UNIVERSIDAD
ALBERTO HURTADO

Facultad de Educación

Pedagogía en Matemática

PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA HOMOTECIA

Seminario de Titulación para optar al Título de Profesor de Matemática

Por:

Cristian Andrés Cárdenas Conejeros

Profesor Guía

Dra. María Soledad Montoya G.

Santiago, 2018

Agradecimientos

Principalmente a mí querida familia quienes siempre me apoyaron en este largo camino, pero en especial a mi querida madre Bernarda Conejeros quien siempre creyó en mí y en mis sueños. No fue fácil, entre medio de esta larga etapa aparecieron dificultades, sucesos inesperados, los cuales parecían derrumbar el sendero que había decidido tomar, pero gracias al apoyo de mis seres queridos pude levantarme y continuar, entonces logre comprender lo importante que son las personas que realmente te quieren.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo de título se dará a conocer una propuesta de enseñanza aprendizaje para al concepto de Homotecia, el cual tiene sustento en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau. Este proyecto está conformado por ocho capítulos, el primer capítulo muestra la problemática la cual nace en la enseñanza y aprendizaje del concepto de homotecia, sustentada por artículos matemáticos, planes y programas, libros de textos, tesis, y artículos relacionados.

En el segundo capítulo se muestran algunos elementos de la epistemóloga de la homotecia, los cuales ayudan con el sustento matemático para la realización de una adecuada transposición didáctica sobre el concepto de estudio. Posteriormente en el tercer capítulo, se presenta una descripción de las fases de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau como marco de referencia, con el fin de que los estudiantes logren la habilidad de comunicar y argumentar el objeto matemático en cuestión.

En el cuarto capítulo se muestra la micro ingeniería didáctica y el estudio de clases como metodologías. Se hizo uso de la micro ingeniería didáctica con el propósito de tener información predictiva sobre un curso de enseñanza media en específico utilizando el análisis a priori en la secuencia de enseñanza aprendizaje. El estudio clases se utiliza con el fin de dar mejora a la práctica docente en clases basadas en resolución de problemas. Más tarde, en el quinto capítulo se presenta la secuencia de enseñanza aprendizaje sobre la homotecia, en dicho capítulo se dan a conocer los análisis a priori de las situaciones claves de cada actividad, para poder saber los posibles errores o dificultades que podrían tener los estudiantes durante dicha secuencia.

En el sexto capítulo se presenta el estudio de clases basado en una clase de resolución de problemas, para ello se muestran los problemas, planes de clases y actividades que realizaron los alumnos. Posteriormente se expone la discusión acerca de la pertinencia de los problemas y la gestión de la clase desde el ámbito matemático, didáctico y pedagógico. Mencionar que se escogió la primera clase para hacer el estudio de clases, con el propósito de mejorar desde el principio y continuamente la práctica docente. En el séptimo capítulo se muestran los análisis de resultados, el cual consiste en los análisis a posteriori de las actividades y una confrontación con los análisis a priori con sus respectivas reflexiones y conclusiones.

Para finalizar, después de terminar con los capítulos antes mencionados, se muestran las reflexiones y conclusiones acerca de la implementación de la secuencia de enseñanza aprendizaje y si esta cumplió o no con el objetivo de la problemática.

Capítulo I

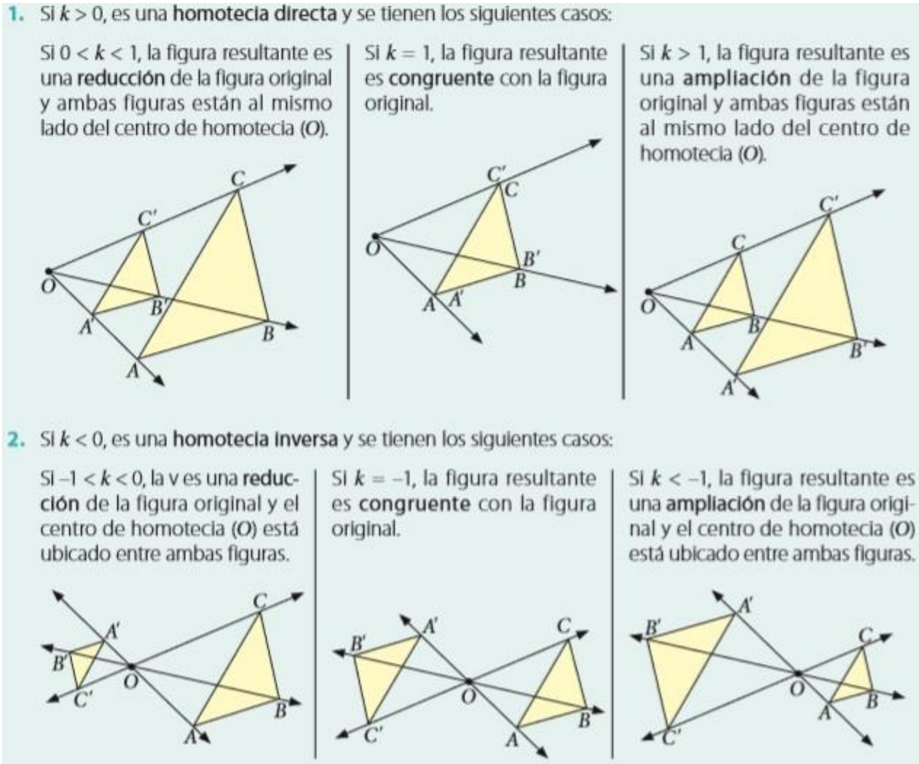
Problemática, Antecedentes y Objetivos

1.1. Problemática.

Desde observaciones en aula, a partir de las experiencias laborales se ha podido evidenciar la manera de cómo se enseñan los contenidos geométricos, de manera mecánica solo resolviendo ejercicios dejando de lado la construcción del conocimiento de ciertos objetos matemáticos por parte de los alumnos, e incluso en nuestras experiencias como estudiante solo nos definían los contenidos geométricos y luego se debía hacer únicamente ejercitación. Por lo antes mencionado, la mayoría de los estudiantes están en un contexto de aprendizaje “donde abundan definiciones y reglas memorísticas” (Chamorro, 1994, Pág. 1), para así poder aplicar sobre ejercicios y más ejercicios, sin lograr construir aprendizajes geométricos, como menciona María Chamorro.

Hernández y Villalba (2001) citado por Vargas y Gamboa (2013) establecen que muchas veces los profesores caen en el error de entregar el conocimiento ya acabado, perjudicando al estudiante al no dejarlo ser el principal protagonista del proceso de enseñanza aprendizaje. Así también, se menciona a Barrantes (2002) quien dice que la enseñanza de la geometría solo se basa en memorización y aplicación de conceptos en ejercicios tipo. Los autores antes mencionados, coinciden en que dicha manera de enseñar no conlleva a un desarrollo de habilidades de razonamiento geométrico.

Un ejemplo de lo recién mencionado, es la enseñanza del concepto de Homotecia del texto del Estudiante matemática de primero medio de la Editorial Santillana 2016, el cual presenta el concepto de Razón de Homotecia como un glosario ilustrado y sin la posibilidad de entregar problemas para que el estudiante desarrolle habilidades de orden superior previamente.



Por lo presentado en los Párrafos anteriores, la problemática se sostiene en este modelo de enseñanza, que al parecer no enseña la geometría de forma constructivista, en donde el estudiante pueda concebir el conocimiento geométrico, por lo que se cree necesario cambiar las actividades de enseñanza aprendizaje de la geometría. Entonces dada a la nueva propuesta de enseñanza aprendizaje donde se espera que los alumnos de primero medio, mediante la Resolución de Problemas geométricos utilizando la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1997), nos lleva a la siguiente pregunta ¿En qué medida los estudiantes logran comunicar y argumentar las propiedades de la homotecia resolviendo problemas?

1.2. Antecedentes

Los antecedentes que se presentan a continuación darán sustento a la problemática presentada, referente a la enseñanza aprendizaje de la Homotecia. Además, se vincula con algunos textos de primero medio del estudiante y lo que ofrecen los Programas de Estudios entregados por el Ministerio de Educación.

1.2.1. Antecedentes Epistemológicos.

Por medio de observaciones en aula se puede evidenciar como los docentes aun utilizan modelos de enseñanza clásicos, como menciona Gascón (1994) el tecnicismo y el teoricismo son estilos de enseñanza los cuales solo entregan el conocimiento terminado por lo cual el estudiante no logra un aprendizaje significativo, sino que se mecaniza o memoriza conceptos, por ende fue un fracaso en la década de los 60, sin embargo como antes se mencionó hay docentes que siguen utilizando estos estilos de enseñanza de la matemática (geometría), como menciona Hernández y Villalba citado por Vargas y Gamboa (2013) diciendo que los docentes muchas veces caen en el error de entregar el conocimiento ya terminado.

En García y López (2008), se presentan distintas problemáticas en torno a la enseñanza de la geometría, desde el por qué es necesario el trabajo en geometría, hasta ejemplificaciones de los distintos enfoques de resolución de problemas que existen en el aula. Las autoras especifican que los docentes por lo general trabajan con el cálculo de perímetros, superficies y volúmenes, limitando el trabajo solo al uso de medidas. Para otros el trabajo se reduce a relaciones vistas desde dibujos, memorizando nombres y definiciones, siendo por tanto la geometría un glosario ilustrado.

En consecuencia, los estudiantes son unos recipientes los cuales solo reciben información por parte de los docentes, la cual queda depositada en la memoria de éstos mismos, el docente no comunica sino que enseña de tal forma que los alumnos son entes pasivos, por ende no hay desarrollo de habilidades ya que el estudiante pasa a un rol de oprimido como menciona Freire (1968).

En Barrantes, Balletbó y Fernández (2014), quienes reflexionan alrededor de la enseñanza de la geometría, especifican que la importancia de un trabajo constructivista es primordial durante el aprendizaje de la geometría, en su investigación afirman que los conocimientos construidos por los propios alumnos son más eficaces y duraderos, y comprensibles en diferentes contextos.

La resolución de problemas es un medio en el cual el estudiante tiene la posibilidad de construir el conocimiento matemático ya que éste pasa a tener un rol protagónico. El alumno tiene que leer y entender, formular un plan, poner en práctica dicho plan y posteriormente revisar su plan para ver si estuvo a la altura del problema, todo esto en base a las propias experiencias y conocimientos previos del estudiante como menciona Polya (1987).

1.2.2. Antecedentes Didácticos

Otro tema a tener en cuenta es el quehacer docente en la planificación de la enseñanza, siendo esta una de las competencias que debe poseer todo profesor en ejercicio para el desarrollo de la enseñanza aprendizaje de los contenidos, puesto que, la mayoría de los educadores solo enseñan algoritmos para abordar el aprendizaje con el fin de conseguir que los estudiantes memoricen técnicas. Siguiendo a Gómez (2005), si esperamos que los profesores de matemática aborden su trabajo diario de manera sistemática y reflexiva, basándose en un conocimiento profesional, entonces ellos deberían conocer y utilizar principios, procedimientos y herramientas que, fundamentados en la didáctica de la matemática, les permita diseñar, evaluar y comparar las tareas y actividades de enseñanza y aprendizaje que pueden conformar su planificación de clase.

Por otro lado, los textos del estudiante de matemática en su mayoría no traen situaciones problemas para que el estudiante sea un constructor de conocimientos y habilidades de orden superior.

Análisis de textos escolares

A continuación se presenta el análisis descriptivo de dos textos escolares sobre el objeto matemático en cuestión Homotecia, dando a conocer que contenidos están involucrados con el concepto recién mencionado. Por otro lado, se describirán algunas actividades que ellos proponen, las cuales veremos si son problemas o ejercicios para el estudiante.

Texto 1

El primero corresponde al texto del estudiante de segundo año medio de Muñoz, Rupin y Jiménez de la editorial SM, Chile (2013), el cual presenta en la unidad 2 de Geometría tres secciones (Semejanza de Figuras Planas, Teorema de Semejanza, Ángulos y Segmentos en la Circunferencia), sin embargo, para este estudio solo se analizará la lección 15 de la primera sección correspondiente a Homotecia y Semejanza.

Al comenzar la sección, el texto presenta una actividad con Geogebra, luego actividades enfocadas a reconocer conocimientos previos y ejercicios. Además, en dicho texto se señala lo que aprenderá el estudiante y el propósito del contenido el cual es “analizar y construir Homotecias”.

Por ejemplo:

Homotecia y Semejanza: el estudiante aprenderá a analizar y construir Homotecias.

En primera instancia, el texto muestra una Homotecia en la vida real comentando que los eclipses solares son homotéticos, debido a que desde la tierra la luna y el sol parecen del mismo tamaño, por eso se genera oscuridad parcial ante este fenómeno, como se muestra a continuación:

Figura. (p.100)

Para finalizar, se menciona que se analizará construir Homotecias por medio del procesador Geogebra.

Posteriormente, el texto presenta una actividad por medio del procesador geométrico Geogebra, la cual se enfoca solo en enseñar cómo utilizar dicho procesador para construir dos figuras homotéticas, como se muestra a continuación:

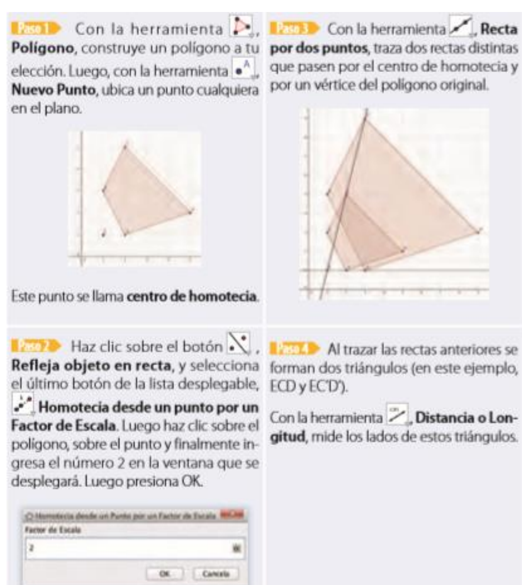


Figura. (p. 100)

Luego para finalizar la actividad se propone una serie de preguntas donde solamente se orienta en reconocer el conocimiento previo (figuras semejantes) sobre homotecias acabadas haciendo preguntas como ¿son semejantes los polígonos Homotéticos?, estas preguntas son:

Realiza las siguientes actividades:

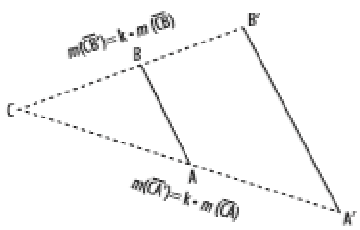
1 En la ventana lateral de Geogebra se muestran las medidas de los lados de cada polígono. ¿Qué relación observas entre ellas, y el número ingresado en el paso 2?

2 Con la herramienta , **Elige y Mueve,** haz clic sobre el centro de homotecia y, sin soltarlo, muévelo por la ventana. ¿Qué cambios observas? ¿Qué se mantiene?

3 ¿Son semejantes los polígonos homotéticos? Justifica.

4 Construye dos homotecias más, con **Factor de escala** –3 y 0.5 (debes agregarlo con punto en la ventana del paso 2). Analiza las figuras resultantes. ¿Qué observas?

En general, dado un segmento AB, un punto C y un número real $k \neq 0$, podemos construir una homotecia A'B' de AB con centro en C y razón de homotecia **k** como se muestra en la figura



Se cumple que:

$$\frac{CA'}{CA} = \frac{CB'}{CB} = \frac{A'B'}{AB} = k$$

Además, AB // A'B'

Lo anterior puede aplicarse para polígonos con distintos valores de **k**, obteniendo figuras semejantes con lados correspondientes paralelos. Pueden darse los siguientes casos.

Figura. (p. 101)

Por otro lado, se muestra en un recuadro el resumen del concepto de Homotecia, el centro de Homotecia y la Razón de Homotecia, en seguida se plantean ejercicios de semejanza de figuras planas y unión de vértices de dichas figuras con puntos exteriores haciendo hincapié al centro de homotecia, posteriormente se muestran ejercicios de homotecias donde se pide calcular el factor “k” de Homotecia, como muestran los siguientes ejercicios:

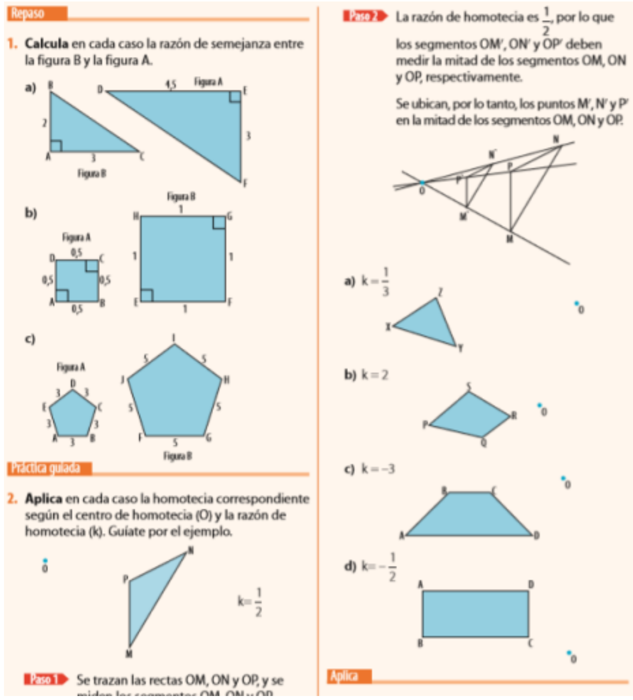


Figura (p. 102)

A continuación, se pide Resolver un Problema basado solamente en evidenciar dos triángulos semejantes para así poder aplicar proporcionalidad, para finalizar se pide en la sección de "No Cometer Errores" que el estudiante pueda mediante ejercicios reconocer errores cuando una figura plana no es semejante o cuando en una Homotecia se entregan las distancias de dos figuras homotéticas para verificar si el estudiante calcula de forma correcta la razón de Homotecia.

Analizando las actividades propuestas en el primer texto, se puede decir que estas son clasificadas como ejercicios. Debido a que las actividades son guiadas para que el estudiante solamente copie y replique técnicas y procedimientos, no hay construcción de conocimientos ya que el estudiante trabaja ejercicios con el contenido ya construido y solo se enfoca en que este se ejercite para reconocer si los triángulos son semejantes o calcular la razón de Homotecia.

<u>Texto 2</u>

El segundo texto, corresponde al texto del estudiante de primero medio de Galasso, Maldonado y Marambio, editorial Santillana, Chile 2016. Los contenidos a estudiar están presentes en la unidad 3 de Geometría, denominada Homotecia y Teorema de Tales la cual se organiza de la siguiente manera:

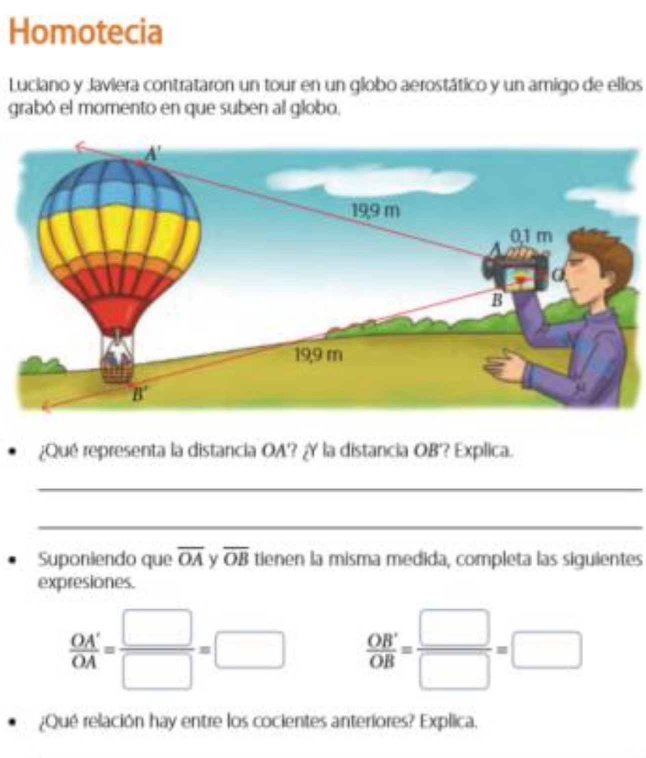
Homotecia

Homotecia de forma Vectorial

Teorema de Tales

División de Segmentos Proporcionales

El segundo texto, comienza por medio de una actividad que muestra el concepto de Homotecia representado en una actividad de la vida real.



Homotecia

Luciano y Javiera contrataron un tour en un globo aerostático y un amigo de ellos grabó el momento en que suben al globo.

- ¿Qué representa la distancia OA'? ¿Y la distancia OB'? Explica.
- Suponiendo que $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ tienen la misma medida, completa las siguientes expresiones.

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{\square}{\square} = \square \qquad \frac{OB'}{OB} = \frac{\square}{\square} = \square$$

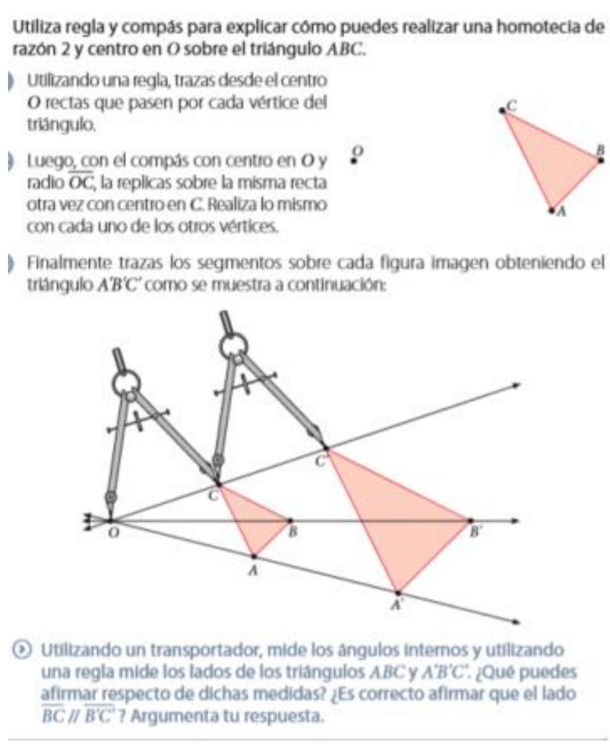
- ¿Qué relación hay entre los cocientes anteriores? Explica.

Figura. (p. 176)

La cual por medio de tres preguntas relacionadas al factor “k” de Homotecia, se pretende que el estudiante pueda darse cuenta de la razón de proporcionalidad, sin embargo, no se hace alusión de figuras semejantes, además la actividad apunta para las Homotecias donde los segmentos proporcionales son de igual medida no hay más casos (paralelismo).

En segunda instancia, se muestra un cuadro institucionalizando los conceptos de Homotecia, Centro de Homotecia y Razón de Homotecia, además se muestra un ejemplo gráfico de una Homotecia. Posteriormente, se presenta un segundo recuadro donde se muestran las Homotecias directas y las inversas dando énfasis a los valores que puede tomar “k”.

En tercera instancia, se presenta un ejemplo donde hay dos cuadrados Homotéticos en el cual se pide encontrar la razón de Homotecia (la cual es negativa). En un tercer ejemplo con regla y compas se pide dibujar un triángulo Homotético a otro dado y centro dado “o” con razón de Homotecia k=2, en un tercer ejercicio de la misma sección se pide encontrar el centro de Homotecia de dos triángulos Homotéticos dados (los ejercicios recién nombrados son guiados), como se muestra a continuación:


Utiliza regla y compás para explicar cómo puedes realizar una homotecia de razón 2 y centro en O sobre el triángulo ABC.

- Utilizando una regla, trazas desde el centro O rectas que pasen por cada vértice del triángulo.
- Luego, con el compás con centro en O y radio $\overline{OC}$, la replicas sobre la misma recta otra vez con centro en C. Realiza lo mismo con cada uno de los otros vértices.
- Finalmente trazas los segmentos sobre cada figura imagen obteniendo el triángulo $A'B'C'$ como se muestra a continuación:

Utilizando un transportador, mide los ángulos internos y utilizando una regla mide los lados de los triángulos ABC y $A'B'C'$. ¿Qué puedes afirmar respecto de dichas medidas? ¿Es correcto afirmar que el lado $\overline{BC} \,//\, \overline{B'C'}$? Argumenta tu respuesta.

Figura. (p. 178)

Para finalizar, se presentan ejercicios de la misma índole de los nombrados en el párrafo anterior para que el estudiante los trabaje solo.

A continuación, se presenta la Homotecia de forma Vectorial, el objetivo del contenido es describir la Homotecia de figuras planas mediante la multiplicación de un vector por un escalar. La primera actividad muestra un triángulo en el plano cartesiano formado por tres vectores, los cuales son multiplicados por un escalar igual a 2 formando así nuevos vectores, se pide al estudiante reconocer la relación que hay entre la figura original con la resultante (son figuras homotéticas).

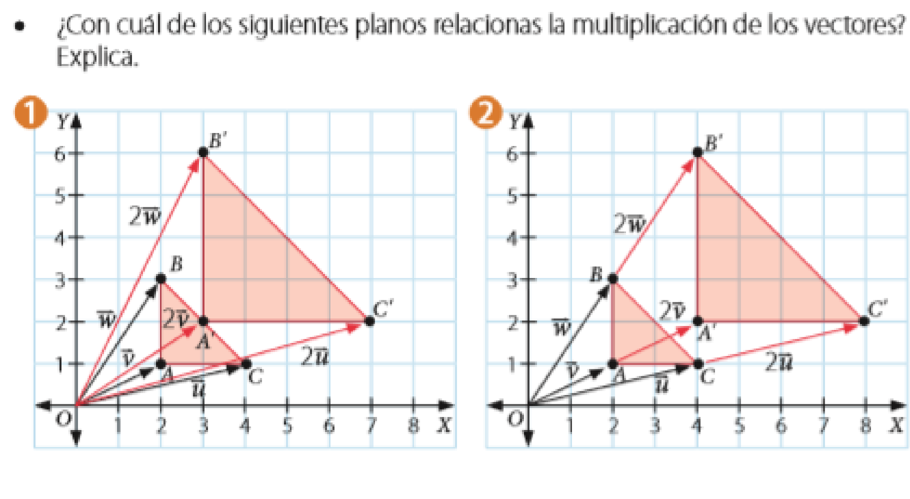


Figura. (p. 182)

En una segunda actividad se muestra un recuadro donde se explica lo que es un vector y lo que sucede si se multiplica por un escalar definido en los reales, luego se pide al estudiante que por medio de compas y regla pondere por 3 un vector dado sobre una hoja cuadriculada, después se pide que replique lo enseñado sobre el mismo vector dado pero ponderado por un escalar igual a un tercio. En seguida, se muestra otra actividad donde se explica lo que sucede si el vector dado es multiplicado por escalares positivos, negativos o igual a cero.

En una tercera actividad se pide al estudiante multiplicar los vectores que forman un triángulo por un escalar igual a 2, con el propósito que este pueda graficar los vectores resultantes en el plano cartesiano, también se presenta otro triángulo formado por vectores, acompañado de un segundo triángulo formado por nuevos vectores se pide al estudiante encontrar el factor “k”, además se muestran dos triángulos homotéticos formados por vectores de centro “o” en el origen, en este ejercicio se pregunta al estudiante ¿Cómo lo resolverías si el centro de Homotecia no estuviese en el origen?, con el fin de que el alumno pueda aplicar los conocimientos que hay detrás de la homotecia.

En una cuarta actividad se muestra como ejemplo 4 como encontrar en el plano cartesiano el Centro de Homotecia, de dos triángulos Homotéticos con razón negativa, como se muestra en la imagen:

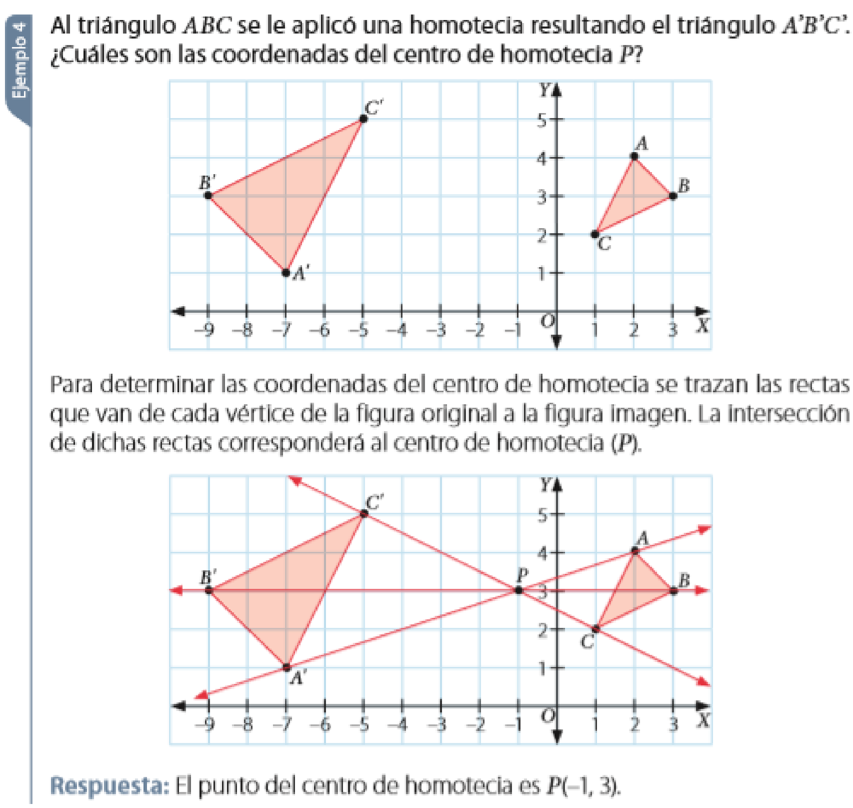


Figura. (p. 179)

Para terminar la actividad se pregunta ¿Cómo calcularías la Razón de Homotecia? (se sabe que es negativa pero no su valor).

Finalmente, se pide al estudiante resolver ejercicios de Homotecias en el plano cartesiano con el propósito de replicar lo que se explicó en las actividades anteriores, con el fin de verificar si el alumno comprendió lo que sucede si un vector es multiplicado por diversos escalares (respecto a sentido y tamaño del vector), además de poder calcular los componentes de la Homotecia (razón, centro).

Analizando las actividades del segundo texto se puede concluir que están clasificadas como ejercicios. Debido, a que solo se pide al estudiante por medio de actividades replicar los métodos y procedimientos enseñados en las actividades iníciales, además no hay construcción del concepto de Homotecia puesto que faltan preguntas y conocimientos previos, para que el estudiante pueda desarrollar alguna idea del concepto nuevo (Homotecia).

Análisis de Programa de Estudios

Programa de Estudios Segundo Medio (2011)

El contenido en estudio se encuentra en la unidad 2 del Programa de Estudios de Segundo Medio, la cual concierne al eje de Geometría, y en ellas se encuentran los temas tales como, semejanza de figuras planas, criterios de semejanza de figuras planas, trazos proporcionales, propiedades invariantes de modelos a escala, teorema de Pitágoras, teorema de Tales, teorema de Euclides, ángulo del centro en la circunferencia y ángulo inscrito en la circunferencia.

Las Orientaciones Didácticas que se dan en la unidad de Geometría son basadas en dos focos, el primero es la proporcionalidad de figuras geométricas y en él se destaca la proporcionalidad de trazos y modelos a escala; además, se recomienda que la actividad inicial se centre en la experimentación con el propósito de que los estudiantes conozcan distintas representaciones (geométrica, verbal y algebraica) de las relaciones entre trazos, para luego introducir la semejanza como “la matemática de los modelos a escala”.

El segundo foco son las propiedades de los ángulos del centro e inscrito en una circunferencia, indicando que este tema da la oportunidad para aplicar el concepto de lugar geométrico, teniendo en cuenta que los procesadores geométricos digitales brindan una excelente representación de ese lugar geométrico, ya que permiten variar las posiciones y medir ángulos involucrados. Ambos focos utilizan tres teoremas centrales (teorema de Thales, teorema de Pitágoras y teorema de Euclides) para regresar a los conceptos de teoremas y demostración.

Se matiza que los criterios de semejanza, por una parte, representan una generalización de los criterios de congruencia vistos en primero medio y, por otra parte, a partir de una de las definiciones de semejanza de triángulos (“aquellos triángulos que tienen sus tres lados proporcionales y sus tres ángulos interiores congruentes”) los estudiantes podrán analizar las combinaciones de las propiedades mencionadas, las cuales bastarán para garantizar las restantes.

Asimismo, en el Programa se enfatizan ciertas habilidades a desarrollar en la unidad, tales como construir modelos a escala, resolver problemas aplicando semejanza de figuras planas, demostrar el teorema de Pitágoras, demostrar el teorema de Euclides, aplicar el teorema de Thales y aplicar el teorema que relaciona las medidas de los ángulos del centro y de los ángulos inscritos en una circunferencia.

En referencia fundamentalmente de la Homotecia, se tiene que los Objetivos Fundamentales Transversales (OFT) son el trabajo en equipo e iniciativa personal en la resolución de problemas en diferentes contextos, los cuales se observan si el estudiante participa de manera prepositiva en actividades grupales, es responsable en la tarea asignada y toma iniciativa en actividades de carácter grupal.

Los aprendizajes esperados (AE) que tienen relación con el contenido en estudio son:

AE 09: Demostrar teoremas relativos a la Homotecia de figuras planas

- Utilizar la noción de semejanza para demostrar que dos trazos homotéticos son paralelos.
- Utilizar la noción de semejanza para demostrar que dos polígonos homotéticos son semejantes.

Por otra parte, señalar que el AE mencionado propone ciertas actividades las cuales se destacan:

- Los estudiantes identifican, a partir de una representación gráfica, los conceptos de: Homotecia, Centro de Homotecia y Razón de Homotecia.
- Demuestran que dos trazos homotéticos son paralelos, para: Homotecia positiva y Homotecia negativa.
- Demuestran que dos polígonos homotéticos son semejantes.

Como se puede evidenciar, las actividades son variadas y ellas estimulan ciertas destrezas tales como las de identificar y demostrar. Sin embargo, por lo mencionado en esta problemática, hemos visto que este tema se enseña de la forma tradicional (mecanicista) en la que el profesor enseña el contenido y luego los alumnos deben replicar, memorizando y mecanizando con los ejercicios entregados, en conclusión no hay construcción de conocimientos por parte de los estudiantes.

1.3. Objetivos

a. **Objetivo General:**

Creación, implementación y evaluación de una secuencia didáctica sobre la homotecia, en los estudiantes de Primero medio utilizando como Metodología la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1997).

b. Objetivos específicos:

_ Diseñar una secuencia de enseñanza aprendizaje fundamentada en la teoría de situaciones didácticas.

_ Implementar dicha secuencia de enseñanza con alumnos de primero medio.

_ Evaluar la propuesta de enseñanza a través de las caracterizaciones de las respuestas de los alumnos y alumnas a las diferentes actividades.

Capítulo II

Objeto Matemático

2.1 Algunos elementos de la epistemología del objeto matemático

Para llevar a cabo este proyecto de investigación se consideró como objeto matemático la Homotecia, Comin (2000) citado por Nolasco (2013), dice que la geometría proporcional se inicia en Grecia por medio de la Escuela Pitagórica, mientras que la Homotecia como tal tiene sus primeros inicios en los Elementos de Euclides (s. IV a. c.). Es necesario mencionar que en este periodo la influencia de la Geometría Euclidiana respecto a la idea de transformaciones no existía como tal.

Tomando en consideración la geometría proporcional como elemento fundamental de este trabajo, se hará referencia epistemológica de ésta y sus elementos como lo son el concepto de proporcionalidad, semejanza y transformación.

Esta geometría tuvo sus primeras dificultades en la unificación de magnitud y número. Posteriormente, en el siglo V a. c. las relaciones de proporción existentes entre lados y diagonales entre figuras cuadradas generó la dificultad en la unificación entre número irracional y magnitud. Los historiadores atribuyen a los griegos (Thales de Mileto) y en especial a los Pitagóricos, el desarrollo de la teoría de las proporciones aunque reconocen que sus orígenes pueden venir de los Babilónicos. Thales de Mileto fue el primer geómetra en desarrollar un sistema deductivo, que hace de la geometría una ciencia racional, de la que involucra la semejanza en el racionamiento proporcional. La concepción de la escuela Pitagórica, en sintonía con el pensamiento Babilónico, se basaba en que todo era número.

Así para los pitagóricos un número se podía relacionar con cualquier magnitud. Aunque estos dos conceptos eran diferentes, debido a que el concepto de número correspondía a la aritmética y a la teoría de números, mientras que el concepto de magnitud correspondía a la geometría, sin embargo existía la voluntad de unificar el número y la magnitud por los pitagóricos como menciona René de Cotret (1985) citado por Nolasco (2013). Intentaron relacionar los números con las magnitudes, por medio de las proporciones, lo que les permitía resolver algebraicamente problemas de geometría.

Para resolver ciertas ecuaciones de segundo grado, los pitagóricos usaban el método de las proporciones. Con dicha teoría se pueden encontrar segmentos lineales que cumplen proporciones como:

A) a: b = c: x
B) a: x = x : b

Donde a, b y c son segmentos lineales dados. Mediante el teorema de la proporcionalidad es posible encontrar el valor de x, además de saber la solución de A.

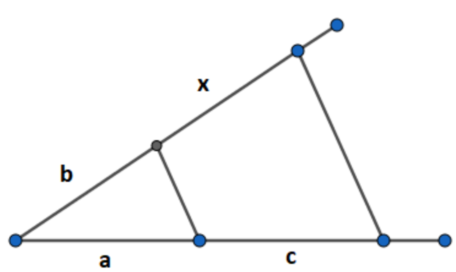
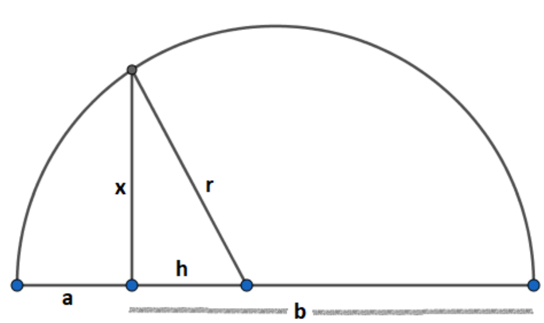


Figura 1

Si percibimos el dibujo de la figura 2 veremos que x es la solución de B.

Figura 2



Para esta última imagen, tenemos que verificar que la solución de x es $x^2 = a \cdot b$.

Teóricamente, el razonamiento anterior era aplicable solo a medidas conmensurables. El descubrimiento de la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con uno de sus lados, efectuada por los mismos pitagóricos, puso fin al ajuste de los números enteros, lo que contribuyó a la separación del concepto de número con el de magnitud, debido a que los números son concretos y las magnitudes continúas. La separación del estudio de los números con el de magnitudes pudo ser obstáculo para otros conceptos relacionados a las proporciones. De lo anterior, en los elementos de Euclides (300 a. c.), las magnitudes y los números se trabajaban de forma separada, el libro VI se refiere a los números proporcionales, y el libro V a las magnitudes proporcionales.

Después de la destrucción del museo de Alejandría, la matemática en general cayó en una gran depresión, su producción fue escasa y pobre por prácticamente un milenio.

Las obras de Euclides, Arquímedes y Apolonio, despertó una nueva curiosidad por la geometría, cuyos progresos fueron lentos al principio, pero transcurrida la etapa de asimilación, las ideas geométricas fueron adquiriendo el carácter abstracto y general.

A lo largo del siglo XVI y buena parte del siglo XVIII, la atención de los matemáticos se fue especialmente al álgebra y al cálculo descubierto por Newton y Leibniz. También lo es para los geómetras renacentistas que se preocuparon de dar a la geometría la generalidad de la que carecía.

Los problemas de representación que aparecieron en el periodo del renacimiento, se convirtieron en un importante punto de partida para el estudio de las transformaciones geométricas, Girard Desargues (1591-1662) fue uno de los primeros geómetras en entregar una base sólida a los pintores renacentistas.

Uno de los primeros descubrimientos de la geometría proyectiva fue el famoso teorema de los triángulos de Desargues, donde si dos triángulos ABC y A’B’C’ están en perspectiva desde un punto O, es decir, si AA’, BB’ y CC’ concurren en O, entonces la intersección de los lados correspondientes pertenecen a la misma recta.

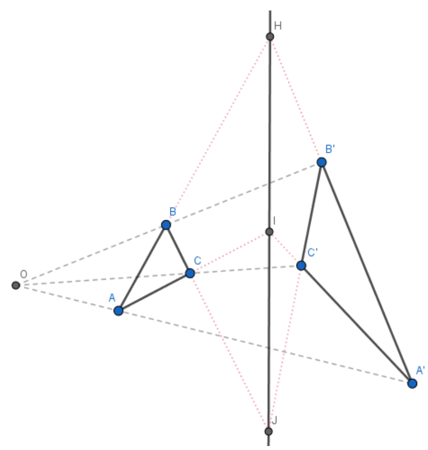


Figura 3

Podemos considerar a Desargues como el iniciador de la geometría proyectiva con su teorema junto a otros resultados.

En el siglo XIX se consideraron a la homotecia y la semejanza como objetos matemáticos, debido en gran parte al desarrollo que experimentó la geometría, a partir de la fecha de publicación de la geometría descriptiva de Monge (1820) y del programa Erlangen de Félix Klein (1872) como menciona Nolasco.

Monge sustentó los primeros ejemplos de la riqueza de las transformaciones de las figuras espaciales en el plano, que dejan demostrar muchas propuestas de la geometría plana a través de la consideración de figuras que resultan de ambas proyecciones, así como la mayor parte de los teoremas de transversales y casi todas las propiedades de las cónicas. En este sentido la semejanza jugó un rol importante en este periodo, como herramienta útil en la resolución de problemas preservando el sentido estático. El sentido estático de la semejanza como objeto matemático fue un obstáculo que la mantuvo en estado de congelación por varios siglos. Tal etapa terminó en el siglo XIX con Hilbert, con la formulación de los axiomas euclidianos y la valorización del sistema deductivo.

Klein en su programa Erlangen en 1872, sintetizó las geometrías, basándose en el concepto de grupo de transformaciones. El grupo principal de las transformaciones del espacio está formado por el conjunto de todas las transformaciones que dejan invariantes las propiedades de las figuras planas. El mismo Klein explica: "*Hay transformaciones del espacio que no alteran en nada las propiedades geométricas de las figuras. Por el contrario, estas propiedades son, efectivamente, independientes de la situación ocupada en el espacio por la figura considerada, de su tamaño o magnitud absoluta, y finalmente también el sentido en el cual estas partes están dispuestas. Los desplazamientos del espacio, sus transformaciones con similitud, así como aquellas con simetría, no alteran pues las propiedades de las figuras más que las transformaciones compuestas con las precedentes*" (Klein, 1872, citado en Piaget y García, 1982, p.102), como cita Nolasco.

Por medio de la premisa anterior, se reconoce al concepto de semejanza como objeto matemático de una transformación caracterizada, porque hay un sistema donde se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones.

Por otra parte, en los programas de estudios pertenecientes a la época de la matemática moderna de la década de los 70, presenta al concepto de homotecia como una aplicación lineal, y como una aplicación afín con las estructuras del plano. Se afirma que en dicha época los estudiantes tenían problemas para resolver problemas geométricos como menciona Lemonides (1991).

Lemonides (1991), presenta la evolución histórica del concepto de homotecia de la siguiente manera:

_ En la enseñanza tradicional se sigue una línea euclidiana del concepto de homotecia siguiéndose la similitud del concepto de semejanza.

_Se presenta el concepto de homotecia bajo la idea de grupos, se utilizan las transformaciones bajo la idea funcional para resolver problemas geométricos.

_En el periodo de las matemáticas modernas se trabaja la homotecia dando énfasis a la geometría afín para trabajar el álgebra lineal, la homotecia es presentada de forma estructural.

_ La enseñanza actual se centra en la estructura de la homotecia y de presentarla en dos contextos matemáticos, el vectorial y el analítico.

Dado los antecedentes epistemológicos mencionados en el párrafo anterior, se pretende abordar la homotecia utilizando componentes de la geometría proporcional como el concepto de semejanza, debido a que el objeto matemático en cuestión es una transformación geométrica, y como menciona Nolasco (2013) las transformaciones son generadas por figuras semejantes. Considerando lo anterior, la semejanza de figuras planas, es un elemento fundamental para la secuencia de enseñanza aprendizaje que se presentará en capítulos posteriores.

2.2 Objeto matemático: Homotecia

A continuación, se hará una breve presentación del contenido matemático a tratar en este trabajo, homotecia.

Guerrero (2015) realiza un estudio entorno a distintos teoremas y demostraciones de semejanza y homotecia, entre ellas se presenta la siguiente definición.

Definición de Homotecia

Una homotecia es una transformación geométrica que permite obtener figuras semejantes a partir de figuras geométricas cualquiera.

Se puede ampliar o reducir figuras aplicando homotecia.

La homotecia está definida a partir de tres elementos:

La figura original.

El centro de homotecia.

La razón de homotecia.

Al aplicar la homotecia de centro O y razón K a un punto P cualquiera, se obtiene otro punto P', que es la imagen de P, de manera que P, P' y O son colineales y $OP' = K \cdot OP$

Si $K > 0$ la homotecia se llama positiva;

Si $K < 0$, se llama negativa.

Corolarios

A. Cuando $K = 1$, la homotecia coincide con la identidad.
   Cuando $K = -1$, coincide con la simetría central respecto a O.
B. La transformación inversa de una homotecia de centro O y Razón k, es otra homotecia, de centro O y razón 1/k.
C. Si $K \neq 1$, el único punto doble es el centro de homotecia.

Teorema de Homotecia sobre un segmento

La figura homotética de un segmento AB es otro segmento A'B' tal que: $\frac{A'B'}{AB}$ = $|K|$ y además: A'B' es paralelo con AB, si la recta AB no pasa por el centro O. (ver figura 1)

Demostración:

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = |K|$

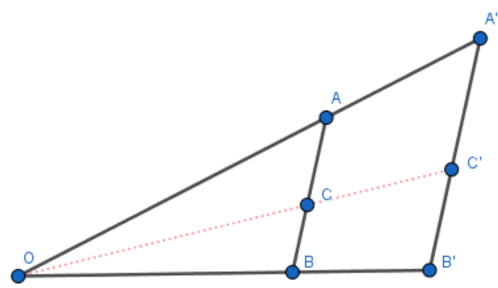


Figura 1

Teorema de Homotecia sobre trazos

La homotecia de centro llamado O y de razón llamada K, se expresa h (o, k) donde envía un punto M del espacio sobre el punto M' de modo que:

$\overline{OM'}$= k·$\overline{OM}$

Ejemplo:

Sean f=h (0, 2) y g=h (0, $-\frac{3}{2}$)

f(A)= A' significa que $\overline{OA'}$=2·$\overline{OA}$

g (B)=B'' significa que $\overline{OB''}$= $-\frac{2}{3}$·$\overline{OB}$

(Ver figura 2)

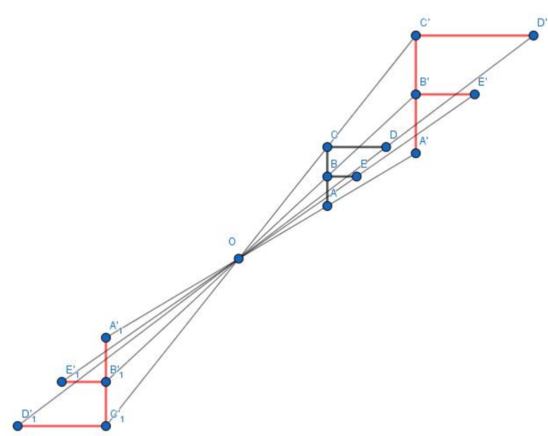


Figura 2

Teorema de homotecia sobre triángulos

La homotecia de centro llamado O y de razón llamada K, se expresa h (o, k) donde envía un punto M del plano sobre el punto M' de modo que:

Los triángulos OBA y OB'A' son semejantes; entonces A´B´ es paralelo AB implica que: $\frac{OA\prime}{OA} = \frac{OB\prime}{OB} = \frac{B'C'}{BC}$ = k (ver figura 3)

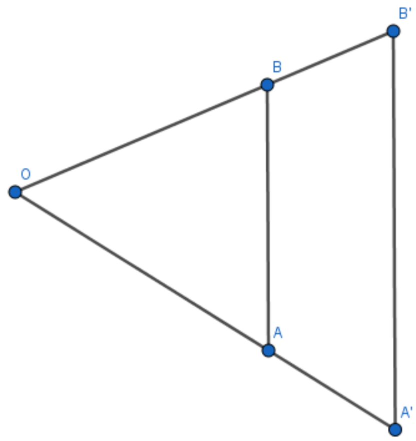


Figura 3

Teorema de Homotecia sobre Cuadriláteros

La homotecia de centro llamado O y de razón llamada K, se expresa h (o, k) donde envía un punto M del plano sobre el punto M' de modo que:

Los cuadriláteros ABCD y A'B'C'D' son semejantes; entonces A'D' es paralelo con AD, A´B´ es paralelo con AB, B´C´ es paralelo con BC y D´C´ es paralelo con DC implica que: $\frac{A'D'}{AD} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{D'C'}{DC}$ = K (ver figura 4)

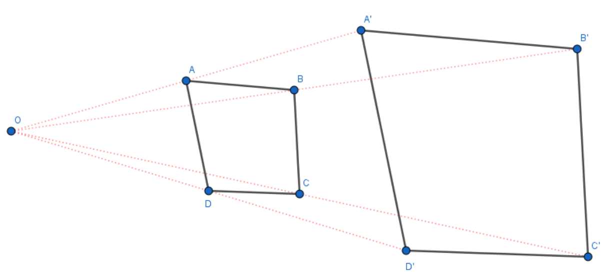


Figura 4

Teorema de Homotecia de una circunferencia

La figura homotética de una circunferencia es otra circunferencia.

Los centros son homotéticos entre sí, y la razón de los radios es la razón de homotecia.

Demostración:

Sea una circunferencia m. hallamos A’ punto perteneciente a la circunferencia m homotético de A, con centro O y razón K. Entonces:

$\frac{OA'}{OA}$ = K

Para este proyecto de título se considerarán los teoremas de homotecia mencionados anteriormente por Guerrero (2015), debido a que la secuencia de enseñanza que se presentará en el quinto capítulo se basará en figuras planas como rectángulos, cuadrados, trapecios, segmentos, triángulos y círculos.

Capítulo III

Marco de Referencia

En esta investigación se utilizará como Marco de Referencia la teoría de situaciones didácticas de Brousseau. Debido, a que Barrantes (2002) citado por Vargas y Gamboa (2013) menciona que la enseñanza de la geometría se concentra, actualmente, en la memorización de conceptos y su aplicación. Por otro lado, la resolución de problemas se ha considerado como una herramienta importante en el crecimiento de la matemática, Halmos (1980) sugirió que resolver problemas es el corazón de las matemáticas.

A continuación, se presentará el enfoque a utilizar para esta investigación, la teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau descrito por Chevallard, Y.; Bosch, M.; Gascón, J. Horsori. (2000), identificando en qué consiste dicha teoría y sus fases.

Las situaciones didácticas en matemáticas, son cuando un individuo tiene la intención de enseñar algo (por lo general un docente) a otro individuo (por lo general un estudiante), un contenido matemático explícito y debe darse en un medio específico. Es importante que la situación didáctica sea planificada y no develada, se puede mencionar que esta situación tiene los siguientes aspectos:

Contrato Didáctico: Es lo que espera el alumno del profesor y viceversa (las expectativas o reglas del juego que tiene la situación didáctica). Es el medio que tiene el profesor para poner la situación en marcha, interesándole el contenido matemático que entrará en juego. Lo que importa aquí es el proceso que se llevará a cabo por ambas partes para la enseñanza aprendizaje del contenido en cuestión.

Situación Problema: Puede plantearse de dos maneras:

a) De control: Donde se solicita al estudiante la aplicación del propio saber. Esta situación es para asegurarse de que el alumno haya adquirido el contenido esperado, esto se puede saber aplicando alguna evaluación sumativa.

b) De aprendizaje: se debe plantear un problema al estudiante y este debe manejar alguna estrategia para resolverlo por medio de conocimientos previos. Es importante que el problema elegido tenga varias estrategias de resolución y que la estrategia inicial (tomada por el estudiante) no se base en el contenido que el docente quiere enseñar.

Variable Didáctica: Es un momento de la situación que puede ser cambiada por el docente, y que afecta las estrategias de resolución que tiene el estudiante durante la situación didáctica. Las variables que modifica el docente son para que el estudiante busque otras estrategias de resolución y que llegue al saber matemático deseado.

. Situación A didáctica: La situación a didáctica es la parte de la situación didáctica donde no se enseña el contenido matemático explícitamente al estudiante (en el enunciado del problema no aparece explícita la intención del profesor). Debe aparecer en la interacción del estudiante con el medio (no didáctico), de manera que sus decisiones se guíen por la lógica de la situación y no por la lectura de las intenciones del profesor. El estudiante puede cambiar sus decisiones tomando en cuenta la retroacción que le proporciona el medio, y debe realizar un cambio de estrategias para llegar al saber matemático, debido que la estrategia optima es dicho conocimiento que esta por construir.

. Fases de una situación didáctica. El desarrollo de una actividad siguiendo este modelo de situaciones didácticas, comienza desde una acción sin interlocutor. Además tiene que cumplir otra serie de requisitos de partida que pongan en marcha el proceso, para lograr que el estudiante pueda o construya aprendizajes de calidad. Las etapas de una situación en marcha están dadas por:

. Situación de Acción.

La enseñanza de las matemáticas debe permitir al estudiante hacerse cargo de un problema, emitir hipótesis, elaborar procedimientos, ponerlos en práctica, y según los efectos producidos adaptarlos, rechazarlos o hacerlos evolucionar, automatizar los conocimientos más solicitados y ejercer un control sobre los resultados obtenidos de la experimentación y descubrimiento. Dicho de otra forma las características de la situación acción son:

_ El estudiante actúa sobre el medio, formula, prevé, y explica la situación propuesta.

_ Organiza las estrategias con el propósito de construir una representación de la situación que le sirva de modelo y le permita tomar decisiones.

_ Las retroacciones proporcionadas por el medio, funcionan sancionando las acciones del estudiante dentro de la resolución del problema.

_ Movilización y creación de modelos implícitos de resultado.

. Situación de Formulación.

El medio de aprendizaje comprende un sistema de receptor y emisor, con el cual el estudiante va intercambiar una serie de mensajes. Esta será la base de comunicación e interacción entre estudiantes y docente. El alumno formula enunciados y proposiciones, construye lenguaje, modelos, conceptos y los pone en marcha y comparte con sus compañeros.

Las condiciones necesarias son:

_ El estudiante intercambia información con uno o varios compañeros.

_ La conversación puede conllevar similitudes o contradicciones.

_ Las emisiones y recepciones de la comunicación pueden llevarse a través de acciones o por medio del lenguaje cotidiano. El fracaso de un mensaje obliga a su revisión.

_ Se crea un modelo explícito que pueda ser formulado por medio de signos, reglas conocidas o nuevas.

. Situación de Validación.

El medio de aprendizaje debe servir como comprobación de la valides en las respuestas de los estudiantes en el problema. Para aquello el estudiante debe poder validar la situación, es decir, la propia situación debe informar al estudiante sobre si lo ha hecho bien o no, sin pedir ayuda al profesor.

Las condiciones requeridas son:

_ El estudiante debe hacer declaraciones las cuales se someterán a juicio de su interlocutor.

_ El interlocutor debe rechazar o pedir justificación en caso de que esta sea falsa, probando sus afirmaciones.

_ La discusión no debe desligarse de la situación, para evitar que el discurso se aleje de la lógica y la eficacia de las pruebas.

. Situación de Institucionalización.

Tras las anteriores situaciones existe el momento de reconocer lo aprendido. El profesor debe poner el punto de claridad a la intención didáctica de la actividad. Las condiciones requeridas son:

_ Las respuestas encontradas por los estudiantes deben ser transformadas por el docente para que los conocimientos sean convertidos en saber.

_ El profesor tiene la responsabilidad de cambiar el estatus del conocimiento construido por los estudiantes, mediante la puesta en común.

_ Pasar de un saber personal a un saber institucional, que los estudiantes puedan considerarlo verdadero y utilizable.

Se utilizará la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, con la intencionalidad de que los estudiantes logren la habilidad de argumentación y comunicación en el contenido de Homotecia. Debido a que como se mencionó en la problemática, los estudiantes están acostumbrados a memorizar algoritmos y no a comprender conceptos matemáticos, como sucede con el contenido en cuestión, y en consecuencia los alumnos no logran desarrollar habilidades de nivel superior como la de argumentación y comunicación. Por medio de la interacción producida por las situaciones intencionadas del docente, los alumnos deben ser capaces de refutar las propiedades del objeto matemático en estudio y posteriormente ser transformadas en saber erudito.

Capítulo IV

Metodología

Para la realización de la propuesta de enseñanza y aprendizaje de la Homotecia, se utilizarán como teorías elementos de la ingeniería didáctica y el Estudio de Clases donde las aplicaciones serán de tipo cualitativo.

4.1. Elementos de la Ingeniería Didáctica

Debido a la didáctica de la matemática francesa, a principios de los años ochenta surgió la Ingeniería Didáctica, ella apoya como metodología a la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997) y a la Transposición Didáctica (Chevallard, 1992). Artigue (1995) menciona que:

> Como metodología de investigación, la ingeniería didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. De lo anterior se diferencian por lo general dos niveles: el de micro-ingeniería y el de macro-ingeniería, dependiendo de la importancia de la realización didáctica involucrada en la investigación.

Esta propuesta estará enfocada en micro-ingeniería, debido a que De Faria (2006) dice que las investigaciones en este nivel están enfocadas en un determinado contenido, siendo estas locales y toman en cuenta principalmente la complejidad de los fenómenos en aula.

A continuación se presenta una descripción de las fases descritas por De Faria (2006):

<u>Fase 1. Análisis preliminar</u>

Según Artigue (1995) la fase de concepción se basa no sólo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares. Para la realización de los análisis, se distinguen tres dimensiones:

- Dimensión epistemológica: asociada a las características del saber puesto en funcionamiento, es decir, análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.

- Dimensión cognitiva: asociada a las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza, es decir, análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.

- Dimensión didáctica: asociada a las características del funcionamiento del sistema re-enseñanza, es decir, análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.

Fase 2. Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas

El objetivo del análisis a priori es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis.

Fase 3. Experimentación

Esa etapa se inicia cuando el profesor se pone en contacto con sus estudiantes, los que son objeto de investigación. En ella se expone de manera explícita a los estudiantes que participarán de la experimentación, estableciendo un contrato didáctico y la aplicación de los instrumentos de investigación. En esta fase se debe registrar las observaciones realizadas durante la experimentación.

Fase 4. Análisis a posteriori y evaluación

Esta fase se basa en conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, tales como observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, producciones de los estudiantes en clase, entre otras.

Como se mencionó al inicio de este capítulo, en este trabajo se hará uso de elementos de la ingeniería didáctica como el análisis A priori y el A posteriori, específicamente en cada secuencia de enseñanza aprendizaje que se presentará en el capítulo siguiente. En el capítulo cinco se podrá observar el análisis a priori de cada actividad realizada, para poder ver y analizar las posibles estrategias que los estudiantes de primero medio A podrían utilizar, los posibles errores y dificultades, contenidos adquiridos necesarios, entre otros.

4.2. Estudio de Clases

El Estudio de Clases comenzó a fines del siglo XIX con visitas a las aulas y su objetivo fue promover el estudio de la clase en su conjunto (Isoda, Arcavi y Mena, 2007). Desde una perspectiva teórica es entendida como una investigación sobre la práctica docente y desde una perspectiva práctica es una forma para mejorar la enseñanza. Según Isoda y Olfos (2009) es una actividad que favorece el mejoramiento de las capacidades para enseñar de los profesores participantes; además de impactar positivamente en los aprendizajes de los alumnos, en la profesionalización docente y en la calidad de la enseñanza y del currículo en la localidad en que se realiza.

Isoda y Olfos (2009) mencionan que el Estudio de Clases es un proceso cíclico centrado en la reflexión y la acción, en el que se distinguen las siguientes fases:

Fase 1. Identificación de problema

Consiste en la definición del problema a tratar.

Fase 2. Planificación de la clase

Consiste en la planificación en detalle de la clase que se implementará.

Fase 3. Implementación

Uno de los profesores del grupo realiza la clase, mientras que los otros integrantes son observadores deben tomar registros basándose en el plan de clases.

Fase 4. Evaluación de la clase y satisfacción con los resultados

En esta fase se reflexiona entre lo propuesto en el plan de clases y lo que verdaderamente sucede en el aula. Esta retroalimentación nos permitirá realizar un afinamiento del plan de clases, es decir, una mejora para volver a implementarlo de ser necesario.

Al finalizar las actividades se realizarán un Estudio de Clases, es decir, dada la problemática se planificará en conjunto una clase basada en resolución de problemas referente al contenido Homotecia. Luego, ésta se implementará por uno de los profesores, mientras que el otro será un observador y filmará la clase para posteriormente, presentarla a un grupo de profesores con el propósito de recibir retroalimentación y mejorar las prácticas docentes de este proyecto. Y en cuanto a las producciones de los alumnos, éstas se analizarán cualitativamente, ya que para este estudio es más importante el proceso que realizaron los alumnos que los resultados obtenidos.

CAPÍTULO V

Secuencia de Enseñanza Aprendizaje

5.1. Descripción de la secuencia enseñanza aprendizaje

La secuencia de enseñanza y aprendizaje fue diseñada para tres sesiones de clases. En la primera sesión se tiene por objetivo la comprensión del concepto de Homotecia Directa y las condiciones que deben cumplir dos o más polígonos para que sean homotéticos, en la segunda sesión se debe desarrollar una guía de ejercicios relacionados a homotecia directa dando paso a la tercera sesión, en la que los estudiantes deben resolver un problema para comprender el concepto de Homotecia inversa y desarrollar una guía de ejercicios donde deben aplicar lo aprendido y construir figuras homotéticas donde la razón puede ser cualquier número real. Tanto la primera y tercera sesión están basadas en la resolución de problemas, pero en la primera se implementará el Estudio de Clases basado en resolución de problemas como menciona Isoda (2009).

En la sesión 1, los alumnos por medio de conocimientos previos deberán identificar figuras semejantes o bien el teorema de tales para resolver un problema, con el propósito de que los estudiantes logren establecer las condiciones que deben cumplir dos figuras para que sean homotéticas, además se pretende que los alumnos desarrollen la habilidad de comunicar y argumentar.

En la sesión 2, se debe desarrollar una guía donde en primera instancia se pide a los estudiantes encontrar el centro de homotecia de dos figuras homotéticas y encontrar la razón de homotecia. En la segunda parte se pide encontrar figuras que sean homotéticas, con el fin de que los estudiantes verifiquen no solo figuras semejantes sino también el paralelismo que existe entre los lados correspondientes de los polígonos. En la tercera parte se pide construir figuras homotéticas directas dadas las razones de homotecia con una razón $K>0$.

En la sesión 3, por medio de conocimientos previos los estudiantes deberán resolver un problema con el propósito de reconocer figuras semejantes (homotéticas), con la condición de que estas estarán en sentido opuesto al centro de homotecia, el fin es que los alumnos comprendan el concepto de homotecia inversa en base a sus propias experiencias en aula. Posteriormente, los estudiantes deberán resolver una guía de actividades y ejercicios, en la primera parte de la guía los alumnos tendrán que encontrar el centro de homotecia de figuras homotéticas, en la segunda parte deberán calcular la razón de homotecia de figuras homotéticas, en la tercera parte de la guía habrán figuras semejantes y los estudiantes deberán reconocer figuras homotéticas, con el propósito de reconocer el paralelismo de los lados correspondientes de los polígonos dados, para finalizar los estudiantes tendrán que construir figuras homotéticas dada la figura original y los valores de la razón K (los valores serán números reales), con el propósito de unificar el concepto de homotecia directa e inversa.

Esta secuencia de enseñanza-aprendizaje está basada en el desarrollo de habilidades como formular, construir y argumentar según Brousseau (1997), ya que de esta manera los alumnos se enfrentarán a situaciones problemas según Polya (1980) donde estarán obligados a desarrollar teorías que puedan intercambiar con el resto de los compañeros en aula. Tanto en la primera y tercera sesión los estudiantes se enfrentaran a situaciones problemas para poder establecer aprendizajes.

La propuesta de enseñanza fue diseñada en base a la unidad 2 de Geometría propuesta en el programa de estudio de segundo medio (2011), indicando que para comenzar la unidad los estudiantes como conocimientos previos requieren del aprendizaje de ángulos en polígonos, razones y proporciones.

El objetivo general de la propuesta es comprender el concepto de homotecia. Desglosándose en cada sesión como:

1. Reconocer figuras homotéticas con una razón $K>0$.
2. Resolver una guía de ejercicios y actividades relativos a la aplicación del concepto homotecia directa.
3. Reconocer figuras homotéticas con una razón $K<0$ y posteriormente, desarrollar una guía de ejercicios y actividades de aplicación y construcción de homotecia inversa, con el fin de ver a la homotecia con una razón K perteneciente a los números reales.

5.2. Guías de trabajo

Este proyecto consta de tres sesiones, la primera sesión dura 45 minutos, mientras que la segunda y tercera cada una es de 90 minutos aproximadamente, tanto en la segunda y tercera sesión se entregará una guía con actividades (estas guías se encuentran en el anexo de este proyecto), la primera y tercera sesión se basan en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1997).

El esquema que se presenta a continuación, da a conocer la organización de las sesiones y sus respectivas actividades.

Sesión	Contrato didáctico	**Fase 1 Acción**	**Fase 2 Formulación**	**Fase 4 Validación**	**Fase 5 Institucionalización**
1 45min.	Presentación del problema	Lectura del problema y asimilaci	Debate, formulación.	Validación de las respuestas al problema.	Institucionalización del contenido.

		ón			
2 90min.	Presentación de la guía de ejercicios y actividades.	Lectura de la guía.	Resolución de la guía.	Se resuelven dudas.	El estudiante responde la guía en la pizarra.
3 45min.	Se presenta el problema.	Lectura del problema	Debate y formulación.	Validación de las respuestas al problema.	Institucionalización del contenido.
45min.	Se entrega guía de ejercicios y actividades	Lectura de la guía.	Resolución de la guía.	Se resuelven dudas.	El estudiante responde la guía en la pizarra.

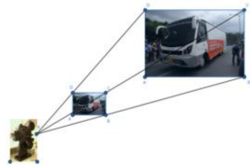
5.3. Planes de Clases

A continuación se presentan los planes de clase de cada una de las tres sesiones.

Plan de Clases (Sesión 1)

Curso :	Primero medio A	Sesión:	1
Unidad:	Geometría		
Contenido:	Homotecia		
Meta de Aprendizaje:	AE_09: Demostrar teoremas relativos a la homotecia de figuras planas.		

Momentos	Fases de Teoría de Situaciones didácticas	Actividad de Aprendizaje	Intervención Docente	Recursos	Tiempo
Inicio: se entrega la actividad en hoja y se dan las instrucciones a los estudiantes.	Contrato didáctico.		El docente hace una introducción de las partes de la clase (inicio, desarrollo y cierre), y resuelve dudas referentes al inicio de clases.	Hoja de actividad.	5 min.
Desarrollo: se realizará una actividad donde los	Fase de Acción: El estudiante debe leer el problema para asimilarlo . Fase de	En un cine se proyecta la imagen de una película, sabiendo que la imagen proyectada es de forma	El docente presenta el problema para que los estudiantes lo lean y	Hoja, lápiz y goma	30 minutos como

estudiantes deberán resolver un problema, mediante la teoría se situaciones didácticas de Brousseau.	<u>Formulación:</u> El estudiante después de leer el problema intenta responder las preguntas del problema mediante argumentacion producto de algún conocimiento previo. <u>Fase de Validacion</u>: El estudiante después de argumentar por medio de sus propios conocimientos y estrategias de resolución, el profesor debe considerar la información correcta que el alumno entregará para validar al	rectangular.  Si la pantalla tiene una altura y ancho cincuenta y setenta veces mayor respectivamente que la imagen pequeña, entonces: ¿Qué razón hay desde el foco del proyector a la imagen pequeña y qué razón hay desde el mismo foco a la pantalla del cine? Sabiendo lo anterior, ¿se podrá determinar las distancias de dichos segmentos?	posteriorment e lo resuelvan en parejas (el alumno puede compartir ideas solo con el compañero de puesto), además el estudiante debe describir las estrategias que utilizará para resolver el problema. Al finalizar la actividad el docente pedirá a los grupos (parejas) que terminaron que muestren sus estrategias en la pizarra al resto del		má xi mo .

	estudiante, en caso contrario el profesor debe guiar al estudiante para que pueda tomar un camino correcto.		curso. El profesor hará las siguientes preguntas para que los estudiantes debatan: ¿Por qué hicieron tal estrategia? ¿Por qué las figuras son semejantes? ¿Cuáles son los lados correspondientes de las figuras? ¿Qué características tienen los lados correspondientes? ¿Qué podemos concluir respecto a la razón del ancho de la pantalla del		

			cine y de la razón de la longitud del segmento $\overline{A'O}$? ¿Qué podemos concluir de la razón del ancho de la imagen pequeña y de la razón de la longitud del segmento $\overline{OA}$? Para finalizar: Si consideramos que tanto la pantalla del cine y la imagen pequeña son de forma rectangular, ¿Qué tienen en común dichas figuras? Además, si		

			tanto la pantalla del cine y la imagen pequeña son semejantes ¿geométricamente en qué posición están dichas figuras?		
Cierre	Fase de institucionalización: Después de que el estudiante logra resolver el problema el profesor transforma ese saber en un saber establecido.	Se institucionaliza el concepto matemático homotecia: Es una transformación geométrica la cual dilata o contrae una figura plana determinada en otra figura semejante, esto es producto de un factor llamado “K” y un centro llamado “O”. La figura semejante se llama figura homotética,	El docente enseña en la pizarra el concepto de homotecia directa utilizando el proyector.	Pizarra, proyector, plumón y borrador.	15 minutos.

		además si el factor K>1 entonces las figuras homotéticas serán más amplias a la figura original, si el factor K=1 la figura homotética resultante es congruente a la figura inicial, si el factor 0<K<1 la figura homotética será más pequeña que la original y si el factor K=0 entonces la figura homotética será congruente al centro de homotecia. Posteriormente, el docente realiza un par de ejemplos de homotecia directa en la pizarra, para que el estudiante pueda guiarse al desarrollar la guía de la clase siguiente.			

Plan de Clases (Sesión 2)

Curso	Primero medio A	Sesión	2
Unidad	Geometría		
Contenido	Homotecia		
Meta de Aprendizaje	Resolver ejercicios y construcción de figuras homotéticas donde la razón K>0.		

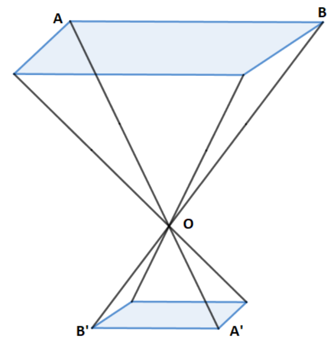
Momentos	Actividad de Aprendizaje	Intervención Docente	Recursos	Tiempos
Inicio: Se entrega la guía de ejercicios para que los estudiantes la resuelvan.	El estudiante lee la guía para comenzar a trabajar.	El docente entrega las instrucciones sobre la guía de ejercicios, y resuelve dudas sobre los enunciados.	Guía de papel, lápiz, goma, compas y regla.	10 minutos
Desarrollo: Los estudiantes resuelven los ejercicios de la guía de forma individual.	El estudiante trabaja en la guía utilizando sus conocimientos aprendidos en la clase anterior.	El docente se pasea por la sala de clases para verificar si los estudiantes tienen dudas referentes a la guía.	Guía de papel, lápiz, goma, compas, pizarra y plumón.	40 minutos
Cierre:	Los estudiantes	El docente	Pizarra y	25

Se comienza a terminar la guía para debatir con el curso.	salen a la pizarra a hacer ciertos ejercicios de la guía, el resto del curso debate respecto a las respuestas del compañero que salió a la pizarra.	guía a los compañeros al debate para que los estudiantes argumenten respecto al desarrollo de la guía.	plumón.	minutos.

Plan de Clases (Sesión 3)

Curso	Primero Medio A	Sesión	3
Unidad	Geometría		
Contenido	Homotecia		
Meta de Aprendizaje	AE_09: Demostrar teoremas relativos a la homotecia de figuras planas.		

Momentos	Fases de situaciones didácticas	Actividad de Aprendizaje	Intervención Docente	Recursos	Tiempo
Inicio: se comienza a con un problema donde los estudiantes	Fase de Acción: El estudiante debe leer el problema para asimilarlo . Fase de Formulación: El estudiante	La siguiente imagen muestra una mesa de centro para living comedor fabricada de vidrio y bordes de acero.	El docente presenta el problema para que los estudiantes lo lean y posteriormente lo	Hoja de actividad, lápiz y goma.	25 minutos.

deben leerlo y resolverlo en parejas.	después de leer el problema intenta responder las preguntas del problema mediante argumentacion producto de algún conocimiento previo. <u>Fase de Validacion</u>: El estudiante después de argumentar por medio de sus propios conocimientos y estrategias de resolución, el profesor debe considerar la información correcta que el alumno entregará para validar al estudiante, en caso contrario el	 Si el ancho de la cubierta de la mesa (segmento $\overline{AB}$) es el doble que el ancho de la base (segmento $\overline{A'B'}$,) dado lo anterior: ¿Cuál es la razón que existe entre el segmento $\overline{A'O}\ y\ \overline{OA}$ ¿ Posteriormente: Describan sus estrategias atrás de la hoja de actividad.	resuelvan en parejas (el alumno puede compartir ideas solo con el compañero de puesto), además el estudiante debe describir las estrategias que utilizará para resolver el problema. Al finalizar la actividad el docente pedirá a los grupos (parejas) que terminaron que muestren sus estrategias en la pizarra		

	profesor debe guiar al estudiante para que pueda tomar un camino correcto.		al resto del curso. El profesor hará las siguientes preguntas para que los estudiantes debatan: ¿Por qué hicieron tal estrategia? ¿Por qué las figuras son semejantes? ¿Cuáles son los lados correspondientes de las figuras? ¿Qué características tienen los lados correspondientes? ¿Cuál sería el centro de		

			dicha transformación? ¿Qué podemos concluir respecto a la razón del ancho de la mesa y de la longitud del segmento $\overline{AO}$? ¿Qué podemos concluir del ancho de la base de la mesa y de la longitud del segmento $\overline{OA'}$? Para finalizar: Si consideramos tanto la cubierta y la base de la		

			mesa figuras planas de forma rectangulares, y además si la cubierta de la mesa fuese el rectángulo original, ¿Qué tipo de figura sería el rectángulo que representa la base de dicha mesa al ser semejante a la figura original? y ¿Cuál sería el centro de dicha transformación?		
Desarrollo	<u>Fase de institucionalizaci</u>	Se institucionaliza el objeto matemático	El docente explica a los	Pizarra,	20 mi

	ón: Después de que el estudiante logra resolver el problema el profesor transforma ese saber en un saber establecido.	homotecia inversa. Es una transformación geométrica donde hay un centro O y una razón K<0. Las figuras resultantes se llaman homotéticas porque son semejantes y estas están en sentido opuesto a la figura original, el centro de homotecia siempre está entre la figura original y la figura homotética, además la figura homotética sufre una rotación de 180°. Posteriormente, se muestra y desarrolla un ejemplo para que los estudiantes se guíen al trabajar en el cierre de la clase.	estudiantes lo que significa homotecia inversa y para qué sirve, además hace un resumen de los conceptos implicados.	proyector y borrador.	nutos.
Cierre		Los estudiantes deben resolver una guía de ejercicios de homotecia inversa. Posteriormente se realizará una plenaria en relación a la guía para que los	El docente pregunta a ciertos estudiantes las respuestas de los ejercicios de	Guía de ejercicios, lápiz y goma.	45 minutos.

		estudiantes debatan respecto a las posibles respuestas.	la guía.		

5.4. Análisis Apriori de situaciones de aprendizaje

En base a los elementos de la Ingeniería Didáctica, se mostrarán los análisis apriori de cada una de las situaciones de aprendizaje clave.

Sesión 1

Esta sesión se comienza con una actividad Problema, en la cual los estudiantes primero deberán reconocer conocimientos previos para poder resolverla.

<u>Actividad 1</u>

En esta actividad se espera que los estudiantes logren identificar conocimientos previos para poder responder la pregunta, se pretende que los estudiantes descubran los componentes de la homotecia, razón, centro y el paralelismo de las figuras homotéticas.

En un cine se proyecta la imagen de una película, sabiendo que la imagen proyectada es de forma rectangular. (Como se aprecia en la figura 1)

Figura 1

Si la pantalla tiene una altura y ancho cincuenta y setenta veces mayor respectivamente que la imagen pequeña, entonces:

¿Qué razón hay desde el foco del proyector a la imagen pequeña y qué razón hay desde el mismo foco a la pantalla del cine?

Sabiendo lo anterior, ¿se podrá determinar las distancias de dichos segmentos?

<u>Análisis A priori</u>

¿Cuál es la respuesta al problema, desde un punto de vista experto?

Se puede resolver mediante teoremas de semejanza de figuras planas, teorema de semejanza de triángulos, teorema de la proporcionalidad de trazos (teorema de tales). Utilizando semejanza de triángulos se identifican los triángulos OA´B’ y OAB, luego como los segmentos $\overline{A'B'}\ y\ \overline{AB}$ son paralelos, entonces los ángulos correspondientes entre dichos segmentos paralelos son de igual medida, esto es, los ángulos en A’ y en A y los ángulos en B’ y en B respectivamente, además en O es ángulo en comun, entonces se cumple el criterio $[A, A]$, luego se comparan lados correspondientes y se aplica regla de tres, quedando así: $\frac{OA}{OA'} = \frac{X}{70X} \rightarrow$ OA´=70·OA sería la razón del segmento OA’ respecto al segmento OA, ahora bien, si queremos saber la razón que hay desde el mismo foco pero hasta la imagen pequeña sería $\frac{OA}{OA'} = \frac{X}{70X} \rightarrow$ OA=$\frac{OA'}{70}$. Si quisiéramos resolver el problema utilizando la razón que hay de los segmentos $\overline{OC'}\ y\ \overline{OC}$, se podría hacer utilizando la razón de la altura de la pantalla y la razón de la altura de la imagen pequeña haciendo el mismo procedimiento anterior.

Para determinar la distancia que hay del foco a la pantalla del cine y del mismo foco a la imagen pequeña, solamente se podría si los segmentos OA y OA' o bien, $\overline{OC'}\ y\ \overline{OC}$ tuviesen medidas.

¿Cuáles son los conocimientos adquiridos que necesita el estudiante para resolver el problema?

En esta actividad el estudiante sabrá semejanza de figuras planas, criterios de semejanza de triángulos y teorema general y particular de Thales.

¿Cuáles son los conocimientos matemáticos en juego de la situación?

Homotecia directa, imagen homotética, razón de homotecia, centro de homotecia y proporcionalidad de trazos.

¿Cuáles son las posibles estrategias que el estudiante podría realizar? (el docente se pone en el lugar del alumno)

El estudiante se podría situar desde el teorema de Tales y aplicar regla de tres, o verificar que ambas imágenes tanto de la pantalla como de la foto son paralelas entonces hay ángulos correspondientes, utilizando figuras semejantes podrían comparar lados correspondientes para aplicar regla de tres.

¿Cuáles son las posibles dificultades que podrían tener los estudiantes para abordar la situación?

No lograr conectar los conocimientos previos con la situación problema, debido a que la situación está en tercera dimensión y los conocimientos adquiridos fueron enseñados en segunda dimensión (tanto teorema de tales como semejanza de figuras planas).

Otra dificultad es que no se observan números que representen medidas en el problema, solo hay comparación de distancias entre la foto y la pantalla, esto hará que algunos estudiantes se frustren debido a que están acostumbrados a solo calcular distancias y no a comprender conceptos.

No agregar vértices a la pantalla ni a la imagen pequeña y no considerar el centro “o”, para comenzar a trabajar.

¿Cuáles son los posibles errores que podría realizar el estudiante al resolver la situación?

Inventar números para tener medidas para calcular, ya que el problema dice que la pantalla es 50 veces más alta y 70 veces más ancha que la de la imagen pequeña (la comparación de medidas puede generar un conflicto).

Confundir los lados correspondientes de los “triángulos” que se visualizan (en caso de utilizar figuras semejantes o teorema de tales) y errar al aplicar regla de tres.

Actividad 2

En esta actividad los estudiantes deberán reconocer el centro y la razón de homotecia directa para poder resolver ejercicios y construir figuras homotéticas.

Análisis A priori

¿Cuál es la respuesta al problema, desde un punto de vista experto?

Se puede resolver mediante teorema de Homotecia Directa, esto es:

La figura homotética de un segmento AB es otro segmento A'B' tal que: $\frac{A'B'}{AB}$ = k y además: A'B' es paralelo con AB, si la recta AB no pasa por el centro O.

Demostración: En el caso de la homotecia Directa.

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA´}{OA} = |K|$

La homotecia de centro llamado O y de razón llamada K, se expresa h (o, k) donde envía un punto M del plano sobre el punto M' de modo que:

Los triángulos OBA y OB'A' son semejantes; entonces A´B´ es paralelo AB implica que: $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{B´C´}{BC}$ = k

¿Cuáles son los conocimientos adquiridos que necesita el estudiante para resolver el problema?

En esta actividad el estudiante sabrá semejanza de figuras planas, criterios de semejanza de triángulos, teorema general y particular de tales, además teorema de homotecia directa.

¿Cuáles son los conocimientos matemáticos en juego de la situación?

Homotecia directa, imagen homotética, razón de homotecia, centro de homotecia y proporcionalidad de trazos.

¿Cuáles son las posibles estrategias que el estudiante podría realizar? (el docente se pone en el lugar del alumno)

El estudiante se podría situar desde el teorema de Tales y aplicar regla de tres, o verificar que ambas imágenes tanto de la pantalla como de la foto son paralelas entonces hay ángulos correspondientes, utilizando figuras semejantes podrían comparar lados correspondientes para aplicar regla de tres.

¿Cuáles son las posibles dificultades que podrían tener los estudiantes para abordar la situación?

No lograr conectar el conocimiento recién adquirido con los ejercicios de la guía, no reconocer el paralelismo de las figuras homotéticas y por ende no encontrar el centro de homotecia, al ver el estudiante solo medidas de segmentos en ciertos ejercicios de figuras homotéticas, no le es posible calcular la razón de homotecia.

¿Cuáles son los posibles errores que podría realizar el estudiante al resolver la situación?

Trazar líneas para encontrar el centro de homotecia entre dos figuras semejantes sin considerar el paralelismo de los lados correspondientes, calcular mal la razón de homotecia debido a que no compara lados correspondientes, construir mal figuras homotéticas al no considerar el paralelismo entre ellas, confundir la figura original con la homotética.

<u>Actividad 3</u>

En esta actividad se espera que los estudiantes logren identificar conocimientos previos para poder responder la pregunta, con el propósito de que estos que condiciones deben cumplir dos figuras semejantes para que sean homotéticas, estableciendo el centro de homotecia y la razón de homotecia inversa.

La siguiente imagen muestra una mesa de centro para living comedor fabricada de vidrio y bordes de acero.

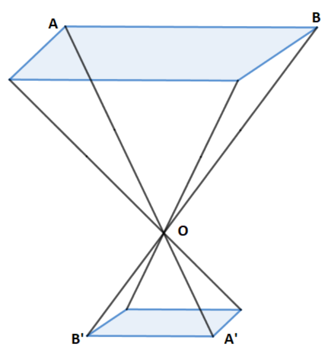


Figura 2

Si el ancho de la cubierta de la mesa (segmento $\overline{AB}$) es el doble que el ancho de la base (segmento $\overline{A'B'}$,) dado lo anterior:

¿Cuál es la razón que existe entre el segmento $\overline{A'O}\ y\ \overline{OA}$ ¿

Análisis A priori

¿Cuál es la respuesta al problema desde un punto de vista experto?

Una manera de resolver el problema es mediante teorema de semejanza de triángulos, esto es, primero identificamos los triángulos ABO Y A'B'O, sabemos que por criterio $[\![A, A]\!]$ dichos triángulos son semejantes, debido a que los segmentos $\overline{AB}\, y\, \overline{A'B'}$ son paralelos y generan ángulos alternos e internos de igualmedida, entonces comparando lados correspondientes de los triángulos nos queda, $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'O}}{\overline{OB}}$ o bien $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'O}}{\overline{OA}}$, por lo cual al sustituir los datos de la actividad nos queda, $\frac{\overline{2x}}{\bar{x}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{OA'}} \Rightarrow \overline{OA'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA}$, luego la razón que hay del segmento $\overline{OA'}$ es $\frac{1}{2}$ en comparación a $\overline{OA}$ y si comparamos al revés, esto es, de $\overline{OA}\, a\, \overline{OA'}$ entonces la razón seria 2 ósea el doble.

¿Cuáles son los conocimientos adquiridos que necesita el estudiante para resolver el problema?

En este caso el estudiante sabrá semejanza de figuras planas (criterios de semejanza de triángulos) y teorema general y particular de tales.

¿Cuáles son los conocimientos matemáticos en juego en la situación?

Centro de homotecia, Homotecia inversa, razón de homotecia y proporcionalidad de trazos.

¿Cuáles son las posibles estrategias que el estudiante podría realizar? (el docente se pone en el lugar del alumno)

El estudiante se podría situar desde el teorema de Tales y aplicar regla de tres, o verificar que ambas imágenes tanto de la pantalla como de la foto son paralelas entonces hay ángulos correspondientes, utilizando figuras semejantes podrían comparar lados correspondientes para aplicar regla de tres.

¿Cuáles son las posibles dificultades que podrían tener los estudiantes para abordar la situación?

No lograr conectar los conocimientos previos con la situación problema, debido a que la situación está en tercera dimensión y los conocimientos adquiridos fueron enseñados en segunda dimensión (tanto teorema de tales como semejanza de figuras planas).

Otra dificultad es que no se observan números que representen medidas en el problema, solo hay comparación de distancias entre el triángulo ABC y el triángulo A'B'C', esto hará que algunos estudiantes se frustren debido a que están acostumbrados a solo calcular distancias y no a comprender conceptos.

¿Cuáles son los posibles errores que podría realizar el estudiante al resolver la situación?

Inventar números para calcular distancias, ya que el problema dice que $\overline{AC}$ es el doble que $\overline{A'C'}$ (la razón de distancias puede generar un conflicto) debido a que los estudiantes están acostumbrados a calcular números.

Confundir los lados correspondientes de los "triángulos" que se visualizan (en caso de utilizar figuras semejantes o teorema de tales) y errar al aplicar regla de tres.

Capítulo VI

Estudio de Clases

6.1. Descripción de Estudio de Clase

Es elemental mencionar que se escogió la primera sesión para implementar el Estudio de Clases, ya que en ella podremos evidenciar de partida como los estudiantes comunican y argumentan propiedades de la homotecia, como figuras homotéticas, centro de homotecia y razón de homotecia, contando con la semejanza de figuras planas, y teorema de Thales como conocimientos previos. Además de ser necesario reestructurar inmediatamente la clase del docente en post del objetivo de clase.

El objetivo de dicha clase es aplicar los criterios de semejanza de triángulos o teorema de Thales en la resolución de problemas, comunicando y argumentando el procedimiento que va utilizando el estudiante con el propósito de responder la pregunta de la situación problema.

En el problema se espera que los estudiantes sean capaces de identificar y justificar las figuras semejantes que aparecen de manera implícita o el teorema de Thales, recurriendo al paralelismo que hay entre el rectángulo pequeño y el proyectado, posteriormente deben encontrar el factor K que hay desde el vértice O a uno de los vértices de la figura proyectada (rectángulo grande) y desde el mismo centro a uno de los vértices de la figura pequeña (rectángulo pequeño), tanto el vértice O y los vértices de la figura pequeña y la proyectada deben ser colineales, entonces los estudiantes deben responder que las razones que hay de los anchos o alturas de las figuras rectangulares imagen y pantalla se conservan para los segmentos $\overline{OA}\ y\ \overline{OA'}$ respectivamente.

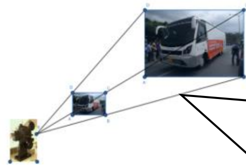
6.2. Diseño de la clase

6.2.1 Plan de Clase

A continuación se presenta el plan de clase, el cual será analizado mediante el Estudio de Clases.

Curso :	Primero Medio A	Sesión:	1
Unidad:	Geometría		
Contenido:	Homotecia		
Meta de Aprendizaje:	AE_09: Demostrar teoremas relativos a la homotecia de figuras planas.		

Momentos	Fases de Teoría de Situaciones didácticas	Actividad de Aprendizaje	Intervención Docente	Recursos	Tiempo
Inicio: se entrega la actividad en hoja y se dan las instrucciones a los estudiantes.	Contrato didáctico.		El docente hace una introducción de las partes de la clase (inicio, desarrollo y cierre), y resuelve dudas referentes al inicio de clases.	Hoja de actividad.	5 min.
Desarrollo:	<u>Fase de Acción</u>:	En un cine se	El docente	Hoja,	30

se realizará una actividad donde los estudiantes deberán resolver un problema, mediante la teoría se situaciones didácticas de Brousseau.	El estudiante debe leer el problema para asimilarlo . Fase de Formulación: El estudiante después de leer el problema intenta responder las preguntas del problema mediante argumentacion producto de algún conocimiento previo. Fase de Validacion: El estudiante después de argumentar por medio de sus propios conocimientos y estrategias de resolución, el profesor debe considerar la	proyecta la imagen de una película, sabiendo que la imagen proyectada es de forma rectangular.  La pantalla que es la imagen más amplia se representa por el rectángulo, la imagen pequeña también está representada por un rectángulo. Si la imagen más amplia tiene una altura 50 veces mayor que la altura de la imagen pequeña y además tiene un ancho 70 veces mayor que el ancho de la imagen menos amplia.	presenta el problema para que los estudiantes lo lean y posteriormente lo resuelvan en parejas (el ... com... ideas con ... compañero de puesto), además el estudiante debe describir las estrategias que utilizará para resolver el problema. Al finalizar la actividad el docente pedirá a los grupos (parejas) que terminaron	lápiz y goma	mi nut os co mo má

Problema

¿Qué posibles dificultades se pueden presentar?

_No lograr visualizar conocimientos previos, debido que la situación está contextualizada en tercera dimensión.

_El hecho de que hay razones y no distancias, puede causar conflicto.

¿Cuáles son los posibles errores?

_Inventar números para calcular distancias.

_Confundir los lados correspondientes de los “triángulos” que se visualizan (en caso de utilizar figuras semejantes o teorema de tales) y errar al aplicar regla de tres.

	información correcta que el alumno entregará para validar al estudiante, en caso contrario el profesor debe guiar al estudiante para que pueda tomar un camino correcto.	entonces: ¿Qué distancia hay desde el foco del proyector a la imagen pequeña y qué distancia hay desde el mismo foco a la pantalla del cine?	que muestren sus estrategias en la pizarra al resto del curso. El profesor hará las siguientes preguntas para que los estudiantes debatan: ¿Por qué hicieron tal estrategia? ¿Por qué las figuras son semejantes? ¿Cuáles son los lados correspondientes de las figuras? ¿Qué características tienen los lados correspondientes? ¿Qué podemos		

			concluir respecto a la razón del ancho de la pantalla del cine y de la razón de la longitud del segmento $\overline{A'O}$? ¿Qué podemos concluir de la razón del ancho de la imagen pequeña y de la razón de la longitud del segmento $\overline{OA}$? Para finalizar: Si consideramos que tanto la pantalla del cine y la imagen pequeña son de forma rectangular,		

			¿Qué tienen en común dichas figuras? Además, si tanto la pantalla del cine y la imagen pequeña son semejantes ¿geométrica mente en qué posición están dichas figuras?		
Cierre	<u>Fase de institucionalización</u>: Después de que el estudiante logra resolver el problema el profesor transforma ese saber en un saber establecido.	Se institucionaliza el concepto matemático homotecia: Es una transformación geométrica la cual dilata o contrae una figura plana determinada en otra figura semejante, esto es producto de un factor llamado "K"	El docente en seña en la pizarra el concepto de homotecia directa utilizando el proyector.	Pizarra, proyector, plumón y borrador.	15 minutos.

		y un centro llamado "O". La figura semejante se llama figura homotética, además si el factor $K>1$ entonces las figuras homotéticas serán más amplias a la figura original, si el factor $K=1$ la figura homotética resultante es congruente a la figura inicial, si el factor $0<K<1$ la figura homotética será más pequeña que la original y si el factor $K=0$ entonces la figura homotética será congruente al centro de homotecia. Posteriormente, el docente realiza un par de ejemplos de homotecia directa en la pizarra, para			

		que el estudiante pueda guiarse al desarrollar la guía de la clase siguiente.			

6.2.2. Reflexiones

Dado que el Estudio de Clases es un proceso cíclico centrado en la reflexión y acción, estando en la fase de preparación de la clase, es que se presentó el problema a un grupo de pares, con el propósito de mejorar y modificar aspectos no evidenciados. Entonces, cuando se comenzó a elaborar la clase basada en resolución de problemas se pensó en un problema el cual abordará la totalidad de la primera sesión, dicho problema estaba enunciado y contextualizado.

En primera instancia, el enunciado del problema no permitía una comprensión adecuada para el lector, debido a que éste estaba mal redactado, igualmente de no comprenderse de manera satisfactoria la pregunta, por lo que se sugiere modificar la redacción del enunciado y de la pregunta.

Tomando las consideraciones antes mencionadas, se decidió reestructurar la actividad de la siguiente manera:

1) Se reestructuró la redacción del enunciado de la situación problema, debido a que generaba confusiones para el lector.
2) Se mejoró la redacción de la pregunta del problema para evitar inconvenientes con el propósito de ésta.

6.2.3. Conclusión

El compartir el primer diseño de la actividad con los demás pares y profesora a cargo del curso, permitió comprender dificultades desde la redacción del problema en general, pudiendo observar esta dificultad y mejorar la propuesta antes de su implementación.

Otro aspecto que ayudó en la elaboración del plan de clases fue el análisis a-priori de la actividad, el cual permitió comprender las posibles dificultades y errores que presentarían los estudiantes al trabajar en el problema, lo que fue muy provechoso desde un aspecto pedagógico, contribuyendo en la elección de la próxima gestión de clase. También desde un aspecto didáctico permitió evidenciar las posibles preguntas que harían los alumnos y por consecuencia preparar posibles respuestas para no entregar el resultado (efecto topaze) sino una ayuda a repensar y elaborar nuevas estrategias, para así lograr el aprendizaje esperado. Para finalizar, desde una perspectiva matemática se pudo comprender las dificultades que surgirían en la representación del problema contextualizado (tercera dimensión), al tipo de conceptos y lenguaje matemático en el que los estudiantes estarían trabajando, comprendiendo la situación es que se orientarán o entregarán ciertas guías a los estudiantes.

6.3. Experimentación de la clase

La clase basada en resolución de problemas con la aplicación de conocimientos previos (figuras semejantes y teorema de Thales) fue aplicada en un primero medio, en el que asistieron 35 estudiantes. En primera instancia se entrega una breve introducción, en la que se indica que deben trabajar en parejas un tiempo máximo de 30 minutos, con el fin de que compartan estrategias o razonamientos durante su trabajo. Mientras se recorría el aula, se observó que muchos tenían dudas respecto a cómo resolver el problema, pasado unos 20 minutos hubo una pareja la cual pudo resolver la actividad mediante el uso de triángulos semejantes.

Luego, el profesor pregunta si es que pueden reconocer triángulos semejantes a los estudiantes que no podían responder la actividad, esto fue una pequeña guía cuyo propósito fue para que los alumnos reconocieran algún conocimiento previo para poder trabajar. La pareja que pudo resolver el problema presentó su estrategia en el mismo puesto de trabajo, ellos utilizaron semejanza de triángulos usando el criterio $[\![A, A]\!]$ (reconocieron ángulos correspondientes de igual medida por el paralelismo de los rectángulos del problema) posteriormente compararon lados homólogos de los triángulos semejantes y aplicaron regla de tres. Pasado ya 30 minutos el docente anuncia que pronto se avanzará a la siguiente etapa que es la institucionalización del concepto en estudio.

Luego, el docente presenta el mismo problema en la pizarra y muestra una forma de resolución la cual fue utilizada por la pareja de estudiantes que terminó la actividad, para así poder institucionalizar el concepto en cuestión.

6.4. **Reflexión y discusión de la clase**

Dada la clase basada en resolución de problemas se grabó, se proyecta a nuestros pares junto con el plan de clases impreso, con el propósito de contrastar lo que se menciona en el plan de clases y lo que realmente ocurrió en el aula, ya que Isoda y Olfos (2009) mencionan que el propósito de esta sesión de revisión es explorar las maneras de mejorar la clase analizando cualquier disparidad entre los objetivos planteados y las interacciones que se dieron en el aula para su logro.

Es por ello que luego de ver y analizar la clase grabada, comenzó la discusión mencionando aspectos relevantes para la mejora tanto del plan de clases como de las interacciones del profesor en el aula, las cuales se detallarán más adelante.

6.4.1. Descripción del escenario

El equipo de discusión lo constituyeron 9 profesores en práctica y la profesora guía a cargo del curso, en una sala de la universidad Alberto Hurtado la cual contaba con proyector de video y sistema de sonido para observar dicha clase.

6.4.2. Focos relevantes de la discusión

Es importante recalcar que no se consideró dentro del plan de clases los siguientes comentarios obtenidos por los demás profesores en el Estudio de Clases:

- Al momento de pedir a los estudiantes que formarán grupos y realizarán estrategias, no considerar exponer sus estrategias en la pizarra.
- No pedir a las parejas que salieran a exponer en la pizarra sus estrategias, independiente si estuviesen buenas o malas sus producciones.
- El problema debió ser leído por los propios estudiantes y solo resolver dudas.
- Si bien se consideró dar espacio para la comunicación y argumentación, se debe fomentar aún más, proponiendo que planteen de mejor manera cómo realizaron sus estrategias.
- No considerar que las justificaciones de los estudiantes fueran las adecuadas y que se debiera aclarar el error en el momento.

- No se pensó que en el caso de no tener solución a uno de los problemas, se podría dar sugerencias para que los estudiantes logren resolverlo.
- Podría escogerse directamente a alguien con alguna estrategia interesante, en vez de hacerlo voluntariamente.
- Reformular la instrucción principal para que sea explícito que las estudiantes pueden complementar y/o completar las estrategias.

Dentro de la discusión cabe resaltar que los docentes comentaron aspectos positivos de la clase, siendo los siguientes:

- Se observa que los estudiantes trabajan durante el desarrollo de la actividad.
- Las instrucciones fueron explícitas, siendo captadas por los estudiantes.
- El profesor se pasea constantemente por la sala, puesto por puesto, verificando el trabajo de los alumnos. (aunque en el video solo se muestra que el profesor trabaja con un solo grupo)
- Se evidencia un clima ameno y de respecto entre estudiantes y con el profesor.
- Queda claro que hay un inicio, desarrollo y cierre de la clase.

6.4.3. Reflexiones del profesor en práctica

Durante la implementación de la clase se habían considerado ciertas dificultades que podían surgir en los estudiantes al momento de afrontar el problema, una de ellas era que al no poder encontrar una estrategia se rindieran inmediatamente sin querer trabajar, pero si bien algunos alumnos al verse enfrentados a la dificultad del problema deciden pedir ayuda al profesor, diciendo *¿cómo se hace?* o *ayúdeme no entiendo, está muy difícil, etc*. En esta situación fue un poco compleja, ya que se debían dar sugerencias sin entregar la manera de resolver el problema.

En el desarrollo de la actividad en la validación de conocimientos se debió pedir a los estudiantes que salieran en su mayoría a la pizarra a exponer sus estrategias, con el propósito de forjar diálogo entre estudiantes (independiente, que el diálogo solo se generó entre parejas), ya que es de suma importancia desarrollar la habilidad de comunicar y argumentar pues es el propósito de este estudio. En este aspecto se considera que se debe contemplar tiempo en la exposición y discusión de las estrategias.

En el cierre de la actividad para institucionalizar el concepto de homotecia, el docente toma como ejemplo la estrategia de una de las dos parejas que resolvieron la actividad, y no se considera como error el hecho de que dicha estrategia se hizo con medidas inventadas para representar la razón existente entre la pantalla del cine y la imagen pequeña, ante esto se debió reconocer el buen trabajo por los estudiantes, sin embargo también se debió hacerse énfasis de que aquella situación era una razón del tipo algebraico, debido a que no habían números que representaran distancias entre el ancho de la pantalla del cine y el ancho de la imagen pequeña, debido a que es posible haber generado algún obstáculo cognitivo según Chevallard (1998) en los estudiantes al dar como correcto lo antes mencionado.

6.4.4. Conclusión

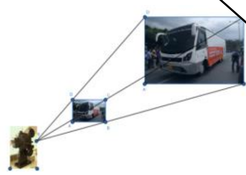
El compartir la clase grabada con los profesores en práctica y la profesora guía permitió rescatar opiniones (positivas) que sirvieron para complementar tanto las reflexiones del diseño de la clase como las interacciones realizadas por el docente. Además, el recibir críticas constructivas en un ambiente profesional permitió ampliar las perspectivas de la gestión docente, llegando a concluir que el principal problema de la clase fue la gestión de esta misma, por lo que se propone rediseñar el plan de clases y mantener las actividades.

6.5. Plan de Clases Rediseñado

Tomando en consideración las discusiones y reflexiones de la clase se propone modificar el plan de clases, con el fin de mejorar la futura gestión de la clase, manteniendo las actividades y situaciones de aprendizaje. Dicha modificación se presenta a continuación:

Curso :	Primero medio A	Sesión:	1
Unidad:	Geometría		
Contenido:	Homotecia		
Meta de Aprendizaje:	AE_09: Demostrar teoremas relativos a la homotecia de figuras planas.		

Momentos	Fases de Teoría de Situaciones didácticas	Actividad de Aprendizaje	Intervención Docente	Recursos	Tiempo
Inicio: se entrega la actividad en hoja y se dan las instrucciones a los estudiantes.	Contrato didáctico.		El docente hace una introducción de las partes de la clase (inicio, desarrollo y cierre), y resuelve dudas referentes al inicio de clases.	Hoja de actividad.	5 min.

Desarrollo: se realizará una actividad donde los estudiantes deberán resolver un problema, mediante la teoría se situaciones didácticas de Brousseau.	<u>Fase de Acción</u>: El estudiante debe leer el problema para asimilarlo . <u>Fase de Formulación:</u> El estudiante después de leer el problema intenta responder las preguntas del problema mediante argumentacion producto de algún conocimiento previo. <u>Fase de Validacion</u>: El estudiante después de argumentar por medio de sus propios conocimientos y estrategias de resolución, el profesor debe	En un cine se proyecta la imagen de una película, sabiendo que la imagen proyectada es de forma rectangular.  Si la pantalla tiene una altura y ancho cincuenta y setenta veces mayor respectivamente que la imagen pequeña, entonces: ¿Qué razón hay desde el foco del proyector a la imagen pequeña y qué razón hay desde el mismo foco a la pantalla del cine? Sabiendo lo anterior, ¿se podrá	El docente presenta el problema para que los estudiantes lo lean y posteriorment lo ... pa... alumn... puede compartir ideas solo con el compañero de puesto), además el estudiante debe describir las estrategias que utilizará para resolver el problema. Al finalizar la actividad el docente pedirá a los grupos (parejas) que	Hoja, lápiz y goma	30 minutos

Problema

¿<u>Qué posibles dificultades se pueden presentar</u>?

_No lograr visualizar conocimientos previos, debido que la situación está contextualizada en tercera dimensión.

_El hecho de que hay razones y no distancias, puede causar conflicto.

¿<u>Cuáles son los posibles errores</u>?

_Inventar números para calcular distancias.

_Confundir los lados correspondientes de los "triángulos" que se visualizan (en caso de utilizar figuras semejantes o teorema de Thales) y errar al aplicar regla de tres.

	considerar la información correcta que el alumno entregará para validar al estudiante, en caso contrario el profesor debe guiar al estudiante para que pueda tomar un camino correcto.	determinar las distancias de dichos segmentos?	terminaron que muestren sus estrategias en la pizarra al resto del curso. El profesor hará las siguientes preguntas para que los estudiantes debatan: ¿Por qué hicieron tal estrategia? ¿Por qué las figuras son semejantes? ¿Cuáles son los lados correspondientes de las figuras? ¿Qué características tienen los lados correspondientes? ¿Qué		

			podemos concluir respecto a la razón del ancho de la pantalla del cine y de la razón de la longitud del segmento $\overline{A'O}$? ¿Qué podemos concluir de la razón del ancho de la imagen pequeña y de la razón de la longitud del segmento $\overline{OA}$? Para finalizar: Si sabemos que tanto la pantalla del cine y la imagen pequeña son paralelas, además ¿qué		

			tienen en común dichas figuras?, luego se define el concepto en conjunto con los estudiantes, unificando los conceptos sabidos por los estudiantes más los encontrados.		
Cierre	Fase de institucionalización: Después de que el estudiante logra resolver el problema el profesor transforma ese saber en un saber establecido.	Se institucionaliza el concepto matemático homotecia: Es una transformación geométrica la cual dilata o contrae una figura plana determinada en otra figura semejante, esto es producto de un factor llamado "K"	El docente en seña en la pizarra el concepto de homotecia directa utilizando el proyector.	Pizarra, proyector, plumón y borrador.	15 minutos.

		y un centro llamado “O”. La figura semejante se llama figura homotética, además si el factor $K>1$ entonces las figuras homotéticas serán más amplias a la figura original, si el factor $K=1$ la figura homotética resultante es congruente a la figura inicial, si el factor $0<K<1$ la figura homotética será más pequeña que la original y si el factor $K=0$ entonces la figura homotética será congruente al centro de homotecia. Posteriormente, el docente realiza un par de ejemplos de homotecia directa en la pizarra, para			

		que el estudiante pueda guiarse al desarrollar la guía de la clase siguiente.			

6.6. Reflexión Final

Este proceso fue de gran experiencia y muy gratificante, en el sentido de que se puso en práctica no solo los conocimientos, sino también las habilidades, prácticas docentes y temas afines relacionados con teorías analizadas en la formación como futuro educador.

Es de suma importancia tener un sustento teórico, es decir, para el desarrollo de este Estudio de Clases se tuvo en cuenta elementos de la Ingeniería Didáctica, esta metodología permitió posicionarse en el rol de alumno para analizar cuáles serían los posibles errores y dificultades que se presentarían en los estudiantes, y en base a ello preparar la clase. Además, no se debe olvidar el Estudio de Clases, el cual permitió realizar un plan de clases y en conjunto con los pares o futuros profesores modificar y/o mejorar dicho plan antes de implementarlo en el aula. Y luego de implementarlo volver a analizar si coincide lo propuesto con lo que realmente sucedió.

Por otra parte, Gracias al Estudio de Clases se pudo evidenciar por medio del resto de los pares y la profesora guía, durante la primera sesión un obstáculo cognitivo según Chevallard (1998), generado por parte del docente a los estudiantes de primero medio. A veces el docente deja como culpable al estudiante diciendo que no quiere aprender o que le cuesta entender, cuando simplemente la responsabilidad es del profesor como ocurrió en dicha sesión. Es importante ser responsable y profesional con la labor docente, debido a que los únicos perjudicados serán siempre los estudiantes.

Además decir que gracias a dicho Estudio de Clases se pudo aconsejar al docente para mejorar en la gestión didáctica de dicha sesión, es decir, moverse más en la sala, comunicarse con mayor fluidez en otros aspectos

Señalar que el Estudio de Clases no solo es provechoso para el docente que realiza la clase, también lo es para el grupo que colabora en este proyecto, ya que todos se centraron en un objetivo específico para mejorar el plan de clases y esta práctica docente, como lo fueron algunas de las modificaciones y/o mejoras presentadas anteriormente del plan de clases; concluyendo que se está en buen camino como futuro profesor de matemática.

Capítulo VII

Análisis de Resultados

A continuación, se presentan los análisis a posteriori de los resultados obtenidos de los estudiantes, y a partir de ello se realizará una confrontación entre los análisis a priori de las situaciones claves presentadas en la secuencia de enseñanza y los análisis a posteriori. El objetivo de este análisis es poder identificar y comparar los desarrollos clasificados como estrategias y los errores de los alumnos en la resolución de las actividades referentes a la sesión 1 y 3, de homotecia directa e inversa.

7.1. Análisis

En el presente análisis se darán a conocer dos categorías consideradas relevantes, las cuales son: tipos de estrategias y tipos de errores. Al igual que en el capítulo de secuencia de enseñanza, éstos se presentarán por sesión, con el propósito de mantener un orden dada la cantidad de análisis.

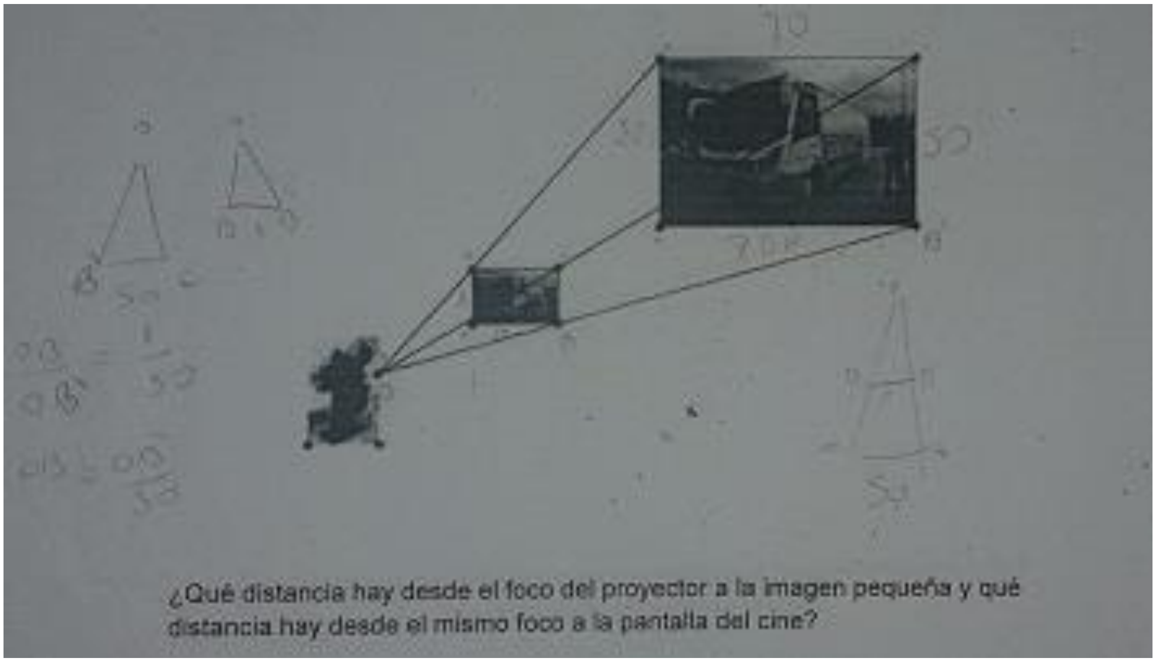
Sesión 1

<u>Problema 1</u>

a) Tipos de estrategias:

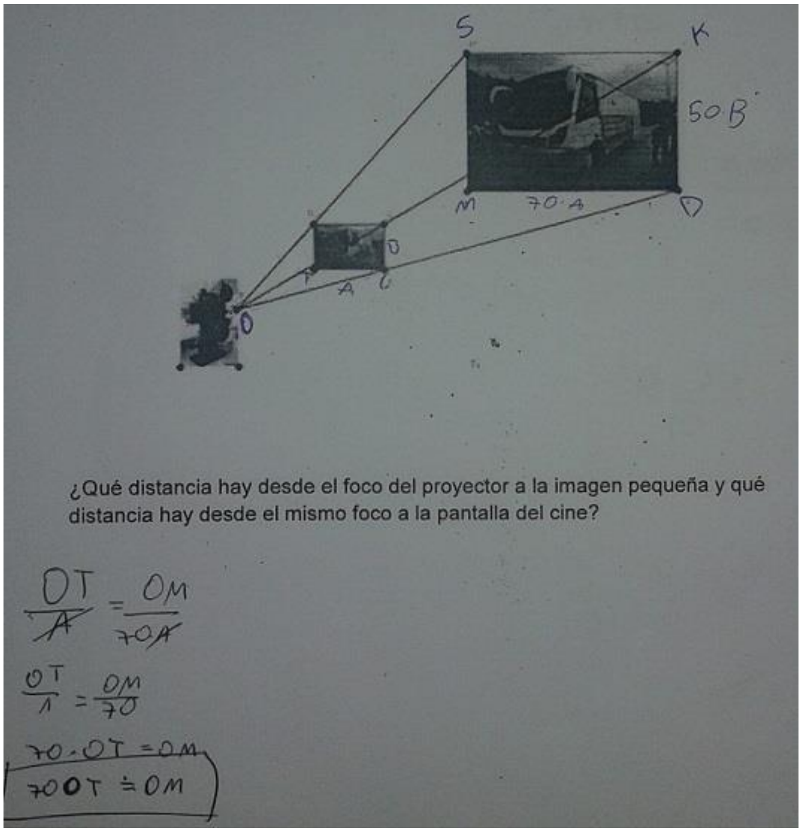
<u>Estrategia 1</u>: Identificar triángulos que son semejantes dado que tienen un ángulo en común en O (foco) y ángulos correspondientes de igual medida en A y A' (en caso de usar estos vértices) respectivamente por el paralelismo

de los rectángulos. En esta estrategia al establecer la semejanza a partir del uso de conocimientos previos.



Esta estrategia fue utilizada por 2 de 35 estudiantes.

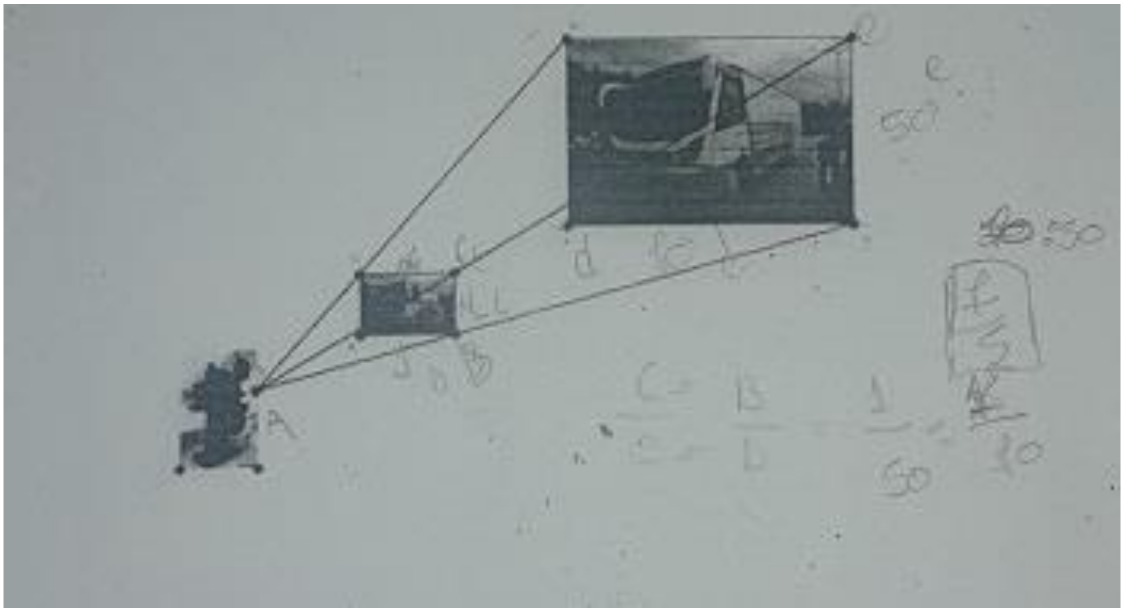
Estrategia 2: Los estudiantes al verificar que los rectángulos eran paralelos utilizaron teorema de Thales (consecuencia del teorema de Thales). En esta estrategia se deja de manifiesto el dominio y la comprensión de dicho teorema por parte de esta pareja de alumnos.



Esta estrategia fue utilizada por 2 de 35 estudiantes.

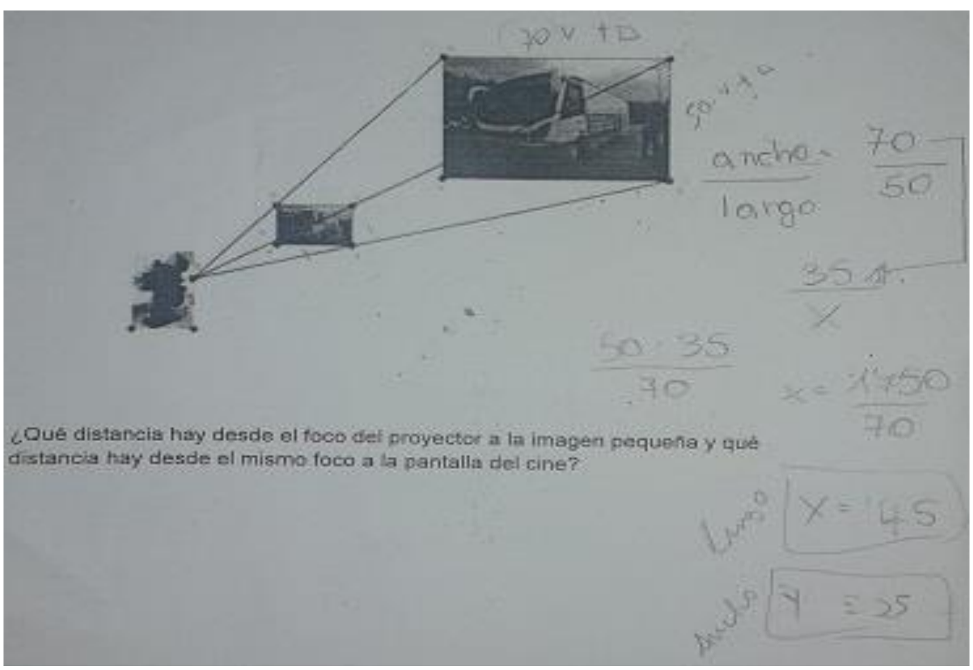
a) Tipos de errores:

<u>Error 1</u>: utilizar la semejanza de figuras planas en los rectángulos comparando lados correspondientes entre dichos rectángulos. La estrategia utilizada por los estudiantes es correcta, el error está en que no responden a la pregunta del problema.



Este error fue utilizado por 6 de 35 estudiantes.

Error 2: Utilizar la semejanza de figuras planas en los rectángulos comparando lados correspondientes entre dichos rectángulos. La estrategia utilizada por los estudiantes es correcta, el error está en que suponen que el rectángulo pequeño mide la mitad que el más grande (inventan medidas).



Este error fue utilizado por 5 de 35 estudiantes.

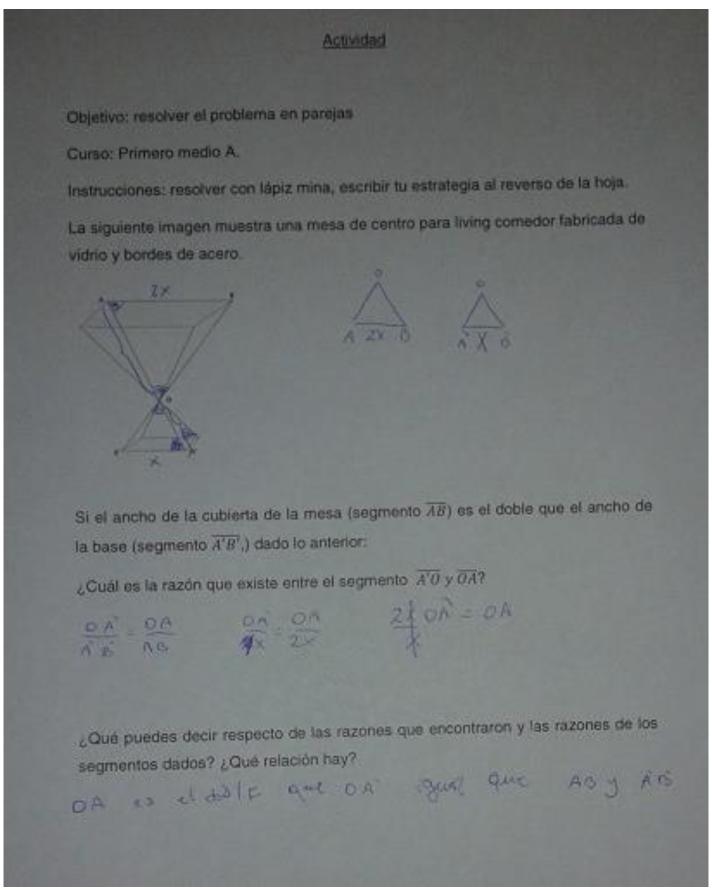
Mencionar que el resto de los estudiantes solo escribieron los datos dados (la razón del ancho y la altura tanto de la pantalla y la figura pequeña) en la hoja de la actividad, es decir, 17 de 35 alumnos no hicieron el más mínimo esfuerzo en trabajar.

Clase 2

Actividad

a) Tipos de estrategias:

<u>Estrategia 1</u>: En esta estrategia los estudiantes utilizaron la semejanza de triángulos, luego compararon lados correspondientes de dichos triángulos y aplicaron regla de tres para poder obtener el resultado.


Actividad

Objetivo: resolver el problema en parejas

Curso: Primero medio A.

Instrucciones: resolver con lápiz mina, escribir tu estrategia al reverso de la hoja.

La siguiente imagen muestra una mesa de centro para living comedor fabricada de vidrio y bordes de acero.

Si el ancho de la cubierta de la mesa (segmento $\overline{AB}$) es el doble que el ancho de la base (segmento $\overline{A'B'}$,) dado lo anterior:

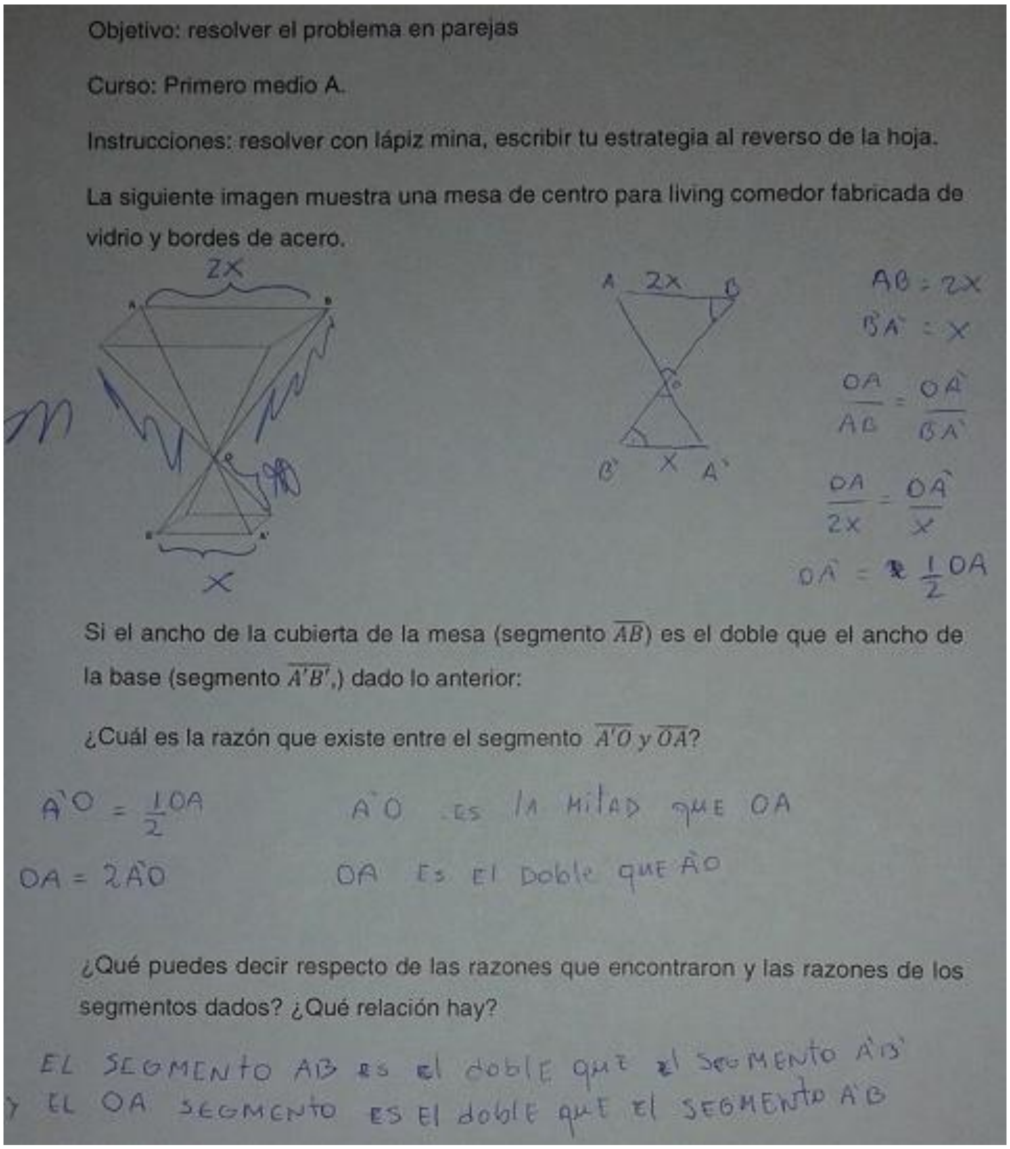
¿Cuál es la razón que existe entre el segmento $\overline{A'O}$ y $\overline{OA}$?

¿Qué puedes decir respecto de las razones que encontraron y las razones de los segmentos dados? ¿Qué relación hay?

OA es el doble que OA' igual que AB y A'B'

Esta estrategia fue utilizada por 12 de 35 estudiantes.

Estrategia 2: En esta estrategia los estudiantes utilizaron el teorema particular de Thales caso 2, posteriormente aplicaron regla de tres para obtener el resultado.



Objetivo: resolver el problema en parejas

Curso: Primero medio A.

Instrucciones: resolver con lápiz mina, escribir tu estrategia al reverso de la hoja.

La siguiente imagen muestra una mesa de centro para living comedor fabricada de vidrio y bordes de acero.

Si el ancho de la cubierta de la mesa (segmento $\overline{AB}$) es el doble que el ancho de la base (segmento $\overline{A'B'}$,) dado lo anterior:

¿Cuál es la razón que existe entre el segmento $\overline{A'O}$ y $\overline{OA}$?

$A'O = \frac{1}{2}OA$ A'O es la mitad que OA

$OA = 2A'O$ OA es el doble que A'O

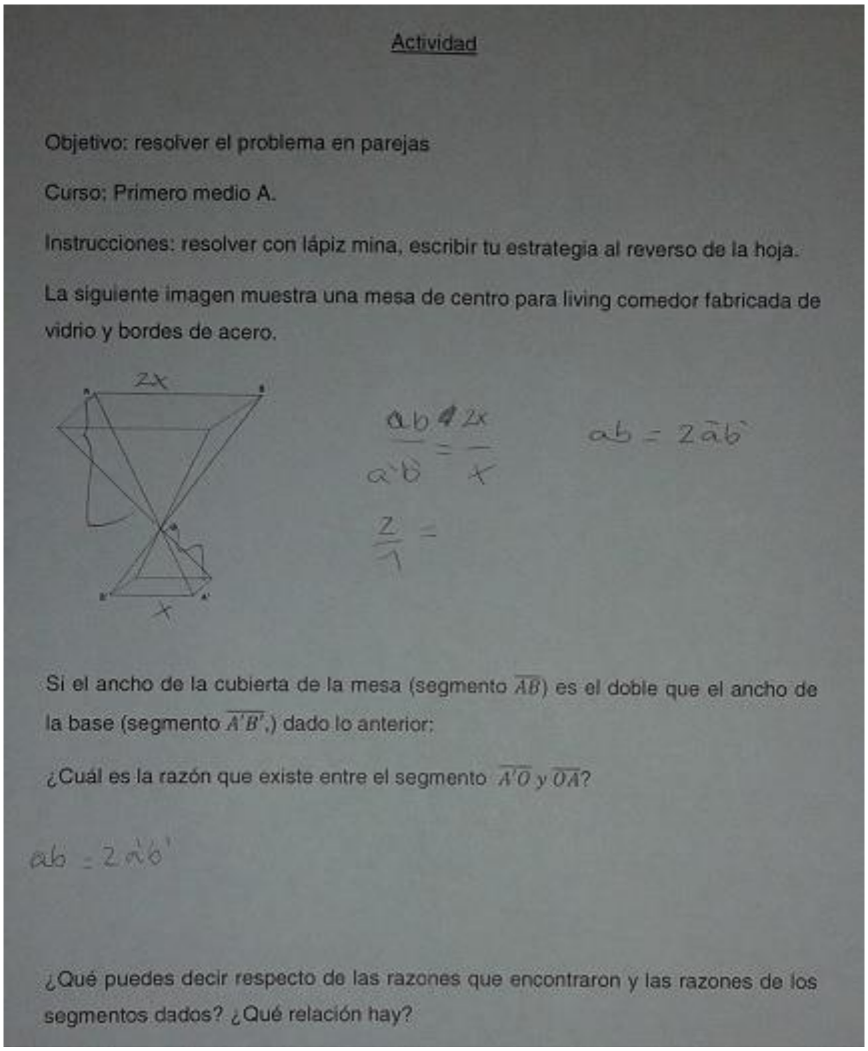
¿Qué puedes decir respecto de las razones que encontraron y las razones de los segmentos dados? ¿Qué relación hay?

EL SEGMENTO AB es el doble que el segmento A'B'
y EL OA SEGMENTO ES El doble que el SEGMENTO A'B

Esta estrategia fue utilizada por 8 de 35 estudiantes.

a) Tipo de errores:

Error 1: Los alumnos intentaron utilizar “teorema de Thales”, sin embargo solo reemplazan las razones de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ respectivamente, y después aplican regla de tres para obtener $\overline{AB}$.


Actividad

Objetivo: resolver el problema en parejas

Curso: Primero medio A.

Instrucciones: resolver con lápiz mina, escribir tu estrategia al reverso de la hoja.

La siguiente imagen muestra una mesa de centro para living comedor fabricada de vidrio y bordes de acero.

Si el ancho de la cubierta de la mesa (segmento $\overline{AB}$) es el doble que el ancho de la base (segmento $\overline{A'B'}$,) dado lo anterior:

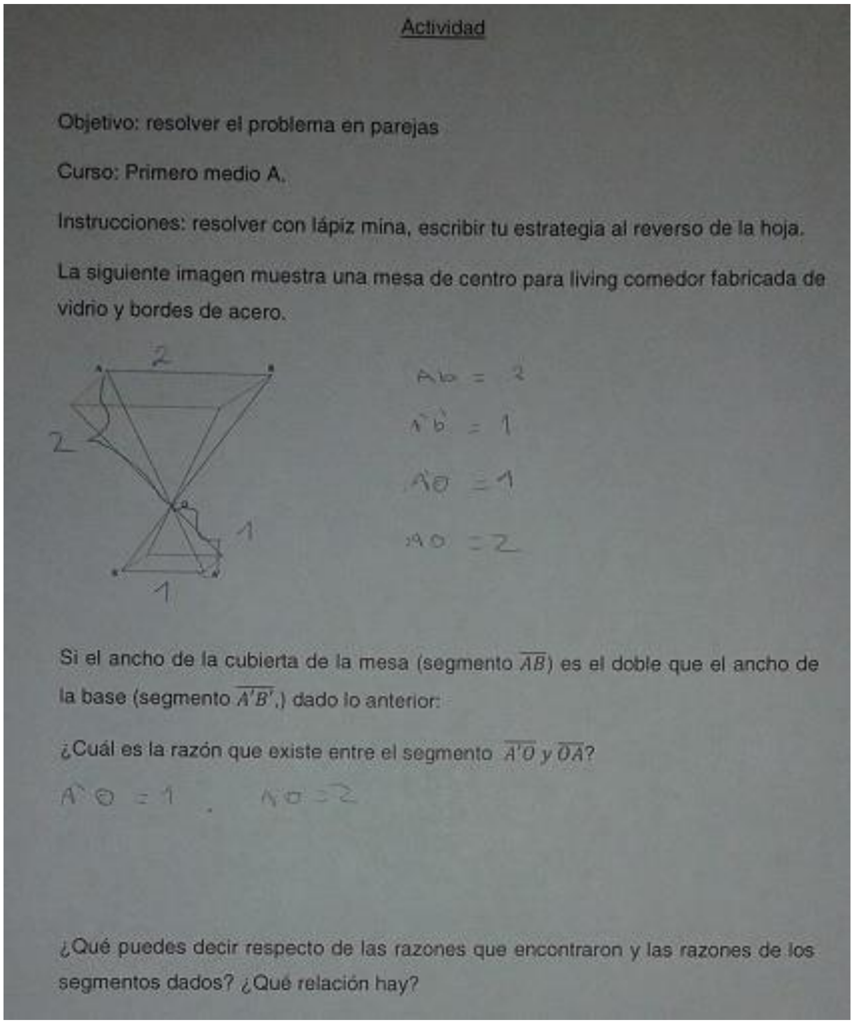
¿Cuál es la razón que existe entre el segmento $\overline{A'O}$ y $\overline{OA}$?

$ab = 2a'b'$

¿Qué puedes decir respecto de las razones que encontraron y las razones de los segmentos dados? ¿Qué relación hay?

Este error fue utilizado por 2 de 35 estudiantes.

Error 2: En este error los estudiantes asumieron que el segmento $\overline{AO}$ y $\overline{A'O}$ median 2 y 1 respectivamente, debido a las razones de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$.



Actividad

Objetivo: resolver el problema en parejas

Curso: Primero medio A.

Instrucciones: resolver con lápiz mina, escribir tu estrategia al reverso de la hoja.

La siguiente imagen muestra una mesa de centro para living comedor fabricada de vidrio y bordes de acero.

Si el ancho de la cubierta de la mesa (segmento $\overline{AB}$) es el doble que el ancho de la base (segmento $\overline{A'B'}$,) dado lo anterior:

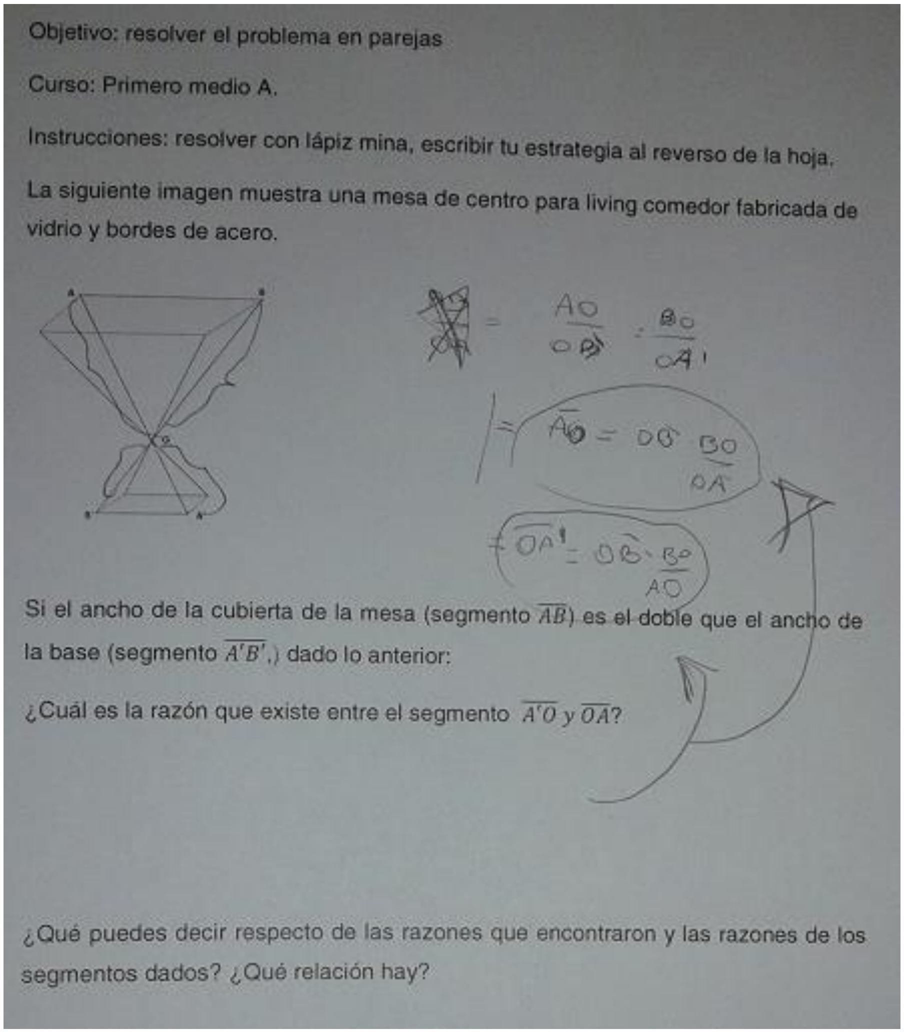
¿Cuál es la razón que existe entre el segmento $\overline{A'O}$ y $\overline{OA}$?

A'O = 1 . AO = 2

¿Qué puedes decir respecto de las razones que encontraron y las razones de los segmentos dados? ¿Qué relación hay?

Este error fue utilizado por 5 de 35 estudiantes.

Error 3: En este error los alumnos aplicaron de forma equivocada el teorema de Thales, posiblemente porque se aprendieron de forma mecánica el teorema de Thales (sin comprenderlo), luego utilizaron regla de tres para obtener el resultado.



Objetivo: resolver el problema en parejas

Curso: Primero medio A.

Instrucciones: resolver con lápiz mina, escribir tu estrategia al reverso de la hoja.

La siguiente imagen muestra una mesa de centro para living comedor fabricada de vidrio y bordes de acero.

$\frac{AO}{OB'} = \frac{BO}{OA'}$

$AO = OB' \cdot \frac{BO}{OA'}$

$OA' = OB' \cdot \frac{BO}{AO}$

Si el ancho de la cubierta de la mesa (segmento $\overline{AB}$) es el doble que el ancho de la base (segmento $\overline{A'B'}$,) dado lo anterior:

¿Cuál es la razón que existe entre el segmento $\overline{A'O}$ y $\overline{OA}$?

¿Qué puedes decir respecto de las razones que encontraron y las razones de los segmentos dados? ¿Qué relación hay?

Este error fue utilizado por 4 de 35 estudiantes.

7.1.1. Resultados evaluación post secuencia de enseñanza aprendizaje

Al terminar la secuencia de enseñanza aprendizaje se aplicó una prueba (adjunta en el anexo). Este test pretende medir los tres aprendizajes esperados trabajados del contenido homotecia.

La prueba fue revisada a una escala del 60%, categorizándose en tres parámetros:

_Insuficiente: aquellos resultados de los estudiantes que están por debajo del 60% del puntaje, es decir, tienen una calificación inferior a 4,0.

_Suficiente: aquellos resultados de los estudiantes que están por sobre el 60%, y bajo el 70%, es decir, tienen una calificación superior a 4,0 e inferior a 5,0.

_Sobresaliente: aquellos resultados de los estudiantes que están por sobre el 70%, es decir, una calificación superior a 5,0.

Categoría	N° de estudiantes	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
Insuficiente	7	20%	20%
Suficiente	18	51%	71%
Sobresaliente	10	29%	100%

Como se puede apreciar en la tabla, aproximadamente un 20%, es decir, 7 de 35 alumnos no lograron obtener un puntaje suficiente, mientras que un 80%, es decir, 28 de 35 estudiantes lograron obtener un puntaje sobre el 60%, ósea suficiente. Para finalizar, se puede apreciar que un 29%, es decir, 28 de 35 estudiantes obtuvieron un puntaje sobresaliente.

7.2. Confrontación de los análisis A priori y A posteriori

En este apartado se mostrará una comparación entre los tipos de estrategias y tipos de errores considerados para cada actividad en el análisis a priori, y las estrategias y errores que ocurrieron en la implementación de las actividades de la secuencia de enseñanza aprendizaje. Debido a la cantidad de actividades se mostraran las confrontaciones por sesión y sus pertinentes actividades.

Sesión 1

Actividad 1

Las estrategias más utilizadas por los estudiantes fueron consideradas en el análisis a priori, donde los alumnos por medio de semejanza de triángulos y el teorema de Thales desarrollaron la actividad, lo interesante de lo recién mencionado fue que los estudiantes bajo estas estrategias utilizaron la argumentación usando lenguaje matemático.

Dentro de los posibles errores se consideró no establecer conocimientos previos, debido a que el problema se representó en un escenario en tercera dimensión y los conocimientos que manejaban los estudiantes fueron vistos en segunda dimensión, por ende uno de los posibles errores era inventar números para poder trabajar el problema, lo cual sucedió en 5 de 35 estudiantes. El otro error que se consideró en el análisis a posteriori fue que los estudiantes establecieran de forma errónea la semejanza de triángulos, ósea no comparar lados correspondientes, esto no ocurrió en la actividad, más bien uno de los errores fue asumir que el rectángulo pequeño midiera la mitad que el rectángulo más grande.

Sesión 2

Actividad 1

De igual manera que en la sesión 1, se consideraron las posibles estrategias de los estudiantes en el análisis a priori en esta actividad, se esperaba que los alumnos por medio del teorema particular de Thales caso 2 o por medio de semejanza de triángulos pudiesen trabajar el problema.

Considerando los posibles errores se estableció en el caso de utilizar triángulos semejantes no hacer la comparación correcta de los lados correspondientes de dicho triángulos, o suponer medidas (inventar valores), 5 de 35 estudiantes inventaron medidas. En el caso de utilizar el teorema de Thales aplicar mal la proporcionalidad de segmentos, lo cual sucedió en 4 de 35 estudiantes.

Capítulo VIII

Conclusiones

Después de implementada y analizada la secuencia de enseñanza aprendizaje sobre la homotecia, haciendo una comparación del análisis a priori de las actividades con lo que sucedió en aula, es que ya se puede hacer referencia a la pregunta de investigación de este proyecto, ¿en qué medida los estudiantes de primero medio pueden comunicar y argumentar las propiedades de la homotecia resolviendo problemas? Considerando lo recién mencionado se establecen las siguientes reflexiones y conclusiones:

En la primera sesión, fueron muy pocos los estudiantes que durante el trabajo en resolución de problemas lograron comunicar y argumentar las componentes de la homotecia, por lo cual no fue tan provechosa la actividad, debido a que faltó generar debate entre los estudiantes y exposición de las estrategias de éstos. Por otra parte, las preguntas que guiaban la primera clase no estaban bien formuladas para el desarrollo del problema, hubo confusión entre los estudiantes respecto a lo que se refería a conceptos de distancia y razón. Gracias al Estudio de Clases se pudo verificar lo recién mencionado para poder sacar mayor provecho a la sesión siguiente, tanto en el ámbito pedagógico, matemático y didáctico. En la tercera sesión fue donde más comunicación hubo de parte de los alumnos, sobre todo en la parte de formulación y la de validación de conocimientos, debido a que fue en esta sesión donde el docente pudo contribuir con mayor énfasis como guía para los alumnos y formular preguntas claves para el desarrollo de la actividad.

Después de la implementación, se pudieron analizar los resultados de los estudiantes, de lo cual se puede concluir que los alumnos lograron comprender el concepto de homotecia y esto fue gracias al desarrollo de habilidades de nivel superior como lo son la argumentación. Sin embargo, solo se trabajó con figuras planas conocidas como segmentos, cuadrados, rectángulos, triángulos y círculos, debido a que son las típicas figuras que se presentan en los textos y planes y programas.

En cuanto a la secuencia, permitió comprender que los estudiantes de primero medio no están acostumbrados a trabajar o investigar de forma independiente, sino que están habituados a que todo esté terminado ya sea contenidos, definiciones, construcciones, etc. Por lo cual muchas veces a los alumnos se les hacía muy complicado justificar o argumentar procedimientos, debido a que están muy acostumbrados a que los contenidos sean entregados de forma terminada, para solo hacer ejercicios y replicar algoritmos que los docentes les enseñan. Lo importante es que a pesar de las complicaciones los estudiantes en su mayoría lograron trabajar por si solos, formular conclusiones y estrategias, por lo cual se puede decir que aunque los chicos estén acostumbrados a estar como entes pasivos recibiendo información según Freire (1996), a éstos si se les proponen actividades problemas pueden cambiar la forma de aprender es cosa de transmitir actitud y motivación.

Para terminar, desde un punto de vista profesional fue realmente enriquecedor poder presentar un diseño de enseñanza aprendizaje y aplicarlo en el colegio San Manuel, debido que esto permitió investigar, crear, analizar, modificar e implementar una transposición didáctica de un tema en específico en el aula. Se pudo compartir y recibir consejos tanto de pares como de profesores los cuales ayudaron para mejorar esta propuesta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chavarría, J. (2006) Teoría de las Situaciones Didácticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática.* Año 1. N°2. Costa Rica.

Battaglino, A. & Figueroa, M. (2013) Homotecia. Contextualización para un aprendizaje significativo, Montevideo, Uruguay.

Ministerio de Educación. (2016) Matemática Texto del estudiante. Editorial SM, Providencia, Santiago de Chile.

Ministerio de Educación. (2009) Matemática Texto para el Estudiante. Editorial Santillana, Providencia, Santiago de Chile.

Freire, P. (1996). *Pedagogía del oprimido*. México: Siglo Veintiuno.

Riveron, O. Martin, J. (2018) Resolución de Problemas: *Una alternativa didáctica en el aprendizaje de las matemáticas.* Chile: Educrea.

Halmos, P. (1980).The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly, volumen 87*, (519-524).

Fripp, A. (2012) Enseñanza de la Geometría en la Escuela Primaria. *Cuadernos de Investigación Educativa*, Vol. 3, N° 18, Montevideo Uruguay.

Artigue, M. D. (1995). Ingeniería Didáctica. *En Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (págs. 33-59). Bogotá: Iberoamericana.

Brousseau, G. and Balacheff, N. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1991*). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber Enseñado*. Argentina: AIQUE.

Gascón, J. (1994). *Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Chamorro, M. (1994). Matemáticas para la cabeza y las manos: *La enseñanza de la Geometría en la educación Primaria*. España: Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la UCM.

Sepúlveda, A. Medina, C. Itzel, D. (2008). *La Resolución de Problemas y el uso de Tareas en la Enseñanza de las Matemáticas*. México: Vol. 21

Nolasco, H. (2013). Capítulo 1. Análisis del discurso matemático escolar. *Análisis histórico epistemológico del concepto de semejanza* (427-435). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

(Clame). Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/4043/1/NolascoAnalisisALME2013.pdf

Guerrero, D. (2015). Capítulo 8: *semejanza y homotecia, V. (II)*, (5-6), Perú: Facultad de Ingeniería, Universidad de Piura.

Vargas, G. y Gamboa, R. (2012). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *UNICIENCIA, 27*, (76-77).

Vargas, G. y. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *UNICIENCIA, 27*, (74-94).

Barrantes, M., Balletbó, I. &Fernández, M. (2014). Enseñar Geometría en Secundaria. *Tecnología, Innovación y Educación,* Artículo 54, Argentina: Congreso Iberoamericano de Ciencias.

Polya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas, México.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática*. Argentina: Universidad Nacional de Córdova, Facultad de Matemática Astronomía y Física.

Brousseau, G. (1999): Théorie des Situations Didactiques, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Lemonides, C. (1991). Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie*. Recherches en Didactique des* 2.3 (11), (295-324).

Isoda, M. y. (2009). Capítulo 2: Descripción y relevancia del Estudio de Clases. *En Un enfoque de resolución de problemas: en la enseñanza de la matemática a partir del Estudio de Clases* pp. (33-46). Valparaíso: Universitarias de Valparaíso.

Isoda, M. A. (2007). Capítulo 2: Una breve historia del Estudio de Clases de Matemáticas en Japón. *En El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas* pp. (33-39). Valparaíso: Universitarias de Valparaíso.

De Faria, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 2*, (1-9).

Chevallard, Y. (1982). Sur l'ingénierie didactique*. Texte préparé pour la DeuxièmeEcoled'Eté de Didactique des Mathématiques*. Orleans, Juillet.

Ministerio de Educación, R. d. (2011). *Matemática Programa de Estudio para Segundo Año Medio.* Santiago.

Anexo

En este apartado se presentarán las guías de trabajo de la secuencia de enseñanza aprendizaje y la evaluación que se aplicó.

Guía 1 (Perteneciente a la sesión 2)

Guía de trabajo

Objetivo: reconocer centro y razón de homotecia directa.

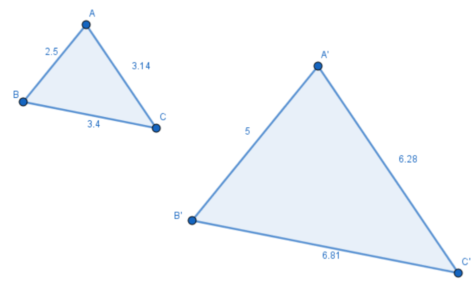
Dibujen en una hoja un rectángulo con las siguientes medidas: tres centímetros de ancho y dos centímetros de alto, luego deben aplicar las siguientes razones cuando K es el doble, el triple, el quíntuple, la mitad, un tercio, cuando es cero y uno, además encontrar el centro de homotecia. (Puedes utilizar regla y compas)

a. Encontrar el centro y la razón de homotecia de las siguientes figuras.

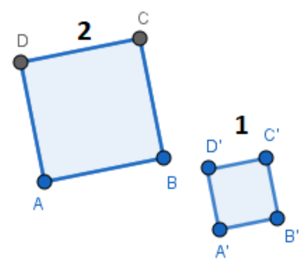
El segmento $\overline{AB}$ es el original.

a.

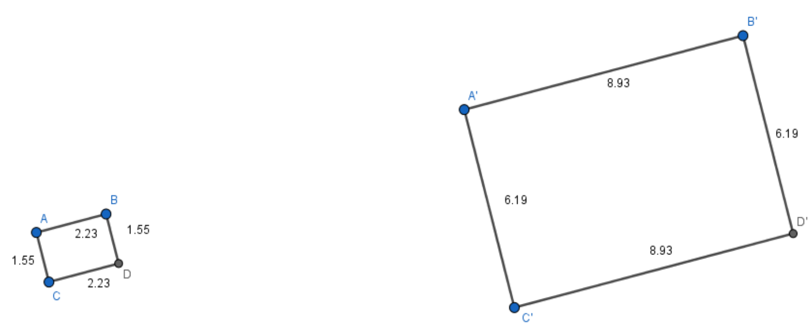
b. El triángulo ABC es la figura original.



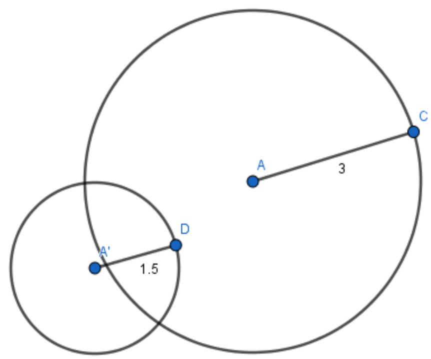
c. El cuadrado ABCD es la figura original.



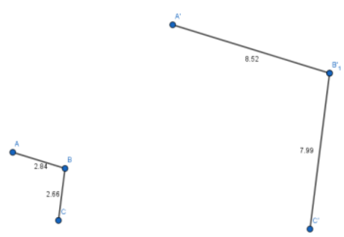
d. El rectángulo A’B’C’D’ es la figura original.



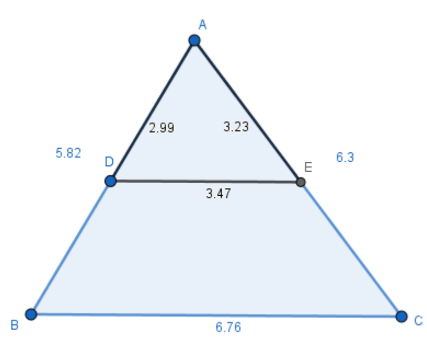
a. La circunferencia de centro A es la figura original.



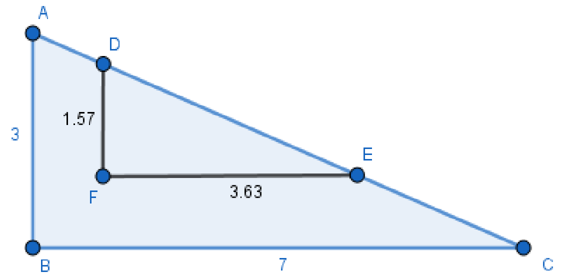
b. Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son los originales.



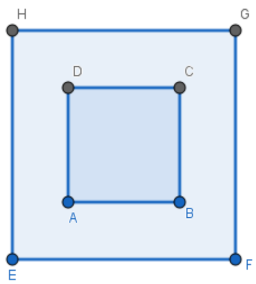
a. El triángulo ABC es la figura original.



b. El triángulo ABC es la figura original.



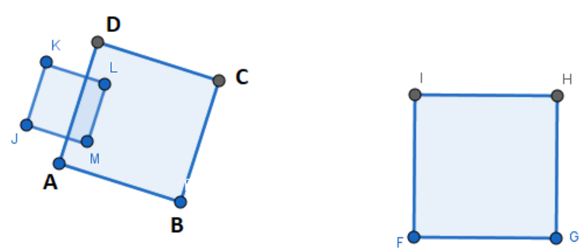
e. El cuadrado ABCD es la figura original.



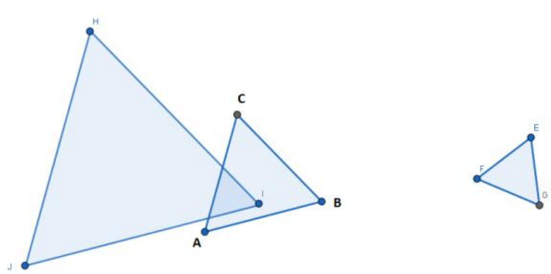
1. Dadas la siguientes figuras semejantes reconocer cuales son homotéticas.
   (Recuerda encontrar el centro de homotecia de dichas figuras)

a.

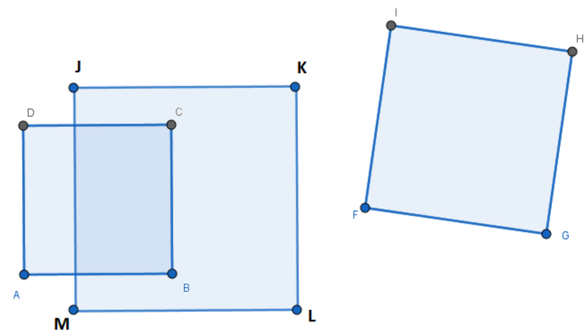
a.



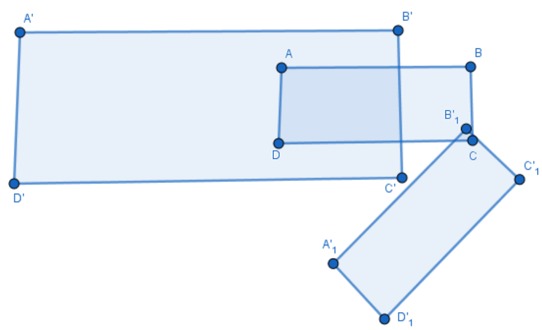
b.



c.



d.



<u>Guía 2</u> (Perteneciente a la sesión 3)

<u>Guía de ejercicios</u>

Objetivo: Reconocer el centro y la razón de homotecia inversa.

Sabiendo que las figuras son homotéticas calcular la razón de homotecia considerar que el triángulo ABC es la figura original.

a.

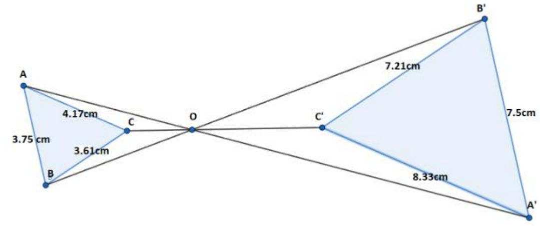


Figura 1

b. El cuadrilátero ABCD es la figura original.

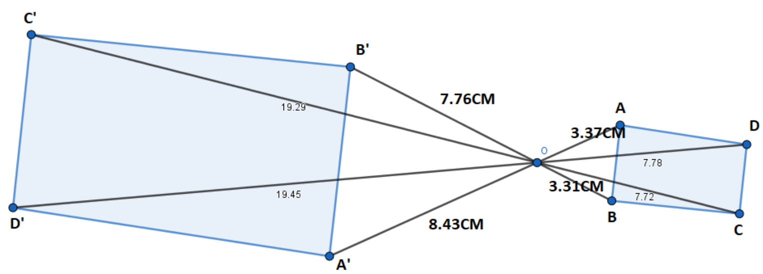


Figura 2

1) Dada las siguientes figuras homotéticas encontrar el centro de homotecia.

a.

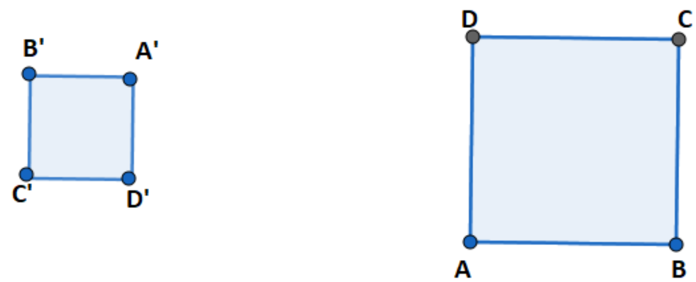


Figura 3

a.

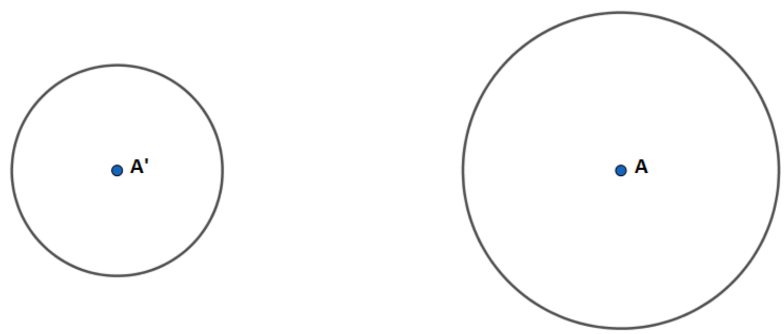


Figura 4

2) ¿Cuáles de las siguientes figuras son homotéticas? Identifícalas y encuentra el centro de homotecia.

a.

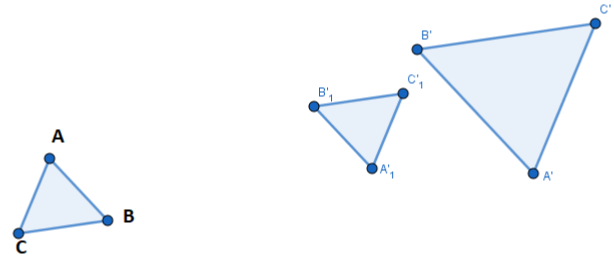


Figura 5

b.

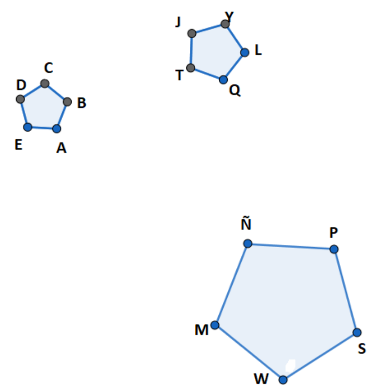


Figura 6

3) Construir en una hoja blanca un triángulo equilátero de vértices ABC y que la medida de sus lados sea igual a 3 centímetros, posteriormente aplica una transformación geométrica donde el valor de la razón “K” sea igual a 4, 2, 5, 1, 0 -1,-2,-3 y -5. (utiliza regla o compas de ser necesario)

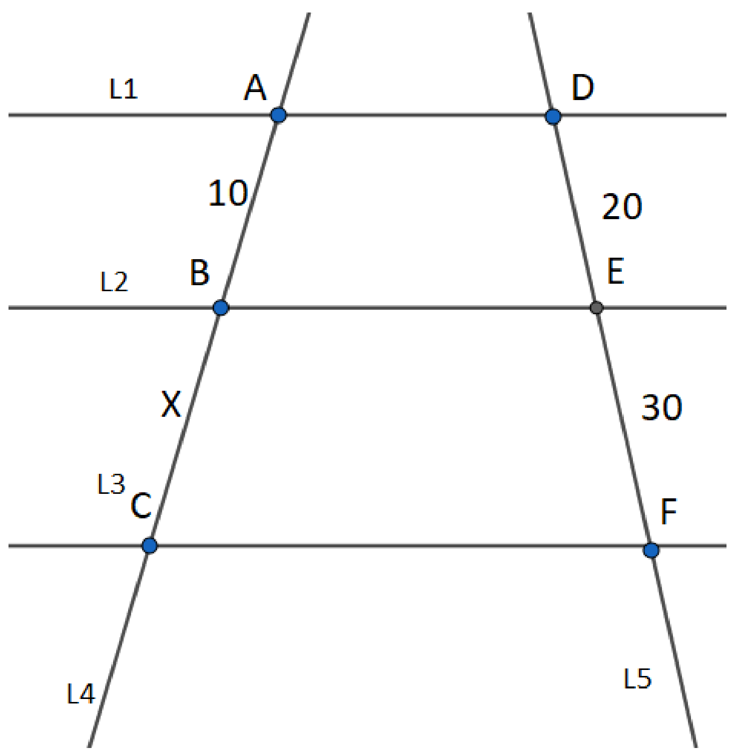
<u>Evaluación</u>

Instrucciones: Responder la evaluación con lápiz pasta.

La evaluación se desarrolla de forma individual.

Objetivo: Medir la comprensión de la Homotecia	La evaluación se medirá al 60%
Curso: Primero Medio A.	Cada respuesta correcta vale 2 puntos
Nombre:	7 puntos es la nota máxima un 7,0. Con 4 puntos es la nota 4,0. La nota mínima es 1,0

1) Dada la siguiente imagen, si las rectas L1//L2//L3 (son paralelas), ¿cuál es la medida de “x”? (2 puntos)



2) Si $\overline{AD}$ // $\overline{BE}$ // $\overline{CF}$ (son paralelos) ¿se puede trazar el centro de homotecia de dichos segmentos? Si es así, traza dicho centro y nómbrelo con la letra O. (2 puntos)

3) Si el segmento $\overline{BE}$ es el segmento original, entonces ¿qué razón tiene el segmento $\overline{CF}$ respecto al original? (2 puntos)

4) Suponiendo que encontró el centro de homotecia de dichos segmentos, si el segmento $\overline{AO}$ mide 8 cm. Entonces ¿Cuál es la razón del segmento $\overline{AD}$? (1 punto)