de un círculo



Estudiante 5: da más detalles del solicitado refiriéndose a las características de los polígonos, triángulos y círculo

Estrategia 3: No dibuja, caracteriza el triángulo como triángulo isósceles (2 lados igual medida), semicírculos (miden 180°); triángulo rectángulo (un ángulo de medida 90°, dos de medidas de 45°).



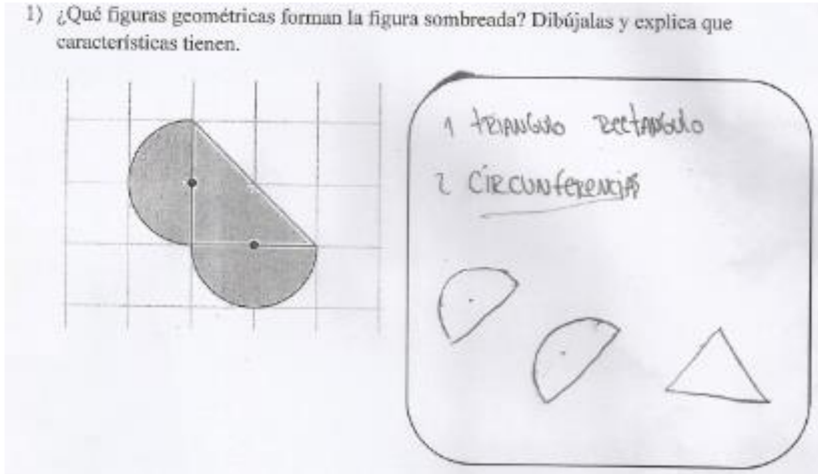
Estudiante 1

Se presentan algunas respuestas inconclusas, 5 de 32, los estudiantes no las dibujan y nombran las figuras sin caracterizarlas.

La mayoría de los estudiantes argumenta adecuadamente las características del círculo, otros mencionan que es redondo y esta relleno.

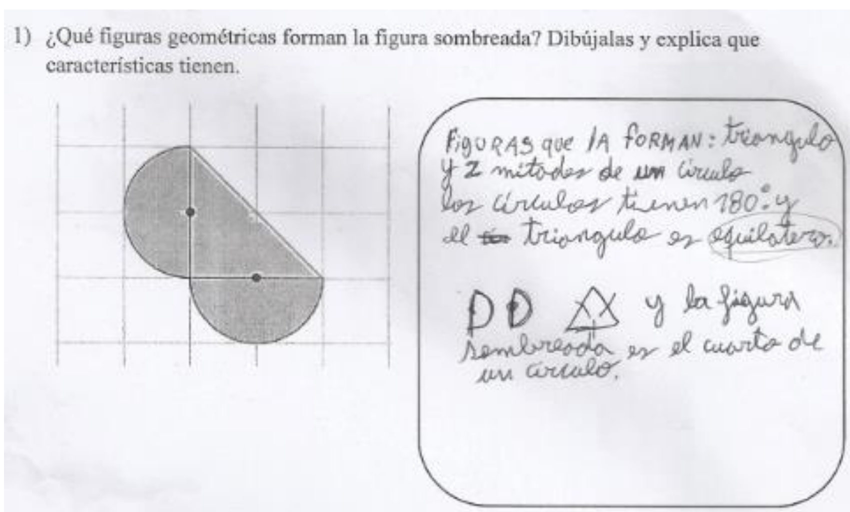
Se encuentran 6 errores de 32 en las producciones de los estudiantes, categorizados como:

Err1: se refiere a la circunferencia o semicircunferencias, cometiendo un error semántico, con respecto al significado del círculo.



Estudiante 28

Err2: caracteriza el triángulo como triángulo equilátero, cometiendo un error semántico, con respecto al significado triángulo rectángulo; se refiere a un cuarto de círculo.

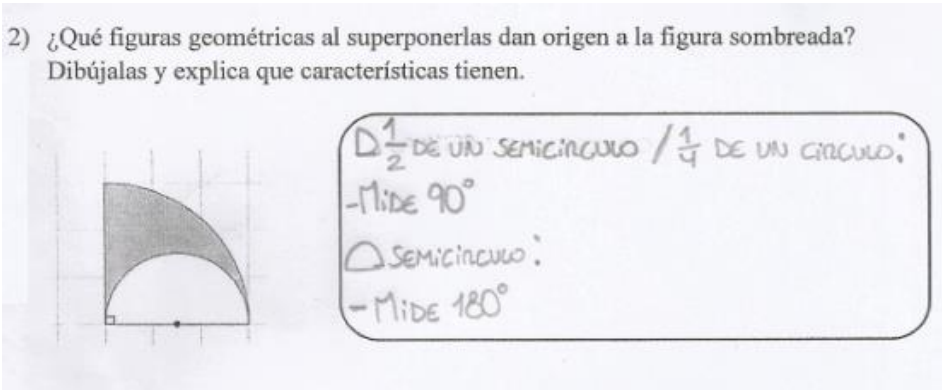


Estudiante 20

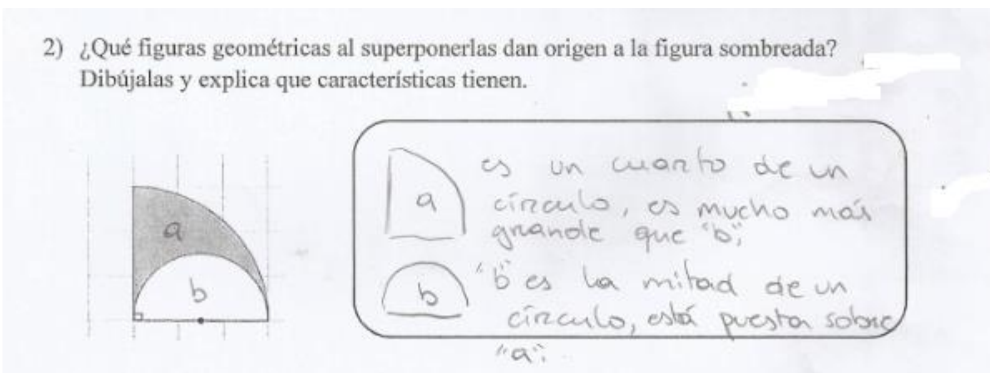
Algunos de los argumentos que dan los estudiantes con respecto al semicírculo es que su medida es de 180°.

En relación a la tarea 2, en las producciones de los estudiantes 20 de 32 utilizan un registro figural y/o un lenguaje natural en estrategias categorizadas como:

Estrategia 1: Dibuja e identifica las figuras geométricas que forman la figura compuesta y las caracteriza; ¼ de círculo: arco; mide 90°, negro, más grande; ½ círculo: mide 180°, blanco; observan que encima del cuarto de círculo hay un semicírculo.

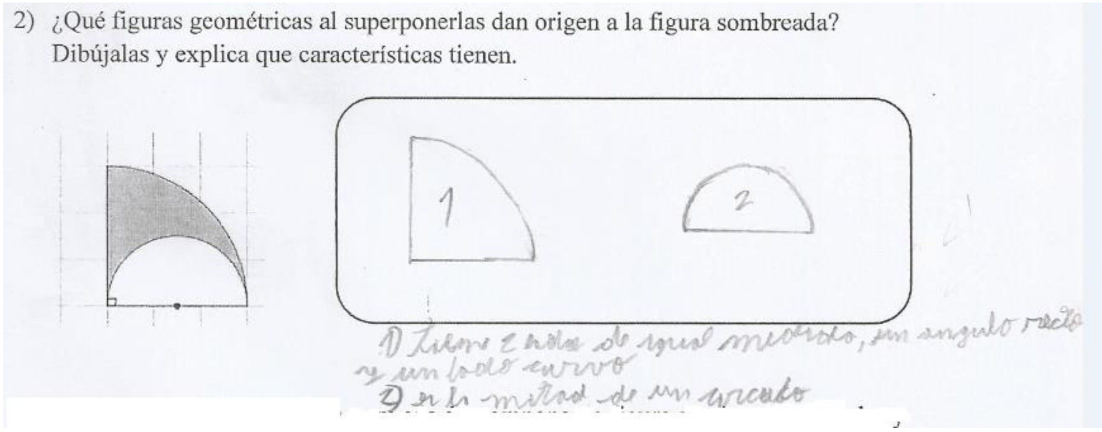


Estudiante 4



Estudiante 13

Estrategia 2: Dibuja e identifica las figuras geométricas que forman la figura compuesta y las caracteriza, ¼ de circulo: tiene 2 lados de igual medida, un ángulo recto, y un lado curvo, mitad de un semicírculo; semicírculo la mitad de un círculo y da origen a la figura sombreada.

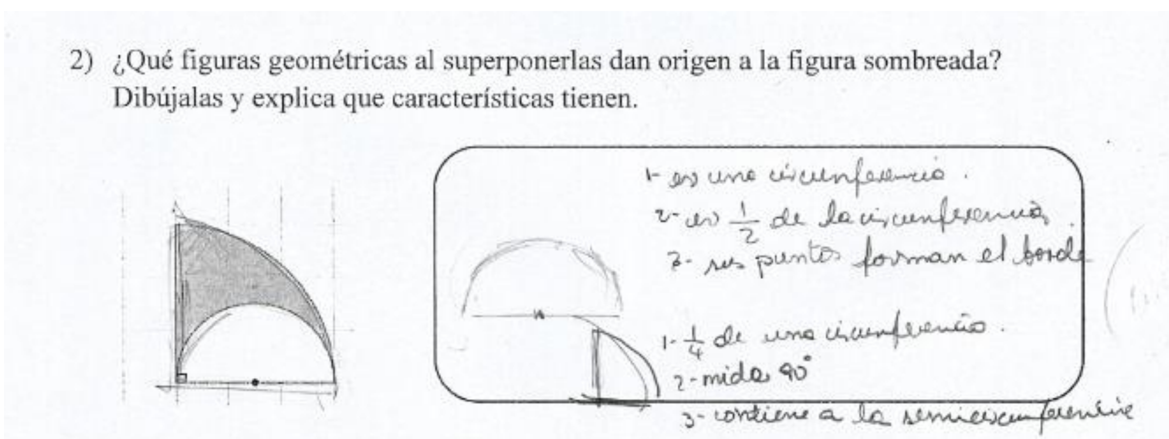


Estudiante 16: *(1) tiene 2 radios de igual medida, un ángulo recto y un lado curvo; 2) es la mitad de un círculo)*

Se encuentran algunas respuestas inconclusas de los estudiantes, algunos no dibujan o no caracterizan las figuras que forman la figura compuesta.

En esta actividad, se encuentran errores de tipo semántico pues se refiere a circunferencia en vez de círculo, estos están categorizados como:

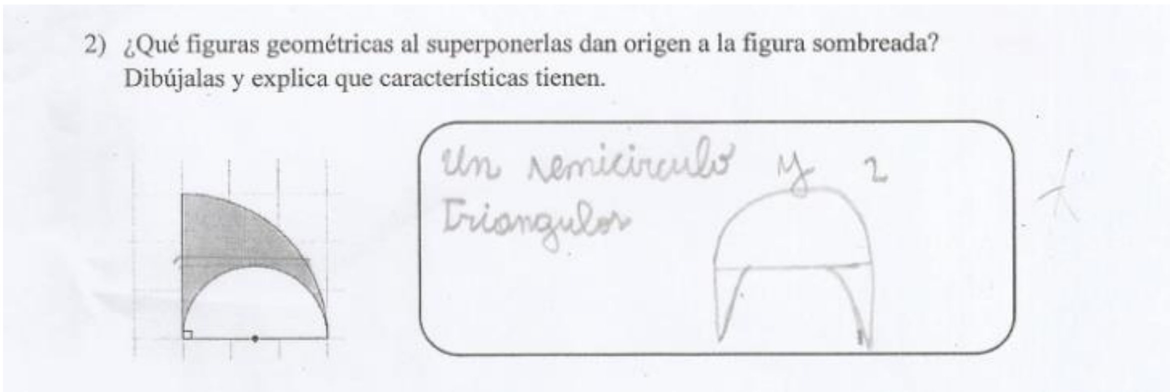
Err1: dibuja las figuras y las identifica, como partes de una circunferencia ambas o una de ellas; se refiere a semicircunferencia de 90°



Estudiante 5

Algunos estudiantes realizan una descripción adecuada del proceso solo se equivocan al mencionar la circunferencia en vez del círculo

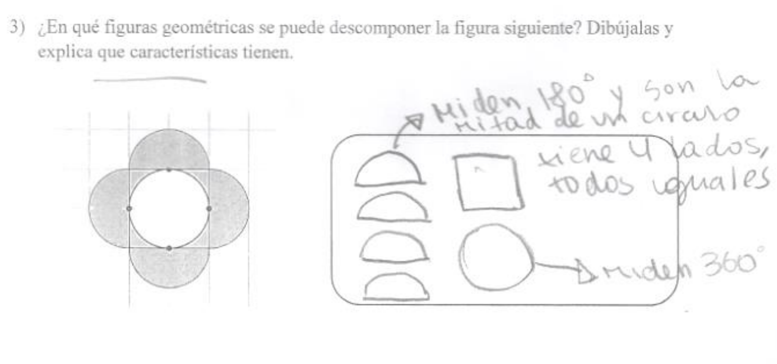
Err2: Dibuja solo lo sombreado; identifica semicírculo y dos triángulos se apoya en una línea auxiliar y no considera que la parte que se genera es curva y no recta.



Estudiante 9

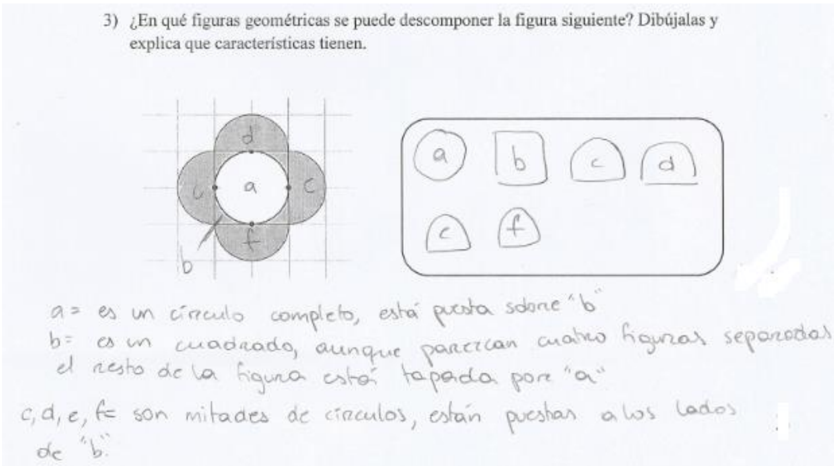
En relación a la tarea 3, las respuestas de los estudiantes las expresan en registro figural y en lenguaje natural; 15 de 32 emplean las siguientes estrategias que se categorizan como:

Estrategia 1: Dibujan las figuras que forman la figura compuesta; algunos caracterizan las figuras, semicírculo (mide 180°; mitad de círculo); Círculo (mide 360°); Cuadrado (todos sus lados iguales; ángulos de 90°; mide 360°;); reconocen que sobre el cuadrado hay un semicírculo blanco



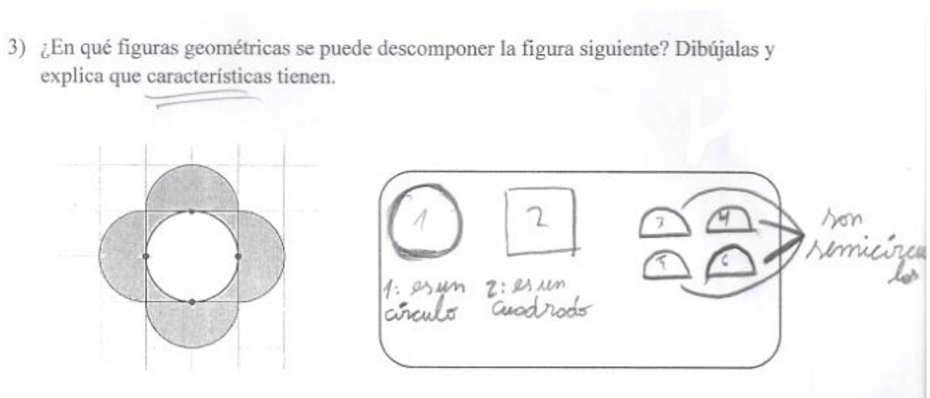
Estudiante 25

Estrategia 2: Dibuja las figuras que forman la figura compuesta, el cuadrado con dos semicírculos, al círculo blanco sobrepuesto y al círculo formado por los otros dos semicírculos; no dan características.



Estudiante 13

Estrategia 3: Dibuja las figuras, solo una de cada tipo escribe sus nombres pero no las caracterizó.



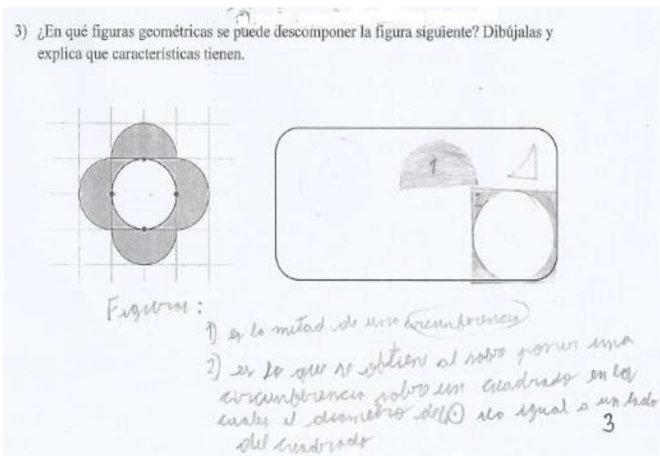
Estudiante 19

Se encuentran producciones incompletas, en las que los estudiantes respondieron dibujando o solo escribiendo los nombres de estas, sin caracterizarlas.

Es una tarea que presenta dificultades a los estudiantes para descomponer la figura, algunos focalizan su atención en la región sombreada () entre el cuadrado y el círculo blanco visualizando un triángulo o un cono, cometiendo un error semántico al confundir el significado.

En las producciones se encuentran errores, 12 de 32, tipificados en las siguientes categorías:

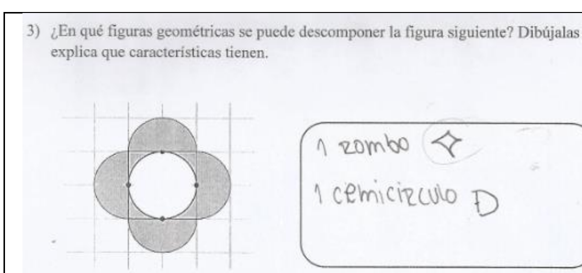
Err1: realiza un proceso adecuado, comete un error semántico al referirse a circunferencia.



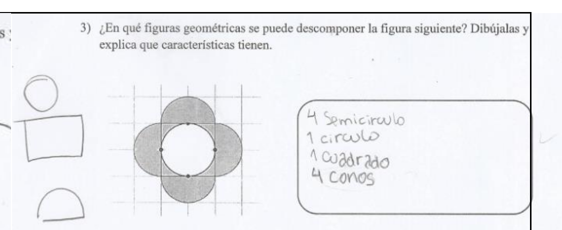
1) *“Es la mitad de un circunferencia”*
2) *“Es lo que se obtiene al sobre poner una circunferencia sobre un cuadrado en las cuales el diámetro de⊙ es igual a un lado del cuadrado”*

Estudiante 16: no descompone la figura en figuras geométricas

Err2: Los dibuja; identifica semicírculos, círculos y la región sombreada entre el cuadrado y el círculo blanco como conos, triángulos equiláteros; rombo cometiendo un error semántico, al considerar los arcos como segmentos



Estudiante 28



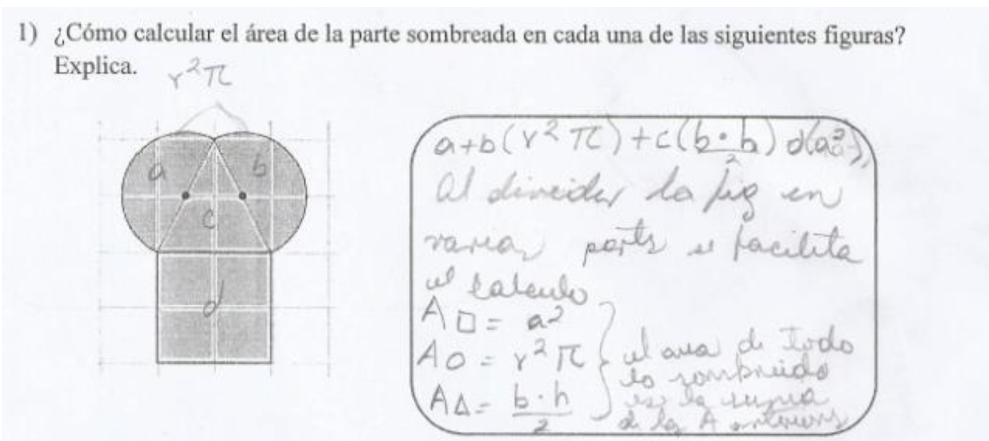
Estudiante 6

Actividad 4 “explicitando áreas”

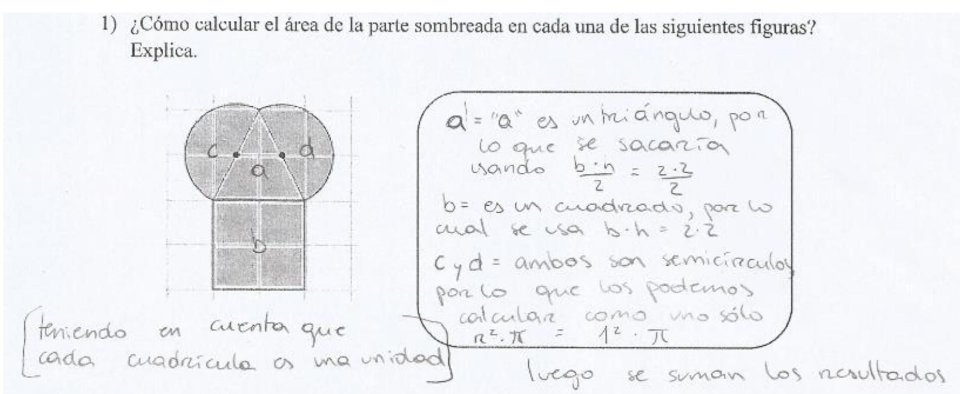
En la actividad 4 los estudiantes que visualizan las figuras geométricas que forman la figura compuesta, en sus producciones sus argumentos son dados en registro figural, lenguaje natural y/o algebraico, algunos incluyen las fórmulas del área de las figuras geométricas involucradas.

En la tarea 1, las estrategias utilizadas por 21 de los 31 estudiantes están categorizadas como:

Estrategia 1: en lenguaje natural y/o algebraico describen que se debe calcular la suma del área de un círculo, de un triángulo y de un cuadrado.

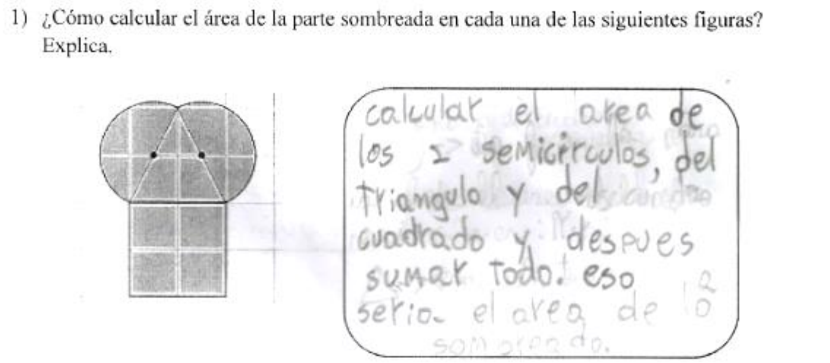


Estudiante 25



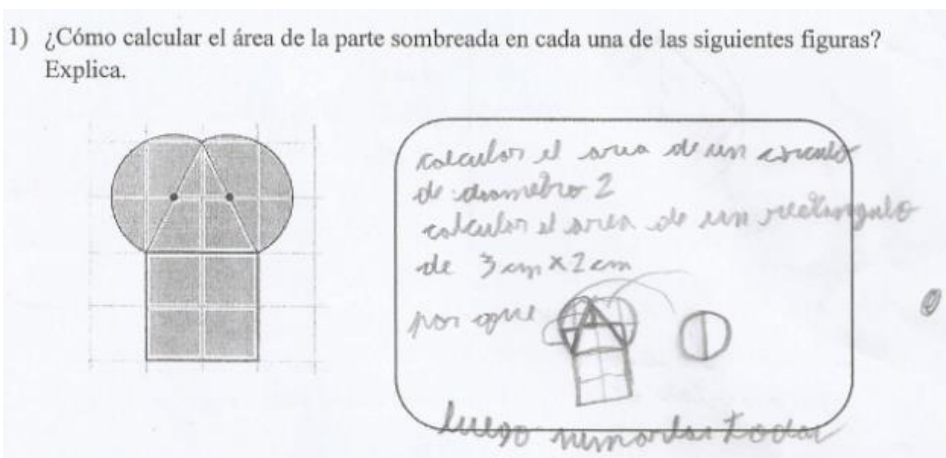
Estudiante 13: considera 1 unidad de la cuadrícula y realiza cálculos

Estrategia 2: en lenguaje natural y/o algebraico describen que se debe calcular la suma del área de dos semicírculos, de un triángulo y de un cuadrado.



Estudiante 9

Estrategia 3: en lenguaje natural describen que se debe calcular la suma del área de un semicírculo y de un rectángulo de 3cm x 2cm; el triángulo lo descompone para formar un rectángulo con el cuadrado;



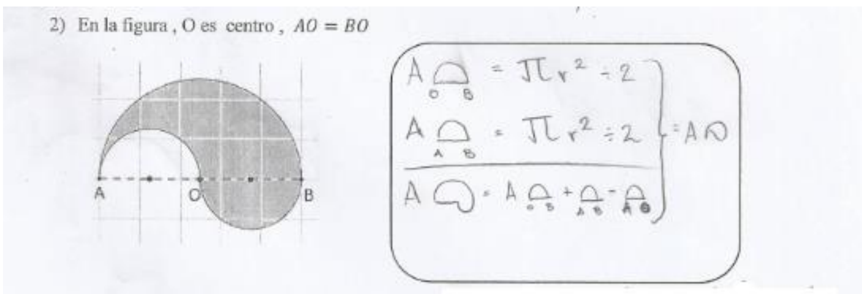
Estudiante 16: su respuesta no está contemplada en el análisis a priori

Se encuentran respuestas incompletas de estudiantes que argumentan en lenguaje algebraico, escribiendo las fórmulas para calcular cada área, pero no concluyen que deben sumar; otros declaran que deben sumar pero no especifican qué áreas.

Se da un error semántico en la respuesta de un estudiante, clasifica el triángulo rectángulo como triángulo equilátero.

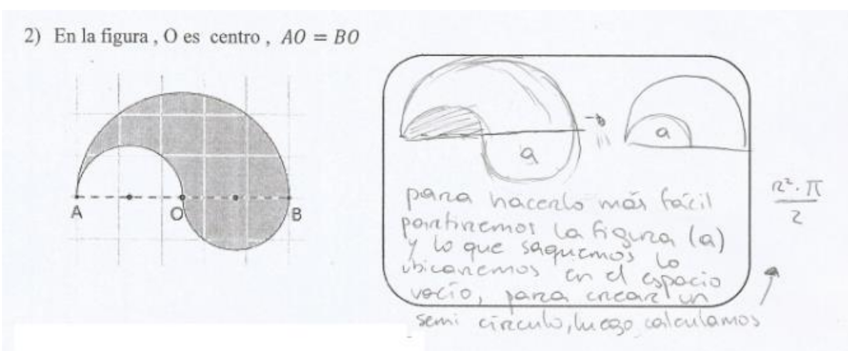
En relación a la tarea 2, los argumentos de los estudiantes en sus producciones están en lenguaje natural, figural y/o algebraico, las estrategias, 18 de 31, que emplearon se categorizan como:

Estrategia 1: calculan el área de un semicírculo de radio r =OA y se resta ésta con el área del semicírculo de radio la mitad de OA, para luego a este resultado sumar el área del otro semicírculo de radio OB.

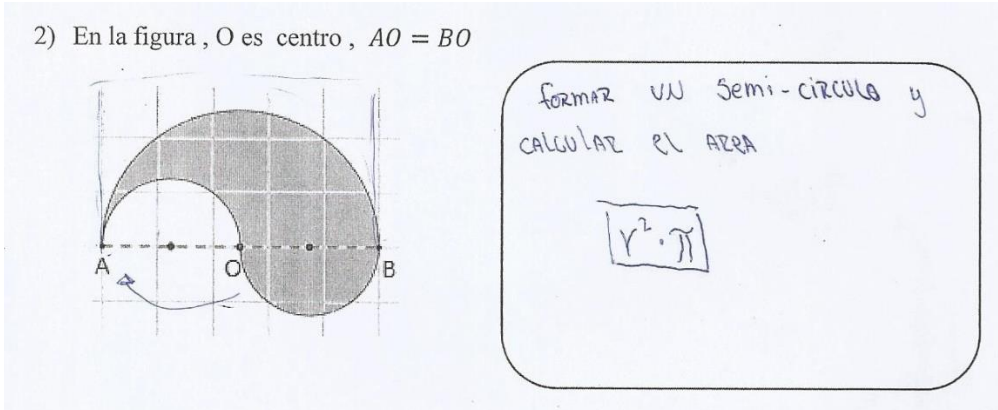


Estudiante 3

Estrategia 2: calculan el área de un semicírculo de radio r =OA (o OB), visualizan que el semicírculo sobrepuesto (blanco) es igual al semicírculo de radio OB.



Estudiante 13



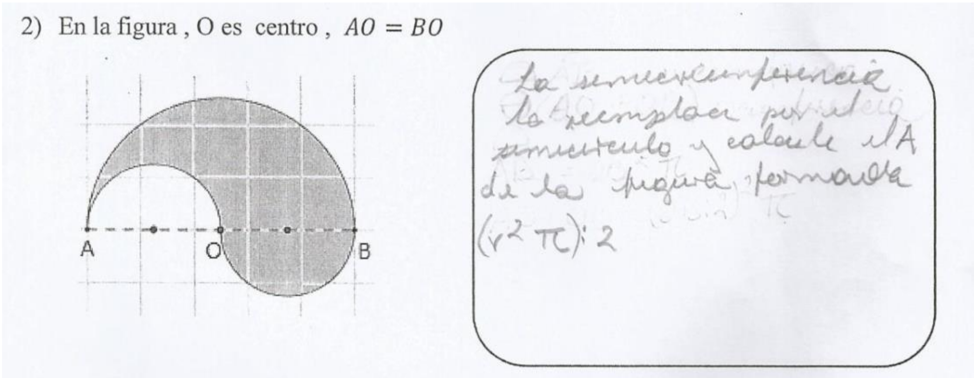
Estudiante 28

Resulta ser una tarea para ellos abordable, pues se descompone en la misma figura, semicírculos con distintos radios, 15 de los 18 estudiantes visualizan que pueden trasladar el semicírculo “sombreado” al semicírculo “blanco” para así calcular el área de un solo semicírculo.; algunos lo indica con unas flechas para indicar lo que tendrían que mover para completar el semicírculo de radio mayor.

Se encuentran respuestas inconclusas, en las cuales los estudiantes visualizan las figuras geométricas que forma la figura compuesta, y a las cuales deben calcular pero no concluyen el procedimiento, es decir no suman o restan las áreas que corresponden.

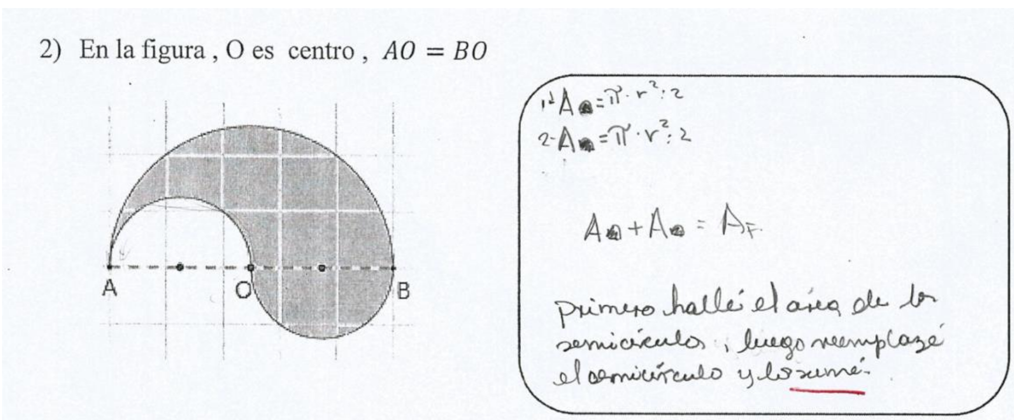
En esta tarea, 5 de los 31 estudiantes cometen errores en sus respuestas, los que están categorizados como:

Err1: Se refiere a circunferencias y semicircunferencias



Estudiante 25

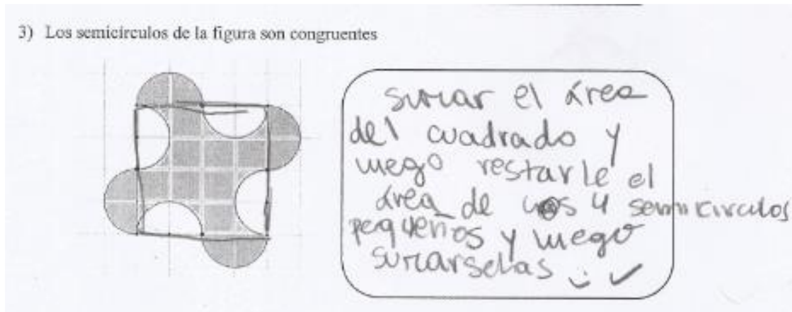
Err2: Realizan operaciones con las áreas de los semicírculos que no conllevan a la respuesta, suman las dos o tres áreas de los semicírculos.



Estudiante 5

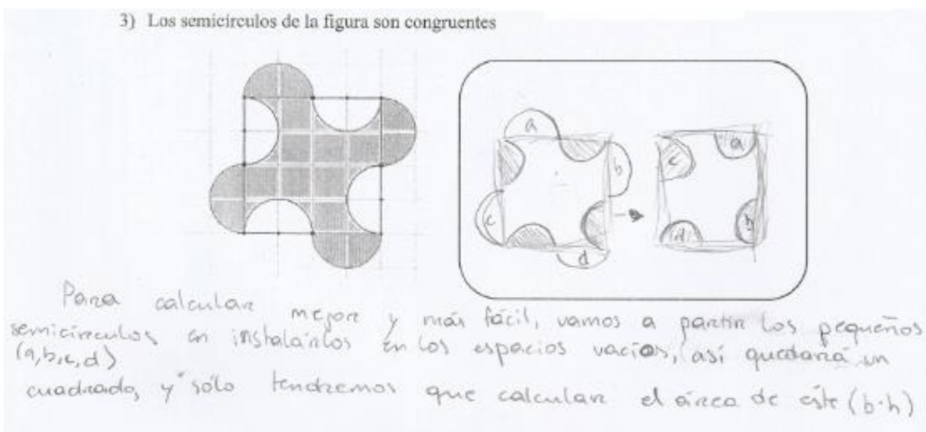
Con respecto a la tarea 3, en las producciones, se encuentran 19 estrategias de 31 categorizadas como:

Estrategia 1: Calculan el área de un cuadrado y restan el área de cuatro semicírculos del mismo radio, a esta diferencia suman las áreas de otros cuatro semicírculos del mismo radio.



Estudiante 18

Estrategia 2: Visualiza el cuadrado descompuesto por 4 semicírculos congruentes, que pueden componer por los otros 4 semicírculos congruentes formándose un cuadrado; finalmente calculan el área de un cuadrado; algunos estudiantes indican con flechas el procedimiento a seguir.

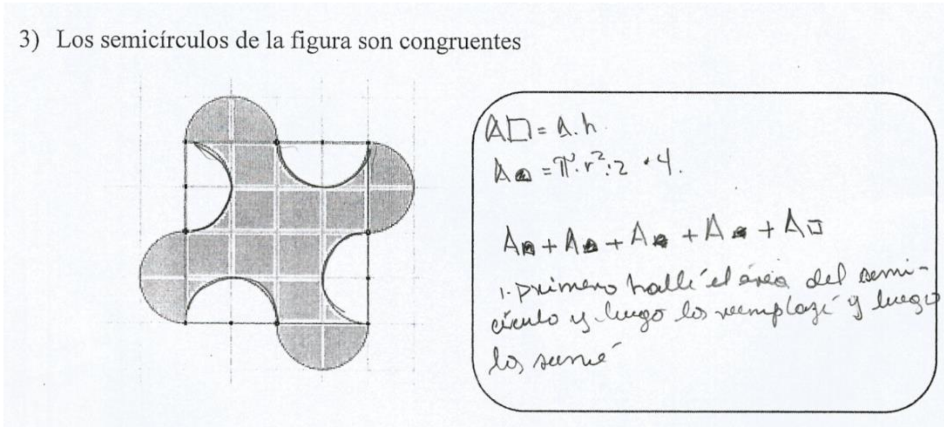


Estudiante 13

Se presentan respuesta inconclusa en las cuales los estudiantes indican que hay que calcular el área de un cuadrado pero no dan argumentos.

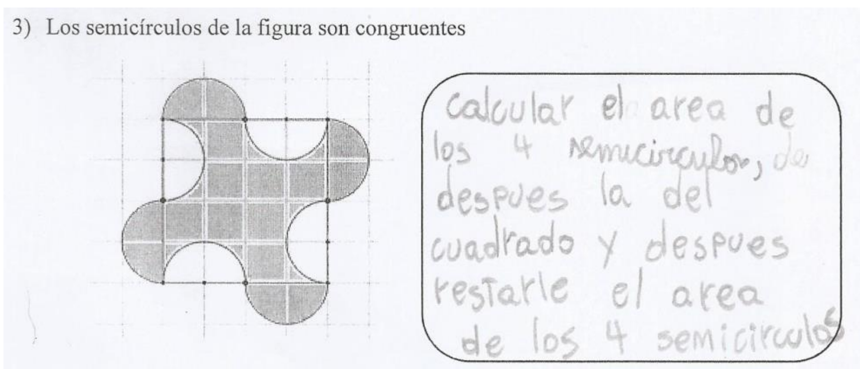
Se encuentran 6 producciones de las 31 con errores, que consisten en el proceso que realizan para calcular el área de la figura compuesta, tipificados en las siguientes categorías:

Err1: calcula el área de los semicírculos y los suma con el área del cuadrado o no especifica con qué área.



Estudiante 5

Err2: Resta (o suma) el área de los semicírculos con el área del cuadrado pero no los vuelve a sumar (o restar).

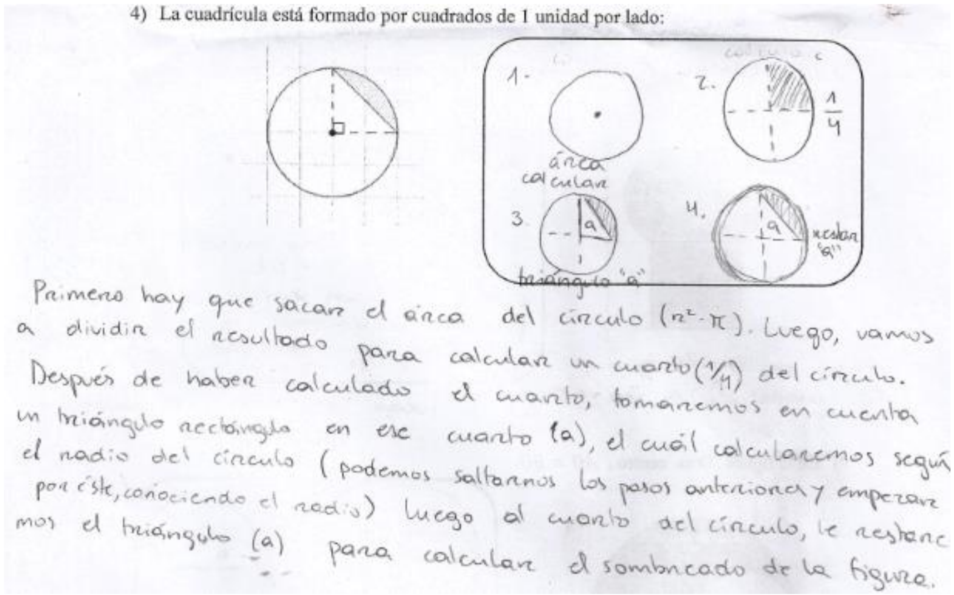


Estudiante 9

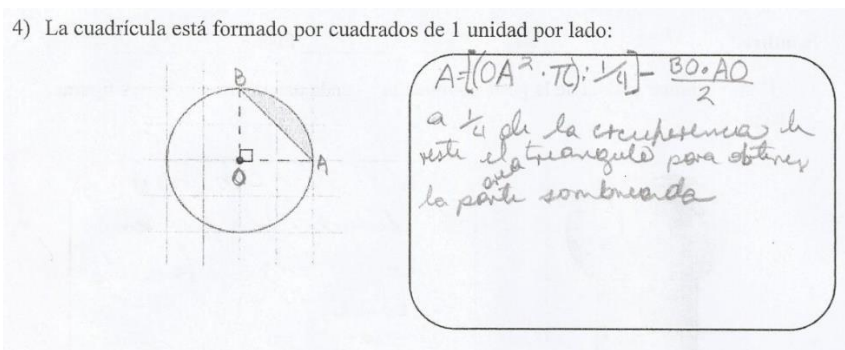
Los estudiantes que responden en forma errada, en su razonamiento dan cuenta que deben calcular áreas de las figuras que visualizan (sombreadas y blancas) semicírculos y cuadrado, pero no concluyen cómo calcular el área de la figura sombreada finalmente;

En la tarea 4 las estrategias de 13 de los 31 estudiantes están categorizadas como:

Estrategia 1: Calculan el área de un círculo la dividen en 4, y a una de estas restan el área del triángulo rectángulo.

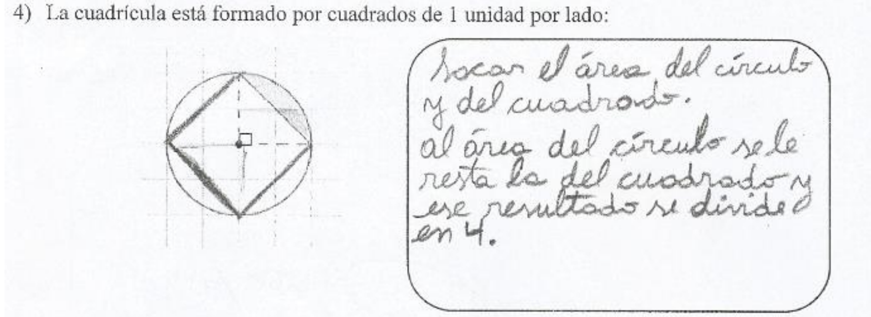


Estudiante 13



Estudiante 25: error semántico, al referirse a la circunferencia en su estrategia.

Estrategia 2: trazan líneas auxiliares e inscriben un cuadrado en el círculo, calculan la diferencia entre estas áreas y calculan la cuarta parte de ella.

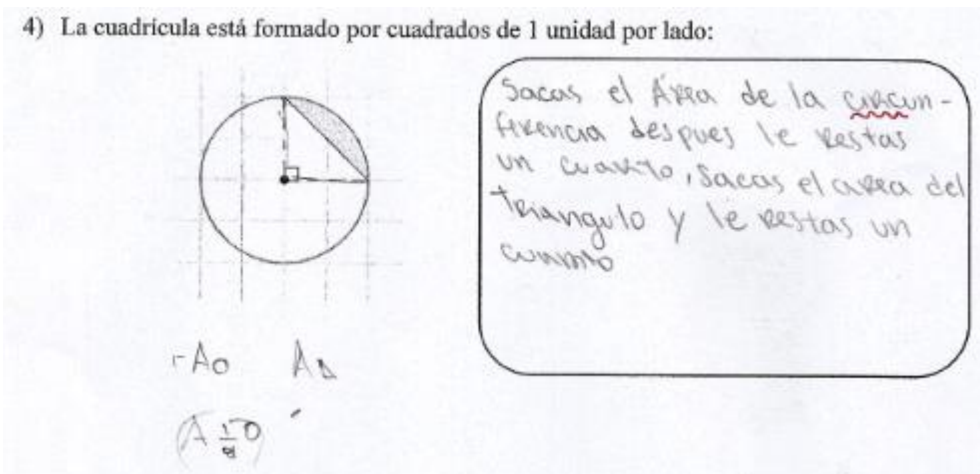


Estudiante19

Se encuentran respuestas inconclusas en las producciones de los estudiantes, calculan el área del cuarto de círculo, de semicírculo o de un triángulo pero no terminan de relacionar o establecer el proceso final con esos cálculos, es decir, restar sus áreas.

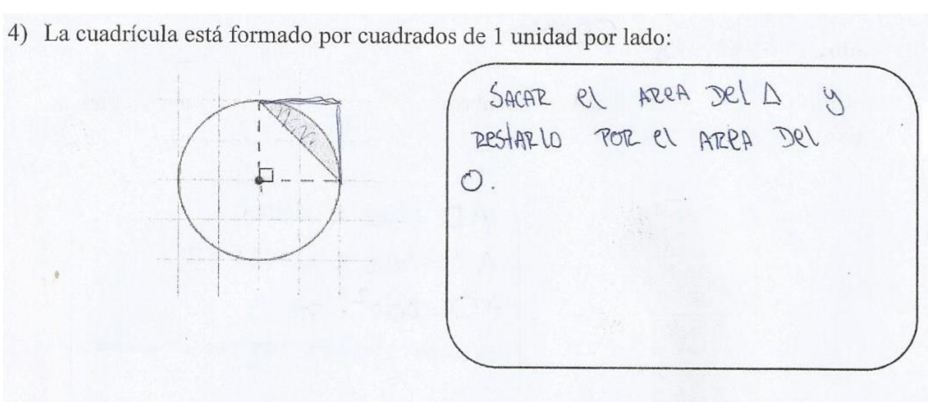
En esta actividad, 7 de 23 estudiantes que responden presentan errores en sus producciones categorizados como:

Err1: Error sintáctico pues resta al revés, el área del triángulo menos el área del cuarto de círculo.



Estudiante 22

Err2: Calcula el área del círculo, o semicírculo, restan el área del triángulo.



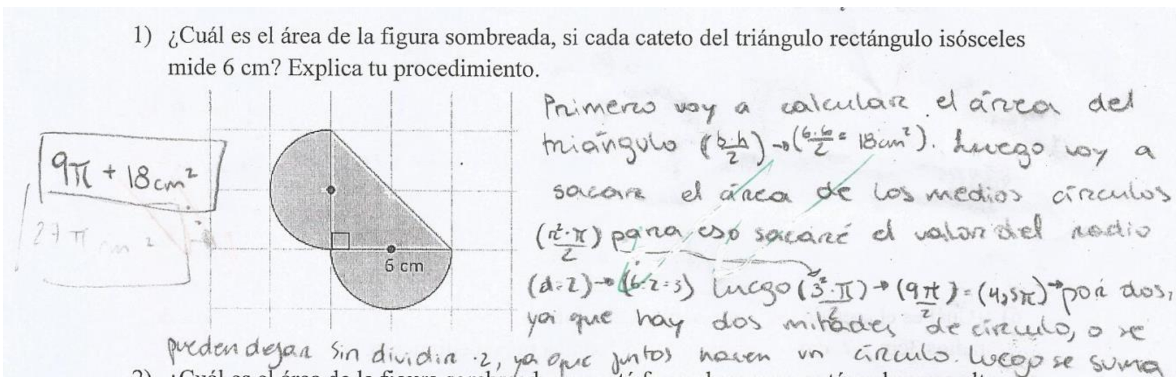
Estudiante 28

Actividad 5 "calculando áreas"

En relación a esta actividad "calculando áreas" las respuestas de los estudiantes están dadas en general en un lenguaje numérico y/o algebraico; algunos utilizan un registro figural. La mayoría de los estudiantes entrega sus respuestas sin escribir la unidad bidimensional en la medida de las áreas.

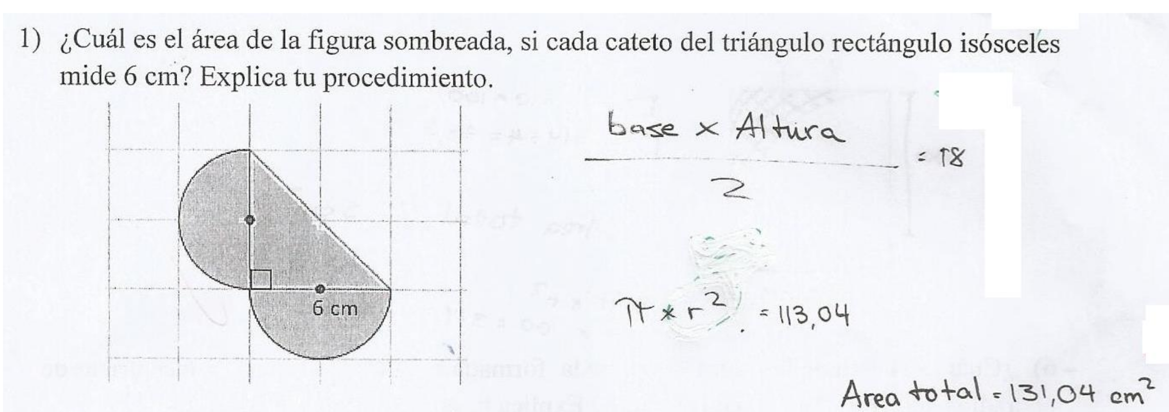
En la tarea 1, en las producciones de los estudiantes se encuentran 9 de 29 estrategias categorizadas como:

Estrategia 1: Calculan el área del triángulo y de los semicírculos, para luego sumarlas.



Estudiante 13

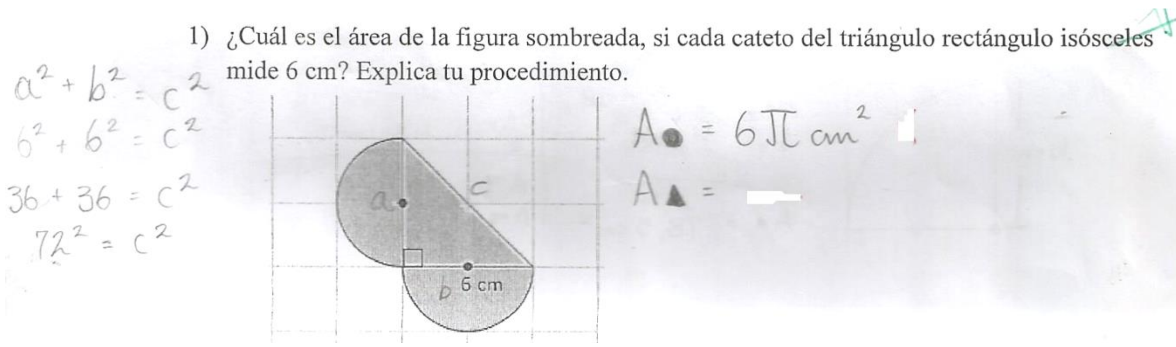
Estrategia 2: Calculan el área del triángulo y de un círculo, para luego sumar las áreas.



Estudiante 15: usa ≈ 3,14 en sus cálculos

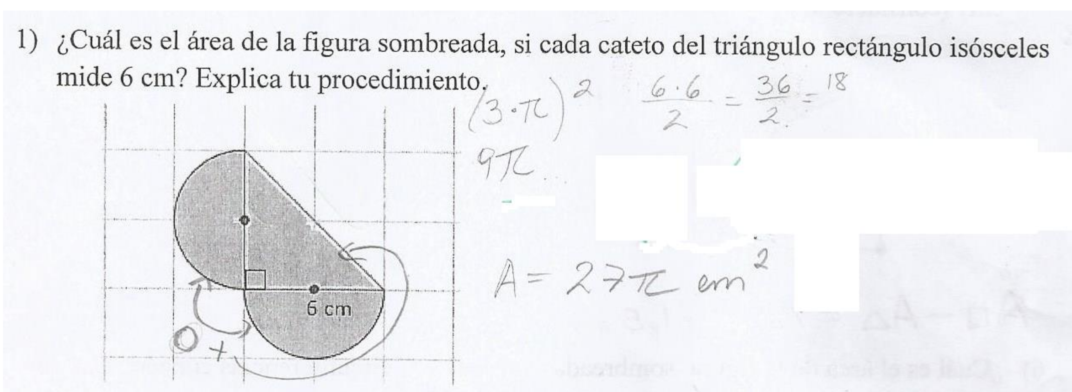
Entre los errores que se encuentran en la producciones de los estudiantes hay errores de tipo sintáctico, al realizar las operaciones, errores de tipo semántico al aplicar fórmulas y resolver operaciones aritméticas y algebraicas. Los 17 de los 29 errores están categorizados como:

Err1: Calculo de área del triángulo (no divide en 2) y/o del círculo (el doble del radio, en vez de la potencia de exponente 2, diámetro en vez del radio)



Estudiante 12: error sintáctico al utilizar el teorema de Pitágoras

Err2: Suma de términos no semejantes, resultados que se dejan expresados en términos de pi, lo reduce a un solo término.

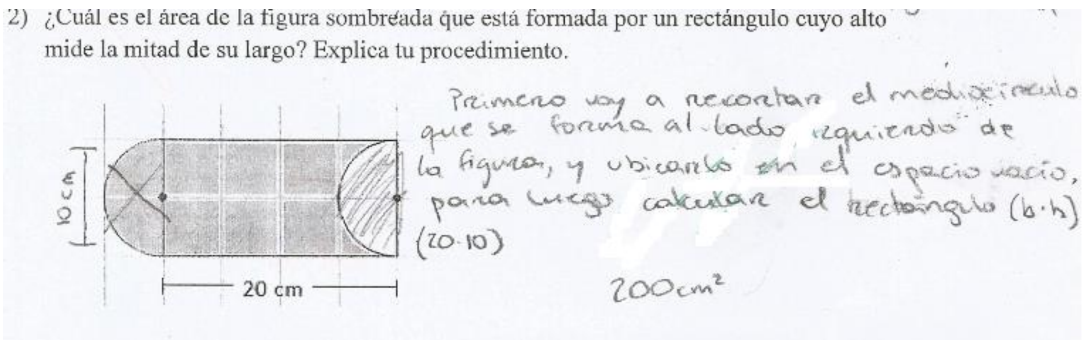


Estudiante 25

Diez de estos errores, en el proceso de resolución de los estudiantes, dan cuenta de un razonamiento puesto que estos surgen porque la respuesta del área del círculo se solicita en términos de π , lo que se presenta como una dificultad

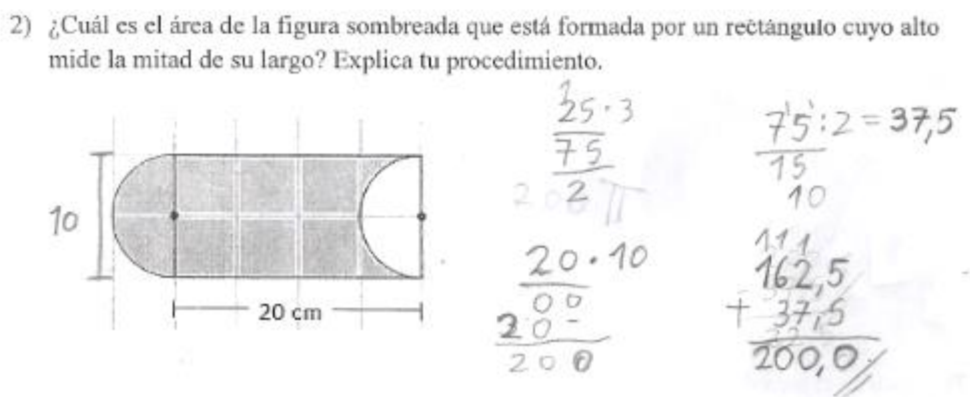
En relación a la tarea 2 en las producciones se encuentra 20 de 27 estrategias categorizadas como:

Estrategia 1: consideran la congruencia de los semicírculos, superponen el semicírculo sombreado en el semicírculo blanco para completar la superficie del rectángulo, y luego calculan el área del rectángulo.



Estudiante 13

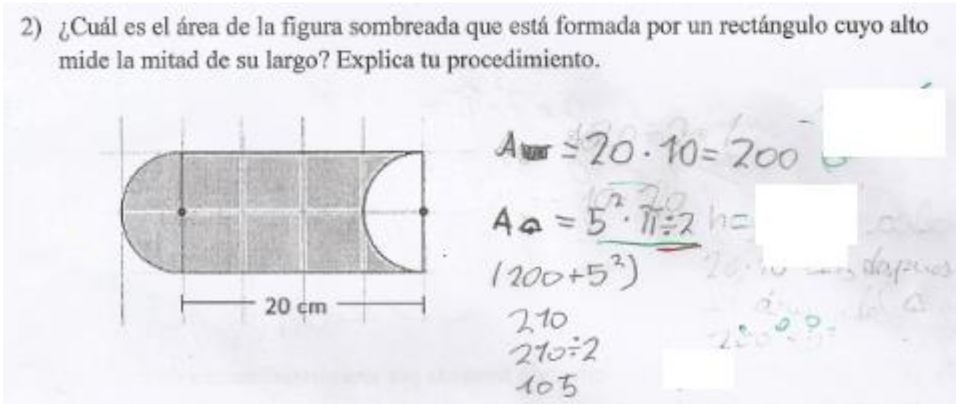
Estrategia 2: calculan el área de un rectángulo a ésta restan y suman el área de un semicírculo de igual radio, r = 5 cm.



Estudiante 20

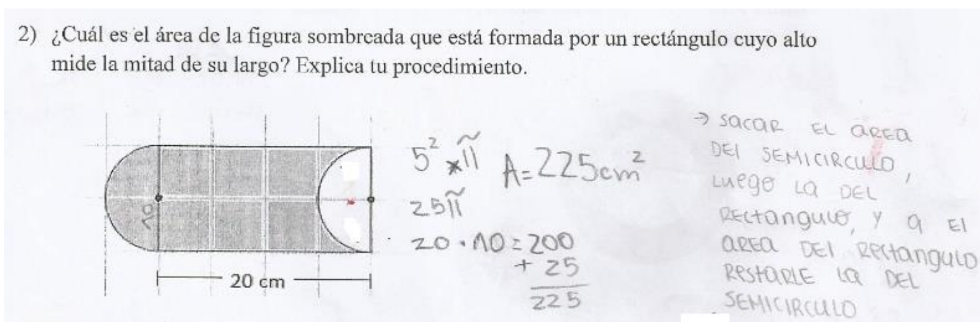
En las producciones de los estudiantes 8 de 29 contienen errores categorizados como:

Err1: Calculo del área del círculo (el doble del radio en vez de la potencia de exponente 2, diámetro en vez del radio).



Estudiante 21

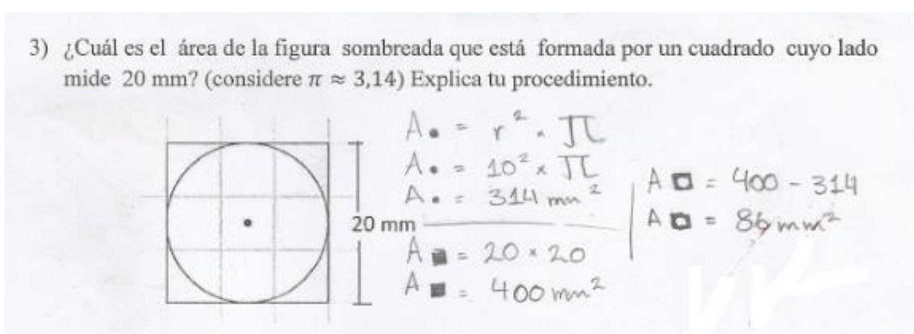
Err2: Operaciones realizadas con las áreas, restó solo el área del semicírculo al área del rectángulo o sumó el área de del rectángulo con la del círculo.



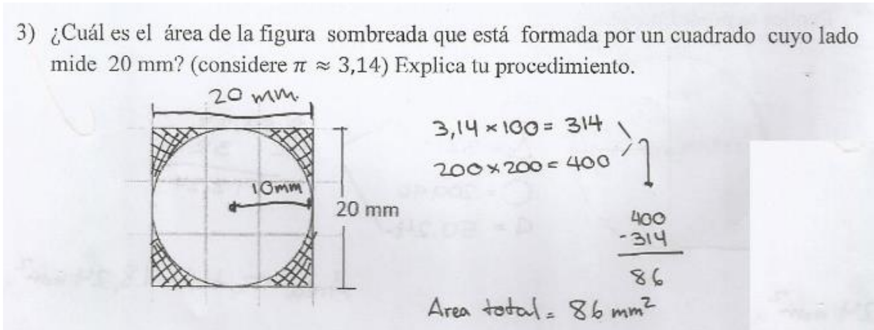
Estudiante 22

Con respecto a la tarea 3, en las producciones se encuentra 18 de 26 estrategias categorizadas como

Estrategia 1: Calculan el área del cuadrado y la del círculo, luego las restan.



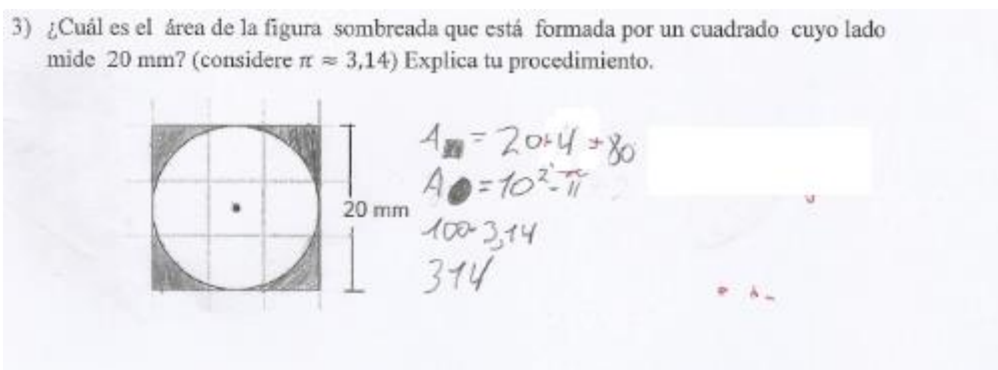
Estudiante 12



Estudiante 15

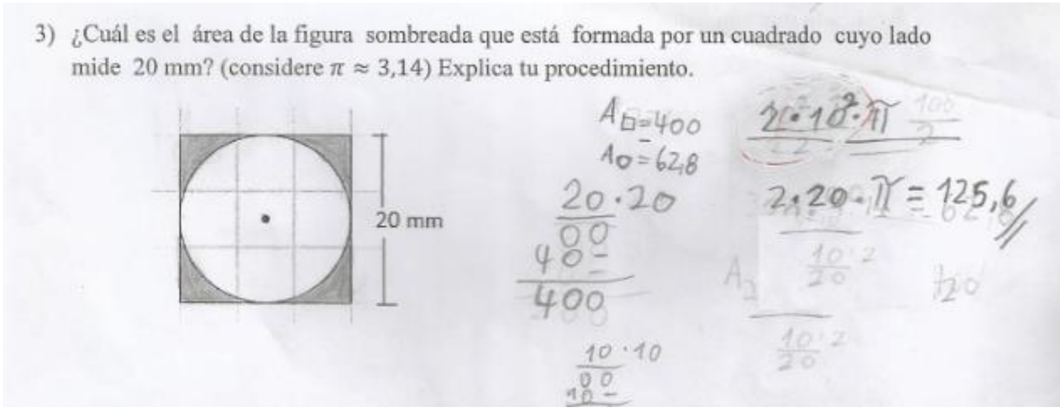
En cuanto a los errores, 8 de los 26 estudiantes contienen algunos en sus respuestas, estos errores son aritméticos y otros algebraicos, tipificados en las siguientes categorías:

Err1: Confunde fórmula del perímetro del cuadrado con la del área.



Estudiante 21

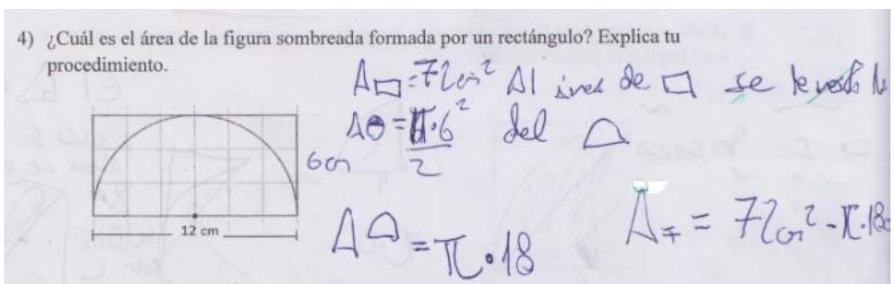
Err2: Operación aritmética en el cálculo del área del círculo, valor de una potencia de una multiplicación



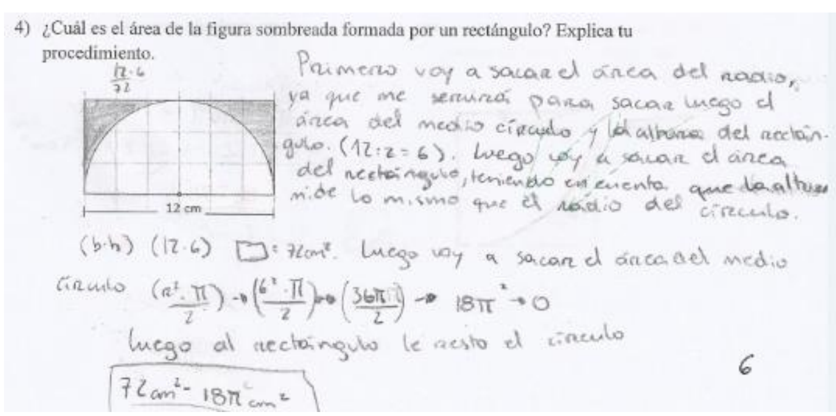
Estudiante 20

En relación a la tarea 4 en las producciones se encuentra 14 de 29 estrategias categorizadas como:

Estrategia 1: calculan el área del rectángulo y restan el área del semicírculo, algunos reemplazan el valor de 3,14 para π.



Estudiante 3



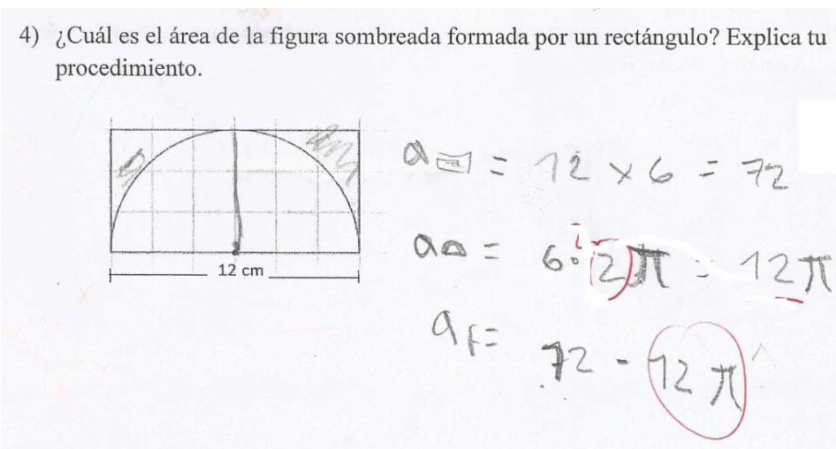
Estudiante 13

Ésta estudiante argumenta en lenguaje natural, evidencia errores pragmáticos al declarar que resta figuras geométricas y no las áreas.

Se presentan respuestas inconclusas de los estudiantes como omitir π , no restar las áreas de rectángulo y círculo.

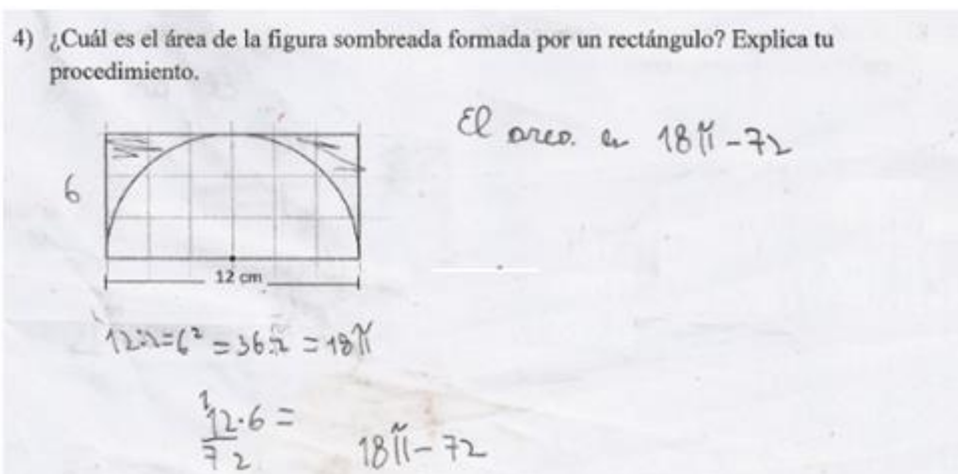
En cuanto a los errores, 9 de los 29 estudiantes presentan errores en sus respuestas, categorizadas como:

Err1: Resta al área del rectángulo el perímetro de la circunferencia o bien el área del círculo.



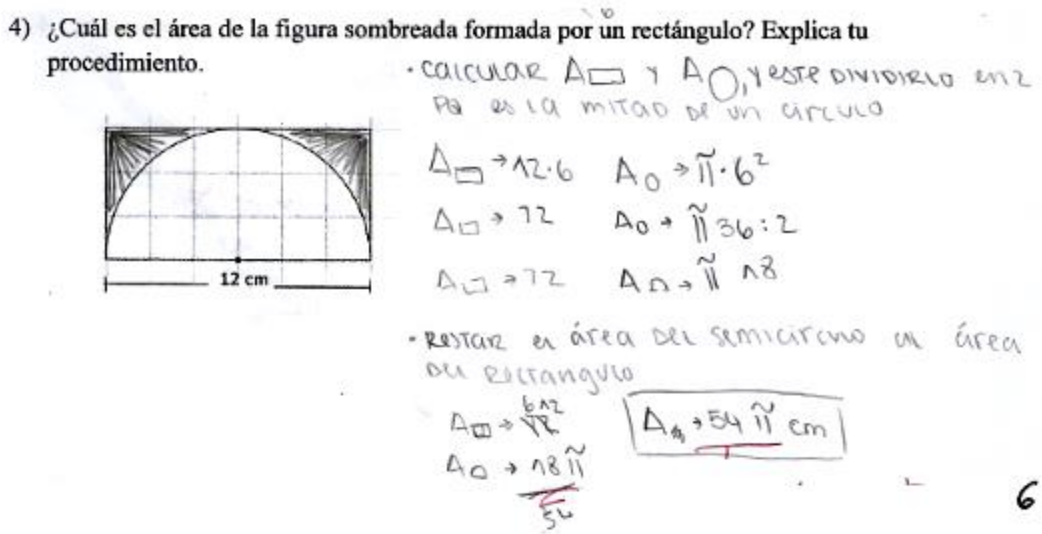
Estudiante 1

Err2: resta al revés las áreas, a la del semicírculo resta la del rectángulo.

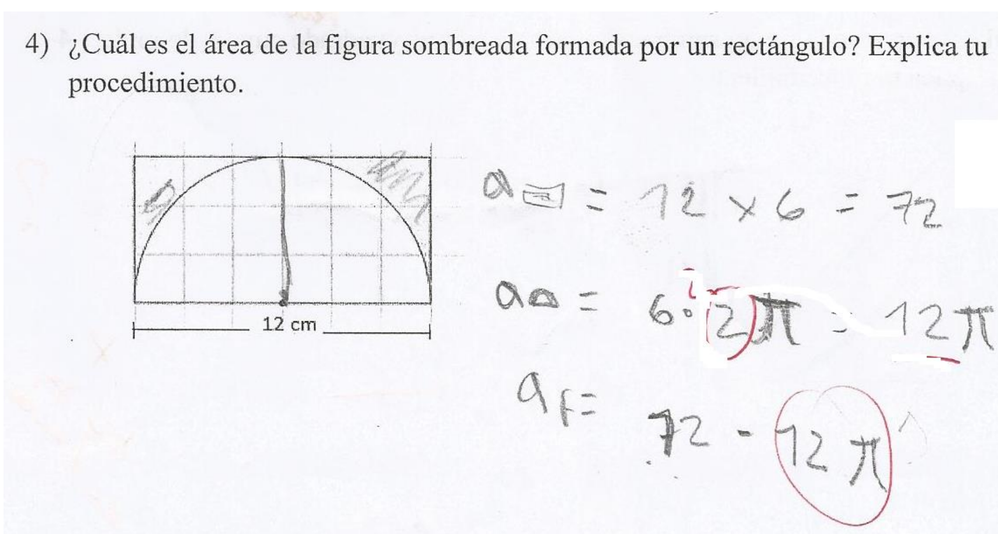


Estudiante 9: sus producciones además presentan un error sintáctico en el cálculo aritmético

Err2: operaciones aritméticas (multiplicaciones, potencias, omite pi) y de operaciones algebraicas (resta términos no semejantes)

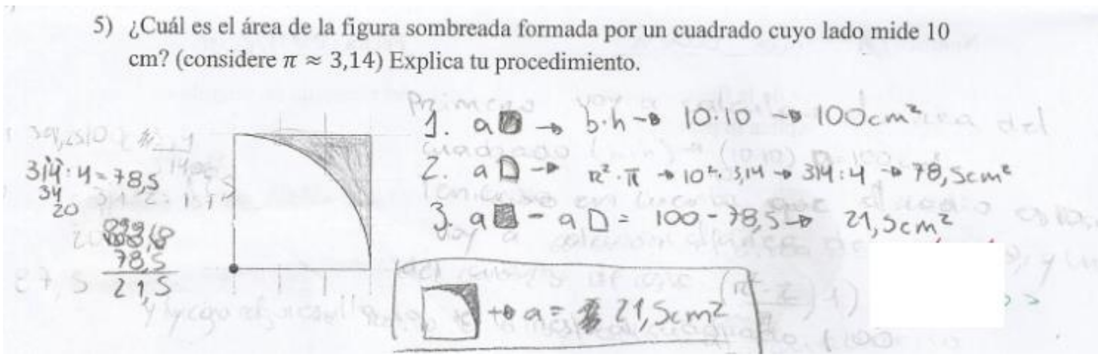


Estudiante 14

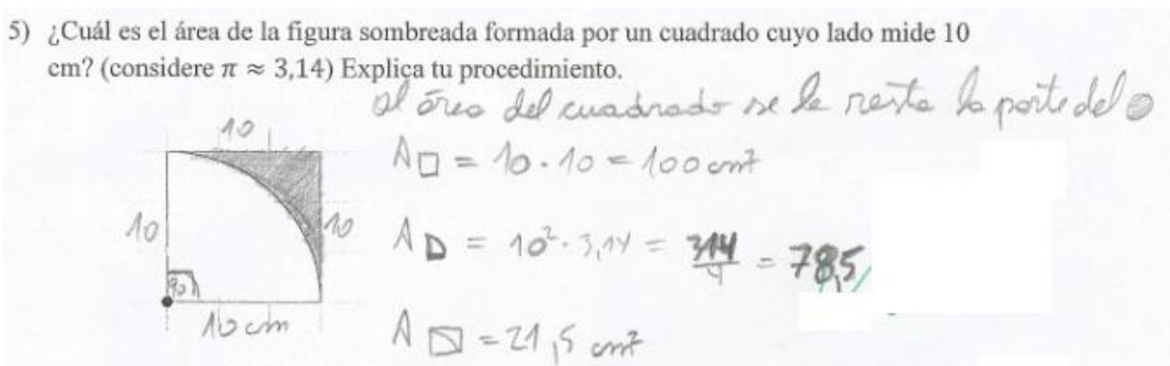


En la tarea 5, se encuentra en las producciones de los estudiantes 15 de 29 estrategias categorizadas como:

Estrategia 1: calculan el área del cuadrado y la del cuarto del área del círculo, reemplazan el valor de pi como 3,14 y luego restan las áreas; algunos dejan expresado π .



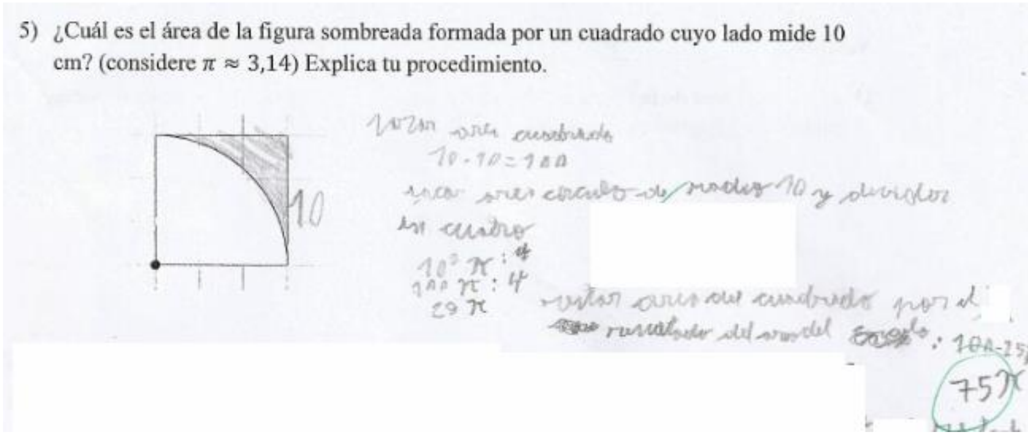
Estudiante 13



Estudiante 19

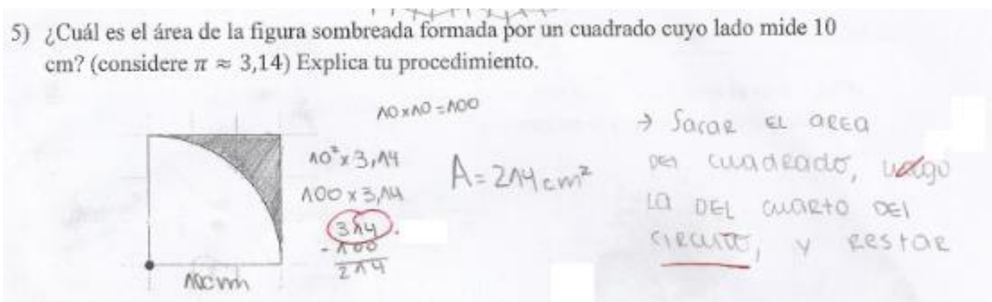
Se encuentra 4 producciones de los estudiantes con errores, categorizados como:

Err2: Resta términos no semejantes.



Estudiante 16: no usa $\pi \approx 3,14$

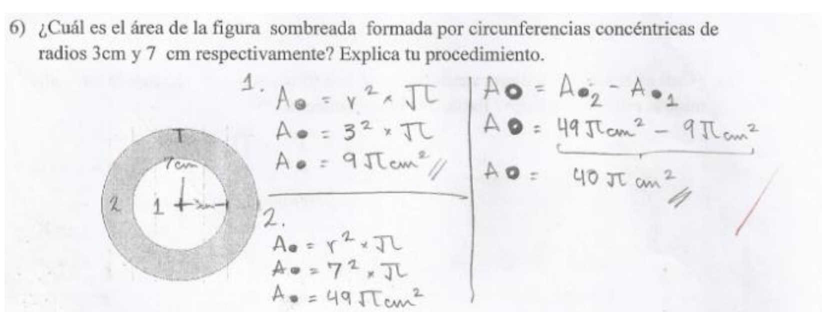
Err2: Considera el diámetro como radio del círculo; calcula el área del círculo.



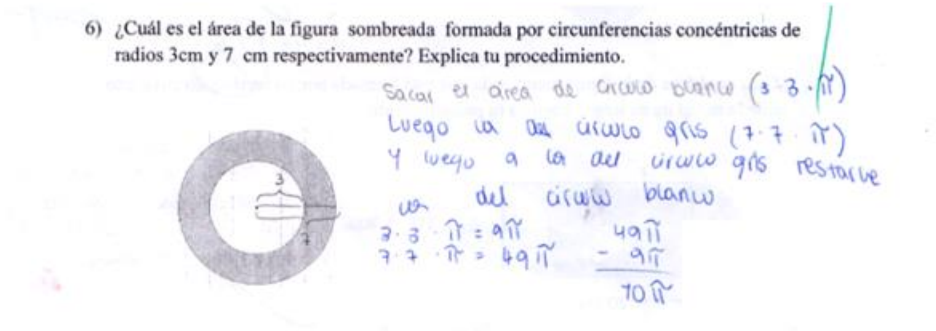
Estudiante 22

En relación a la tarea 6 en las producciones de los estudiantes se encuentran 15 de 29 estrategias categorizadas como:

Estrategia 1: calculan el área de un círculo de radio 7 cm y resta el área del círculo de radio 3cm. Algunos utilizan π como 3.



Estudiante 12



6) ¿Cuál es el área de la figura sombreada formada por circunferencias concéntricas de radios 3cm y 7 cm respectivamente? Explica tu procedimiento.

Sacar el área de círculo blanco $(3 \cdot 3 \cdot \pi)$
Luego la del círculo gris $(7 \cdot 7 \cdot \pi)$
y luego a la del círculo gris restarle
la del círculo blanco

$3 \cdot 3 \cdot \pi = 9\pi$

$7 \cdot 7 \cdot \pi = 49\pi$

$49\pi - 9\pi = 70\pi$

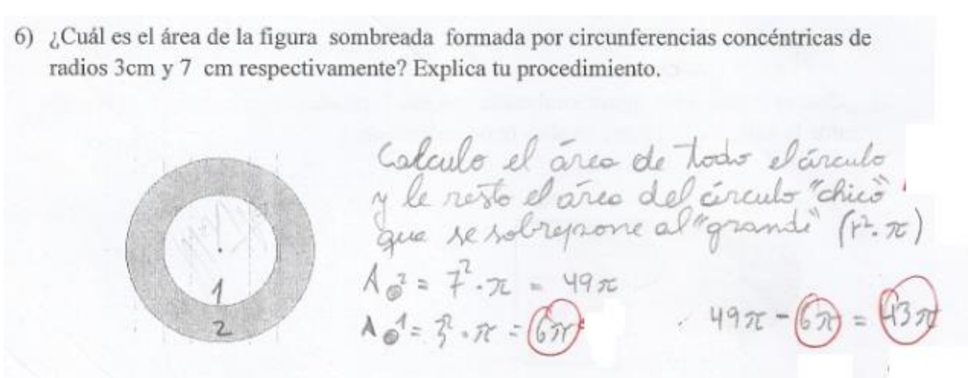
Estudiante 27

Los estudiantes presentaron algunas dificultades para visualizar la figura compuesta, se les guía en su proceso, el concepto de circunferencias concéntricas les resultó desconocido.

Se encuentran respuesta inconclusa en las cuales faltó restar las áreas calculadas.

En las producciones de los estudiantes 7 presentan errores categorizados como:

Err1: cálculo en las operaciones tanto aritméticas (potencias) como algebraicas (omiten pi) para calcular el área de la figura compuesta.



6) ¿Cuál es el área de la figura sombreada formada por circunferencias concéntricas de radios 3cm y 7 cm respectivamente? Explica tu procedimiento.

Calculo el área de todo el círculo y le resto el área del círculo "chico" que se sobrepone al "grande" $(r^2 \cdot \pi)$

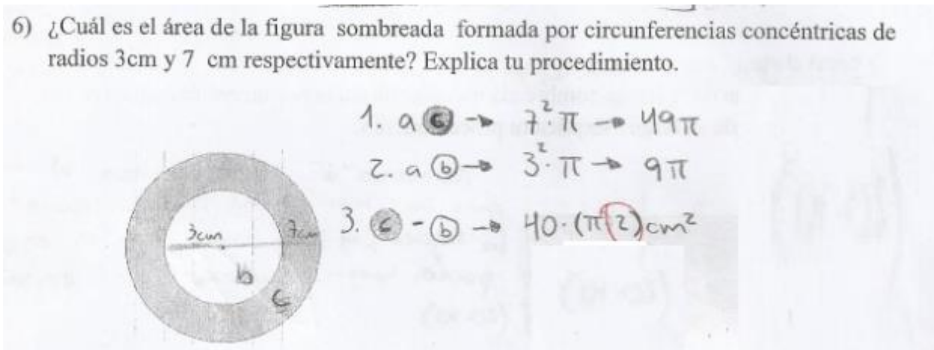
$A_2 = 7^2 \cdot \pi = 49\pi$

$A_1 = 3^2 \cdot \pi = 6\pi$

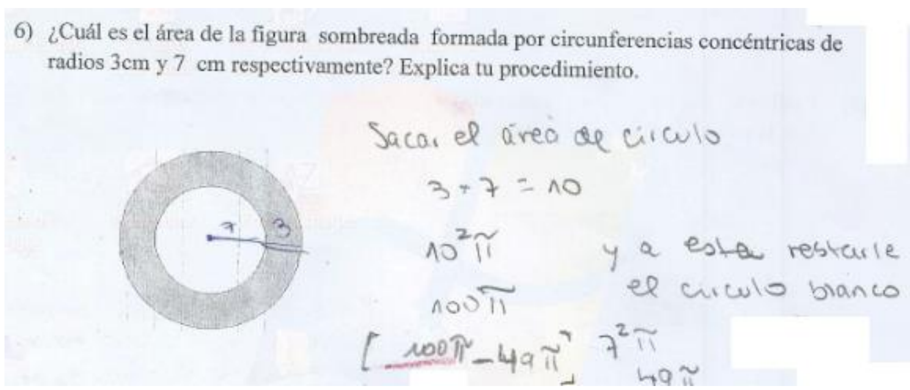
$49\pi - 6\pi = 43\pi$

Estudiante 19

Err2: multiplica por 2 la diferencia de las áreas de los círculos concéntricos; considera un radio de 10 cm para uno de los círculos



Estudiante 13

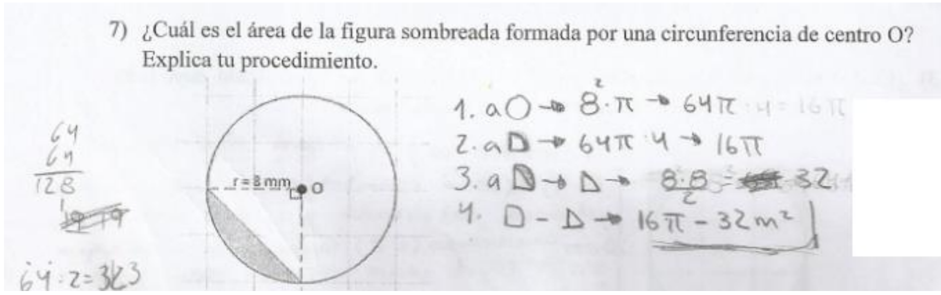


Estudiante 23

Esta estudiante considera como 3 cm la distancia entre las circunferencias, por tanto el radio de la circunferencia más grande es 10cm.

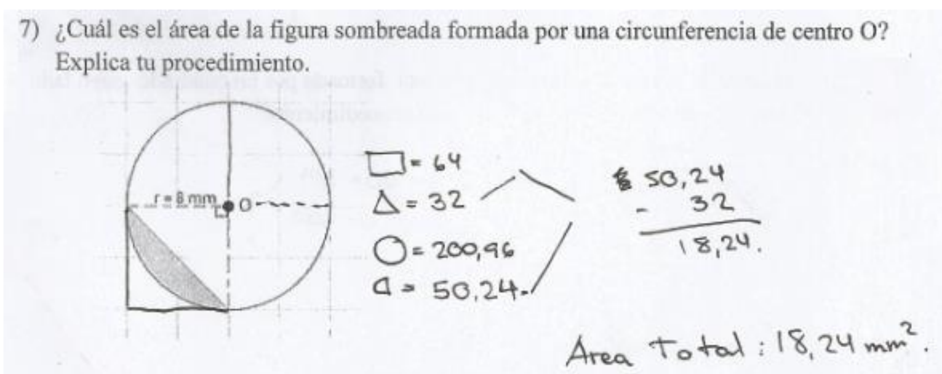
En relación a la tarea 7, se obtuvieron 8 de 29 estrategias para abordar esta tarea, la cual presentó dificultades para los estudiantes de la misma forma que la tarea 4 de la actividad 4 estas se categorizaron como:

Estrategia 1: calculan el área del cuarto de círculo y restan el área del triángulo.



Estudiante 13

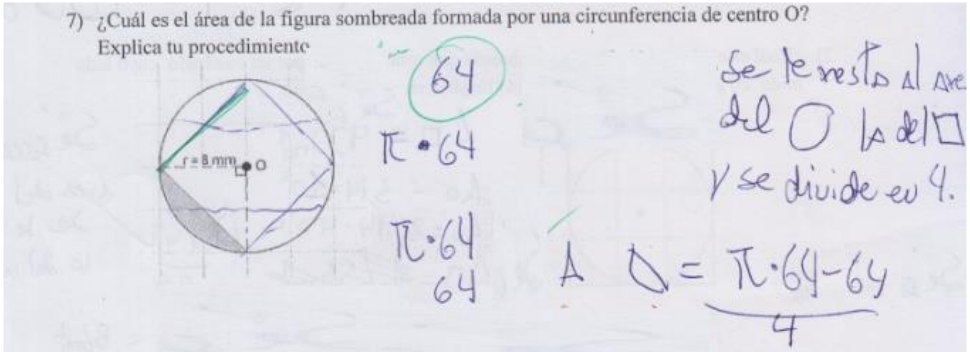
Estrategia 2: trazan líneas auxiliares para forma un cuadrado con los radios, calculan el área del cuadrado y de ésta la del triángulo, para restarle el área del cuarto de círculo.



Estudiante 15: usa $\pi \approx 3{,}14$

Se encuentran 12 de 29 errores categorizados como:

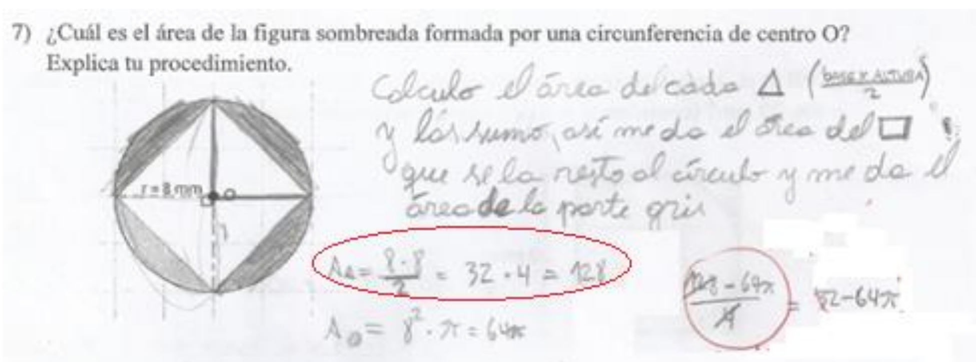
Err1: en el proceso resta al revés las áreas, considera el radio como la medida del lado del cuadrado**.**



Estudiante 3: considera como medida del lado del cuadrado el radio

Esta estrategia fue empleada por algunos estudiantes pero durante el proceso cometieron errores, de tipo semántico al usar el radio como medida del lado del cuadrado.

Err2: En operaciones aritméticas, omitir pi, resta de términos no semejantes, simplificación.



Estudiante 19: error sintáctico al simplificar

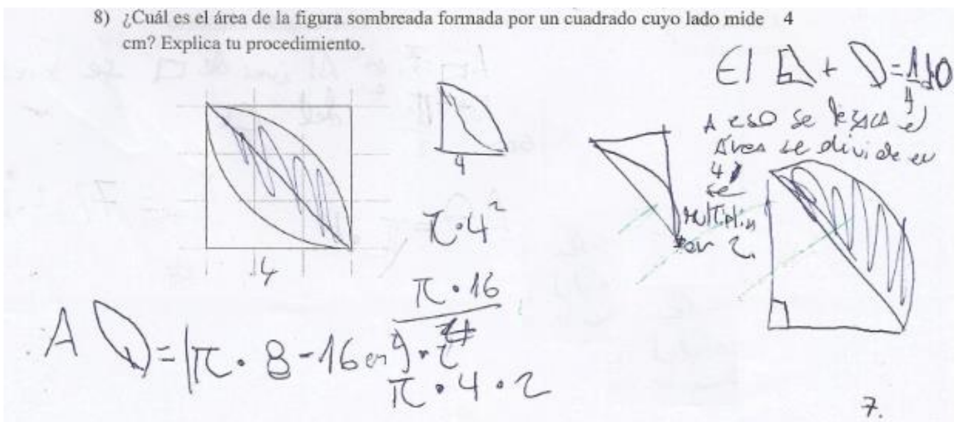
Si bien logra resolver la tarea, hay errores sintácticos que se evidencian en sus producciones: encadenamiento de igualdades $\frac{8 \cdot 8}{2} = 32 \cdot 4 = 128$; y en la simplificación de una expresión fraccionaria.

Resultó ser una tarea compleja para los estudiantes, sus producciones muestran desarrollos incompletos y con errores (calculan al revés, simplifican mal, omite pi entre otras).

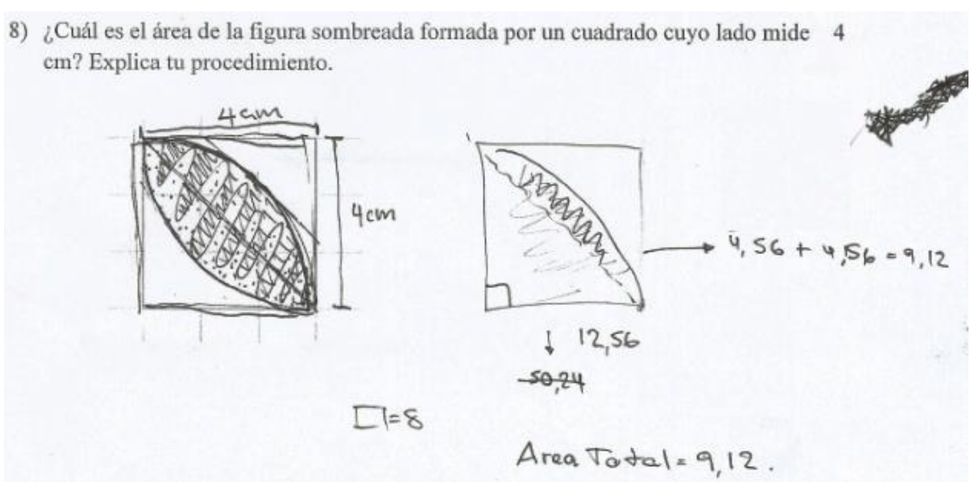
Con respecto a la tarea 8, se propone como desafío para los estudiantes, pues requiere que el estudiante ponga en juego además de la visualización, la descomposición de la figura con líneas auxiliares; dividiéndola en 2 triángulos rectángulos e isósceles; se les dieron sugerencias como trazar un elemento auxiliar, comparar esta tarea con la tarea 5.

Se encuentran 3 de 28 estrategias categorizadas como:

Estrategia 1: descompone la figura, calcula el área de un cuarto del círculo y resta el área del triángulo, y luego el doble de esta diferencia.



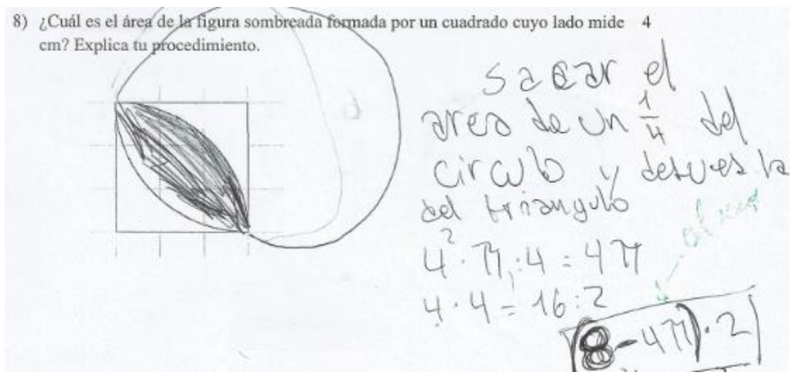
Estudiante 3



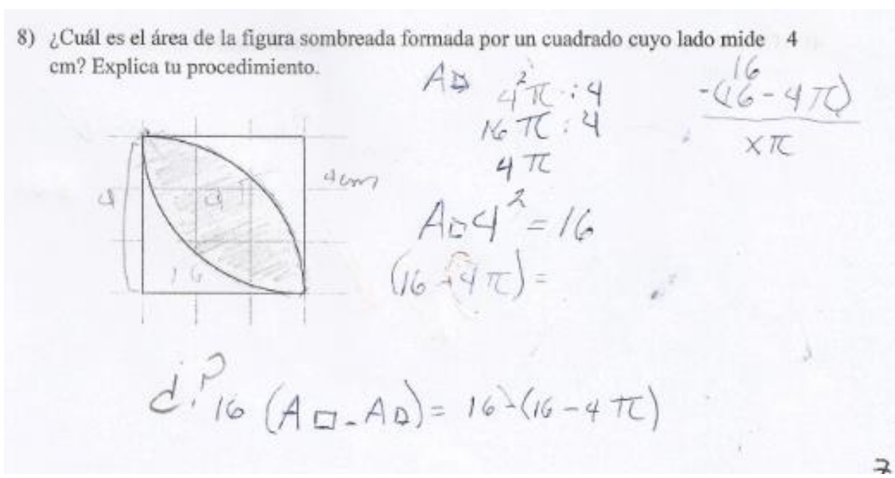
Estudiante 15: usa $\pi \approx 3{,}14$

Se encuentran en las producciones de los estudiantes 12 de 29 errores categorizados como:

Err1: en el proceso resta al revés las áreas, considera el área del círculo o del cuadrado, una sola parte de la superficie sombreada



Estudiante 11



Estudiante 25

7.2 Confrontación de los análisis apriori y aposteriori

En la sección siguiente se presenta una confrontación de los análisis apriori y aposteriori con respecto a: las estrategias, errores y nivel de razonamiento del estudiante para cada una de las actividades que se aplicaron.

Actividad 1 “Componiendo”

En relación a las estrategias que emergen en el análisis aposteriori

Estrategia 1: Encierra con una línea curva las figuras geométricas que componen a la figura modelo; escribe las letras sobre o fuera de la figura modelo

Coincide en parte con la del análisis apriori, no estaba considerado que ellos encerraran con una línea curva las figuras.

Estrategia 2: Escribe la letra correspondiente a la figura seleccionada para componer la figura 2, y luego las suma;

No estaba considerada en al análisis apriori

En relación a los errores que emergen, no estaba contemplado que eligieran por la forma y no por el tamaño de la figura al componer, esto puede haber ocurrido porque en la consigna no se especificó que se debía considerar al componer el tamaño de la figura.

Los estudiantes desarrollan un nivel 1 de razonamiento de acuerdo al modelo de Van Hiele puesto que reconocen las figuras geométricas para componer y sus descripciones son visuales; utilizando un registro figural y/o lenguaje natural coincidiendo con lo que se propuso en el análisis apriori.

Actividad 2: “componiendo y relacionando”

En las tres tareas de esta actividad coincide la presentación de las estrategias con lo propuesto en el análisis apriori, usaron un registro figural y/o lenguaje natural.

En la tarea 1, en relación a las estrategias que emergen en el análisis aposteriori:

Estrategia 1: Dibuja las figuras compuestas, algunos escriben letras o números sobre las figuras simples a modo de indicar como las usa, algunas no quedan unidas por los segmentos;

No hay coincidencia con el análisis apriori pues en la consigna no se contemplan las medidas de los segmentos o especifican que los segmentos debien quedar unidos por una parte los segmentos y no por un punto;

Estrategia2: Dibuja lo solicitado e incluye otras figuras no contempladas en el análisis.

No está contemplada en el análisis apriori, como es una tarea abierta esta emerge por la creatividad de los estudiantes.

En relación a los errores que emergen en el análisis aposteriori:

Err1: Dibuja 3 figuras compuestas pero no utiliza todas las figuras geométricas o superpone figuras.

Coincide con lo propuesto en el análisis apriori

Err2: No dibujan, solo escribe el nombre de la figura geométrica

No estuvo considerado en el análisis apriori, no comprendieron de qué trataba la tarea.

Los estudiantes desarrollan un nivel 1 de razonamiento de acuerdo al modelo de Van Hiele, puesto que reconocen las figuras geométricas para componer y sus descripciones son visuales, coincidiendo con lo que se propuso en el análisis apriori.

En la tarea 2, en relación a las estrategias que emergen en el análisis aposteriori:

Estrategia 1: Dibuja el triángulo e indica la propiedad, que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180º.

Coincide con lo propuesto en el análisis apriori.

Estrategia 2: Dibuja el triángulo hace referencia a los ángulos de 60° y/o al triángulo equilátero.

Coincide con lo propuesto en el análisis apriori; solo algunos estudiantes se refieren al triángulo como equilátero.

Ningún estudiante argumenta que el triángulo es equilátero porque sus lados miden 2r , como se sugiere en el análisis apriori, lo cual se puede deber a que en los sectores circulares solo se da la medida de 60º del ángulo y no la del radio.

Estrategia 3: Dibuja el triángulo, hace referencia a que juntando las partes se forma un triángulo o da el “área” de un triángulo

No está contemplada en el análisis apriori, se puede deber a que ellos visualizan las partes de la figura, perciben que estas encajan como en un rompecabezas y las componen en una superficie plana: triángulo.

El error que emerge del análisis aposteriori,

Err1: Dibuja otra figura, no quedan rectos los segmentos para que se forme un triángulo

Coincide con el propuesto en análisis apriori

Los estudiantes desarrollan un nivel 1 de razonamiento de acuerdo al modelo de Van Hiele, puesto que reconocen las figuras geométricas para componer coincidiendo con lo que se propuso en el análisis apriori.

En la tarea 3, la respuesta dada en lenguaje natural por los estudiantes a la pregunta ¿Qué relación tiene la figura 3, con la figura 4 y figura 5? coincide con la del análisis apriori.

En relación a las estrategias que emergen en el análisis aposteriori para la segunda pregunta: ¿Qué características tienen la figura 4 y la figura5?

Estrategia 1: Establece que estas figuras son partes del círculo, caracterizando la figura 4 como un semicírculo y figura 5 como un cuarto de círculo.

Estrategia 2: La figura 5 es la mitad de la figura 4.

Ambas coinciden con las sugeridas en el análisis apriori, faltó argumentar que tienen el mismo radio tanto el cuadrado como el semicírculo

Los errores que emergen del análisis aposteriori

Err1: Establece entre las figuras las relaciones ¼ y ½ de una circunferencia; o que son fragmentos de una circunferencia.

Err2: Son piezas de un círculo que poseen cuerdas; son semicírculos; ambos pueden formar un círculo.

No coinciden con los planteados en el análisis apriori, se puede deber a que aún no logran diferenciar entre el objeto circunferencia y el objeto círculo, así como entre los elementos radio y cuerda.
El lenguaje empleado por algunos estudiantes para referirse a las partes del círculo, piezas o fragmentos, se puede deber a su experiencia con otras áreas de estudio o a la relación parte todo que adquieren en cursos anteriores.

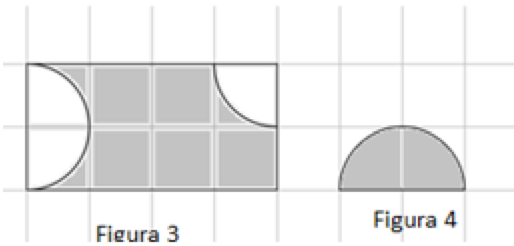
En relación a las estrategias que emergen en el análisis aposteriori para la tercera pregunta ¿Qué relación observas entre las tres figuras?

Estrategia 1: Establecen relaciones de inclusión entre las figuras, argumentando que la figura 4 y figura 5 son parte de la figura 3; o bien que en todas esta la figura 5.

Esta estrategia no coincide totalmente con la del análisis apriori, al hacer referencia a “que en todas está la figura 5”, se puede deber a la percepción visual que de ella se forman los estudiantes.

Estrategia 2: sus argumentos se refieren a la forma de la figura (curva o recta); o bien que la figura 3 es más grande que las otras dos figuras.

Esta estrategia no está contemplada en el análisis apriori, se puede deber a lo que los estudiantes visualizan y a sus experiencias anteriores con estos conocimientos adquiridos. En sus estrategias a los estudiantes les faltó mencionar que son iguales las medidas entre el diámetro de la figura 4 y el alto del rectángulo.



En relación a los errores que emergen del análisis aposteriori,

Err1: Observa la forma de la figura, círculo o rectángulo, no establece relaciones entre ellas.

Err2: Se refiere a la circunferencia al establecer las relaciones entre las figuras

Ambos no están contemplados en el análisis apriori; puesto que no se consideró que ellos visualizarán solo la forma de la figura geométrica

En esta actividad la mayoría, de los estudiantes, 24 de 32, desarrollan un nivel 1 de razonamiento de acuerdo al modelo de Van Hiele, puesto que reconocen las figuras geométricas para descomponer otra figura; describen las figuras por percepciones visuales y las relacionan en base al reconocimiento de elementos simples que visualizan en ellos. Coincidiendo con lo que se propuso en el análisis apriori; incluyendo a aquellos que cometen el error semántico al referirse a la circunferencia en vez de al círculo.

Actividad 3 “Componiendo y descomponiendo”

En las tres tareas de esta actividad la presentación de las estrategias coincide con lo propuesto en el análisis apriori, usaron un registro figural y/o lenguaje natural.

En relación a la tarea 1 las estrategias 1 y 2 que emergen del análisis aposteriori:

Estrategia 1: Dibuja las figuras y las caracteriza por su forma, las nombra o las clasifica (triángulo rectángulo, semicírculos, círculo), se refiere a semicírculos: congruentes, miden 180°.

Estrategia 2: Dibuja las figuras y las caracteriza como: triángulo isósceles y semicírculos o mitad de un circulo

Coinciden con las del análisis apriori cuando se refieren a la figuras geométricas que incluye la figura compuesta, triángulo rectángulo y dos semicírculos o un círculo; lo que faltó en ellas son las características: la medida de los lados del triángulo es el diámetro de los semicírculos.

Estrategia 3: No dibuja, caracteriza el triángulo como triángulo isósceles (2 lados igual medida), semicírculos (miden 180°); triángulo rectángulo (un ángulo de medida 90°, dos de medidas de 45°) .

En ella surgen características que no se contemplaron en el análisis apriori, como las referidas a la medida angular (semicírculo: 180°; triángulo rectángulo: $90°$ y $45°$), se puede deber a que los estudiantes están más familiarizados con estas medidas adquiridas en años anteriores no así con las de los elementos del círculo.

Con respecto a los errores,

Err1: se refiere a la circunferencia o semicircunferencias, cometiendo un error semántico, con respecto al significado del círculo

Está contemplado en ambos análisis

Err2: caracteriza el triángulo como triángulo equilátero, cometiendo un error semántico, con respecto al significado triángulo rectángulo; se refiere a un cuarto de círculo.

No está contemplado en el análisis apriori, puesto que el triángulo rectángulo ha sido utilizado en otros contextos, y se supone un conocimiento ya adquirido.

En la tarea 2 y en la tarea 3 las estrategias que emergen del análisis aposteriori:

Tarea 2

Estrategia 1: Dibuja e identifica las figuras geométricas que forman la figura compuesta y las caracteriza; ¼ de círculo: arco; mide 90°, negro, más grande; ½ círculo: mide 180°, blanco; observan que encima del cuarto de círculo hay un semicírculo.

Estrategia 2: Dibuja e identifica las figuras geométricas que forman la figura compuesta y las caracteriza, ¼ de circulo: tiene 2 lados de igual medida, un ángulo recto, y un lado curvo, mitad de un semicírculo; semicírculo la mitad de un círculo y da origen a la figura sombreada.

Tarea 3

Estrategia 1: Dibuja e identifica las figuras geométricas que forman la figura compuesta y las caracteriza; ¼ de círculo: arco; mide 90°, negro más grande; ½ círculo: mide 180°, blanco; observan que encima del cuarto de círculo hay un semicírculo.

Estrategia 2: Dibuja e identifica las figuras geométricas que forman la figura compuesta y las caracteriza, ¼ de circulo: tiene 2 lados de igual medida, un ángulo recto, y un lado curvo, mitad de un semicírculo; semicírculo la mitad de un círculo y da origen a la figura sombreada.

Contemplan características no incluidas en el análisis apriori como el semicírculo: es de 180°, mitad de un círculo; el círculo es de 360° y el cuarto de círculo es de 90°, esto se puede deber a que ellos están familiarizados con los ángulos y sus medidas, conocimientos adquiridos en años anteriores referidos no solo al eje de geometría sino también al eje de números, a las fracciones.

A los estudiantes les faltó establecer relaciones entre radios y/o diámetros en la tarea 2, así como en la tarea 3 relacionar las medidas de los lados del cuadrado y el radio y/o diámetro; lo cual se debe a que estos últimos elementos de círculo los asocian a cálculos de perímetros y áreas, como en estas actividades no las utilizan pueden haber encontrado innecesario mencionarlos.

En los errores hay coincidencia entre ambos análisis cuando se refieren a circunferencia; los errores que no estaban considerados en el análisis apriori y que surgen en el análisis aposteriori son los siguientes con respecto a la actividad que se señala.

Tarea 2

Err2: Dibuja solo lo sombreado; identifica semicírculo y dos triángulos se apoya en una línea auxiliar y no considera que la parte que se genera es curva y no recta.

Y con respecto a la tarea 3

Err2: Los dibuja; identifica semicírculos, círculos y la región sombreada entre el cuadrado y el círculo blanco como conos, triángulos equiláteros; rombo cometiendo un error semántico, consideran los arcos de esa figura como segmentos.

En estos errores, algunos estudiantes se refieren a triángulos, rombos o conos al visualizar la figura sombreada que se forma con el traslape de figuras; dando caracterización poligonal o tridimensional a una figura que tiene partes curvas.

De acuerdo al análisis aposteriori en las tareas 1 y 2 la mayoría de los estudiantes, en promedio 26 de 32, desarrollan un nivel 2 de razonamiento de acuerdo al modelo de Van Hiele coincidiendo con el análisis a priori puesto que reconocen y analizan las partes y características particulares de las figuras geométricas: círculo, semicírculo , triángulo; sin embargo las características que mencionan se refieren a la forma y a medidas angulares, no contempladas estas últimas en el análisis apriori, y no al radio y al diámetro del círculo que se relacionan con los lados del triángulo. Estos estudiantes dan muestra a través de sus argumentos de su razonamiento geométrico al descomponer la figura y establecer dichas caracterizaciones, algunos con más detalles que otros como la estudiante 5 mencionada en el análisis aposteriori.

Seis estudiantes están en tránsito del nivel 1 hacia el nivel 2 pues visualizan las figuras geométricas que componen a la figura pero al caracterizarlas se refieren a la circunferencia o semicircunferencia, sus estrategias dan cuenta de su razonamiento geométrico.

Según el análisis aposteriori la tarea 3 resultó más compleja para los estudiantes, 16 de ellos muestran un nivel 2 de razonamiento, coincidiendo con el análisis apriori puesto que reconocen y analizan las partes y características particulares de las figuras geométricas: círculo, semicírculo, cuadrado.

Actividad 4:“Explicitando áreas”

En esta actividad coincide la presentación de las estrategias de los estudiantes en cada una de las tareas que ésta incluye con lo propuesto en el análisis apriori cuando utilizaron un registro figural y/o lenguaje natural; lo que no estaba contemplado era el uso de lenguaje algebraico cuando los estudiantes incorporan fórmulas en sus descripciones, además de las expresiones simbólicas que utilizan para referirse al triángulo, cuadrado, semicírculo o círculo (por ejemplo Estudiante 3 y Estudiante 12).

La mayoría de las estrategias que surgen de las producciones de los estudiantes en el análisis aposteriori coinciden con las del análisis apriori, surgen dos estrategias que no estaban consideradas, estas son:

En la tarea 1:

Estrategia 3: en lenguaje natural describen que se debe calcular la suma del área de un semicírculo y de un rectángulo de 3cm x 2cm; el triángulo lo descompone para formar un rectángulo con el cuadrado;

En la cual un estudiante trazó líneas auxiliares y descompuso la figura en un rectángulo y un círculo dando cuenta que su nivel de razonamiento está en tránsito hacia el nivel 3, pues de acuerdo al Modelo de Van Hiele "reconoce las figuras por sus propiedades y como algunas se derivan de otras figuras geométricas".

En la tarea 4:

Estrategia 2: trazan líneas auxiliares e inscriben un cuadrado en el círculo, calculan la diferencia entre estas áreas y calculan la cuarta parte de ella, realizada por 5estudiantes, en la cual trazan líneas auxiliares para así visualizar el traslape del cuadrado con el círculo, lo que da origen a la parte sombreada, con la superposición del triángulo rectángulo les resultó más difícil visualizar dicha parte.

En la tarea 3 de acuerdo a lo analizado ninguno de los estudiantes propuso una estrategia similar a respuesta experta del análisis apriori:

R2: Calcula el área de un cuadrado y le resta el área de dos círculos, y a ésta diferencia sumar el área de dos círculos de igual diámetro.

Esta implica para el estudiante descomponer en figuras que no se visualizan a primera vista, debe internalizarlas y procesar, además utilizar la propiedad aditiva de las áreas sumando y restando.

En cuanto a los errores que emergen en el análisis aposteriori para esta tarea, la mayoría coincide con los del análisis apriori; no así aquellos que hacen referencia a la circunferencia y en los que se restan al revés las áreas.

De acuerdo al análisis aposteriori de las producciones de los estudiantes para esta actividad, más de la mitad de los estudiantes, en promedio 17 de 29, desarrollan un nivel 2 de razonamiento de acuerdo al modelo de Van Hiele coincidiendo con el análisis apriori puesto que reconocen y analizan las partes y características particulares de las figuras geométricas: triángulo, cuadrado círculo o semicírculo.; de igual forma analizan y explican el cálculo de áreas de figuras compuestas.

Actividad 5:“Calculando Áreas”

En esta actividad la presentación de las estrategias de los estudiantes realizadas en las tareas que ésta incluye con lo propuesto en el análisis a prior, pues utilizaron, algunos, lenguaje numérico y/o lenguaje algebraico; en cambio otros en lenguaje natural y numérico que no estaba considerado en al análisis apriori; además ciertos estudiantes utilizan expresiones simbólicas para referirse al triángulo, cuadrado, semicírculo o círculo. Todas las estrategias que surgen de las producciones de los estudiantes en el análisis aposteriori coinciden con las del análisis a priori. Se observa en algunas producciones de los estudiantes los usos de las estrategias aplicadas en las actividades 3 y 4, tanto para visualizar como para su razonamiento geométrico.

Algunos estudiantes utilizaron el número $\pi \approx 3{,}14$ en todas las estrategias de resolución de las tareas de esta actividad, evitando así las expresiones algebraicas y trabajando solo con números, a pesar que esto solo se indicó en alguna de ellas.

Con respecto a los errores detectados en el análisis aposteriori, alguno de estos los referidos al uso de las fórmulas, cálculo de la potencia del radio (r^2) y a incluir el área del círculo no la del cuarto ni la mitad coinciden con los del análisis apriori. En cambio, otros no contemplados en este análisis son los que realizan al reducir términos no semejantes, cuando se solicita trabajar con el número irracional π , les dificulta tener que dejar dos términos para un resultado, comprobándose el fenómeno algebraico de agrupar todo, se considera faltó un trabajo previo con este tipo de expresiones. Otros errores no contemplados fueron confundir el diámetro con el radio, errores aritméticos como restar al revés las áreas, multiplicaciones o simplificaciones.

Más de la mitad de los estudiantes, en promedio 16 de 28, muestran en las producciones de las primeras siete tareas un nivel 3 de razonamiento de acuerdo al modelo de Van Hiele, ellos analizan las partes y características de las figuras geométricas(triángulo, cuadrado, círculo, semicírculo y cuarto de círculo) que componen a la figura compuesta; reconocen las figuras por sus propiedades y como algunas se derivan de otras figuras geométricas(diámetro de una es el radio de la otra, la medida del lado del cuadrado es el radio del círculo); calculan el área de figuras compuestas utilizando la descomposición y procedimientos algebraicos(fórmulas) en la resolución de las tareas; destacan algunos estudiantes en el uso del lenguaje y de su razonamiento geométrico incluyendo detalles (operaciones, fórmulas, simbología, encadenamiento de sus procedimientos, uso de líneas auxiliares).

Otro grupo de estudiantes, en promedio 9 de 28, muestran estar en tránsito del nivel 2 al nivel 3, puesto que en sus producciones se constata que analizan las partes y características de las figuras geométricas que componen a la figura compuesta, calculan el área de dichas figuras geométricas y que utilizan la descomposición para calcular el área de la figuras compuestas pero no logran concluir el proceso.

Capítulo VIII

Conclusiones

8.1 Conclusiones

El estudio realizado pretende ser un aporte al ámbito de la enseñanza de la geometría, como se ha mencionado en los antecedentes, resulta difícil para los estudiantes, no la comprenden o bien la asocian con fórmulas (Gamboa y Ballestero, 2009). En particular, para el objeto matemático área de figuras compuesta por regiones poligonales y círculos o partes de un círculo, se diseñó, aplicó y evaluó una propuesta de enseñanza aprendizaje basada en la visualización y en los niveles de razonamiento del Modelo de Van Hiele.

Frente a la pregunta de investigación ¿Qué características tienen las respuestas de los estudiantes frente a tareas de visualización y que promueven el razonamiento para el cálculo de áreas de figuras compuestas y descompuestas por regiones poligonales y círculos, o partes de un círculo? en forma general podemos decir que las respuestas de los estudiantes evolucionan en cuanto a las descripciones de las figuras y de los procesos que ellos emplean en la resolución de las tareas propuestas, a medida que hacen de la visualización una herramienta clave en sus acciones; en principio les costó componer las figuras por considerarlas rígidas, luego las manipularon, las cambiaron de posición para utilizarlas en la figura modelo ; la mayoría de los estudiantes se enfocó en la forma más que en el tamaño lo cual incidió en algunas respuestas y en otras no; estas respuestas dan cuenta del nivel 1 de razonamiento de los estudiantes. En cuanto avanzó la aplicación de la situaciones los estudiantes fueron focalizando elementos visuales e incorporándolos en sus argumentos o explicaciones, a ellos les resultó más simple las tareas en que las figuras geométricas no se superponen; visualizar mejor las figuras compuestas por figuras geométricas del mismo tipo, solo círculos o semicírculos, pudiendo descomponerlas y componerlas en otra figura geométrica que para ellos resultó conocida, analizaron las partes y propiedades de forma empírica acorde al nivel 2 de razonamiento. En las tareas que debían caracterizar las figuras, la mayoría de los estudiantes visualiza partes de un todo, se refieren a medidas angulares (90º, 180º, 360º), no a las lineales(radio, diámetro) pues como en estas tareas aún no debían calcular no les parece relevante ese dato, no construyen interrelaciones con los elementos de la figura. Avanzando en la aplicación de la propuesta los estudiantes visualizan la figura compuesta y utilizan estrategias de traslape o superposición para descomponer y componer la figura; algunos de ellos trazaron líneas auxiliares que les permitieron establecer relaciones y condiciones, dando cuenta estos estudiantes de un razonamiento deductivo informal (nivel 3); se observó también la evolución del lenguaje natural utilizado por los estudiantes a un lenguaje algebraico o aritmético para describir las estrategias empleadas; otros estudiantes se encuentran en tránsito del nivel 2 al nivel 3 de razonamiento pues sus respuestas aun no dan cuenta de las condiciones que las figuras geométricas deben cumplir. En las producciones de los estudiantes se logra constatar que el diseño gradual de las actividades de la propuesta en cuanto a la dificultad de las tareas, el uso de la visualización en sus estrategias que impulsa el razonamiento, contribuyó para que los estudiantes resolvieran problemáticas de cálculo de áreas de figuras compuestas., en la última situación de la propuesta.

Se puede concluir que las respuestas de los estudiantes se caracterizaron en principio por ser concretas basadas solo en la figura que se les presentó para pasar posteriormente a la manipulación de la figura, compuesta de acuerdo a lo que visualizan y al nivel de razonamiento que involucra la resolución de la tarea.

Queda abierto un rediseño de la propuesta en cuánto al tiempo asignado por sesión, a la secuencialidad de las tareas, usar o no el valor de pi , agrupar ese tipo de tareas para calcular las áreas usando el valor aproximado de pi , para disminuir la cantidad de errores.

Con respecto a la modalidad de trabajo, podría plantearse en equipos, para dar la instancia de exponer sus producciones y que entre ellos se retroalimentaran, promoviendo un rol más participativo de los estudiantes; colocar en contexto algunas de las situaciones para dar sentido y significado al objeto matemático, área de figuras compuestas.

Resulta ser un estudio que basado en la visualización y en el modelo de razonamiento de Van Hiele proporcionan elementos que permiten desarrollar estos procesos cognitivos en el estudiante, verificar como las respuestas se convierten en aciertos cuando el estudiante tiene las herramientas necesarias, es decir, dispone de las fórmulas o de dispositivos para realizar cálculos.

La metodología al utilizar elementos de la Ingeniera Didáctica, permite dar una mirada holística a la propuesta de enseñanza aprendizaje, para asegurar que ningún elemento quede ausente, tratando de controlar la mayor cantidad de variables. Aun así queda abierta a ser perfectible dicha propuesta como lo hemos mencionado anteriormente.

8.2 Proyecciones y conclusiones

Las proyecciones de este estudio son elaborar otras propuestas de enseñanza aprendizaje, como por ejemplo, para el cálculo del perímetro de figuras compuestas por regiones poligonales y el círculo o la circunferencia basadas en la visualización y en el modelo de Van Hiele, con sus niveles y fases de aprendizajes, considerando estas últimas explícitamente en la gestión de las clases.

El impacto que puede tener este estudio en el ámbito escolar es instalar la discusión didáctica, con docentes de matemáticas en la institución en las cuales nos desempeñamos, sobre el uso de teorías o modelos en el diseño y aplicación de situaciones de enseñanza aprendizaje que contribuyan en los estudiantes al desarrollo de las capacidades geométricas, coordinación de los procesos cognitivos visualización, razonamiento y argumentación al resolver un problema en geometría.

Bibliografía

Aliaga, H., Bressan A., Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la educación matemática*. Editorial Libros del Zorzal. España.

Aravena, M. y Caamaño, C. (2013), Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la región del Maule. Talca, Chile. *En Revista latinoamericana de investigación en Matemática Educativa,* 16 (2): 139-178.

Aravena, M., Gutiérrez, A., Jaime, A. (2016) Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 34.1, pp. 107-128

Boyer, C. (2010) *Historia de la Matemática .Ciencia y Tecnología*. Alianza Editorial; España.

Campos, E. d. (2006). Ingeniería Didáctica. Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática, Año 1, Número 2. Universidad de Costa Rica Asociación de Matemática Educativa.

Carmona, J. (2011).Tesis: La circunferencia. Una propuesta didáctica usando Modelo de Van Hiele Y geometría Dinámica (para optar al título de Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales).Universidad Nacional de Colombia.

Fandiño, M., D’Amore , B. (2009) *Área y Perímetro : aspectos conceptuales y didácticos*. Editorial Magisterio. Colombia.

Figueroa, S. (2009), “Estrategias para el manejo adecuado de conceptos figurales”. Tesis Doctoral para obtener la Especialidad en Didáctica de la Matemática, Universidad Autónoma de Querétaro. México

Gamboa R., Ballestero, E. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Año 4. Número 5. 113-136. Costa Rica

Gascón, Josep; (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista*

Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol.4, núm. 2, 129-159.

Heras, J (2014) .Orígenes de la Agrimensura. Topografía (Blog).

Jaime, A., Gutiérrez, A. (1990): Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El Modelo de Van Hiele, en S. Llinares, M. V. Sánchez (eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (Alfar; Sevilla Spain, 295 -384 (fragmentos)).

Leyton, R., Muñoz, V., Pérez B., Rupin, P. (2016). *7 Matemática. Ediciones SM* Chile S.A.

Lluch, E., Valenzuela, N. (2001). Historia de la Geometría. Centro de Investigación y Desarrollo de la Educación. Chile.

Marmolejo, G y Vega, M; (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Red de revistas científicos de América Latina y el Caribe (España y Portugal)* vol. 24, núm. 3, 7-32.

Marmolejo, G. y González, M, (2013).Función de la visualización en la construcción del área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis y su aplicación a un libro de texto. *Revista Integración.* Escuela de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander Vol. 31, No. 1, 87–106.

Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., &Menezes, L. (Eds.)(2014). Atas do XXV Seminario de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., 5–28.

Matemática 8° Básico.2014. Por Silvia Alfaro et al. ed. Galileo. Chile.

Matemática 7° Básico .2016.Por Merino, R, et al .ed. SM. Chile.

Maza, C;(1998) .Artículos: Aproximaciones históricas al área del círculo. *Revista Suma 27; 45 – 46.*

Meavilla, V., Oller, A. (2013). Ejemplos de visualización y uso de materiales manipulativos en textos matemáticos antiguos .*Números Revista de Didáctica de las Matemáticas. Vol*. 82, 89 -100.

Micelli, Mónica. (2010). Las figuras de análisis en Geometría. Su utilización en el aula. Tesis para obtener el grado de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa. Instituto Politécnico Nacional. México.

MINEDUC. (2011). Programa de Estudio para octavo año básico. Matemática Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

MINEDUC. (2014). Programa de Estudio para séptimo año básico. Matemática. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

MINEDUC. (2016). Programa de Estudio para séptimo año básico. Matemática. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

MINEDUC (2016) .Guía Didáctica del Docente Matemática 7° Básico .Jael del Valle Elgueta SM.

Moise, E. (1968), *Elementos de Geometría Superior*. Compañía Editorial Continental, S.A...México.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007), Coordinación de Procesos Cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*10 (2): 275-300.

Torres, C., Racedo D., (2014).Estrategia didáctica mediada por el software Geogebra para fortalecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría en estudiantes de 9° de básica secundaria. Proyecto de Investigación presentado como requisito para optar al Título de Magister en Educación. Universidad de la Costa “CUC”. Postgrado Barranquilla-Colombia.

Vargas, G. y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la Enseñanza de la Geometría. *Revista Uniciencia de la Universidad Nacional de Costa Rica*. Vol. 27, N° 1, 74-94.

ANEXOS

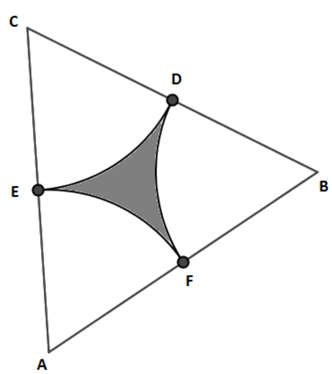
Anexo 1 Estudio Exploratorio

Facultad de Educación
Departamento de Pedagogías Medias y Didácticas
Magister en Didáctica de la Matemática

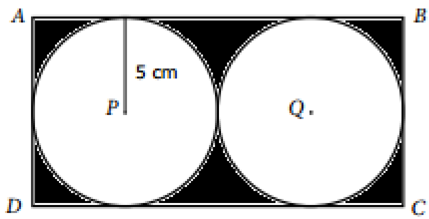
Estudio Exploratorio

Este estudio es parte de una investigación, agradecemos su participación y solicitamos dejar registrado todos sus procedimientos y cálculos.

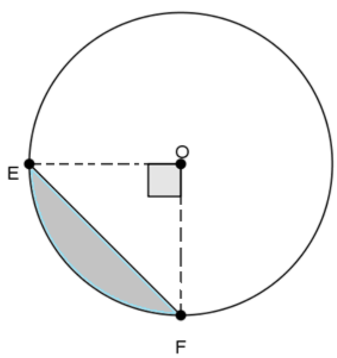
1. Observa la figura e identifica qué figuras geométricas forman la superficie pintada; represéntalas con un dibujo y escribe el nombre de ellas. (Imagina que la recorta, qué se forma).
   Los puntos D, E y F son puntos medios de los respectivos lados del triángulo equilátero ABC.



2. En la figura ABCD es un rectángulo, los círculos de centro P y Q tienen y un radio de 5 cm cada uno. Explica cómo tendrías que calcular el área de la región pintada. (¿qué tendrías que hacer?, escribe el procedimiento)



3. En la figura, O es el centro de un círculo de radio 10 cm y $\measuredangle EOF = 90°$.

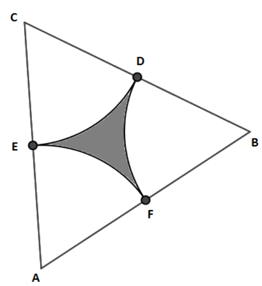


Identificar que figuras originan la región pintada y calcular el área de la figura pintada.

Recuerda que esta evaluación es sin nota, es sólo para estudiantes de Magíster en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Alberto Hurtado.
¡GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN!

Anexo2 Análisis del Estudio Exploratorio

1. Observa la figura e identifica qué figuras geométricas forman la superficie pintada; represéntalas con un dibujo y escribe el nombre de ellas. (Imagina que la recorta, qué se forma).
   Los puntos D, E y F son puntos medios de los respectivos lados del triángulo equilátero ABC.



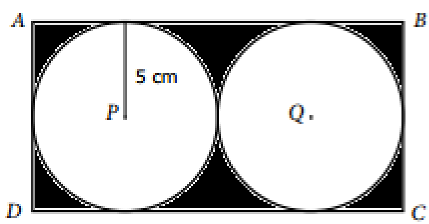
Categorías de estrategias	Categorías de errores
Categoría E1 - Dibuja las figuras - La figura pintada se origina con un Triángulo (equilátero) al que se le saca un sector circular. **Categoría E2** - Dibuja las figuras - En el triángulo se forman 3 sextos de circunferencia y la figura pintada está formada por las curvas de estos pedazos de circunferencia **Categoría E3** - 3 sectores de circunferencias , con ángulos agudos se obtiene dividiendo 180 en 3	**Categoría Err1** - La superficie pintada está formada por 3 sextos de un círculo **Categoría Err2** - Compuesta por 1 triángulo equilátero; rodeado de triángulos isósceles con un lado curvo **Categoría Err3** - Superficie no pintada es la mitad de una circunferencia **Categoría Err4** - Restando elárea del triángulo equilátero y el área de la mitad de un circunferencia. **Categoría Err5** - Formada por 3 partes de un círculo que al unirse formarían un círculo completo

Análisis:

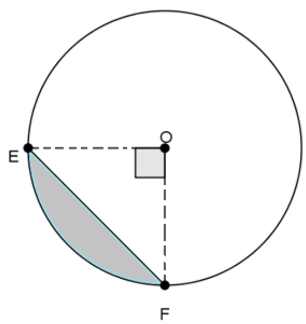
De las estrategias utilizadas por los estudiantes se concluye que algunos de los estudiantes colocan su atención en la figura completa, visualizan el triángulo y los sectores circulares de 60° sobrepuestos a él lo que origina la figura pintada; otros se focalizan en la figura pintada visualizando los arcos de circunferencia (1/6 de circunferencia) que la limitan.

Los errores son de tipo semántico, confunden círculo con circunferencia, no identifican a que parte del círculo o de la circunferencia corresponden los sectores circulares.

2. En la figura ABCD es un rectángulo, los círculos de centro P y Q tienen y un radio de 5 cm cada uno. Explica cómo tendrías que calcular el área de la región pintada. (¿qué tendrías que hacer?, escribe el procedimiento)



Categorías de estrategias	Categorías de errores:
Categoría E1 : Calcular el área de los 2 círculos y el rectángulo; después sumar el área de los círculos y restarla al área del rectángulo **Categoría E2** : Identifica las medidas de los lados del rectángulo(10x20 cm)	**Categoría Err1** Indica al revés el cálculo de las áreas **Categoría Err2** Se refieren al área de la circunferencia

<table>
<tr><td>Calcular el área del rectángulo y restar el área de los dos círculos.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis: los estudiante no presentan mayor dificultad en visualizar las figuras geométricas a las que deben calcular el área para obtener la de la región pintada; hay claridad en el proceso que deben realizar a pesar de lo errores sintácticos y semánticos que cometen.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. En la figura, O es el centro de un círculo de radio 10 cm y $\sphericalangle EOF = 90°$.


Identificar que figuras originan la región pintada y calcular el área de la
Figura pintada.</td></tr>
<tr><td>Categoría de estrategias

<u>Identificar figuras geométricas</u>

Categoría E1
¼ de círculo y un triángulo rectángulo

Categoría E2</td><td>Categorías de errores

<u>Identificar figuras geométricas</u>

Categoría Err1
Confunde el triángulo rectángulo con un triángulo equilátero

Categoría Err2
Se refiere a la circunferencia</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Una cuerda y un arco ; producto de la resta de un triángulo y un trozo del círculo

<u>Cálculo del área</u>

Categoría E1
Calculo del área del sector circular o ¼ de círculo menos el área del triángulo</td>
<td><u>Cálculo del área</u>

Categoría Err1
Calcular el área de un círculo y restar el área de un triángulo rectángulo

Categoría Err2
Calcula el área del círculo y le resta la medida de la hipotenusa del triángulo.

Categoría Err3
Resta al revés las áreas o resta términos no semejantes</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Análisis
Les resultó difícil descomponer figura, las estrategias muy similares a las de la tarea 2, por una parte algunos visualizan el traslape y reconocen las figuras geométricas otros se focalizan en la parte pintada.
Los errores tienen que ver con conceptos (error semántico) y errores algebraicos/aritméticos, la mayoría tiene claridad en el proceso a realizar.</td>
</tr>
</table>