

Teoría de Representación Semiótica aplicada a la enseñanza de la Circunferencia

Ana Donoso Díaz¹

Resumen

El presente artículo describe la implementación de la Teoría de Representación Semiótica de Raymond Duval cuyo enfoque permite el comprender y aprender el objetivo matemático la circunferencia y otras figuras planas, aplicando cálculo de áreas, perímetros y ángulos. Esta teoría se aplica a estudiantes de 7° básico utilizando el programa computacional *Geogebra*, disponible en la sala de computación del colegio. El objetivo de enseñar este contenido consiste en que el estudiante refleje el acto cognitivo en forma visible por medio de símbolos y signos aplicados a registros semióticos, tales como Lenguaje Natural, Algebraico y Gráfico. En este sentido, este proceso de trabajo en conjunto con los estudiantes involucra por un lado un análisis de este modelo de enseñanza que permitirá desarrollar y mejorar las habilidades por medio de la construcción de figuras. Por otro lado, involucra una observación del aprendizaje de las propiedades del objeto matemático. Al término de este proceso de trabajo de enseñanza, contarán con una herramienta adicional en el área de la geometría a la cual podrán aplicar no sólo los conocimientos previos, sino los recientemente adquiridos para la creación individual de un objeto matemático que se aplique tanto a sus estudios como a su realidad cotidiana.

Palabras claves

Representación Semiótica, Duval, Circunferencia, Unidades Significantes.

Un análisis/observación de la enseñanza de la unidad de geometría a partir del año 2000 nos muestra que los textos ministeriales presentan las gráficas de figuras geométricas -específicamente la circunferencia- a través de métodos algebraicos que involucran muy poco uso de la regla y compás como herramientas de construcción, lo que finalmente influye en la interiorización del conocimiento de las propiedades de las figuras geométricas. Efectivamente, la forma en que los libros ministeriales presentan este objeto matemático es a través de imágenes que indican el nombre que recibe cada parte de la circunferencia con definiciones simples, cortas y un lenguaje fácil de comprender, seguidas por un ejemplo que, en su conjunto, no permite a los estudiantes visualizar qué figuras geométricas están involucradas. Ciertamente ello ocurre si para este nivel curricular las figuras geométricas se estudian bajo una perspectiva en que no hay una conexión entre ellas y sólo se trabaja con pares de figuras achuradas como, por ejemplo: cuadrado y circunferencia, triángulo y circunferencias, rectángulo y circunferencias, etc. Consiguientemente, el estudio de la geometría termina siendo meramente memorístico, sin que se desarrolle la creatividad y capacidad de análisis para la representación semiótica del propio estudiante, ya que sólo se le presenta y pide calcular algo muy específico aplicando los conceptos aprendidos en esta unidad. Siendo más específico al respecto, Osorio comenta que según Duval (2004) “en el aprendizaje de las matemáticas, se ha podido demostrar que cambiar la forma de una representación es para muchos alumnos una operación difícil y a veces imposible. Como dice, Osorio: “Todo sucede como si para la gran mayoría de los alumnos la comprensión que logran de un contenido quedará limitada a la forma de representación” (2011, p.19).

¹ Ingeniero Comercial con Mención en Administración de Empresa. Estudiante de Pedagogía para Profesionales en la Universidad Alberto Hurtado. Taller de Práctica Profesional guiada por Michael Pérez, Licenciado en Matemáticas, Magister en Didáctica de la Matemática, Pontificia de la Universidad Católica de Valparaíso, 2016.

Para la implementación de la unidad didáctica se consideraron una serie de factores que ejercen una influencia directa en el aprendizaje de los estudiantes. Primeramente, el PEI que da prioridad a “ser un colegio de vanguardia e innovador en lo pedagógico” (PEI, 2013), seguidamente, el método de enseñanza en el que se sostiene el establecimiento (Singapur), y la realidad de enseñanza de los estudiantes a los que se hará la implementación de dicha unidad. Estos factores en su conjunto abren el espacio para innovar respecto a cómo se trabajan los contenidos curriculares y didácticos con los estudiantes. Ello, dentro del proceso de enseñanza de la Teoría de registros de Representación semiótica de Raymond Duval, permite la adquisición del conocimiento y motivación de los estudiantes por medio de creatividad propia para su edad con el propósito de ampliar su visión del lenguaje del objeto, sus elementos y también de la construcción gráfica y algebraica de este contenido.

La aplicación de este modelo de trabajo en conjunto con la teoría ya mencionada se ha implementado en un período de 16 horas pedagógicas en un séptimo año básico de un colegio particular en la comuna de Peñalolén. Siendo que la preparación de esta unidad había sido realizada para un 8° básico, pero por un cambio curricular por parte del colegio se estima apropiado aplicarla en un 7° básico. El objetivo inicial establecido es que se dé un proceso de recolección de información de cada estudiante para generar resultados que permitan dar cuenta de una nueva y efectiva forma de enseñar la geometría en el aula. Ésta implica necesariamente que no se tendrá que recurrir a los textos del ministerio (año 2002, 2013 y 2016) los que fueron observados, ya que limitan la creatividad y la aplicación de las propiedades de cada uno de los elementos con que se trabajó este objeto matemático, y además el contextualizar los avances de ellos, generando una adecuada implementación.

Fundamentos de la propuesta de implementación

La Teoría de Representación Semiótica fue creada por Raymond Duval, profesor de la Universidad del Litoral y Director de estudios de la Academia de Lila en Francia, en el año 2004. Duval ha realizado investigaciones en la educación matemática observando el trabajo en aula de profesores y estudiantes con clases experimentales; su estudio se basa en representaciones conceptuales, razonamiento, interpretación de figuras, comprensión de textos y resolución de problemas, y es pionero en la investigación semiótica ya que se ha visto involucrado en el aprendizaje y la comprensión de contenidos. A partir de ello es que él establece, precisamente para aprender y comprender las matemáticas, esta teoría que permite al individuo definir un objetivo matemático según dos maneras que se desarrollan en la mente. Ellas son el acto cognitivo con la aprehensión conceptual del objeto llamado Noesis y una representación mental del objeto en forma de imágenes denominado Semiosis. Estas representaciones semióticas hacen visible un concepto que se desea comunicar a otras personas a través de signos o símbolos y según los primeros registros que Duval dio a conocer, eran cinco. Primero, el Registro del Lenguaje Natural que es lo que pienso y expreso a la otra persona respecto al objeto matemático; segundo, el Registro Algebraico que se presenta con números y letras que pueden ser variables o incógnitas; tercero, el Registro Tabular que se utiliza para ingresar los datos en filas o columnas; cuarto, el Registro Gráfico que involucra la construcción de cuerpos y figuras planas aplicando las propiedades; y por último, el Registro Geométrico que emplea un sistema de coordenadas aplicando las propiedades.

Duval dice que para que un sistema semiótico sea considerado un registro de representación se requieren tres actividades cognitivas, que son: la identificación, que es seleccionar un contenido a representar; el Tratamiento, que es la transformación de una representación que ocurre al interior de un

mismo registro y la Conversión, que es la transformación de una representación que ocurre de un registro a otro. En cada una de éstas existe una descomposición más pequeña que son las unidades significantes que presentan una correspondencia semántica entre un registro y otro en el cual se asocia; además a cada

registro le corresponde una única unidad significativa y que debe conservar un orden en las representaciones para lograr una congruencia semántica que comprende el objeto matemático. Esta implementación resulta muy importante, ya que Duval afirma: “la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación” (Duval citado en Osorio, 2011). Aún de mayor importancia nos resulta esta teoría si consideramos que se ha implementado en el aula en otras partes del mundo y con otros objetos matemáticos tales como: funciones lineales, del límite cuando se aborda cálculo, entre otros.

Diagnóstico institución y curso

La institución en la que se lleva a cabo esta implementación es un colegio particular ubicado en la comuna de Peñalolén, de orientación católica. La enseñanza que imparte incluye educación parvularia, educación básica y educación media con especialidad Científico Humanista. En ésta se realizan actividades extra programáticas tales como: actuación, música, *ballet*, artes plásticas, deportes como el *fútbol*, y actividades sociales como la pastoral y escoutismo. La misión y la visión institucional es:

Educar personas trascendentes, confiables y alegres comprometidas con la verdad, la fraternidad y la libertad; capaces de liderar con determinación y creatividad en el mundo que les toca vivir. Ser un colegio de vanguardia e innovador en lo pedagógico pequeño en el número de alumnos, reconocido en el medio educacional chileno como un proyecto pedagógico capaz de desarrollar y formar competencias morales, intelectuales, emocionales, físicas y culturales de los niños, niñas y jóvenes mediante una formación integral, procurando una excelencia personal, acorde a los tiempos que está viviendo y siempre a la luz de los valores del evangelio de Jesucristo. (PEI, 2013)

El curso para el cual se prepara esta unidad didáctica es un séptimo básico, compuesto de 29 estudiantes (mixto). En el cuál, 3 estudiantes se encuentran diagnosticados con dificultad de aprendizaje, tales como: síndrome de Asperger y déficit atencional. Sin embargo, existen otros 2 estudiantes que tienen dificultad en el aprendizaje que la profesora de matemáticas ha detectado durante este año en el desarrollo de las clases por las actividades realizadas en aula, pero no han sido diagnosticados por un profesional competente. Dentro de los estudiantes del curso existe uno que ha llamado la atención por una actitud durante las clases que se caracteriza por falta de atención, de distracción al resto de sus pares y respuestas con uso de ironía, por lo que fue necesario prestar atención al caso, conversar con él y así lograr que no produjera una alteración en desarrollo de la clase. Un caso opuesto al ya expuesto es el de otro estudiante que manifiesta un deseo de querer saber más allá del contenido que se está enseñando en clases, a través de manifestar constantemente las dudas y de pedir que se le adelante siempre la materia.

Cabe señalar que los estudiantes están en una etapa de desarrollo compleja que se refleja en el desarrollo de las clases. Si bien se produce un orden y silencio cuando se pasan los contenidos, cuando se realizan actividades en grupos se producen conversaciones entre los integrantes, de los cuales pocos trabajan, y posteriormente reclaman cuando sus trabajos son tomados para ser calificados. En términos de comportamiento fue difícil observar a primera vista quién lidera el grupo, pero con el transcurso de los días se puede señalar que existen dos estudiantes que llaman constantemente la atención, queriendo ser los primeros en responder y decir que todo es muy fácil, sin pensar si las respuestas son correctas o adecuadas a lo que se les pide.

Cada de uno de los estudiantes presentan una vocación más artística que es propia de la aprehensión a esta ciencia de las matemáticas, según como lo define Gardner (1998) que existen inteligencias múltiples y en el aula sólo se ven dos tipos: la lingüística - verbal y la lógica – matemática. En cambio, se detecta la inteligencia espacial que es la habilidad que tienen para idear imágenes, dibujar con detalles, entre otros. Dicho lo anterior es un gran aporte a la estrategia que deseaba implementar en ésta área de la matemática, ya que los estudiantes presentan un gusto especial por la creación y la visualización, además de los cálculos matemáticos que han adquirido. Considerando este contexto se introduce en las clases por medio de imágenes los saberes científicos, los cuales se muestran a través de la epistemología la historia de los objetos matemáticos para dar comienzo a los contenidos de la teoría y la aplicación. Pero, con el pasar de las clases, fueron asimilando muy bien, recordando y relacionando con la historia que ellos van viendo en otras clases. Con el objeto de realizar la teoría de Registro de Representación Semiótica de Raymond Duval utilizando como una de las herramientas *geogebra*.

Descripción de la unidad didáctica

Con respecto a la propuesta que se debe implementar en el séptimo básico en el área de las matemáticas, se aplica la Teoría de Representación Semiótica de Raymond Duval, con el propósito de dar a conocer en forma visible a otro individuo por medio de la aprehensión del concepto (Noesis) y la representación mental por medio de las imágenes (Semiosis) el objeto matemático, a través de signos o símbolos. Según Duval (1995), para que este sistema semiótico, es decir, un sistema de signos sea considerado un registro de representación se requieren tres actividades cognitivas:

- Identificación del contenido a representar como, por ejemplo: la circunferencia.
- Tratamiento que es la transformación de este objeto matemático dentro de ese mismo registro, como, por ejemplo: el cálculo del área achurada que involucre figuras geométricas en la que se determine el área de cada una de las figuras, realizar una operación aritmética y obtener la región sombreada.
- Conversión en la que se transforma desde un registro a otro como, por ejemplo, definir conceptualmente el perímetro de una figura geométrica achurada para llevarla al Registro algebraico con la fórmula, o también realizar la transformación del registro de Lenguaje al Geométrico.

Dicha representación de símbolos o signos, según el profesor Duval (1999), se lleva a cabo en la propuesta de acuerdo a tres registros: primero, el Lenguaje Natural que es el concepto del objeto matemático, como, por ejemplo, en una definición de circunferencia, que es una línea formada por todos los puntos que equidistan de uno dado. Segundo, el Registro Algebraico en el cual se presentan las fórmulas del objeto matemático, y tercero, el Registro Gráfico de las figuras aplicando las propiedades de los elementos del objeto matemático.

En cada uno de los registros anteriores se identifican unidades significantes que mantienen:

- a) Una Correspondencia Semántica en que las unidades significantes se asocian de un registro a otro. (ejemplo: perímetro y P).
- b) Univocidad Semántica que se refiere a que, a cada unidad significativa del registro de salida le corresponde una única unidad significativa en el registro de llegada, esto es, el radio que se plantea en el registro algebraico es el mismo que el que se plantea en el registro gráfico.

c) Conservar el Orden, que se refiere a una correspondencia entre registros al organizar las unidades significantes, es decir, si en el registro del lenguaje Natural se trabaja primero el perímetro y luego el área, en el registro algebraico se debe trabajar bajo esa misma estructura de organización.

Al cumplirse los tres puntos anteriores se produce una congruencia y, al no cumplirse un criterio, no presenta congruencia. Al respecto se menciona en la Tesis de Maestría lo siguiente, según Ospina: “El cambio de registro constituye una variable fundamental en didáctica: facilita considerablemente el aprendizaje pues ofrece procedimientos de interpretación” (2012, p.73).

EL proceso de trabajo en sala con el curso conlleva el uso de guías que facilitará el uso del programa de *Geogebra* para construir figuras geométricas con elementos del objeto matemático. Se autoriza la introducción en el uso de *Geogebra* en este establecimiento ya que es una herramienta de trabajo permanente hasta el término de su enseñanza, precisamente porque el colegio apoya la innovación en lo pedagógico, permitiendo la construcción del objeto matemático y la aplicación de las propiedades de cada uno de los elementos. Por otro lado, la utilización de esta tecnología en la enseñanza es una herramienta que permite a los estudiantes descubrir y comprender una idea o concepto, construyendo figuras planas, ya que a través de ello posee la creatividad y la capacidad de incorporar los conocimientos y reflejarlos en una representación gráfica. Adicionalmente adquieren la seguridad para demostrar la aplicación de las propiedades en cada creación geométrica que realicen, sin que éstas sean explicitadas intencionalmente. Cabe mencionar que la gran mayoría de los estudiantes deseaba utilizar esta herramienta porque les permite aprender a trabajar una parte de la matemática que -de otra forma- para ellos hubiese resultado monótona y aburrida.

En el contexto del aula los estudiantes vienen con un hábito de escritura desorganizada para presentar el desarrollo de los ejercicios, sin embargo, con las instrucciones que se les va entregando para revisar el desarrollo se logra remediar, logrando que comprendan qué es lo que se desea que reflejen en cada uno de los ejercicios. Esta metodología de trabajo dentro del concepto teórico (Noesis) y la visualización de las figuras geométricas (Semiosis) permite obtener del estudiante la imagen del objeto(s) la cual se obtiene mostrando un material tangible y colores en las figuras tales como cuadrado, circunferencia y triángulo sobrepuestas. Todo esto facilita que los estudiantes adquieran habilidades que les permitan trabajar eficazmente cuando deban construir por medio de *Geogebra* las figuras indicadas en las instrucciones. Adicionalmente, una vez adquirido el proceso semiótico los estudiantes pueden hacer uso del registro del lenguaje natural, el gráfico y el algebraico, y asimilar la ‘conversión’ de forma trivial (automática), ya que al haber observado que la composición de ciertas figuras involucra otras más complejas, éstos pueden identificar claramente las unidades significantes que se ven involucradas (ya sea el radio, el diámetro, etc.) desde un registro a otro. Paralelamente, los estudiantes pueden aplicar el ‘tratamiento’ que permite el trabajo de forma estructurada para obtener los cálculos.

Cabe señalar que la adquisición de estos nuevos conceptos permite a los estudiantes crear figuras gráficas basándose en la antigua historia, como es el caso del arte de la Lacería utilizado en la geometría Islámica. En este tipo de estudio de la geometría el estudiante puede visualizar, manipular las herramientas de construcción e ir creando el objeto matemático para obtener un razonamiento cognitivo, en base a errores y correcciones que ellos mismos van desarrollando. Adicionalmente, el uso de esta herramienta tecnológica genera en los estudiantes curiosidad por descubrir nuevas formas de graficar en base a este tipo de contenido, ya que, como se mencionó anteriormente, están en una etapa de desarrollo de la adolescencia donde están definiendo su personalidad y tratan de destacar en el grupo

para ser aceptados, lo que dificulta en ocasiones que se mantengan tranquilos en aula y enfocando la atención en un proceso de enseñanza que involucre sólo el uso de papel y lápiz.

La presente propuesta de trabajo se basa en los objetivos de aprendizaje que son: resolver, modelar y representar (Mineduc, 2016). El objeto matemático que se verá en el curso de séptimo básico es la circunferencia, que se define según Orduña: "Una circunferencia es un conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo. El punto fijo se denomina centro de la circunferencia, y a la distancia constante se le llama radio de la circunferencia." (2012, p.116). El desarrollo de esta unidad de circunferencia se llevó a cabo en 16 horas pedagógicas, en las que se dio a conocer a los estudiantes la epistemología de los contenidos que se fueron viendo. Esto permite mantener una base que demuestra que la geometría se ha trabajado desde hace muchos años atrás y aún sigue en vigencia con sus propiedades, complementándose con nuevos descubrimientos, y fortaleciendo de esta forma las bases de sus conocimientos. Con el desarrollo de las clases se pudo observar que a los estudiantes se les hacía más sencillo el comprender cada uno de los elementos y analizar ejemplos de figuras muy distintas a las que se trabajaba normalmente. Sin embargo, se pudo observar además que respecto a la construcción del contrato didáctico -que ha de ocurrir entre profesora y estudiantes, y el cual requiere de tiempo para establecer una relación mutua- se establecen poco a poco condiciones para el funcionamiento de las clases.

Respecto al proceso de implementación, las primeras cuatro clases fueron de conceptos teóricos y desarrollo de ejercicios de figuras geométricas con la utilización de fórmulas e identificación de sus elementos; en éstas se abordan las definiciones de circunferencia, ϕ , perímetro y área de figuras. Las siguientes 4 clases se llevaron a cabo en la sala de computación para trabajar con el sistema *Geogebra* y para lo cual se dividió al curso en pares de trabajo; durante esta etapa, en la primera clase se dio a conocer cómo trabajar con esta herramienta, introduciendo ciertos elementos básicos (como el punto, línea recta, segmento, líneas paralelas y las líneas perpendiculares) para la construcción de figuras como la circunferencia, cuadrado y semicircunferencia. Durante las clases siguiente se hizo entrega de guías de ejercicios en la que los estudiantes debían realizar esta representación semiótica en los registros de lenguaje natural, gráfico y algebraico, debido a que ellos ya han adquirido una base de trabajo en registro algebraico. Cabe señalar que durante todo este proceso se consideró a los estudiantes con dificultad del aprendizaje, a quienes se les realizó ejercicios más sencillos y se les indicó los registros que debían ocupar. Y para concluir este contenido en la última clase se les mostró un video del arte de la Lacería, el cual, trabaja con construcciones de las figuras geométricas, demostrando a los estudiantes que pueden crear y graficar con lo aprendido en esta unidad.

Resultados de aprendizaje

Respecto al contenido de perímetro, se entregó a 22 estudiantes una guía compuesta por una tabla de 4 ejercicios de circunferencia -que los estudiantes debían completar con el radio, diámetro y longitud-, más dos ejercicios de desarrollo y tres de planteamiento de la vida cotidiana. Cabe señalar que el 78 % (14 estudiantes) de los estudiantes desarrollaron dichos ejercicios. Teniendo en cuenta que los valores obtenidos deben colocarse con la unidad de medida, sólo un estudiante - quien presenta dificultad de aprendizaje- colocó en los resultados la unidad de medida; vale decir, en este contenido no todos los estudiantes colocan la fórmula para desarrollar los ejercicios, sino sólo datos distribuidos al azar. Se debe señalar también, que en los estudiantes con problemas de aprendizaje (a quienes se les había entregado una guía específica para ellos con figuras planas de círculo, semicircunferencia -entre

otras- conteniendo de forma escrita la fórmula de perímetro), se presentaron dificultades durante el desarrollo, específicamente para determinar el perímetro de una semicircunferencia.

Respecto al análisis que se llevó a cabo de un segundo grupo de guías, entregadas para el repaso de perímetro y área -que contenían dos ejercicios de cada uno, entre los cuales algunos consideraban radio y otros el diámetro-, se puede observar que sólo el 91% (20 estudiantes) de un total de 26 estudiantes desarrolló la totalidad de los ejercicios, sin considerar además a los estudiantes con dificultad de aprendizaje (4), lo que equivale a un total del 92% del total de los estudiantes. Sin embargo, quienes efectivamente colocaron las unidades de medida fueron sólo 5 estudiantes, con lo que se puede inferir que, durante el desarrollo de este trabajo los estudiantes presentan mucha dificultad en colocar lo que es la unidad de medida del área que va elevada al cuadrado.

Adicionalmente, otro análisis se llevó a cabo en base a la sexta clase para medir el aprendizaje y para lo cual se realizaron 5 preguntas a los estudiantes (Véase anexo 1): respecto a la primera pregunta ¿Cómo se construye una línea recta en *geogebra*? el 35% respondió dos puntos, otros dijeron línea y un punto, y el resto de los estudiantes no contestó. Para la segunda pregunta ¿Qué debo conocer para construir una circunferencia en *geogebra*? el 39% (9 estudiantes) respondió radio, los otros escribieron diámetro, y el resto no contestó. En la tercera pregunta ¿Qué elemento se debe conocer para realizar un segmento? el 22% (5 estudiantes) contestaron dos puntos, el resto escribió que no sabía y otros no contestaron. En la cuarta pregunta ¿Para realizar una recta perpendicular que elemento debe existir previamente? el 52 % (12 estudiantes) escribieron la línea recta y un punto, el resto no contestó. Y, por último, para la quinta pregunta: ¿Para realizar rectas paralelas qué elemento debe existir previamente? el 57% (13 estudiantes) colocó línea recta y un punto, el resto no contestó. Si bien en la clase anterior se explicó paso por paso qué era cada uno de estos elementos para la construcción y que los estudiantes practicaron en ello, asegurando que todos tuvieran computadores para trabajar tranquilamente, con las respuestas obtenidas se puede señalar que el concepto más internalizado por los estudiantes son las rectas paralelas y las rectas perpendiculares; mientras menos de la mitad de ellos sabe construir una circunferencia y por último, realizar una línea recta. Finalmente, son muy pocos los estudiantes que reconocen cómo se debe construir un segmento.

Con el análisis de cada una de las clases realizadas, tanto en la sala como en los computadores, los estudiantes logran internalizar los conceptos de circunferencia que se ven involucrados. Aquellos que ya conocían el programa, pero no lo habían trabajado, pedían más ejercicios para desarrollar y con un grado de dificultad mayor; en base a esto, durante las clases que se realizaron con posterioridad se presentan ejercicios de construcción en el que se va aumentando el grado de dificultad y en que debían además agregar los otros registros del Lenguaje Natural y Algebraico, en forma escrita en sus cuadernos o en las guías. En las correcciones de estas guías se observó que en el registro algebraico los estudiantes escriben la fórmula con el desarrollo y la unidad de medida, pero presentan gran dificultad para explicar de forma escrita cómo construir la figura geométrica. Paralelamente, cuando se debe trabajar el registro del lenguaje natural no todos los estudiantes lograban entender qué se debía realizar y escribir en cada ejercicio, por lo que, se les realizaron preguntas en que debían responder cómo se realizaría la construcción de una determinada figura compuesta, e hicieran su escritura explícita. Adicionalmente, se muestra este registro del lenguaje natural por cada ejercicio en papelógrafo, para que ellos observen y comparen su escrito con lo expuesto. Sin embargo, según lo analizado sólo el 39% de los estudiantes realizó el registro natural, con lo que se concluye que están mecanizados en el desarrollo de los datos numéricos durante su período escolar, realizando pruebas o trabajos de matemáticas que son evaluados

más bien por este tipo de desarrollo en los procedimientos algebraicos, por lo que faltó más tiempo para dedicar al otro registro.

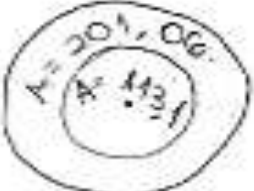
En cambio, el hecho de visualizar una figura compleja descomponiéndola en una forma más simple y aplicando los elementos cómo también las propiedades de éste objeto matemático, presenta dificultad en los estudiantes para recordar cómo se particiona un círculo que involucre un ángulo de 90° y 180° . No obstante, cuando se les hablaba de recta perpendicular ellos sabían que formaban un ángulo de 90° , aunque con la construcción en *geogebra* logran comprender mejor su significado. Este registro gráfico realizado en *geogebra* les fue más atractivo a los estudiantes porque eran libres de comenzar a realizar la construcción y debían llegar a una figura que cumpliera cierta condición. Observé que todos los estudiantes -incluidos los que presentan dificultad en el aprendizaje- eran capaces de graficar y a aquellos que no comprenden cómo comenzar a realizar una figura, se les indicaba paso por paso para lograr hacerlo; todo ello a pesar de las pocas clases con que se cuenta para que los estudiantes manejen este programa de *geogebra*, consiguiendo aprender muy rápido. En este sentido cabe señalar que sólo se contaba con 2 horas pedagógicas para conocer éste programa para graficar los elementos aprendidos, como realizar polígonos regulares, círculos, rectas, entre otros, y algunas de las figuras planas, y que antes de terminar la clase, se les dio a realizar 3 ejercicios de circunferencia, en donde se les entregaba el radio o el perímetro y debían construirlo.

Para que, en este estudio, el sistema semiótico sea considerado un sistema de representación se deben dar tres acciones que son: la identificación de la fórmula en cada planteamiento de los ejercicios, el tratamiento que se da en cada uno de los registros y la conversión que se da tanto entre el registro gráfico con el Lenguaje natural, como también entre el registro del lenguaje natural con registro algebraico. Se llevó a cabo un trabajo individual con los estudiantes, a quienes se les presentó 2 ejercicios que debían ser representados en tres registros: Gráfico, Natural, y Algebraico. En el primer ejercicio un 100% pudo identificar la fórmula para realizar los cálculos, mientras que en el segundo sólo un 87%. De estos resultados se puede inferir que los estudiantes tienen internalizado el procedimiento algebraico, ya que poseen una habilidad y práctica que se les ha enseñado, de forma mecánica, durante todo su proceso escolar. En lo que se refiere al tratamiento en cada uno de los registros, tanto en el gráfico como en del lenguaje natural, sólo un 13% (2 estudiantes) no realizó dicha construcción, ni realizó la escritura del registro del Lenguaje Natural. En cuanto a la conversión (entre el registro gráfico al lenguaje natural) la gran mayoría no determinó las unidades significantes que es el representativo de cada registro, no logrando así una correspondencia semántica, es decir, no se logra tanto una asociación entre el registro de partida y el registro de llegada, como tampoco univocidad semántica de uno a uno de las unidades significantes en cada registro, ni -por último- el orden semántico, no existiendo por ende un orden con las unidades significantes. Producto de esto es que el estudiante desconoce el registro de representación, ya que no hay una comprensión conceptual ni una descripción en el caso del registro del lenguaje natural.

El trabajo efectuado por un estudiante se presenta en el siguiente ejercicio (Véase anexo 2 y 3):

Tabla 1: Construir una circunferencia de radio 8 u. y en su interior otra circunferencia de radio 6 u. Ambas tienen el mismo punto central. Determinar la diferencia entre el área mayor y el área menor.

Conversión de un registro a otro

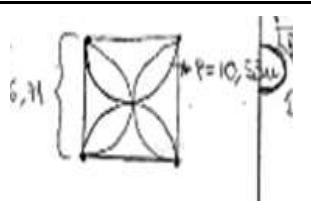
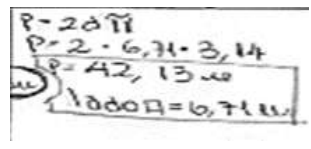
Registro Estudiante 12	Representación	Unidades significantes	Correspondencia Semántica	Univocidad Semántica	Orden Semántico
Registro Gráfico		Punto, 2 circunferencias, concéntricas y 2 áreas.	NO Se refleja el radio en el registro gráfico.	NO Porque los radios no existen en el registro gráfico.	NO Porque no se sigue un orden entre los registros.
Registro Lenguaje Natural	1- Colocar el punto, se escribe el radio B y también radio. 2- Se coloca en el centro de la otra circunferencia. 3- Se presiona el botón de área y se coloca en la circunferencia (borde)	Punto, radio 8, colocar en el centro de la otra circunferencia y área.			
Registro Lenguaje Natural	1- Colocar el punto, se escribe el radio B y también radio. 2- Se coloca en el centro de la otra circunferencia. 3- Se presiona el botón de área y se coloca en la circunferencia (borde)	Punto, radio 8, colocar en el centro de la otra circunferencia y área.	NO Ya que falta identificar el otro radio.	NO Porque no se aprecia el otro radio.	NO Se sigue el orden de las unidades significantes.
Registro Algebraico	$A = 11\pi^2$ Área = $3,14 \cdot 20^2 = 209,96 \text{ m}^2$ Área = $3,14 \cdot 6^2 = 113,04 \text{ m}^2$ la diferencia = $27,92 \text{ m}^2$	Identificación fórmula, radio 8 y 6, 2 áreas con la unidad de medida y la diferencia de las áreas con su unidad de medida.			

Por lo que se puede concluir que no existe una congruencia semántica ya que, no se cumple la correspondencia semántica, univocidad semántica y orden semántico. Lo que indica que el estudiante no comprende el objeto matemático.

El siguiente ejercicio que desarrollaron uno de los estudiantes es (Véase anexo 4):

Tabla 2: Construir un polígono regular de 4 lados. Trazar en el interior de la figura 4 semicircunferencias. Considerando el diámetro de cada una como el lado de cada polígono. ¿Cuánto mide el lado del polígono?

Conversión de un registro a otro

Registro estud. 12	Representación	Unidades significantes	Correspondencia Semántica	Univocidad Semántica	Orden Semántico
Registro Gráfico		Polígono de 4 lados, 4 circunferencias, lado del cuadrado 6,71 y el perímetro o longitud de una circunferencia.	SI	NO Se identifica la cantidad de semicircunferencia, ni tampoco parece el perímetro o longitud en el registro del lenguaje.	NO sigue un orden y no se considera el perímetro.
Registro Lenguaje Natural	1º Dibujar un polígono de 4 lados. 2º Se realizan semicircunferencias por encima de un punto o otro en el interior del polígono.	Polígono de 4 lados y realizar las semicircunferencias.			
Registro Lenguaje Natural	1º Dibujar un polígono de 4 lados. 2º Se realizan semicircunferencias por encima de un punto o otro en el interior del polígono.	Polígono de 4 lados y realizar las semicircunferencias.	SI	No Porque no hace mención a la cantidad de semicir-	NO Existe un orden, ya que comienza con el polígono.
Registro Algebraico		Perímetro de los 2 círculos, 2 círculos, un lado del cuadrado con la unidad de			

		medida.		cunferen- cias.	
--	--	---------	--	--------------------	--

El desarrollo que realizo el estudiante desde el registro gráfico al registro natural se cumple la correspondencia semántica, ya que, se realiza el polígono de 4 lados, construyendo las 4 semicircunferencia ubicándola en el lado del polígono, se lo identifica cómo el diámetro de éste. Mientras que la univocidad semántica no se especifica la cantidad de semicircunferencias ni el perímetro o longitud en el registro del lenguaje natural, por lo cual, no hay un orden en las unidades significantes y además no se identifica el perímetro. Adicionalmente, desde el registro del lenguaje natural al registro algebraico la correspondencia semántica existe, la univocidad semántica no se refleja ya que se desconoce la cantidad de semicircunferencia y por último no existe un orden semántico, ya que se ven alteradas las unidades significantes, debido a que en el registro del lenguaje comienza con el polígono de 4 lados y en el registro algebraico comienza con la longitud del círculo o perímetro. Se infiere que, el estudiante no comprende el objeto en estudio y no posee una congruencia semántica, ya que no cumple con la correspondencia semántica, univocidad semántica y orden semántico, en estos registros de representación.

El último trabajo que se realizó con el curso fue uno en pares de estudiantes, a quienes se les entregó una guía con tres ejercicios de planteamiento (Véase anexo 5); respecto a aquellos estudiantes con dificultad de aprendizaje, se les entregó igualmente una guía con tres ejercicios, pero con un menor grado de dificultad y con una tabla que indicaba los tres registros que se debían llenar (Véase anexo 6). De este trabajo se pudo observar que del total de 10 parejas que trabajaron con esta guía, quienes realizaron el registro del lenguaje natural en dos ejercicios corresponde a un 39% (7 estudiantes), el registro gráfico un 100% (10 parejas) y el registro algebraico un 78% (7 grupos); quienes desarrollaron sólo el ejercicio 1 fue un 22% (4 estudiantes), mientras que el del registro gráfico fue desarrollado por todos los grupos. En el momento en que los estudiantes debían traspasar la representación desde un registro a otro, se observa que se les dificulta dicha operación porque no existía una comprensión del objeto matemático, esto es, reconocer las unidades significantes en cada uno de los registros. En el siguiente ejemplo se puede observar lo anterior:

Imagen 1: Trabajo realizado por Pareja 1 de estudiantes.

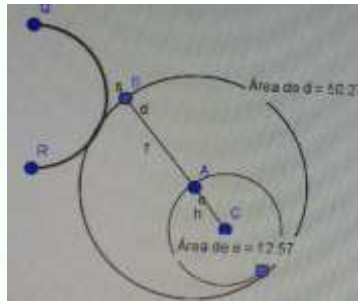
Tabla 3: Ejercicio 1) Construir una circunferencia de radio 4 u. y que en su interior se realice una circunferencia de radio 2 u. y que toque en un punto a la circunferencia mayor(tangente). Determinar las diferencias de las áreas.

Registro Lenguaje

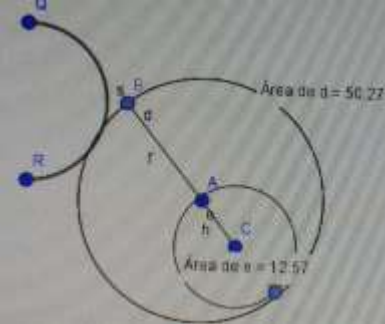
Registro Gráfico

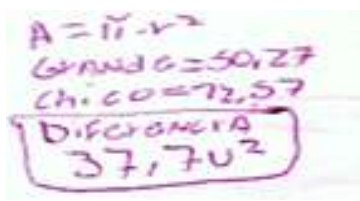
Registro Algebraico

1. DIBUJAR CIRCUNFERENCIA RADIO 4. ZONA de 2.
 3. SABER EL AREA de LOS DOS CIRCULOS y RESTARLOS RESULTADO

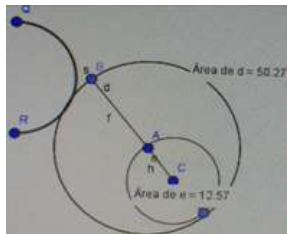
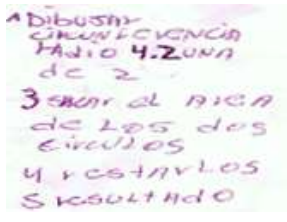


$A = \pi \cdot r^2$
 GRANDE = 50,27
 CHICO = 12,57
 DIFERENCIA
 37,70

Registro/ Pareja 1 (ej.1)	Tratamiento (Profesora)	Unidades significantes del trabajo de los estudiantes
Registro Gráfico	1.- Construye una circunferencia de radio 4, otra circunferencia radio 2 que sea tangente y determinó las 2 áreas.	 Punto, diámetro y radio, dos circunferencias tangentes y áreas.
Registro Lenguaje Natural	Analizar y describir: <ol style="list-style-type: none"> 1. Se realiza una circunferencia de centro radio de 4u (Para determinar la circunferencia mayor). 2. Se coloca un punto en la circunferencia. 3. Se traza una línea recta con los puntos creados, que vendría hacer el diámetro en el interior de la circunferencia. 4. Realizó con el botón del punto medio entre el punto del centro de la circunferencia y el punto de la circunferencia. 5. Presione el botón de crear la circunferencia centro-punto y se posiciona 	Radio 4 y 2, áreas.

	<p>en el punto medio creado hasta llegar al otro punto extremo ubicado en la circunferencia.</p> <p>6. Presionar el botón de segmento, ocultar la línea recta y achurar la figura (Opcional).</p> <p>7. Presione el botón de área para colocar en ambas circunferencias.</p>	
Registro Algebraico	<p>Identificar fórmula de las áreas del círculo y obtener su diferencia con la unidad de medida. Desarrollar el proceso aritmético con el reemplazo de las variables.</p> $A(\text{grande}) = \pi r^2 = 3,14 \cdot 4^2 = 50,24u^2$ $A(\text{pequeña}) = \pi r^2 = 3,14 \cdot 2^2 = 12,56u^2$ $A_{\text{grande}} - A_{\text{pequeña}} = 50,24 - 12,56 = 37,68u^2$	 <p>Identificación de fórmula, diferencia de áreas con la unidad de medida.</p>

Conversión de un registro a otro (Trabajo de los estudiantes)

Registro / pareja 1	Representación	Unidades significantes	Correspondencia Semántica	Univocidad Semántica	Orden Semántico
Registro Gráfico		Punto, diámetro y radio, dos circunferencias tangentes y áreas.	NO Se refleja el punto del centro y el punto tangente de la circunferencia en el registro lenguaje.	NO Existe una relación uno a uno en las unidades significantes.	NO Se indica el punto del centro y el punto de tangencia.
Registro Lengua_je Natural		Radio 4 y 2, áreas.			

Registro Lengua- je Natural		Radio 4 y 2, áreas.	NO Se ve reflejado los radios.	NO Existe una relación uno a uno de las unidades significantes, ya que no se identifica los radios.	NO Existe orden de las unidades significantes.
Registro Algebrai- co		Identificación de fórmula, diferencia de áreas con la unidad de medida.			

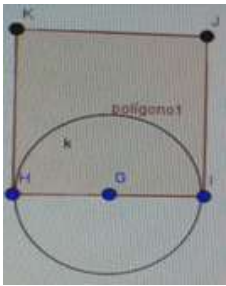

A partir de los datos que se entregan en la tabla anterior se puede concluir que no existe una congruencia semántica ya que ninguna de las tres condiciones cumple que tengan las mismas unidades significantes; debido que, desde el registro gráfico al registro del lenguaje natural no existe una congruencia semántica y no se registra el punto central del círculo, no se hace mención al punto de tangencia, ni tampoco al diámetro. En cuanto a la univocidad semántica no hay una relación de uno a uno de las unidades significantes, porque no se menciona el punto de tangencia, y en lo que respecta al orden semántico no existe un orden ya que faltaron unidades significantes. Por lo tanto, en este registro partida al registro de llegada no se presenta la congruencia semántica, de manera que el estudiante no comprende el concepto de dicho objeto matemático y tuvieron dificultad con la escritura que se debe presentar en el registro del lenguaje natural. Adicionalmente, desde el registro del lenguaje natural al registro algebraico se tiene, que la correspondencia semántica no está identificado el radio de cada círculo, por lo que la univocidad semántica no existe una relación uno a uno dado que no se visualiza los radios de cada uno y no hay un orden. Por lo que se puede inferir que no existe una congruencia semántica ya que el estudiante no comprende esta conversión entre los registros, no realizando una identificación de los radios.


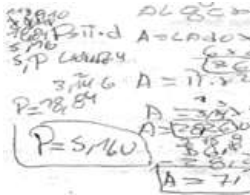
Tabla 4: Otro ejemplo con una figura distinta es el siguiente.

Registro/ pareja 1 (ej.2)	Tratamiento (Profesora)	Unidades significantes del trabajo del estudiante
Registro Gráfico	2.- Construye una circunferencia de radio 3, un polígono regular cuyo lado es el diámetro o segmento. Área y perímetro de semicircunferencia.	Circunferencia, polígono regular.

<p>Registro Lenguaje Natural</p>	<p>Analizar y describir.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Construir la circunferencia de radio 3u. 2. Se realiza un punto en la circunferencia. 3. Se traza una línea recta del punto central de la circunferencia al punto que está en la circunferencia. 4. Colocó un punto de intersección. 5. Se realiza el polígono regular (4) posicionándose en los puntos extremos del diámetro. 6. Determinó la longitud del lado del cuadrado. 7. Luego se determina el perímetro y el área de ambas figuras. 	<p>Lado 6. Área cuadrada, radio 3, área círculo y perímetro.</p>
<p>Registro Algebraico</p>	<p>Identificar el área y perímetro de la semicircunferencia. Desarrollar el proceso aritmético con la unidad de medida.</p> $P_{\text{semicircunferencia}} = \frac{d\pi}{2} = \frac{6 \times 3,14}{2} = 9,42u$ $A_{\text{semicircunferencia}} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{3,14 \times 3^2}{2} = 14,13u^2$ <p>El área de la semicircunferencia es: 14,13 u² El perímetro de la semicircunferencia es: 9,42 u.+ 6 u.= 15,42 u.</p>	<p>Identificación fórmula de perímetro con el diámetro 6, lados del cuadrado, radio 3, área y diferencia de áreas con la unidad de medida.</p> <p><i>Handwritten notes:</i> $P = \pi \cdot d$ $A = \text{LADO} \times \text{LADO}$ $A = \pi \cdot r^2$ $P = 78,84$ $A = 71,740^2$</p>

Conversión de un registro a otro

Registro /pareja 1	Representación	Unidades significantes	Corresp. Semánti_ ca	Univoci_ dad Semántica	Orden Semán_ tico
Registro Gráfico		Circunferencia, polígono regular, diámetro y punto central.	SI	NO, porque falta punto central y comienza con la circunferencia. En el primer registro.	NO, porque se altera el orden de las unidades significantes.
Registro Lenguaje Natural		Lado 6, área cuadrada, radio 3, área círculo y perímetro.			

<p>Registro Lenguaje Natural</p>		<p>Lado 6, área cuadrada, radio 3, área círculo y perímetro.</p>	<p>SI</p>	<p>NO, porque no menciona la diferencia de áreas en el registro del lenguaje.</p>	<p>NO, porque lado del cuadrado tiene otro orden en la ejecución.</p>
<p>Registro Algebraico</p>		<p>Identificación fórmula de perímetro con el diámetro 6, lados del cuadrado, radio 3, área y diferencia de áreas con la unidad de medida.</p>			

Con respecto a la tabla anterior las unidades significantes identificadas en cada registro se da una correspondencia semántica entre el registro gráfico al registro del lenguaje natural y desde el registro de lenguaje natural al registro algebraico. Por otro lado, desde el registro gráfico al registro del lenguaje natural no se menciona el punto central y comienza con la circunferencia en el primer registro. Y en el de orden semántico no se cumple ya que, en el registro gráfico comienzan con la circunferencia. A partir de esto se deduce que el estudiante no ha logrado la comprensión del objeto matemático, ya que no se cumple la correspondencia semántica, univocidad semántica y orden semántico.

Como resultado de este trabajo los estudiantes presentaron una mayor dificultad en el registro del Lenguaje Natural, porque el comprender que significa escribir las anotaciones paso a paso que permitan una construcción de una figura geométrica no estaban acostumbrados, debido a que son pocas las instancias que tienen que realizar este método. En el registro gráfico, era un método de trabajo nuevo para ellos, era entretenido ya que ellos se sentían con ganas de construir y estar preguntando cuando les surgían algunas dudas. En cambio, con el registro algebraico, a pesar de manejar mecánicamente este método, igual presentaron dificultad en realizar el tratamiento adecuado con las fórmulas y colocar la unidad de medida.

Análisis reflexivo y autocrítico de la intervención

El proceso de trabajo de la implementación en el séptimo básico ha sido un aporte a la enseñanza ya que se da a conocer el objeto matemático por medio de esta teoría, aplicando tanto los conceptos previos como así mismo los de circunferencia y sus elementos. Este objeto matemático, que

es el realizar representaciones semióticas tales como Lenguaje Natural, Gráfico y Algebraico, es una nueva forma de entregarles a ellos esta unidad de circunferencia. Cabe señalar que ésta no es trabajada con textos para su desarrollo, sino que se basa en los conceptos que se fundamentan en el conocimiento científico matemático, que son entregados por medio del desarrollo del pensamiento cognitivo, y que son reflejados por medio de las representaciones. La forma de entregar este nuevo contenido en cada una de las clases, se adaptó de acuerdo a la personalidad de los estudiantes, su forma de aprendizaje, al conocimiento respecto a sus intereses, al tipo de clase a que estaban acostumbrados y a cómo se comportan usualmente en las clases de matemáticas. Cabe señalar que el enseñar a los estudiantes es un proceso que va entregando la profesora y como lo menciona Onrubia: "...la responsabilidad para completar la tarea estaría esencialmente en el profesor , y el básico modelo instruccional sería la demostración; progresivamente, esa responsabilidad debería pasar a ser conjunta entre profesor y alumno, mediante una estrategia didáctica basada en la "práctica guiada o dirigida", realizada por los alumnos pero orientada por el profesor mediante ayuda de distintos tipos y grados;..." (1996, p.28). En base a lo anterior y lo que se observa durante las primeras clases, se evidencia claramente que se debe reforzar los contenidos durante el transcurso de éstas, es decir, por medio de la observación, preguntas o desarrollo de los ejercicios que realizan los estudiantes, la profesora se mantiene informada. En la práctica ello se refleja en que por un lado se debe dar más tiempo a los estudiantes para hacerles más partícipes durante las clases; por otro lado, se refleja en el cómo se presentaron imágenes de figuras geométricas compuestas (que fueron diseñadas con colores llamativos para que se fuera visualizando cómo se van armando y logrando) con el objeto de que adquirieran la comprensión en la construcción de figuras compuestas.

Debido a lo que se mencionó anteriormente, cada una de las planificaciones se debió modificar ya que el curso tenía un ritmo de trabajo que no permitía avanzar de la forma inicialmente esperada. Adicionalmente, todos los estudiantes solicitaban que se les tomara en cuenta de forma personal mientras muy pocos preguntaban delante del curso, debido a que la mayoría tenía miedo a ser avergonzado por los demás, debido a que se encuentran en una etapa de pleno desarrollo de su personalidad (y muchos de ellos aún tímidos), que es propia de la adolescencia en que desean ser aceptados, cómo menciona Oliva A. (cap.18). Estos hechos iniciales provocan una incomodidad entre ellos al comienzo de la implementación para responder o salir a la pizarra, por lo que se decidió realizar preguntas mediante la utilización de palitos de colores con el nombre y apellido de cada uno de los estudiantes. A través de esto pude observar y evidenciar que no todos desarrollaban los ejercicios de las guías que se entregaban después de pasado el concepto, lo que tomé como base para las clases posteriores, con el propósito de lograr que comprendieran los conceptos y la forma de mostrar aquellos ejercicios que para ellos era algo nuevo y difícil de entender.

Cabe señalar que se observa que para los estudiantes las primeras clases fueron distintas a lo que generalmente estaban acostumbrados ya que estas se basan en una introducción a la epistemología del contenido a abordar, que comienza con el caso de que en Egipto se encuentra el Papiro de Rhind - donde está escrito el ejercicio que compara el área del círculo con un cuadrado inscrito- lugar en donde también se conocía de la existencia entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, y que paralelamente era conocido así mismo por los Babilonios. Ello con el propósito de poder mencionar y que fuera relacionado, posteriormente, con Hipócrates de Quíos que introdujo la regla y el compás para construir figuras geométricas. En este punto de la implementación determiné que la cantidad de información entregada en las primeras clases de epistemología debía reducirse un poco más para dar lugar al trabajo de los ejercicios en conjunto con los estudiantes y para explicarlos más detenidamente. En este sentido, observé que el dar a conocer los conceptos en un comienzo requirió mucho tiempo,

disminuyendo por ello el tiempo dedicado a los estudiantes para el desarrollo de las guías que habían sido entregadas y solicitadas en cada clase. Se determina, además, que para cada una de estas guías era pertinente, en caso de error del alumno o de no contestar, el reportar qué es lo que faltó realizar y/o que debía hacer; esto ya que permite dar cuenta del grado de confusión de los estudiantes, quienes no distinguían cuando se les pedía el cálculo del perímetro o del área, y de la necesidad de realizar, por ende, una clase de repaso de perímetro y área.

Paralelamente, se considera pertinente prestar atención y ajustar la forma de desenvolverse al interior del aula, para explicar y presentar las figuras geométricas, que se realizan transformando de una forma compleja a una simple o conocida por los estudiantes, cómo también observando a los estudiantes que no participan o salen a la pizarra. Con estas medidas se mantiene un ritmo de trabajo que se ajusta de forma más eficiente a los estudiantes de este nivel, quienes, al estar acostumbrados al ritmo de trabajo de la profesora titular de matemáticas, en las primeras clases pedían que éstas fueran más lentas.

Los efectos que implica el tener en cuenta el resultado obtenido en las clases iniciales, el uso del factor tiempo, la forma de explicar las figuras y la participación de todos los estudiantes, repercuten de forma inmediata en el desarrollo de las clases posteriores. En esta línea, se logra observar una mayor atención y comprensión del contenido que se está impartiendo a los estudiantes, por lo que las guías de trabajo pasan a estar compuestas de 6 a 7 ejercicios que los estudiantes han de desarrollar en forma individual, a excepción de aquellas que se desarrollaron en la sala de computación en pares. Cabe señalar que la retroalimentación que se continúa obteniendo de estas clases permite seguir adaptando la manera de realizar cada una de ellas con el objeto de que los estudiantes comprendan y aprendan lo que están realizando en los trabajos.

En cuanto a las clases realizadas en la sala de computación, se puede señalar que éstas permitieron a los estudiantes una mejor comprensión de los elementos del objeto matemático, ya que el hecho de -por ejemplo- tener que realizar un radio o un diámetro llevaba consigo un concepto de segmento o línea recta. Durante este proceso se presta atención a que los estudiantes puedan adquirir de forma rápida y eficaz el uso del programa Geogebra, a pesar de que para muchos de ellos éste era totalmente desconocido y, por ello, jamás usado con anterioridad. Sin embargo, a medida que los estudiantes van construyendo cada una de las figuras con las indicaciones entregadas y con apoyo de un manual de Geogebra (que contiene algunas funciones básicas de los íconos del menú, constituido en 4 páginas) son capaces de realizar dichas construcciones. Un rol importante durante este proceso es el que juega el entusiasmo de los estudiantes y su deseo de trabajar con los computadores para realizar todo lo que se les indicaba, ya que éstos se ven reflejados en la participación y curiosidad por descubrir, realizando -nuevamente- las figuras o aplicando otros elementos de este objeto matemático. Cabe señalar que mediante el graficar estas figuras con sus elementos involucrados, los estudiantes van comprendiendo, manipulando y aplicando propiedades de las cuerdas, del diámetro, entre otros, y junto a ello, van corrigiendo además sus errores. De este modo, se observa/ verifica que al graficar estos elementos los estudiantes relacionan de forma más fácil las ideas para responder ante preguntas de construcción de figuras en *geogebra*.

Plan de mejora

Sería necesario enfocarse más en la comprensión de los estudiantes durante las primeras clases y verificar que el contenido sea entendido y aprendido por la gran mayoría, asegurándose con el desarrollo en pizarra de los ejercicios más complicados y con preguntas dirigidas. Es preciso conocer mejor al curso para poder implementar este trabajo, ya que se requiere una preparación de los estudiantes y adecuación al ritmo de trabajo que se desea que adquieran, permitiendo con ello, dar tiempo a que ellos trabajen y apliquen conocimientos adquiridos. Debido al cambio que el colegio realizó tuve que adecuar el ritmo de trabajo a medida que se realizaban las clases con análisis de cada una de las planificaciones, lo que me permitió mejorar la forma de dar a conocer de los contenidos para que todos los estudiantes aprendieran.

Una alternativa de efectuar este trabajo sería con *Freegeo* en los celulares, porque la sala de computación es solicitada por los profesores lo que retrasa este trabajo de la aplicación en la construcción de figuras geométricas. Por este motivo, se debió trabajar en la sala, lo que provocó un trabajo lento ya que se tuvo que ocupar otra estrategia: el usar el computador de la profesora y de a uno realizar las construcciones, lo que provocó que no todos los estudiantes entendieron cómo trabajar en la construcción de algunas figuras.

En cuanto, a que los estudiantes dominen los registros de mejor manera es destinar un trabajo continuo durante un período constante de tiempo, ya que no todos recordaban cuando se les enseñó en las pocas clases para que pudieran aplicarlo. Cuando se les escribía en la pizarra el nombre del registro y su desarrollo, se realizaba en conjunto entre la profesora y el estudiante, no presentaron dudas. Pero cuando les tocó realizar el último trabajo no todos colocaron el registro del Lenguaje Natural equivalente a un 61% (11 estudiantes) en el ejercicio 1 y 2. En cambio, el registro gráfico fue realizado por todos, así también el registro algebraico, porque necesitan trabajar más en el registro del lenguaje natural y debe hacerse en forma constante en un comienzo para que ellos lo manejen tan bien como el registro algebraico.

Conclusiones

La conclusión de este trabajo cuyo objetivo era que ellos fueran capaces de manipular con esta herramienta de construcción este objeto matemático - que es la circunferencia- y que pudieran conocer que existen distintos tipos de registros que les permiten representarlo. La forma de entregar este conocimiento es más atractiva para el estudiante que sentarlo frente a un libro con ejercicios donde se les instruye que deben realizar cálculos, que en ocasiones no recuerdan y que obtienen resultados numéricos que no saben cómo interpretarlo. Porque no pueden ser capaces de representar al aplicar los registro gráfico, natural y algebraico, ya que cuando se les pide representarlos en forma separada lo realizan, pero cuando se les pide efectuar una conversión entre estos registros presentan dificultad no viéndose registradas las unidades significantes.

Por lo tanto, tener una nueva forma de entregar conocimientos permite generar en los estudiantes una motivación por aprender, por descubrir y crear por medio de la geometría figuras, aplicando conceptos y propiedades que para ellos lleva años aprender e incluso después poder recordar. Por ello, esta herramienta de *geogebra* es útil cuando el estudiante descubre construcción del objeto matemático. Como también, cada una de las representaciones las que les permite generar la comprensión del objeto matemático como lo plantea en su teoría de registros de representación semiótica de Raymond Duval.

Referencias

- Duval R. (1999, 2004) Semiosis y pensamiento humano, Registros semióticos y aprendizajes intelectuales, Universidad del Valle, Colombia.
- Ospina D. (2012) Las Representaciones Semióticas en el aprendizaje de concepto de función lineal, Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Manizales.
- PEI (2013) Recuperado de la pág. Web del colegio.
- Orduña J. (2012) Geometría Analítica, Red del Tercer Milenio.
- Osorio L. (2011) Tesis de representación semiótica en el aprendizaje del Teorema de Pitágoras.
- Onrubia J. (1996) Mediación y construcción de significados en la interacción profesor/alumnos y en la interacción entre alumnos. Tema 2, p.28.
- Oliva A. (1998) Desarrollo de la personalidad durante la adolescencia, cap.18.
- Ministerio de Educación. (2002) Texto de 7° básico. Santiago, Chile: Mineduc
- Ministerio de Educación. (2013). Texto de 7° básico. Santiago, Chile: Mineduc
- Ministerio de Educación. (2016). Texto de 7° básico. Santiago, Chile: Mineduc
- Mineduc [en línea] http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18983_programa.pdf [mayo 2016]

Psicología y mente [en línea] <https://psicologiaymente.net/inteligencia/teoria-inteligencias-multiples-gardner#!> [septiembre]

Anexo 1

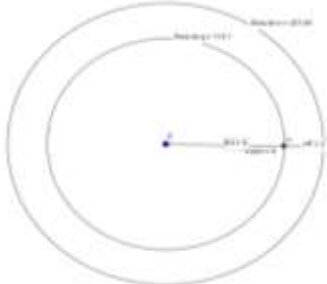
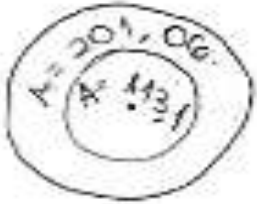
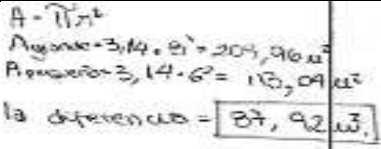
Análisis de preguntas de los elementos para construir figuras geométricas en *geogebra*

Totales de estudiantes en aula en la clase n°6: 23 estudiantes

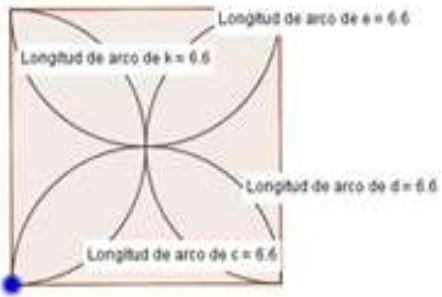
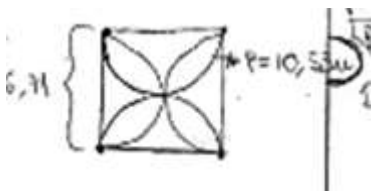
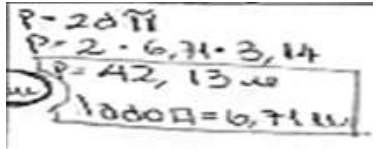
¿Cómo se construye una recta en geogebra?	Respuestas correctas: Dos puntos (y una línea)	8 estud.	35%
	Respuestas erradas:	4 estud. (punto) 5 estud. (punto y línea) 4 estud. (no contestaron) 2 estud. (otras)	65%
¿Qué debo conocer para construir una circunferencia en geogebra?	Respuestas correctas: Radio Radio y diámetro	9 estud. 1 estud.	44%
	Respuestas erradas:	9 estud. 4 estud. (no contestaron)	56%
¿Qué elemento se debe conocer para realizar un segmento?	Respuestas correctas: Dos puntos	5 estud.	22%
	Respuestas erradas:	8 estud.	78%

		10 estud.(no contestaron)	
¿Para realizar una recta perpendicular que elemento debe existir previamente?	Respuestas correctas: Línea recta (y punto)	12 estud.	52%
	Respuestas erradas:	11 estud.	48%
¿Para realizar rectas paralelas que elemento debe existir previamente?	Respuestas correctas: Línea recta (y punto)	13 estud.	57%
	Respuestas erradas:	10 estud.	43%

Anexo 2

<p>Registro Gráfico (ej.1)</p>	<p>1.- Construir una circunferencia de radio 8 u. y en su interior otra circunferencia de radio 6 u. Ambas tiene el mismo punto central. Determinar la diferencia entre las área mayor y el área menor.</p> 	 <p>Punto, 2 circunferencias, concéntricas y 2 áreas.</p>
<p>Registro Lenguaje Natural</p>	<p>Analizar y describir.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Se realiza una circunferencia de radio 8 u. • Se crea un punto en la circunferencia. • Se traza un segmento. • Se realiza otra circunferencia de radio 6 posicionándose en el punto central de la circunferencia. • Se realizan los segmentos para las dos circunferencias concéntricas. • Se presiona el botón de área y se posiciona en cada circunferencia. 	<p>Punto, radio 8, colocar en el centro de la otra circunferencia y área.</p>
<p>Registro Algebraico</p>	<p>Identificar fórmula de área de círculo. Desarrollar el proceso aritmético con el reemplazo de las variables.</p> $A_{grande} = \pi r^2 = 3,14 \cdot 8^2 = 200,96u^2$ $A_{pequeña} = \pi r^2 = 3,14 \cdot 6^2 = 113,04u^2$ $A_{grande} - A_{pequeña} = 200,96 - 113,04 = 87,92u^2$	 <p>Identificación fórmula, radio 8 y 6, 2 áreas con la unidad de medida y la diferencia de las áreas con su unidad de medida.</p>

Trabajo individual utilizando los tres registros semióticos:

Registros estudiante 12	Tratamiento	Unidades significantes Del trabajo del estudiante
<p>Registro Gráfico (ej.2)</p>	<p>Construye el polígono de u vértices y 4 semicircunferencias, se determina el lado del cuadrado y perímetro del polígono.</p> 	 <p>Polígono de 4 lados, 4 circunferencias concéntricas, lado del cuadrado 6,71 y el perímetro o longitud de una circunferencia.</p>
<p>Registro Lenguaje Natural</p>	<p>Analizar y describir. Se presiona el botón de polígono regular dándole una medida de 4. Se presiona el botón de semicircunferencia colocándolo en cada ángulo de 90°. Se presiona el botón de distancia o longitud en cada semicircunferencia. Se presiona el botón de distancia o longitud de uno de sus lados del polígono.</p>	<p>Polígono de 4 lados y realizar las semicircunferencias.</p>
<p>Registro Algebraico</p>	<p>Identificar el lado del cuadrado. Identificar la fórmula del perímetro del polígono de 4 lados y desarrollar el proceso aritmético.</p> $P = \frac{2\pi r}{2}$ $4,91 = \frac{2 \times 3,14 \times r}{2}$ $\frac{4,91}{4,14} = r$ $r = 1,5637u$ <p>Lado del polígono es: $d = 2r$ $d = 2 \times 1,5637 = 3,1274u$</p> <p>Lado es de 3,13</p>	 <p>2 círculos, un lado del cuadrado y el perímetro de los 2 círculos con la unidad de medida.</p>

Anexo 5

Guía de Geometría n° 7
2do semestre 2016
Departamento de Matemática

Nombre: _____

Curso: _____

Fecha: _____

I. Desarrollar en Geogebra las figuras geométricas mediante registros:

1.- Construir una circunferencia de radio 4 u. y que en su interior se realice una circunferencia de radio 2 u. y que toque en un punto a la circunferencia mayor(tangente). Determinar las diferencias de las áreas.

2.- Construir una circunferencia de radio 3u. y un cuadrado cuyo lado es el diámetro de la circunferencia. Calcular el área y perímetro de la semicircunferencia que se forma.

3.- Construir una figura geométrica en la que un medio este achurada o 180° achurados, siendo su radio de 6 u. Y en la otra mitad una semicircunferencia menor que se encuentre apegada al diámetro cuyo radio es de 3 u. Encontrar el perímetro de la semicircunferencia grande y pequeña.

Anexo 6

Guía de Geometría n° 7
2do semestre 2016
Departamento de Matemática

Nombre: _____

Curso: _____

Fecha: _____

1.- Construir una semicircunferencia al interior de un cuadrado. Determinar la medida del diámetro.

Registro Lenguaje	Registro Gráfico	Registro Algebraico

2.- Construir un polígono regular de 4 lados y una circunferencia cuyo diámetro sea el lado del cuadrado. Determinar perímetro y área de la circunferencia.

Registro Lenguaje	Registro Gráfico	Registro Algebraico
--------------------------	-------------------------	----------------------------

--	--	--

3.- Construir una semicircunferencia, determinar el diámetro y el perímetro de la figura.

Registro Lenguaje	Registro Gráfico	Registro Algebraico