Universidad Alberto Hurtado
La Universidad Jesuita de Chile
Facultad de Educación
Departamento de Pedagogías Medias y Didácticas Específicas

LAS CONCEPCIONES DE ÁREA DE POLÍGONOS DE ESTUDIANTES EN PRIMER AÑO DE PEDAGOGÍA BÁSICA

Trabajo de graduación para optar al grado de Magister en Didáctica de la Matemática

Por

Paulina González Alvear

Directora de Tesis: Cecilia Rojas Pardo

Profesor Informante: Marcos Barra Becerra

Santiago, Chile

2017

AGRADECIMIENTOS

Con el más profundo respeto y afecto, doy gracias a mis profesores de la Universidad Alberto Hurtado por impulsar el desarrollo de mi formación profesional. Agradezco a la Universidad Autónoma y sus profesores de la Facultad de Educación por haber contribuido para que el proceso de esta investigación se realizara. Agradezco a mis queridos alumnos de la promoción 2016 por haber participado en este proceso. Agradezco a mis amigas Carolina Orellana P. y Norma Serey M. por haberme apoyado en forma incondicional durante la trayectoria de nuestros estudios profesionales. Por último, agradezco a todos mis compañeros del Magister en Didáctica de la Matemática por el apoyo y compañerismo.

DEDICATORIA

Este trabajo de graduación se lo dedico con todo cariño a mis hijas, Victoria y Paulina por apoyarme, creer en mí y contribuir para que este logro se hiciera realidad.

ÍNDICE

RESUMEN

Este trabajo ha indagado sobre las concepciones que tienen los estudiantes, de formación inicial, de pedagogía en educación básica, sobre el concepto de área de polígonos desde la perspectiva de la “La Teoría de los Campos Conceptuales” de Gerard Vergnaud. En el estudio se aplicó una metodología con un enfoque cualitativo exploratorio mediante un estudio de casos. Para la obtención de la información, se diseñó y aplicó un cuestionario que incluyó variadas situaciones donde los estudiantes dieron a conocer sus esquemas relacionados con los invariantes operatorios. Posteriormente, los esquemas presentados, fueron analizados y caracterizados para extraer, de ellos, las conclusiones y proyecciones finales.

INTRODUCCIÓN

La investigación, cuyo enfoque es cualitativo exploratorio, se centró en indagar sobre las concepciones de área de polígonos convexos, regulares e irregulares, y en particular, lo relacionado con el rectángulo, cuadrado, trapecio, pentágono regular y hexágono regular, que están presentes en los estudiantes de primer año, de la carrera de pedagogía en Educación Básica, desde la mirada de la “Teoría de los Campos Conceptuales” de “Gerard Vergnaud”.

La inquietud por indagar sobre “el área de polígonos en el plano” surgió desde la experiencia docente al detectar problemas con la unidad de medida, confusión con el cálculo del área de figuras compuestas, distorsión y olvido de fórmulas, cálculo numérico, visualización, falta de comprensión de los enunciados de un problema dado y desconexión con otras áreas del saber, en alumnos que ingresan a primer año de educación básica. Para efectuar este trabajo se confeccionó un cuestionario que incluyó 9 situaciones donde 13 estudiantes en forma voluntaria, de pedagogía en educación básica, expusieron sus esquemas. Estos esquemas fueron analizados y caracterizados. Al término de esta etapa, de acuerdo a los resultados obtenidos, se procedió a extraer las conclusiones correspondientes y proyecciones futuras.

El trabajo consta de siete capítulos que consisten en lo siguiente:

Capítulo I Antecedentes, delimitación del problema de investigación y objetivos. Se exponen las características que posee la noción de concepción, una síntesis de los programas de estudio relacionados con los ejes de medición y geometría, del MINEDUC, y la problemática con algunas investigaciones que la justifican. Además, se plantean los objetivos de la investigación, tanto el objetivo general como los específicos.

Capítulo II Marco de referencia. Se explica las nociones y definiciones de “La Teoría de los Campos Conceptuales” que están involucradas en la investigación sobre área de polígonos. Se destaca, principalmente el concepto de esquema y los invariantes operatorios,

Capítulo III Objeto matemático. Se da a conocer una breve reseña histórica relacionada con la medida y los polígonos, incorpora nociones importantes relacionadas con área y superficie, agrega las definiciones y clasificaciones de polígono para terminar con los postulados y teoremas correspondientes a área de polígonos.

Capítulo IV Metodología. Se presentan las diferentes etapas de la investigación, desde la construcción del cuestionario, pasando por los diversos análisis y caracterizaciones, hasta la presentación de las evidencias de los estudiantes..

Capítulo V Análisis de resultados. Se transcribieron las respuestas de los estudiantes, se analizaron y caracterizaron, se presentaron algunas evidencias representativas relacionadas con las similitudes y diferencias. Finalmente, se confeccionaron cuadros que incluyen porcentajes que aportaron al análisis y posterior conclusión.

Capítulo VI Conclusiones y proyecciones. De acuerdo a la problemática, al análisis y caracterización de los resultados se procedió a obtener las conclusiones y proyecciones, según la información extraída de los análisis presentados en el capítulo V.

Capítulo VII Referencias bibliográficas. Se registró la bibliografía utilizada en la investigación correspondiente a textos, documentos y publicaciones científicas.

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES ,DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y OBJETIVOS.

1.1 Revisión de antecedentes

Como la investigación se centra en las “concepciones” que los estudiantes de pregrado poseen sobre “área de polígonos”, es necesario dar a conocer las características que este término posee. Para ello se cita a Candia,E (2014) quien recurre a Ruiz (1994), Artigue (1989), El Bouazoui (1988) y Vergnaud (1990) para expresar lo siguiente:

Para caracterizar la idea de concepción se establecen dos dimensiones. Por una parte se diferencian las concepciones subjetivas o cognitivas de las epistemológicas, y por otra las concepciones locales de las globales. Las concepciones subjetivas se refieren al conocimiento y creencias de los sujetos. Las concepciones epistemológicas se refieren a tipologías de conocimiento existente en un cierto período histórico, o circunscrito a los textos o programas de cierto nivel de enseñanza. Las concepciones globales describen holísticamente las concepciones ligadas a un concepto u otro objeto, y las locales tienen en cuenta aspectos parciales de los sistemas anteriores.

Para reafirmar lo anterior y como explicación se recurre a Vergnaud (1996 a,p.117) citado por Moreira (2002), quien nos indica que muchas de nuestras concepciones vienen de las primeras situaciones que fuimos capaces de dominar o de nuestra experiencia al intentar modificarlas .

Las características que posee la noción de “concepción”, señaladas por los investigadores mencionados, permite dar inicio a este estudio al detectar problemas relacionados con área de polígonos, donde los conceptos y propiedades, adquiridos a través de la trayectoria escolar, se confunden, se transforman u olvidan, al enfrentar problemas geométricos, lo que indica una conceptualización insuficiente. A esto se agrega un tipo de enseñanza donde aún predomina un modelo mecanicista, que se evidencia, principalmente, a través de los textos de estudio. El libro es un instrumento importante para los docentes, y se encuentran, en la actualidad, insertos entre las etapas “de masificación” y “de búsqueda de la consolidación”, etapas señaladas en el documento de Vidal (2010), para los diferentes niveles de la enseñanza.

Además, no se puede dejar de agregar lo que en las conclusiones finales del documento sobre textos escolares en Chile, él expone: “Para nosotros, ésta es la maravilla que nos ofrece el libro de texto, testimonio de los modos de hacer matemáticas escolares en el tiempo”.

En este estudio no se puede dejar de revisar algunos textos escolares para verificar cuál ha sido el tratamiento que se ha realizado en torno a área de polígonos en el plano, Para el proceso de enseñanza y aprendizaje, del eje de medición y del eje de geometría, el testimonio que nos brinda cualquier texto de esta época es de suma importancia por el grado de influencia que ejerce como instrumento orientador para el docente y estudiantes.

Un aspecto que es relevante en geometría es lo relacionado con la visualización, pues se ha observado que los alumnos se han mecanizado y acostumbrado a resolver situaciones que requieren respuestas rápidas, basadas en lo que se observa de figuras geométricas, donde no se transita por un proceso de reflexión adecuado que aporte a su proceso de asimilación y acomodación de los conceptos. Por esto es importante tener claridad sobre el concepto de visualización si se trata de indagar lo que sucede con los estudiantes en formación de pedagogía básica. Al respecto cito a Álvarez Alfonso, L., Ángel L., Carranza, E., Soler-Álvarez, M., (2014) que expresan lo siguiente: “ En matemáticas la visualización se refiere al proceso de observar el objeto matemático para identificar sus características y las relaciones que se establecen entre ellas, fundamentándose en los esquemas cognitivos previos que tiene el observador sobre tales objetos”.

La idea de indagar sobre las concepciones de área de polígonos que tienen los estudiantes en formación de pedagogía en educación básica, dentro del contexto de la geometría euclidiana, requirió recopilar todos los objetivos involucrados en los programas de matemática, específicamente lo relacionado con el eje de medición de primero a sexto básico de enseñanza media y el eje de geometría de primero básico a cuarto medio. En esta revisión se obtuvo la siguiente información: En el eje de medición , de primero básico hasta sexto básico, se presenta un extracto relacionado con los objetivos de aprendizaje del área de superficie de polígonos en el plano. Es en estos niveles donde se concentra el tratamiento del área y en síntesis se tiene:

- Primero básico: Identificar y comparar la longitud de objetos usando palabras como largo y corto.

- Segundo básico: Determinar la longitud de objetos, usando unidades de medidas no estandarizadas y unidades estandarizadas (cm y m), en el contexto de la resolución de problemas.

- Tercero básico: Demostrar que comprenden el perímetro de una figura regular e irregular.

a) Midiendo y registrando el perímetro de figuras del entorno en el contexto de la resolución de problemas.
b) Determinando el perímetro de un cuadrado y de un rectángulo

- Cuarto básico

a) Medir longitudes con unidades estandarizadas (m , cm) y realizar transformaciones entre estas estas unidades (m a cm y viceversa) en el contexto de la resolución de problemas.
b) Demostrar que comprenden el concepto de área de un rectángulo y de un cuadrado:

1. Reconociendo que el área de una superficie se mide en unidades cuadradas.
2. Seleccionando y justificando la elección de la unidad estandarizada (cm^2 y m^2)
3. Determinando y registrando el área en cm^2 y m^2 en contextos cercanos
4. Construyendo diferentes rectángulos para una área dada (cm^2 y m^2) para mostrar que distintos rectángulos pueden tener la misma área.
5. Usando software geométrico.

- Quinto básico

a) Medir longitudes con unidades estandarizadas (m, cm, mm) en el contexto de la resolución de problemas.
b) Realizar transformaciones entre unidades de medidas de longitud : Km a m , m a cm , mm y viceversa , de manera manual y/o usando software educativo.
c) Diseñar y construir diferentes rectángulos, dados el perímetro, el área o ambos , y sacar conclusiones.
d) Calcular áreas de triángulos , de paralelogramos y de trapecios, y estimar áreas de figuras irregulares, aplicando las siguientes estrategias:

1. Conteo de cuadrículas.
2. Comparación con el área de un rectángulo.
3. Completar figuras por traslación.

- Sexto básico

Calcular la superficie de cubos y paralelepípedos expresando el resultado en cm^2 y m^2.

En el eje de geometría, se tienen los siguientes objetivos de aprendizaje y contenidos que se relacionan con el área de figuras 2D , desde los niveles de primero básico a octavo básico. A partir de primero medio, el tratamiento del área continúa, relacionándose con otros saberes.

- Primero básico: Identificar en el entorno figuras 3D y figuras 2D y relacionarlas, usando material concreto.

- Segundo básico: Describir, comparar y construir figuras 2D (triángulos , cuadrados, rectángulos y círculos) con material concreto.

- Tercero básico:

a) Demostrar que comprenden la relación que existe entre figuras 3D y figuras 2D.
b) Reconocer en el entorno figuras 2D que están trasladadas, reflejadas y rotadas.

- Cuarto básico: Demostrar que comprenden una línea de simetría:

a) Identificar figuras simétricas 2D.
b) Creando figuras simétricas 2D
c) Usando software geométrico (trasladar, rotar y reflejar figuras 2D).

- Quinto básico: Demostrar que comprenden el concepto de congruencia, usando traslación, la reflexión y la rotación en cuadrículas y mediante software geométrico.

- Sexto básico: Demostrar que comprenden el concepto de área de una superficie en cubos y paralelepípedos, calculando el área de sus redes(plantillas)asociadas.

- Séptimo básico:

a) Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos ,paralelogramos y trapecios.
b) Triángulos y cuadriláteros congruentes.

- Octavo básico: Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros.

Al examinar los programas de estudio que emanan del Ministerio de Educación, se observó que el tratamiento del área , se realiza durante todo el transcurso de la enseñanza básica y se concentra en los niveles de cuarto a séptimo básico, para figuras 2D. Sin embargo, desde la perspectiva de la experiencia como docente cabe preguntarse cuáles son las razones de que se detecten problemas en los estudiantes, al enfrentar situaciones que muestran que existen dificultades al intentar sus resoluciones para lograr los objetivos de aprendizaje. Por ejemplo: la unidad de medida se omite o se considera como unidad lineal, a pesar de que de acuerdo a los programas se trabaja con las unidades estandarizadas en 2D; existe confusión con el cálculo del área de figuras compuestas aunque en quinto básico se efectúa un tratamiento con el área del rectángulo conectado a otras figuras, las fórmulas se olvidan o cambian su expresión algebraica. Se observa que los programas relacionados con ambos ejes no presentan continuidad en su tratamiento, los errores de cálculo numérico son habituales, no relacionan conceptos y propiedades de los polígonos en el plano, no utilizan los conocimientos implícitos que presenta un dibujo geométrico aunque las figuras geométricas está presentes en el transcurso de toda la enseñanza. También se detecta, falta de comprensión de los enunciados de un problema dado y desconexión con otras áreas del saber.

En la búsqueda de antecedentes, para confirmar lo observado, en relación a la unidad de medida para el área de polígonos, se encuentra el texto "Didáctica de las Matemáticas para Primaria" Su autora ,*Chamorr, C***.** et al. (2003) señala: "En primaria y secundaria, la magnitud más tratada es la longitud, seguida del tiempo, la capacidad, la masa ,y a mucha distancia la superficie y el volumen. Los alumnos confunden con frecuencia superficie con volumen ,perímetro con superficie y masa con volumen", Agrega que: " entre los errores más frecuentes que cometen los alumnos en el ámbito de la medida está precisamente el olvido". Esta conducta de los estudiantes en relación a confundir las unidades unidimensionales con las bidimensionales es muy frecuente en los alumnos insertos en la realidad del país. La unidad de medida que se utiliza para área es tratada, con mayor énfasis, con m^2 y cm^2 en la primera etapa de educación básica y sólo en quinto básico se profundiza al respecto, efectuando algunos tipos de conversiones. Hay que agregar, que estas unidades cuadradas se van utilizando en otras áreas del saber, donde la tendencia se repite: la omisión o la escritura con error, por parte de los estudiantes.

Respecto a la dificultad de comprender el enunciado de una tarea dada *Chamorro y Vecino* (2011) , citada por *Nortes, R y Nortes, ,A* ,(2013) expresa: " la comprensión de un enunciado depende de los conocimientos pragmáticos de los alumnos, de los conocimientos del mundo, de las competencias lingüísticas, de las capacidades perceptivas, de la capacidad de representarse el problema y de las competencias lógicas". Lo que se señala justifica la inquietud que existe sobre las competencias lingüísticas, en el sentido que la carencia de ellas repercute para lograr un nivel de abstracción adecuado para solucionar problemas geométricos. Actualmente, también es necesario indagar este aspecto en el ámbito universitario, especialmente con los estudiantes en formación pedagógica. Los problemas que se originan con la comprensión lectora ante una situación dada en lenguaje natural y donde los alumnos deben interpretar dicha información tiene como consecuencia un bajo rendimiento en el eje de medición y geometría..

En relación , al tratamiento del área y su conexión con otras áreas dentro de la matemática, Del Olmo(1993) expresa; "Y de entre todas las magnitudes, concretamente de las que nos ocuparemos, el área y el volumen, nos parecen las menos cuidadas en cuanto a las actividades que se realizan, y a que se cercenan sistemáticamente muchos de sus ricos y variados matices y no se suele poner de manifiesto su conexión con otras partes de la matemática escolar". Nuevamente se reitera lo señalado anteriormente con respecto a los programas de estudio que emanan de la Institución, ya que en los diferentes niveles se van sumando nuevos contenidos, con escasa incorporación de nuevos matices relacionados con el área de polígonos en el plano, en particular.

Por otro lado *Ramírez, R* (2011) da a conocer, en su tesis “Construcción de Polígonos Regulares” lo siguiente:

“Generalmente los estudiantes presentan dificultad en reconocer, identificar, características, propiedades, construcción y solución de problemas relacionados con los polígonos regulares, tal vez por los bajos niveles de apropiación y comprensión de los conceptos básicos de la geometría euclidiana como son las nociones de perpendicularidad y paralelismo, ángulos, bisectriz, mediatriz, clasificación de polígonos, relaciones, propiedades de los cuadriláteros y sus construcciones”.

En general, no se puede dejar de señalar que existen dificultades con el tratamiento del área y que es un estudio que no está acabado para el proceso de enseñanza y aprendizaje, en todos los niveles educacionales. En la actualidad se puede observar que estas dificultades alcanzan los niveles de la enseñanza superior, específicamente, con los profesores en formación . En relación a este problema *Marmolejo. y González,M.T.*, (2015) confirman lo expresado al señalar que:

“El bajo nivel de rendimiento de los estudiantes al resolver problemas de área de pruebas externas, el elevado número de reportes que resaltan las dificultades de los estudiantes al tratar el área, el reconocimiento que tales dificultades persisten de un nivel escolar a otro , incluso en la universidad,….,el análisis de cómo el área es tratada en los textos escolares de diferentes países son buena prueba de las dificultades”.

Lo planteado por estos investigadores, se corrobora a través de los textos escolares nacionales donde aún existe la tendencia a entregar fórmulas de área de polígonos ,sin un previo análisis de ellas. Por ejemplo, el texto de séptimo básico, editorial Galileo distribuido por el MINEDUC, año 2014, solo presenta dos actividades relacionadas con área de polígonos en el plano, en las páginas176 y 189, una actividad relacionada con el cuadrado y las potencias, y otra relacionada con semejanza de cuadrados y sus áreas en hoja cuadriculada. Esto demuestra que no hay continuidad y un tratamiento exhaustivo en relación al área de polígonos en el plano.

En general, los estudiantes que ingresan a la universidad, en la actualidad, tienen una fuerte influencia de un modelo epistemológico de carácter mecanicista lo cual no les permite enfrentar situaciones con problemas de área sin recurrir a fórmulas, por lo general impuestas. Esto repercute en su proceso de aprendizaje y podría inducirlos a realizar prácticas de enseñanza que no están acordes con las innovaciones que se pretenden llevar a cabo ,en educación. La preocupación está presente en investigadores nacionales e internacionales en relación al proceso de enseñanza de la geometría y, en particular, de área de polígonos.

Al pretender indagar sobre las concepciones de área de polígonos que los estudiantes poseen al ingresar a su primer curso de geometría , de la carrera de pedagogía en educación básica, se requiere de una teoría como “La Teoría de los Campos Conceptuales” que permita localizar y estudiar las filiaciones y las rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual, a través de variadas situaciones. Por esta razón, es necesario considerar a un conjunto de estudiantes a quienes se les pueda aplicar un cuestionario, donde puedan presentar sus esquemas, con los invariantes operatorios, que evidenciarán si los problemas en relación al área de polígonos detectados, persisten en el tiempo. Para esto es importante señalar que, una vez que los estudiantes realicen la actividad sobre área de polígonos, será necesario analizar los esquemas que involucran los conceptos y teoremas en acto, utilizados en cada situación dada, posteriormente se debe categorizar y lograr las conclusiones finales.

1.2 Formulación del problema y preguntas de investigación

De acuerdo a los problemas existentes ,expuestos anteriormente, surge la formulación de la siguiente interrogante: *“¿Cuáles son las concepciones de área de polígonos que han adquirido los alumnos de primer año de pedagogía en educación básica, desde la mirada de la “Teoría de los Campos Conceptuales”?*

A partir de esta pregunta, emergen otras preguntas que contribuyen a responder lo que plantea la problemática. Ellas son:

- ¿Cuáles son los esquemas de área de polígonos que los estudiantes de pedagogía en educación básica presentan en diversas situaciones?
- ¿Cuáles son los conceptos en acto y teoremas en acto que utilizan los estudiantes para resolver diferentes situaciones relacionadas con área de polígonos?
- ¿Qué diferencias y similitudes presentan los esquemas que utilizan los estudiantes para dar a conocer la medida de una superficie de polígono, en el plano?

1.3 Objetivos general y objetivos específicos

Objetivo general

De acuerdo a la formulación del problema y las interrogantes, señaladas, se plantea el objetivo general de la siguiente manera:

"Analizar y caracterizar las concepciones de área de polígonos que han adquirido los estudiantes de pedagogía en educación básica, desde la mirada de la Teoría de los Campos Conceptuales".

Del objetivo general se desprenden los siguientes objetivos específicos:

- Identificar los invariantes operatorios utilizados por los estudiantes , en diversas situaciones, relacionados con área de polígonos.
- Categorizar las concepciones de área de polígonos en el plano que poseen los estudiantes de primer año de pedagogía en educación básica.
- Analizar cuáles son las características que presentan los esquemas desarrollados por los estudiantes..
- Clasificar los conceptos y teoremas en acto que los estudiantes utilizan para resolver las diversas situaciones relacionadas con área de polígonos en el plano.

CAPÍTULO II

MARCO DE REFERENCIA

En este ítem se citan las principales ideas que se consideraron del marco referencial “La Teoría de Campos Conceptuales de Gerard Vergnaud y que contribuyeron en la investigación relacionada con las concepciones que poseen los estudiantes de pedagogía en educación básica, sobre el área de polígonos en el plano.

En primer lugar, VERGNAUD (1990) señala que:

El objetivo de la teoría de los campos conceptuales es proporcionar un encuadre teórico a las investigaciones sobre las actividades cognitivas complejas especialmente referidas a los aprendizajes científicos y técnicos. Se trata de una teoría psicológica del concepto, o mejor dicho, de la conceptualización de lo real; permite localizar y estudiar las filiaciones y las rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual.

Considerando lo que se plantea en el párrafo anterior, se puede decir que al iniciar este trabajo se requirió de un encuadre teórico como “La Teoría de los Campos Conceptuales” que permitiese indagar sobre los conceptos que los estudiantes habían adquirido durante sus años de estudio; cómo éstos habían sido asimilados y acomodados por ellos de tal manera que pudiesen solucionar cualquier situación relacionada con área de polígonos en el plano o bien detectar las filiaciones y rupturas entre conocimientos al dar solución a un problema sobre la medida de una superficie en el plano. En segundo lugar, Vergnaud (1990) define un campo conceptual como un conjunto de situaciones y entrega como ejemplos de él, las estructuras aditivas y las estructuras multiplicativas. Indica que el concepto de situación no tiene el sentido de situación didáctica sino más bien ,el de tarea. Afirma que la idea es que toda situación compleja se puede analizar como una combinación de tareas de las que es importante conocer la naturaleza y la dificultad propias.

De acuerdo a lo señalado anteriormente, se pensó que se requería un conjunto de situaciones o tareas relacionadas con área de polígonos en el plano, que según Vergnaud(1990), corresponden al dominio de magnitudes espaciales por su relación con la noción de superficie, cuya conceptualización requiere, a la vez, de la geometría, las estructuras aditivas y las multiplicativas.
Para clarificar la noción de superficie, es necesario destacar lo que ha estudiado Vergnaud citado por Chamorro (2006) sobre el campo conceptual de las estructuras multiplicativas, pues a partir de ellas se considera que “la superficie es una magnitud bilineal y que corresponde a la categoría de producto de medidas. Pertenecen a este tipo de problemas aquellos que plantean disposiciones rectangulares de objetos, así como el cálculo de superficies y volúmenes entre otros”.

En general, Vergnaud nos permite identificar la estructura a la que se ajustan los problemas del cálculo del área , en este caso de polígonos en el plano, a partir de la categoría “el producto de medidas”, en la que se interpreta el área como producto de dos longitudes.

La Teoría de los Campos Conceptuales proporciona un marco coherente para analizar los conocimientos adquiridos por los estudiantes para medir una superficie ,así como sus filiaciones y rupturas al enfrentar una tarea .En esta investigación, los estudiantes deben dar a conocer los conceptos en acto, teoremas en acto y su interrelación en la medida que desarrollen y den respuesta a diversas tareas planteadas sobre área de polígonos.

La investigación se preocupa de las concepciones que poseen los estudiantes en relación al área de polígonos y estas concepciones están ligadas al concepto de la materia en estudio. Las características que presenta la noción de “concepción” fue dada a conocer en el capítulo I; corresponde ahora dar a conocer como se considera la noción de “concepto”.

La Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990) señala que un concepto es una tripleta de tres conjuntos, es decir, C (S, I, ┌):

La tripleta de tres conjuntos es: un conjunto de situaciones (S), un conjunto de invariantes operatorios (I), y un conjunto de formas lingüísticas y simbólicas que constituyen los diferentes sistemas de representación(┌).

Al relacionar las nociones de área de polígonos con la tripleta de tres conjuntos y la investigación en curso se tiene lo siguiente:

La referencia (S): Es el conjunto de situaciones (tareas) que le dan sentido al concepto. En el caso de la investigación se plantearon diversas situaciones, haciendo uso de un cuestionario, que tiene relación con la problemática formulada, con el fin de darle sentido a la investigación. A través de un conjunto de tareas, de su análisis y caracterización, se puede confirmar o refutar lo relacionado con cada uno de los problemas dados a conocer en el capítulo 1.

El significado (I): Es el conjunto de invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto) sobre los cuales reposan los esquemas. En el caso de la investigación el alumno desarrollará esquemas utilizando conceptos y teoremas en acto para responder preguntas del cuestionario. Los esquemas que darán a conocer los estudiantes permitirá detectar las filiaciones y rupturas que existen en ellos en torno al cálculo de la medida de una superficie de polígonos en el plano.

El significante (┌): Conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento. En el caso de la investigación, el cuestionario fue diseñado para utilizar la visualización, lenguaje natural y/o simbólico matemático, es decir, el alumno debió dar a conocer sus esquemas con las formas lingüísticas y no lingüísticas que correspondieran.

Es por medio de la experiencia que un sujeto organiza el conocimiento en campos conceptuales, proceso que abarca un período de tiempo considerable. El conocimiento para Vergnaud es adaptativo y es producto de la construcción del sujeto cuando se adapta al medio, por ello se le considera operatorio. La conceptualización es un aspecto importante a destacar dentro de esta teoría, debido a que por medio de las situaciones problemáticas, que el sujeto debe realizar, se ve enfrentado a los conceptos y teoremas asociados , en este caso sería a "área de superficie" , y al emplearlos, es como adquieren sentido. Esto sería observable por medio de las respuestas que los estudiantes realizan, en donde la conceptualización se exterioriza a través de sus esquemas.

.

Según Vergnaud (1990) citado por Meléan, R y Arrieta, X (2009), el desarrollo cognitivo consiste en el desarrollo de un vasto repertorio de esquemas. Además , explica que se llama esquema a la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada. En los esquemas es donde se debe investigar los conocimientos –en-acto del sujeto, es decir, los elementos cognitivos que permiten a la acción del sujeto ser operativa.

En esta investigación se le da importancia a los esquemas que presentan los alumnos a través de las respuestas del cuestionario. Por esto, es importante considerar las definiciones de esquema que se señalan en la Teoría de los Campos Conceptuales.

Sureda,P.y Otero,M.R

.(2011) explican que las definiciones que Vergnaud propone de esquema son las siguientes:

1. Un esquema es una totalidad dinámica funcional.

2. Un esquema es una organización invariante de la actividad para una clase definida de situaciones.

3. Un esquema comprende necesariamente cuatro categorías de componentes:

- Una meta (o varias), sub-metas y anticipaciones.
- Reglas de acción, de toma de información y de control.
- Invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto)
- Posibilidades de inferencia.

4. Un esquema es una función que toma sus valores de entrada en un espacio temporalizado de n dimensiones, y sus valores de salida en un espacio igualmente temporalizado a n´ dimensiones (n y n´ muy grandes).

La primera definición se podría decir que es la que fue heredada de Piaget, ya que se corresponde con las reflexiones que él hacía del esquema como una forma dinámica, próxima de lo que los gestaltistas habían reconocido para la percepción (Vergnaud, 2007b:292).

La definición dos de esquema como la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada, va un poco más lejos que la primera, y le fue sugerida a Vergnaud por el concepto de algoritmo. El algoritmo es una regla que permite tratar todos los problemas de una cierta clase, asegurando en un número finito de pasos una solución, o mostrando que no hay solución. Los algoritmos son esquemas, pero no todos los esquemas son algoritmos. Los esquemas son objetos del mismo tipo lógico que los algoritmos pero sin la seguridad de la efectividad, es decir, sin la propiedad de lograr el objetivo con seguridad, y en un número finito de pasos.

Los esquemas son frecuentemente eficaces, pero no siempre efectivos. Cuando un niño utiliza un esquema ineficaz para una cierta situación, la experiencia le conduce a cambiar de esquema, o a modificar este esquema. En este punto resulta relevante destacar que es la organización de la actividad la que es invariante, no la actividad misma, pues el esquema no es un estereotipo. Por otra parte como el esquema se dirige a una clase de situaciones, es un universal; incluso si esta clase de situaciones es pequeña, como es el caso en los primeros momentos de comprensión de un campo conceptual nuevo.

La tercera definición, superadora de las ideas de Piaget, Vygotsky, y Bruner; es analítica, y resulta ser fundamental para el análisis de la actividad en general, y de la conceptualización en particular.

Para la investigación en curso, se consideró la definición tres, de esquema, ya que permitiría analizar las diversas situaciones del cuestionario ,en general , y las conceptualizaciones que los estudiantes darán a conocer a través de sus esquemas.

Para entender la definición tres de esquema se requiere explicar brevemente lo que corresponde a los componentes :

1) Metas y anticipaciones: el individuo descubre una posible finalidad de su actividad. En el caso de este estudio, el estudiante se ve enfrentado a diversas situaciones que debe solucionar.
2) Reglas de acción “si…, entonces” permite generación y continuidad de secuencias de acciones del sujeto. Pará las reglas de acción, el alumno debe reflexionar y conjeturar para lograr los objetivos de cada tarea, recurriendo a sus conocimientos ya adquiridos.
3) Invariantes operatorios: Teoremas en acción y conceptos en acción; dirigen el reconocimiento, por parte del estudiante, de los elementos pertinentes de la situación; son los conocimientos contenidos en los esquemas, permiten obtener la información pertinente y de ella inferir la meta a alcanzar y las reglas de acción adecuadas.
   Teorema en acción es una acción sobre lo real considerada como verdadera.

Concepto en acción es un objeto, un predicado o una categoría de pensamiento considerada como pertinente o relevante.
En nuestra investigación, el estudiante pone en movimiento los conceptos en acto y los teoremas en acto ,los da a conocer en sus esquemas y trabaja para alcanzar el objetivo que corresponda.

4) Posibilidades de inferencia; permiten “calcular” las reglas y anticipaciones a partir de las Informaciones e Invariantes Operatorias. Con este componente, el alumno piensa ,reflexiona, deduce y puede obtener una conclusión ante problemas complejos.

La definición 3 permitirá analizar y caracterizar las diversas situaciones del cuestionario ,en relación a los objetivos de cada tarea que corresponderá a las metas a alcanzar y las reglas de acción que deberá seleccionar y utilizar, según corresponda, para lograr la respuesta experta de cada caso.

CAPITULO III

OBJETO MATEMÁTICO

Como el trabajo consistirá en indagar sobre el área de polígonos en el plano, se necesita comenzar este capítulo aclarando algunas nociones tales como magnitud, medición, superficie y área.

Según el texto “Historia de la Matemática” de Boyer,C, (2010), las nociones primitivas de la matemática son número, magnitud y forma. A partir de estas nociones se dice que la geometría tiene su origen debido a la necesidad de trazar las lindes de las tierras después de las inundaciones anuales del Río Nilo, en Egipto. Los egipcios registran evidencias del desarrollo de la matemática a partir de unos 4000 a.C. Ellos fueron notablemente exactos al contar y medir .Un ejemplo de ello es la construcción de sus pirámides.

Se destaca, de esa época , el Papiro de Ahmes que contiene 87 problemas y uno de ellos describe como determinar el área de un triángulo isósceles. Señala que éste se podría considerar como formado por 2 triángulos rectángulos, uno de los cuales podría desplazarse cambiando de posición de modo que se forme un rectángulo. Así el área del triángulo isósceles se puede calcular con la mitad de su base por su altura.

Al respecto Corberán,R (1996) cita a Heraud, B para explicar que “la superficie es asociada a la noción de extensión a la porción de espacio ocupado y el área aparece como expresión de un todo a una parte”. También cita a Perrin-Glorian para explicar la diferencia entre superficie, área y medida, expresando que “superficie designa una parte del plano, área designa la magnitud física, cualidad o propiedad de la superficie y medida designa el número que representa el lugar ocupado por la superficie del plano”.

Por otro lado, Godino et al. (2002) señala que:

Se reserva el nombre de magnitud para los atributos o rasgos que varían de manera cuantitativa y continua (ej. longitud, peso,…) o discreta(ej. número de personas).Las cantidades son los valores de dichas variables. El caso de medir una cantidad, consiste en determinar las veces que esa cantidad contiene a la cantidad (o cantidades) que se toman como referencia(unidades de medida) .Con el término “cantidad” se refiere al valor que toma la magnitud en un objeto particular. Expresa que la palabra “superficie” se debería reservar para designar la forma del cuerpo o figura(superficie plana, triangular,…) mientras que la palabra “área” debería designar la extensión de la superficie.

En relación a las unidades estandarizadas y no estandarizadas para el proceso de medir, el texto REFIP (2013) de Geometría, para futuros profesores de educación básica, comunica que en los primeros niveles de enseñanza básica, es común usar unidades no estandarizadas(informales) para medir longitud y a veces área, pues permite concentrarse en el proceso de medición. Agrega que una vez que se ha comunicado información de longitudes no estandarizadas, surge la necesidad de utilizar unidades estandarizadas. Estas surgen de la necesidad de comunicar información, que sea universalmente comprendida. Se inicia así el Sistema Internacional(S.I.) de medidas que tiene como base “el metro”, con sus múltiplos y submúltiplos.

Respecto a la noción de polígono se recurre al texto de “Área y Perímetro” donde D´Amore,B y Fandiño,M.I. (2009) ,entrega, en primer lugar la noción de “poligonal”.

Señala que una poligonal es una línea formada por una sucesión finita de segmentos consecutivos, siendo “segmento” un conjunto infinito de puntos sobre una determinada recta. A partir de estos conceptos define “polígono” como una poligonal simple cerrada y cada uno de los segmentos que lo forman se llaman lados. Además, indica que se usa distinguir entre polígonos cóncavos y convexos. Para el caso de polígono cóncavo, se tiene que si se unen dos puntos que pertenece a su región interior ,obteniendo un segmento y parte de este segmento se ubica en la región exterior entonces este polígono es cóncavo, También se dice que es cóncavo, si se tiene uno o más ángulos interiores mayores de 180° . Para el caso del polígono convexo, si se dibuja un trazo y está totalmente en la región interior, se dice que es convexo o bien ,si se cumple que todos los ángulos interiores miden menos de 180° también se dice que es convexo.

Entre los polígonos convexos se tienen aquellos que son regulares ,es decir, que tienen todos sus lados y todos sus ángulos de igual medida y aquellos que son irregulares, es decir, tienen uno o más lados y ángulos desiguales.

Recurriendo a algún texto escolar ,por ejemplo el de 7° básico de la editorial Santillana del 2016,del cual se extrajeron situaciones para el cuestionario que se aplicó a los estudiantes, se encuentra la clasificación de los polígonos según sus lados. Ellos son : triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, heptágono, octágono, eneágono, decágono, dodecágono, pentadecágono, icoságono.

Respecto al área de polígonos, Clemens,S (1998) señala que se tiene el siguiente postulado del área: “A cada región poligonal se le puede asignar un número positivo único denominado área. El área de la región R se representa por A (R).El autor menciona otros postulados y teoremas relacionados con el área de polígonos tales como:

- Postulado de la suma de áreas: “si una región poligonal es la unión de n regiones poligonales que no se solapan ,su área es la suma de las áreas de las n regiones”.
- Postulado del área de regiones congruentes: “Si dos rectángulos o dos triángulos son congruentes, entonces, las regiones que acotan tienen la misma área”.
- Postulado del área del rectángulo: “El área de un rectángulo de longitud ℓ y ancho w está dada por la fórmula $\ell \bullet w$
- Teorema: Dado un paralelogramo con base b y altura correspondiente h, el área A está dada por la fórmula A = $b \bullet h$

- Teorema: Dado un triángulo con base b y altura correspondiente h , el área A está dada por la fórmula A = $\frac{b \bullet h}{2}$
- Teorema: Dado un trapecio con bases b_1 y b_2 , y altura h , el área A está dada por la fórmula A = $\frac{1}{2}$ h (b_1 + b_2).
- Teorema: Dado un polígono regular de *n* lados de longitud *s* y apotema *a* , el área A está dada por la fórmula A = $\frac{1}{2}$ • *a n s* = $\frac{1}{2}$ • a p , donde el perímetro p = *n s*

Finalmente , D´Amore,B y Fandiño,M.I. (2009) expresan, para los polígonos en general, que si tenemos un polígono genérico, entonces, no existen situaciones generales, sólo situaciones específicas; el polígono se descompone en partes conocidas y se mide la superficie de cada una de éstas, para después, sumar todas estas medidas.

Los autores mencionados, muestran claramente los conceptos y teoremas que deben estar presentes en la resolución de las diferentes situaciones del cuestionario y el objetivo no es efectuar las demostraciones de las propiedades mencionadas en este trabajo, sino considerar, debido a su trayectoria, lo que los estudiantes deben relacionar, al confeccionar sus propios esquemas de las tareas solicitadas.

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA

Para el estudio sobre las concepciones de área que poseen los estudiantes de pedagogía en educación básica se utilizó una metodología de enfoque cualitativo exploratorio mediante un estudio de caso, que consiste en un cuestionario de preguntas abiertas, con diversas situaciones donde el estudiante debió exponer los conceptos en acto y teoremas en acto a través de sus esquemas. Éstos, posteriormente, se analizaron y caracterizaron, según la tripleta de conjuntos, de la teoría de los campos conceptuales. Es importante hacer notar que aquellos estudiantes que presentaron respuestas confusas o poco claras se les aplicó una entrevista semiestructurada y personalizada.

El cuestionario está basado en situaciones que se ubican dentro del contexto de la Geometría Euclidiana, que incluye polígonos convexos, regulares e irregulares. Los polígonos considerados en las diversas tareas corresponden al triángulo, cuadrado, rectángulo, trapecio, pentágono regular y hexágono regular. Es necesario señalar que se aplicó a estudiantes, que en el futuro, deberán efectuar el tratamiento de área en el aula, de acuerdo a los programas establecidos por la institución.

El cuestionario consideró situaciones que el alumno debió resolver y/o explicar a través de sus esquemas, en lenguaje natural y/o simbólico.

Este trabajo se realizó con 13 alumnos voluntarios, de primer año de pedagogía en educación básica, promoción 2016, de un total de 35, que estuvieron interesados y dispuestos a colaborar en esta investigación. Los estudiantes cursan el segundo semestre y forman parte de la cátedra de geometría, cuyo programa incluye el tratamiento de área desde la perspectiva de la geometría euclidiana. Ellos provienen de colegios municipalizados y particulares subvencionados, y al ingresar a la carrera se presentaron con un promedio de 481,3 puntos en matemática, de acuerdo a los antecedentes entregados por la institución de orden superior. La idea de indagar con este grupo de educandos surge a partir de la problemática dada a conocer en el capítulo 1.Se trata de investigar si, en la actualidad, se presentan evidencias relacionadas con los problemas mencionados en este trabajo y por los investigadores, a nivel universitario, específicamente con alumnos que serán los futuros maestros de este país y que tendrán la responsabilidad de estar a cargo del proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula. Es importante destacar que este trabajo fue posible realizarlo debido a que la investigadora se desempeña como profesora de matemática de la entidad universitaria a la cual pertenecen los estudiantes, dando las facilidades para que fuese posible esta indagación.

Al elaborar el cuestionario se consideró el siguiente constructo:

Construcción del Instrumento

Tipo de Instrumento: Cuestionario

Matriz de Operacionalización del instrumento

Propósito del Instrumento	**Definición del constructo**	**Dimensión del constructo**	**Indicadores**	**Ítems**
Indagar sobre las concepciones de área de polígonos en estudiantes de pedagogía básica.	Concepción de área de polígono	Conceptos y propiedades de polígonos (triángulos, cuadriláteros, cuadrados, trapecios, pentágonos regulares, hexágonos regulares y red o plantilla de una caja de caras rectangulares. Concepto de área. Situaciones enfocadas hacia el uso de medidas estandarizadas y no estandarizadas.	Expresión algebraica de área de un polígono. Conceptos y propiedades implícitos en las figuras geométricas. Logro de respuesta experta Uso de unidades de medida	Situaciones o tareas adaptadas, relacionadas con área de polígonos en el plano, extraídas de investigaciones y un texto .

Para indagar sobre las concepciones de área de polígonos se procedió a revisar los programas de estudio de la enseñanza básica y media, comprobando que el tratamiento para medir una superficie está presente en todos los niveles de enseñanza básica ,de primero a sexto, luego continúa en los niveles de séptimo a cuarto medio en conexión con otras áreas del saber.

Es importante señalar, que al iniciar la confección del cuestionario se tuvo presente, constantemente, la problemática y los objetivos, tanto general como específicos. Además, fue necesario revisar aquellas tesis e investigaciones, que habían investigado el contenido, con el propósito de encontrar situaciones que se pudiesen adaptar a esta época y a la problemática planteada. A esto ,se agregó el texto de estudio de séptimo año básico, de la editorial Santillana, año 2016,para extraer preguntas y que efectúa el tratamiento de área de polígonos con interrogantes que inducen al análisis.

Para el cuestionario de respuestas abiertas, se seleccionaron nueve situaciones extraídas de la siguiente manera:

- Una pregunta basada y adaptada del "Análisis del concepto de área de superficies planas" de Corberán(1996).
- Una pregunta de "Tareas aplicadas por nivel", publicado el año 2010,MINEDUC de los Mapas de Progreso
- Siete preguntas basadas y adaptadas del texto de matemática, séptimo básico, editorial Santillana, año 2016.

Las nueve situaciones, que componen el cuestionario, poseen sus respectivos objetivos, pero , éstos no fueron dados a conocer a los estudiantes en el momento de su aplicación para evitar orientaciones que tenían relación con la indagación.

Es importante señalar que el cuestionario de situaciones se aplicó sin haber efectuado ningún tratamiento del objeto matemático a nivel de aula, en la institución donde se realizó este trabajo exploratorio.

El conjunto de situaciones relacionadas con el área de polígonos se aplicó durante el transcurso de tres horas cronológicas ,en forma individual y en absoluto silencio. Transcurrida una semana, se les realizó una entrevista semiestructura e individual para obtener información de aquellas respuestas confusas o poco claras.

Una vez aplicado el conjunto de situaciones, se ordenó, analizó y caracterizaron las diversas respuestas, considerando los invariantes operatorios de los esquemas presentados, las similitudes y diferencias de las producciones y, las confusiones que inducían a error.

Las producciones de los estudiantes se transcribieron en la forma más fidedigna de lo posible, con las respuestas de las entrevistas semi estructuradas individuales, como lo muestra el capítulo V. Una vez ordenados y analizados todos los esquemas, presentados por los estudiantes, se señalaron por escrito los conceptos en acto que debían estar presentes en las respuestas de los estudiantes, de acuerdo a cada situación en particular. Luego, a través de la lectura de cada uno de los esquemas presentados, se observaron cuántos alumnos lograron los objetivos de cada una de las tareas dadas y quienes no los alcanzaron.

El trabajo de aquellos alumnos que no lograron los objetivos fue analizado por segunda vez, detectando aquellas características comunes y teoremas en acto que los inducían al error. Posteriormente, se confeccionaron cuadros de análisis y se efectuaron cálculos relacionados con porcentajes, con el propósito de detectar si las confusiones y errores de los esquemas presentados tenían relación con la problemática planteada en el capítulo I.

Continuando con el análisis y caracterización de las concepciones que poseen los estudiantes sobre área de polígonos, se procedió a mostrar, como evidencia, algunas de aquellas producciones, que representaran los esquemas de situaciones con problemas más comunes y característicos. Nuevamente, se realizó un análisis para las respuestas de los estudiantes en forma particular, ubicándolos en la categoría correspondiente de los cuadros de análisis, según característica y porcentaje.

Finalmente, el análisis culmina mostrando dos cuadros, que sintetizan las características comunes de los problemas y confusiones que tienen los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones relacionadas con el área de polígonos. Al culminar este estudio, se usan los diversos análisis para obtener las conclusiones y proyecciones

CAPÍTULO V

ANÁLISIS DE RESULTADOS.

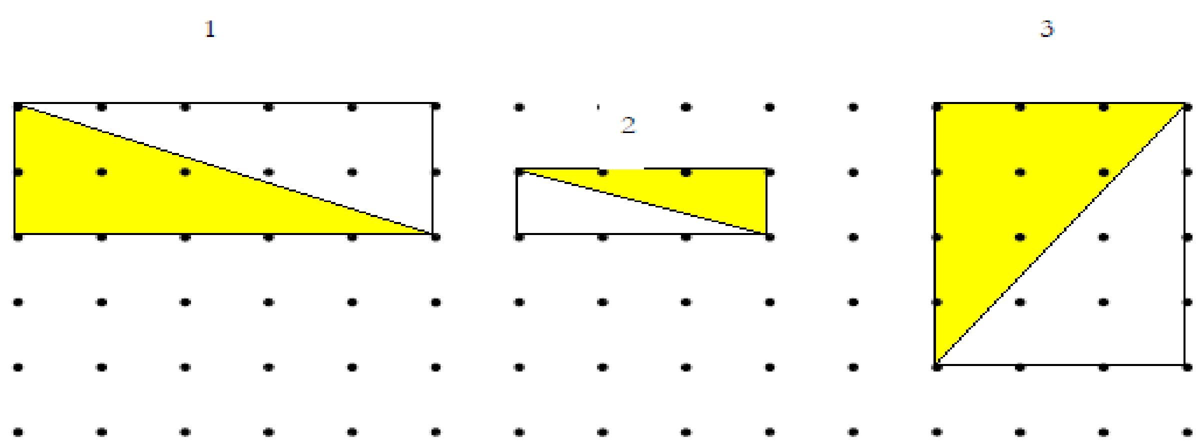
Análisis de los esquemas presentes en el cuestionario aplicado a 13 estudiantes de pedagogía en educación básica

En este capítulo, en primer lugar, se transcribieron las 9 respuestas de los 13 estudiantes, dados a conocer como E1, E2, E3,E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, se analizaron, categorizaron y calcularon porcentajes de acuerdo a las características de los esquemas. Las respuestas se categorizaron de acuerdo a los conceptos y teoremas en acto que se relacionan con las interrogantes y los objetivos específicos de la problemática.

En segundo lugar, como evidencia, se seleccionaron las respuestas de algunos estudiantes, que muestran los invariantes operatorios de sus procesos, para lograr los objetivos de cada situación del cuestionario.

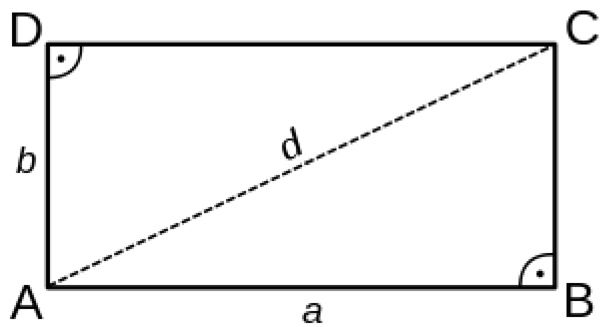
5.1 Situación 1.

1) Entre cada punto existe un espacio de 1cm.



a) Observa los 3 rectángulos y los triángulos coloreados en sus regiones interiores. Describe las medidas de los lados de cada rectángulo y las medidas de los lados de los triángulos que coinciden con dos de los lados del rectángulo .Compara las medidas.

b) Explica como determinarías el área de las 9 figuras. ¿Cuáles son tus conclusiones al determinar las áreas de los rectángulos y de los triángulos?
c) Podrías generalizar el cálculo de área a través de una expresión algebraica para todos los rectángulos y para todos los triángulos, dada la siguiente figura:



Objetivo de la situación 1: El estudiante determina la expresión algebraica de área de la superficie de un rectángulo y área de la superficie de un triángulo a través de una secuencia de situaciones.

Análisis de la situación 1 letra a

E1	E2	E3
En sus esquemas da a conocer lo siguiente: -Estima que es necesario utilizar el teorema de Pitágoras para calcular la medida de la hipotenusa de los triángulos. - En sus cálculos utiliza sólo unidades de longitud . -Reconoce los datos para describir las medidas requeridas, de las figuras geométrica. -Para cada rectángulo escribe el producto de la base por la altura según las medidas de cada Rectángulo. -Para cada triángulo inscrito en sus respectivos rectángulos escribe el producto de los catetos y la diagonal. -En entrevista semiestructurada ,E1 señala: “saqué las medidas	En sus esquemas da a conocer lo siguiente: -Estima que es necesario utilizar el teorema de Pitágoras para calcular la medida de la hipotenusa de los triángulos. -Nombra la diagonal del rectángulo como bisectriz. -Utiliza unidades de medida en forma correcta. Reconoce datos y condiciones explícitas para describir las medidas requeridas, de las figuras geométricas.	Comprende el enunciado. -Expresa que los lados que comparte el rectángulo con los catetos del triángulo son congruentes. -Utiliza unidades de medida. -Compara las figuras dadas.

de los lados y la hipotenusa y una vez que lo tuve ,entendí la pregunta y me di cuenta de que no era lo que me preguntaban”	.-Su comparación es en registro numérico	

E4	**E5**	**E6**
Comprende el enunciado de la siguiente manera:. -Utilizando la figura de la tarea ,realiza el cálculo del área de un triángulo en cada una de las imágenes dadas. -No utiliza unidades de medida. -Al describir expresa “que las medidas de cada uno de los rectángulos se obtiene contando la cantidad de puntos que hay dentro de la figura, puesto que ya sabemos que el espacio entre cada punto es de 1 cm y la medida de la hipotenusa del triángulo se obtiene calculando la altura elevada a 2 más la base elevada a 2” -Su comparación es incoherente pues da a conocer como obtener el área del rectángulo y luego explica cómo obtener la medida de la hipotenusa en la región interior de cada rectángulo, usando el Teorema de Pitágoras	-No comprende el enunciado. -No completa la respuesta. -No describe. -No compara.	Comprende el enunciado. -Estima que es necesario utilizar el teorema de Pitágoras para calcular la medida de la hipotenusa de los triángulos. -Utiliza unidades de medida. -Reconoce datos y condiciones explícitas para describir las medidas requeridas, de las figuras geométricas y compara usando registro numérico.

E7	**E8**	**E9**
-Comprende el enunciado. -Expresa que triángulos y	- Comprende el enunciado.	- Comprende el enunciado. -Estima que es necesario

rectángulos tienen las mismas medidas de ancho y largo. -Escribe que los rectángulos están formados por triángulos. -Utiliza unidades de medida. -Reconoce datos y condiciones explícitas para describir las medidas requeridas, de las figuras geométricas, y compara.	Expresa que los triángulos formados dentro de los rectángulos son triángulos rectángulos. -Utiliza unidades de medida. -Describe solo las medidas del rectángulo. -Su comparación es incompleta. -Solo menciona el ángulo recto de cada triángulo para justificar que se tienen dos triángulos rectángulos.	utilizar el teorema de Pitágoras para calcular la medida de la hipotenusa de los triángulos. -Utiliza unidades de medida solo para los lados del rectángulo. - Reconoce datos y condiciones explícitas para describir las medidas requeridas, de las figuras geométricas, pero no compara.

E10	**E11**	**E12**	**E13**
-Comprende el enunciado. -No compara. -Se anticipa y calcula numéricamente el área de cada triángulo ennegrecido. -Utiliza para el área de las figuras , cm y no cm^2.	No describe las medidas. Compara sin expresar por escrito las medidas de las figuras. - Compara y conjetura que un triángulo es la mitad del rectángulo.	No comprende el enunciado en relación a las medidas. -Estima que es necesario utilizar el teorema de Pitágoras para calcular la medida de la hipotenusa de los triángulos. -Utiliza unidades de medida. -Reconoce datos y condiciones explícitas para describir las medidas requeridas, de las figuras geométricas, pero no compara.	No comprende el enunciado. Solo describe lo del triángulo. -Estima que es necesario utilizar el teorema de Pitágoras para calcular la medida de la hipotenusa de los triángulos -No utiliza unidades de medida, excepto en medidas del triángulo.

Análisis de la Situación 1 letra b

E1	**E2**	**E3**
-Solo explica utilizando	-Utiliza Fórmula adquirida, anticipándose	-Utiliza conceptos y teoremas en acto obteniendo la respuesta

fórmulas. -No da a conocer otra (s) estrategia(s). -No presenta cálculos del registro numérico.	a la pregunta "1c" -Efectúa cálculos para el registro numérico utilizando fórmula. -Expresa la unidad de medida en cm y no en cm^2. -Para el área del rectángulo usa la expresión : a^2• b^2 , anticipándose a la pregunta "1c". -Realiza cálculos y en su proceso utiliza las unidades en $cm^{2.}$. -Sus resultados de área de rectángulo los expresa finalmente en cm.	experta en el registro numérico. -Da a conocer que los cálculos le hacen comprobar que el área de un triángulo inscrito en un rectángulo será la mitad de él. Da a conocer que "por ende la hipotenusa será bisectriz del rectángulo".

E4	**E5**	**E6**
-Calcula el área de cada rectángulo y de cada triángulo a través de formula adquirida. -No utiliza unidad de medida para medir áreas de superficies en estos cálculos. -Continúa desarrollando sus esquemas ,sumando las áreas de los triángulos entre sí y las áreas de los rectángulos entre sí. -Al terminar con este último esquema usa la unidad de medida en cm.	-No realiza cálculos numéricos. -Explica que para obtener el área del rectángulo multiplicaría el largo por el ancho y para calcular el área del triángulo aplicaría la misma estrategia y que el largo sería la altura.	-Sus esquemas presentan cálculos para obtener el área de cada rectángulo y cada triángulo . -Omite la unidad de medida en el cálculo de área. -Se aproxima a la respuesta experta pero omite la unidad de medida.

E7	**E8**	**E9**
-No realiza cálculos numéricos. -Explica que los rectángulos están formados por triángulos y al tener las mismas medidas de largo por ancho ,el área de un rectángulo sería igual a la de los rectángulos	-Sus esquemas presentan cálculos para obtener el área de cada rectángulo y cada triángulo . -Omite la unidad de	-Utiliza Fórmula adquirida, anticipándose a la pregunta "1c" -Efectúa cálculos para el registro

que lo conforman.	medida en el cálculo de área. -Se aproxima a la respuesta experta pero omite la unidad de medida.	numérico utilizando fórmula. -Expresa la unidad de medida en cm y no en cm^2.

E10	E11	E12	E13
-Describe que para determinar el área de un rectángulo se requiere tener las medidas del rectángulo, sin especificar qué medidas. -Señala que para el área del rectángulo se multiplica la base por la altura y luego se divide en dos. -No efectúa cálculos numéricos. -Como conclusión plantea que en cada rectángulo se tienen dos triángulos de igual medida, en su región interior y que se sigue el mismo procedimiento.	-No realiza cálculos numéricos. -Expresa que se multiplican todos sus lados, sin especificar si se trata del rectángulo y/o el triángulo.	Expresa que para determinar el área del rectángulo y del triángulo ocuparía las fórmulas de área. - No realiza cálculos numéricos.	-Sus esquemas presentan cálculos para obtener el área de cada rectángulo y cada triángulo . -Omite la unidad de medida en el cálculo de área.

Análisis de la situación 1 letra c

E1	E2	E3
-Generaliza utilizando la expresión algebraica del esquema "b", es decir, escribe: Área rectángulo es igual a b • h . Área triángulo es	-No presenta problemas para determinar la expresión general para el área de triángulos. -Señala ,además: "que el triángulo ABC es congruente con el triángulo ADC. Para el área de un rectángulo expresa que se obtiene con la expresión: $a^2 \bullet b^2$	-Se basa en la figura geométrica para generalizar con expresión algebraica, alcanzando la respuesta experta.

igual a $\frac{b \cdot h}{2}$. -No utiliza la imagen y sus elementos para generalizar el cálculo de área.	-Al efectuar la entrevista semiestructurada señala que consideró un par de lados paralelos de medidas iguales y otro par de lados paralelos de medidas iguales. Luego aplicó el concepto de potencia. Expresó que después se dio cuenta de su error en entrevista semiestructurada	

E4	**E5**	**E6**
- Se basa en la figura geométrica para generalizar con expresión algebraica, alcanzando la respuesta experta.	-Se basa en la figura geométrica para generalizar con expresión algebraica, alcanzando la respuesta experta. -Para las expresiones algebraicas de área de rectángulos y triángulos utiliza la notación que indica la medida de los segmentos de cada figura, es decir: -Para área del rectángulo escribe: $\overline{DA}$ x $\overline{AB}$ o bien $\overline{BC}$ x $\overline{CD}$. -Para área del triángulo escribe: $\frac{\overline{DA}\ x\ \overline{DC}}{2}$ O bien $\frac{\overline{AB}\ x\ \overline{BC}}{2}$	- Se basa en la figura geométrica para generalizar ,con expresión algebraica, el área de ambas figuras. -Se observa que para el área del rectángulo utiliza dos notaciones: a)b • a y b)lado Ab•lado bc

E7	**E8**	**E9**
-Para el área del rectángulo presenta dos expresiones: Primero: $\overline{DA}$• $\overline{DC}$ y después escribe: $\frac{base\ \ x\ \ altura}{2}$	- Se basa en la figura geométrica para generalizar con expresión algebraica, alcanzando la respuesta experta	-Se basa en la figura geométrica para generalizar con expresión algebraica, alcanzando la respuesta experta

-Para el área del triángulo escribe: Δ_1 = $\overline{DA}$•$\overline{DC}$ Y también: Δ_2= $\overline{AB}$•$\overline{CB}$		

E10	E11	E12	E13
-Se basa en la figura geométrica para generalizar. -Para el área del rectángulo escribe:$\frac{\overline{DA}\ x\ \overline{AB}}{2}$ -Para el área del triángulo escribe: $\frac{\overline{DA}\, x\, \overline{AC}}{2}$,considerando la diagonal del rectángulo en el producto de segmentos. -Al efectuar la entrevista semiestructurada reafirma lo escrito y agrega que los dos triángulos “hacen la figura cuadrada”.	-Se basa en la figura geométrica para generalizar. -Para el área del rectángulo escribe: b^2 • a^2. -P ara el área del triángulo escribe: $\frac{b\ \cdot\ d}{2}$, considerando la diagonal. -En entrevista semiestructurada señala que se considera la expresión de área escrita para el rectángulo porque hay dos alturas y dos bases. Para el área del triángulo reconoce que cometió un error al considerar la diagonal para generalizar.	-Generaliza utilizando la expresión algebraica del esquema “b”, es decir, escribe: Área rectángulo es igual a b • h . Área triángulo es igual a $\frac{b{\cdot}h}{2}$.	-Se basa en la figura geométrica para establecer una expresión para área del rectángulo y para área del triángulo. -Para el área del rectángulo escribe: AD x AB x BC x CD. Utilizando la notación de segmento y no la de notación para indicar la longitud de cada segmento considerado. -Para el área del triángulo expresa: A= x^2= d^2 + b^2. En entrevista semiestructurada ,señala lo siguiente para la expresión de área de un triángulo: X= a^2 + b^2 = c^2

Categorización de la situación 1

Estudio de las categorías presentadas en la secuencia de situaciones por los 13 estudiantes para lograr la expresión algebraica de área de la superficie del rectángulo y área de la superficie de un triángulo

Situación 1: Conceptos en acto que el estudiante recuerda para la secuencia de tareas dadas y lograr el objetivo .

Las figuras de la situación 1 muestran 4 rectángulos con sus respectivas diagonales y en cada rectángulo se observan dos triángulos

- Para cada triángulo de la tarea 1, el estudiante recuerda que:

a) Es un polígono de tres lados y que sus elementos principales son sus lados ,vértices y ángulos.
b) La clasificación del triángulo según las características de sus lados es: triángulo equilátero, triángulo isósceles y triángulo escaleno.
c) La clasificación del triángulo según las características de sus ángulos es: triángulo acutángulo, triángulo rectángulo y triángulo obtusángulo.
d) Unidades de medidas basadas en el sistema métrico decimal
e) Distancia entre dos puntos
f) Notaciones simbólicas de geometría para la situación 1.
g) Concepto de congruencia, en el sentido de igualdad, ideal posibilidad de "sobreponer", (D´Amore,B. y Fandiño M. (2009)).
h) Noción de área de un triángulo

- Para cada rectángulo de la tarea 1 ,el estudiante recuerda que:

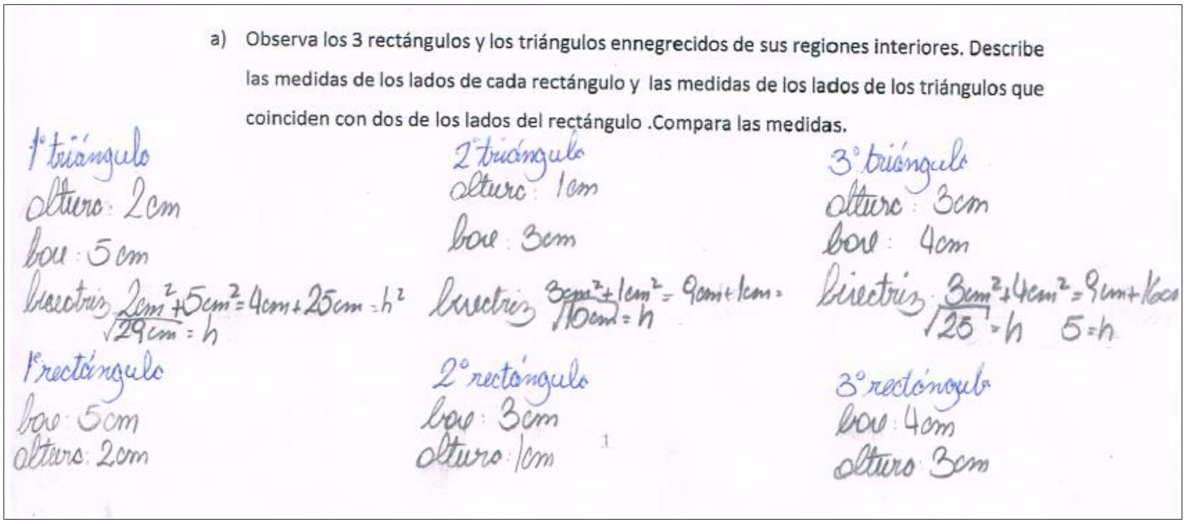
a) Es un polígono de cuatro lados que integra la clasificación de los cuadriláteros y , en particular, es un paralelogramo.
b) El rectángulo tiene sus lados opuestos paralelos
c) Sus lados opuestos son de igual medida .
d) Cada diagonal lo separa en dos triángulos rectángulos.
e) Sus diagonales son de igual medida.
f) Unidades de medidas basadas en el sistema métrico decimal
g) Distancia entre dos puntos
h) Notaciones simbólicas de geometría para la situación 1.
i) Noción de área de un rectángulo.

Situación 1a

Caracterización y teoremas en acto	N° de estudiantes de un total de 13	%
-Observa los rectángulos y triángulos, las medidas de cada uno de los lados que coinciden entre ellos y compara utilizando el registro numérico.	8	≈ 61,5 %
Demuestra confusión al incluir el teorema de Pitágoras para obtener la medida de la hipotenusa para el triángulo y la diagonal para el rectángulo como requisito para comparar.	7	≈53,8 %

Evidencia de la situación 1:

Estudiante E2. Situación 1a



a) Observa los 3 rectángulos y los triángulos ennegrecidos de sus regiones interiores. Describe las medidas de los lados de cada rectángulo y las medidas de los lados de los triángulos que coinciden con dos de los lados del rectángulo .Compara las medidas.

1° triángulo
altura: 2cm
base: 5cm
bisectriz $2cm^2+5cm^2=4cm+25cm=h^2$
$\sqrt{29cm}=h$

2° triángulo
altura: 1cm
base: 3cm
bisectriz $3cm^2+1cm^2=9cm+1cm=$
$\sqrt{10cm}=h$

3° triángulo
altura: 3cm
base: 4cm
bisectriz $3cm^2+4cm^2=9cm+16cm$
$\sqrt{25}=h$ $5=h$

1° rectángulo
base: 5cm
altura: 2cm

2° rectángulo
base: 3cm
altura: 1cm

3° rectángulo
base: 4cm
altura: 3cm

Análisis de la evidencia del estudiante E2 y la situación 1 a.

El estudiante recuerda y reconoce los rectángulos y triángulos de las figuras geométricas presentadas en la situación 1a, escribe las medidas usando la forma numérica y la unidad lineal, de las bases y alturas de cada uno de ellas, sin embargo presenta confusión al considerar que es importante en esta comparación nombrar la diagonal del rectángulo como bisectriz y calcular su medida utilizando el Teorema de Pitágoras. Al mismo tiempo a la diagonal le asigna la letra “h” como si fuese, la hipotenusa de cada triángulo rectángulo.

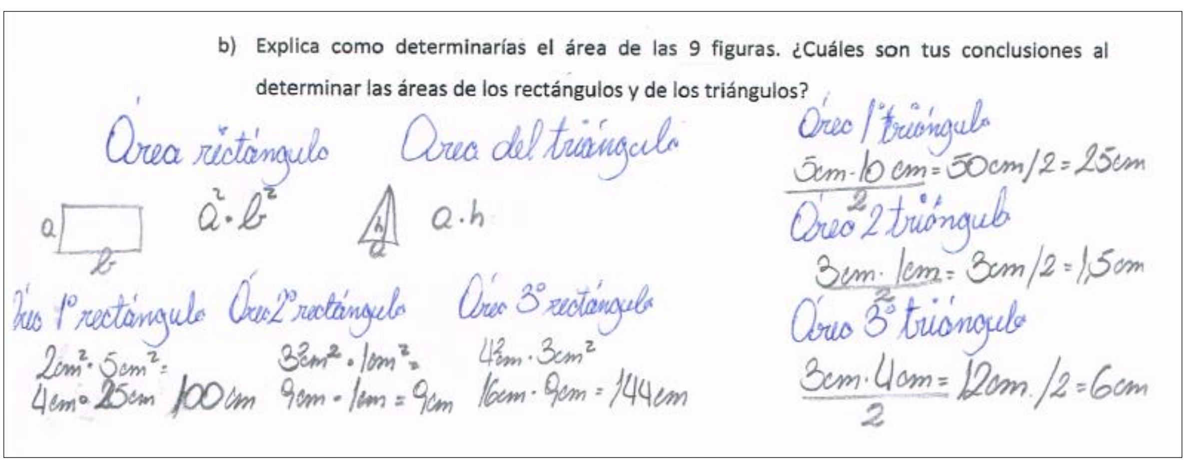
Según la evidencia, el estudiante se ubica dentro del 58,7% que demuestra confusión al incluir el teorema de Pitágoras para obtener la medida de la hipotenusa para el triángulo y la diagonal para el rectángulo como requisito para comparar.

Situación 1b

Caracterización y teoremas en acto	N° de estudiantes de un total de 13	%
Utiliza, en su esquema, las fórmulas de área para el rectángulo y el triángulo en lenguaje natural, no mencionando las unidades cuadradas.	4	≈ 31%

Utiliza, en su esquema, las fórmulas y cálculos para obtener el área del triángulo y de rectángulo, omitiendo la unidad de medida para superficie o bien expresando su respuesta en “cm”(unidad lineal).	**7**	≈ 54%
Utiliza, en su esquema, las fórmulas de área para el rectángulo en registro algebraico y/o lenguaje natural, calcula y expresa la unidad de superficie en “cm^2”	1	≈ 8%
No responde	1	≈ 8%

Estudiante E2. Situación 1b


b) Explica como determinarías el área de las 9 figuras. ¿Cuáles son tus conclusiones al determinar las áreas de los rectángulos y de los triángulos?

Análisis de la evidencia del estudiante E2 y la situación 1b.

El estudiante E2 presenta en sus esquema dibujos que representan el triángulo y el rectángulo, la fórmula para calcular el área de un triángulo en forma correcta y la fórmula para calcular el área de un rectángulo en forma incorrecta. En la expresión algebraica para calcular el área de un rectángulo presenta el producto de la base al cuadrado por la altura de él, también al cuadrado. Además, al efectuar los cálculos de área, la unidad de medida para área la escribe como unidad unidimensional y no como unidad bidimensional, tanto para el triángulo como para el rectángulo.

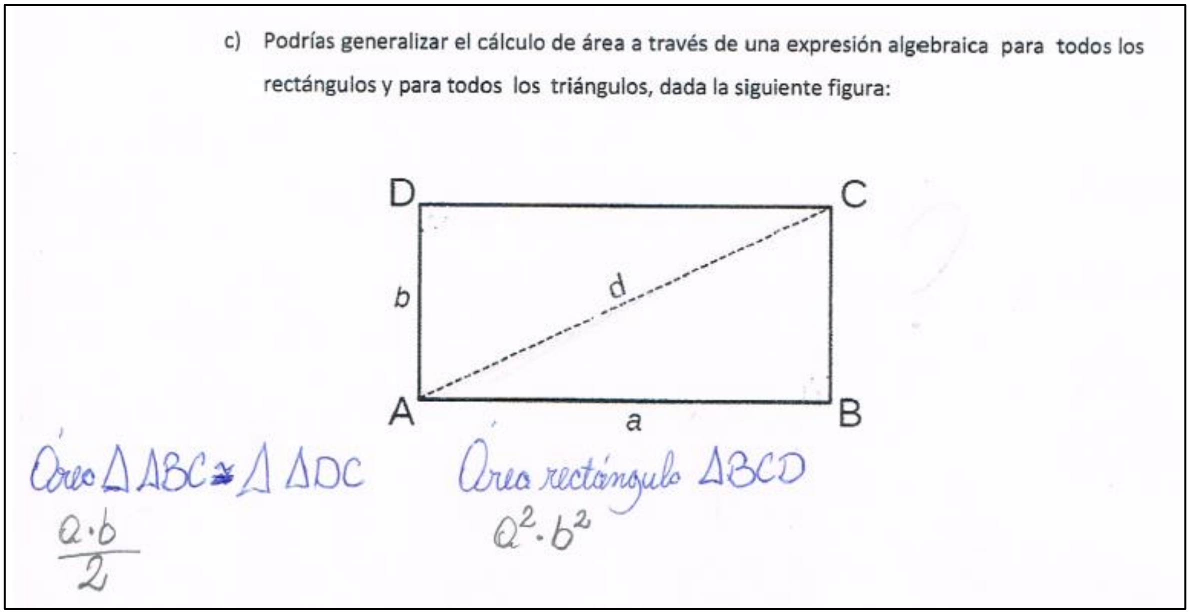
La evidencia del esquema, demuestra que E2 integra aquel grupo de estudiantes que utilizan fórmulas y presentan la unidad de medida, para el área, como unidad unidimensional o la omiten, y que corresponde al 54%, según el cuadro que precede al esquema del alumno.

Hay que agregar, según el cuadro de análisis que viene a continuación, que el estudiante E2 integra el conjunto de estudiantes que se caracteriza por lograr la expresión algebraica para el cálculo de área para uno de los dos polígonos, en este caso para el triángulo, pero no así para el rectángulo. Esto indica confusión, integrando el grupo de estudiantes que corresponde al 38% .

.**Situación 1c**

Caracterización y teoremas en acto	N° de estudiantes de un total de 13	%
Generaliza, para el cálculo del área del triángulo y del rectángulo, a través de las expresiones algebraicas que deduce de la tarea o bien que recuerda de etapas anteriores, de su proceso de aprendizaje.	8	≈62%
Logra la expresión algebraica para el cálculo de área para uno de los dos polígonos y para el otro no, y evidencia confusión.	5	≈38%

Estudiante E2. Situación 1c



Análisis de la evidencia del estudiante E2 y la situación 1c.

Basándose en la última figura de la tarea 1, el estudiante utiliza la noción de congruencia entre triángulos para escribir la expresión general, de tipo algebraico, para calcular el área de un triángulo, pero no explica para justificar. Para el área del rectángulo reitera lo expresado en la respuesta dada a conocer en el esquema 1b, reafirmando su confusión. Su respuesta confirma que integra el 38% de estudiantes que se confunden con las fórmulas ante una situación problemática de este tipo.

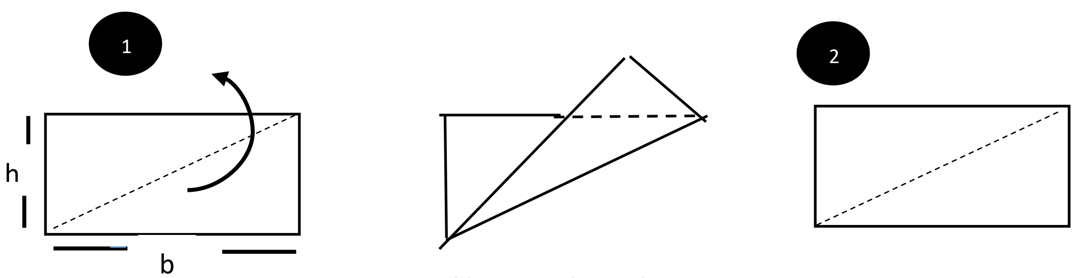
Análisis general de los esquemas presentados por E2:

El estudiante evidencia que utiliza los conceptos en acto al reconocer los rectángulos y triángulos de la situación , determinar las medidas de los segmentos solicitados, pero agrega el cálculo de la medida de la hipotenusa (diagonal del rectángulo),utilizando el Teorema de Pitágoras, para efectuar la comparación, lo cual no es condición necesaria para dar respuesta a la sub-tarea. Posteriormente, da a conocer sus esquemas que evidencian los teoremas en acto que utiliza para lograr el objetivo. En primer lugar , escribe la fórmula para obtener el cálculo del área del triángulo, en registro algebraico , luego la utiliza para expresar la medida de las superficies en registro numérico. En sus respuestas se observa que la unidad de medida para el área, se expresa desde la perspectiva de la unidimensionalidad. En segundo lugar, al escribir la fórmula del rectángulo , claramente demuestra confusión con las figuras compuestas de la tarea planteada. Frente a esto ,en entrevista semiestructurada , el estudiante reafirma la confusión al responder que consideró todos los lados de la figura del rectángulo, usando, finalmente, la expresión de potencia para la fórmula. Con respecto a esto último se puede inferir que su problema se origina a partir de la adquisición del concepto de perímetro, para el rectángulo, y el área de un cuadrado.

E2 se encuentra dentro del 53,8 % de los estudiantes que consideran que para comparar la base y la altura, del rectángulo y del triángulo es necesario calcular la medida de la diagonal e hipotenusa, respectivamente, en figuras compuestas. En relación a las unidades de medida para el área, el estudiante integra el grupo de aquellos que la expresan como unidad unidimensional o la omiten, y que corresponden al 54 % .Finalmente, E2 pertenece al 38 % que manifiesta confusión, al abordar la situación con figuras compuestas y dar a conocer la expresión algebraica para el rectángulo en forma errada. La expresión que da a conocer se basa en un producto entre medidas, pero cada una de ellas elevada al cuadrado, lo que demuestra que sus conocimientos son insuficientes o no fueron suficientemente aprehendidos para lograr el objetivo de la tarea dada,

5.2 Situación 2

2) Observa la siguiente secuencia en la que se representa un rectángulo que se dobla por su diagonal.



Doblar por su diagonal

a) Al observar la secuencia ¿Qué otra figura geométrica observas, además del rectángulo?
b) Al observar ambas figuras, ¿Cuáles son sus diferencias y qué tienen en común?
c) ¿Cómo obtendrías el área de ambas figuras? Explica
d) ¿Podrías encontrar una expresión para cada figura que permita calcular el área?

Objetivo de la situación 2: El estudiante conjetura para obtener la expresión algebraica de área de la superficie de un rectángulo y área de la superficie de un triángulo a través de una secuencia de situaciones e interrogantes.

Situación 2 letra a

E1	E2	E3
-No comprende en su totalidad la secuencia. -La figura intermedia ,que indica un doblez, según el enunciado, lo considera como otro polígono, agregando que es un pentágono irregular. -En entrevista semiestructurada que la figura intermedia la consideró señalando: “porque pude observar una imagen con 5 lados”	-Responde correctamente expresando que se tienen dos triángulos rectángulos.	-Expresa “triángulos”.

E4	E5	E6
-Responde correctamente expresando que se tienen dos triángulos rectángulos.	-No comprende en su totalidad la secuencia. -Expresa que observa dos triángulos congruentes. -La figura intermedia ,que indica un doblez, según el enunciado, lo considera como tres triángulos y también como una figura de 5 lados.	-No comprende en su totalidad la secuencia. -Responde que hay diferentes triángulos y en las figuras intermedia y número dos ,enumera los triángulos

E7	E8	E9
-No comprende en su totalidad la secuencia. -Expresa que hay 3 triángulos.	-Responde que observa un triángulo rectángulo.	-Responde que observa dos triángulos. No señala que tipo de triángulos. -Agrega que se tiene un polígono cóncavo, aludiendo a la figura que indica el doblez en la secuencia.

E10	E11	E12	E13

-Indica que observa triángulos en las regiones interiores del rectángulo	-Indica en una sola palabra lo que observa: “triángulos”.	-No comprende en su totalidad la secuencia. -La figura intermedia ,que indica un doblez, según el enunciado, lo considera como tres triángulos : un triángulo rectángulo , un triángulo equilátero y un triángulo isósceles.	Indica que observa: “dos triángulos”

Situación 2 letra b

E1	E2	E3
-Señala que se diferencian en la cantidad de lados. -Expresa que uno tiene 4 lados y el otro tiene 5, aludiendo a la figura del doblez. -Agrega que tienen en común la medida del ancho(h) que se mantiene en la figura 1 y en la figura del doblez. -No alude las características de la figura 2.	Expresa que ambas figuras tienen en común “su diagonal o bisectriz”. -No expresa diferencias.	-Expresa que al doblar el rectángulo por su diagonal se puede observar 2 triángulos congruentes inscritos en el rectángulo.

E4	E5	E6
-No responde.	Expresa que “ambos tienen h del mismo tamaño y tienen la misma diagonal. Explica que “ solo que cuando	Compara, expresando que el rectángulo tiene 4 lados y 2 diagonales. -Señala que el triángulo tiene 3 lados y no

	se dobla, el lado b los divide en 2.	contiene diagonales.

E7	**E8**	**E9**
-Señala que son distintas figuras. -Respecto a lo que tienen en común, su respuesta no es coherente.	-Observa, en las figuras 1 y 2 ,que ambas tienen las mismas dimensiones y que representan un rectángulo. -Señala que en la figura 2 esas dimensiones se dividen en dos por la figura del doblez.	-Señala que ambas figuras tienen la misma base y altura. -Considera que la diferencia es que cambian de posición.

E10	**E11**	**E12**	**E13**
-Observa que las dos figuras son iguales y que tienen el doblez en su diagonal	-Señala que ambas figuras tienen en común triángulos.	-Señala que no hay diferencias. -Considera la imagen intermedia para expresar que se tienen tres triángulos	Expresa que en la primera figura, al doblar considerando la diagonal, se obtienen dos triángulos rectángulos(usa simbología ∆□). -Señala que en común se tienen triángulos rectángulos.

Situación 2 letra c

E1	**E2**	**E3**
-Explica que el área de ambas se obtiene: Para el rectángulo b • a. Para el triángulo $\frac{b \cdot a}{2}$	-Explica que el área de ambas se obtiene: Área del triángulo: $\frac{b \cdot h}{2}$. Para el área del rectángulo escribe: $b^2 \bullet h^2$	-Explica que el área de ambas se obtiene: Explica en lenguaje natural y simbólico que el área del rectángulo se calcula multiplicando base por altura, es decir: h x b. -Expresa que se

		multiplica la altura por la base y luego se divide en dos debido a que será la mitad del rectángulo, es decir: $\frac{h \cdot b}{2}$

E4	E5	E6
Explica en lenguaje natural y simbólico: El área del rectángulo se obtiene multiplicando B • a. El área del triángulo se obtiene multiplicando b • a y luego dividido en 2.	-Expresa que en la figura 1 el área se obtiene con : h x b -Observa únicamente la figura intermedia del doblez, expresando que se tienen 3 triángulos y que se suman.	-Señala en lenguaje natural. “utilizando las fórmulas para calcular el área de cada figura ,en este caso, la del rectángulo y del triángulo.

E7	E8	E9
Señala en lenguaje natural “multiplicando el lado por el ancho o todos sus lados”.	-Explica que ambas figuras tienen la mismas dimensiones las cuales representan un rectángulo. En la figura 2 ,esas dimensiones se dividen en dos ,debido a la figura 2.	-Explica que “al ser ambas la misma figura ,solo con una posición distinta, se puede saber el área de ambas, solo teniendo conocimiento de las medidas de una figura”.

E10	E11	E12	E13
-Responde que para ambas figuras se multiplica “b” por “h” dividido en dos , es decir: $\frac{b\ x\ h}{2}$	Expresa “ que se saca el área del rectángulo, y dividiendo en 2 , para el triángulo”.	Responde que para obtener el área del rectángulo le asignaría valores a sus respectivos lados y luego ocuparía la fórmula.	-Señala , solamente, que se multiplica el lado por el ancho.

Situación 2 letra d

E1	E2	E3
-Expresa que una expresión para el área es lo más seguro, considerando que se tienen las medidas de base y altura(b •h).	Reitera la respuesta dada en 2c : Área del triángulo: $\frac{b \cdot h}{2}$ Área del rectángulo: $b^2 \bullet h^2$	Escribe: Área del rectángulo: h • b Área del triángulo: $\frac{h \bullet b}{2}$

E4	E5	E6
-Esquematiza dibujando para dar a conocer sus expresiones algebraicas de área: Para el área del rectángulo expresa “b • a” Para el área del triángulo señala: $\frac{b \bullet a}{2}$	-Basándose en las figuras 1 y 2 escribe : h•b para el área del rectángulo. -Se confunde con la imagen intermedia ya que intenta generalizar con expresiones algebraicas, a partir de lo que visualiza, el área de 3 triángulos.	-Expresa lo siguiente en registro algebraico: Área del rectángulo: b • h. Área del triángulo: $\frac{b \cdot h}{2}$

E7	E8	E9
Señala: Área del triángulo: $\frac{base \ \cdot altura}{2}$ Área del rectángulo: L•L=L^2	-Expresa : Para el triángulo $\frac{b \ x \ H}{2}$ Para el rectángulo B x H.	-Considera que al ser la misma figura ,una expresión serviría para ambas. Añade que ,también, se le puede asignar distintas letras a cada lado , pero, “mantener las mismas medidas”. Agrega dos imágenes de rectángulos ,asignando letras diferentes para señalar los lados. Para el área de la figura 1 a • b y M•J para la figura 2 .

E10	E11	E12	E13
Expresa que: Para el área del triángulo se tiene: $\frac{b\ x\ h}{2}$ Para el área del rectángulo se tiene: $\frac{h\ x\ b}{2}$	-Solo escribe: h • b • h • b	-Las expresiones que señala son: 1) Para la figura 1 escribe el área del triángulo: $\frac{b \cdot h}{2}$ No señala una expresión para el rectángulo. 2) Considera la figura intermedia que indica el doblez por la diagonal del rectángulo y suma lados de la siguiente manera: A + B + C +D+E. 3) Para la figura 3 escribe: A+B+C O bien $c^2 = a^2 + b^2$	-Escribe en lenguaje natural: “lo podría hacer con una regla y ver la medida o que las figuras tuvieran solo un número.

Situación 2.

Estudio de las categorías presentadas en la secuencia de situaciones por los estudiantes para lograr la expresión algebraica de área de la superficie del rectángulo y área de la superficie de un triángulo

Situación 2: **conceptos en acto** que el estudiante recuerda para la secuencia de tareas dadas y lograr el objetivo .

Las figuras de la situación 2 muestra 2 rectángulos con sus respectivas diagonales y una figura intermedia que ,según la tarea, indica el doblez del rectángulo utilizando la línea segmentada que corresponde a una diagonal.

- Para cada triángulo de la tarea 2, el estudiante recuerda que:

a) Es un polígono de tres lados y que sus elementos principales son sus lados ,vértices y ángulos.
b) La clasificación del triángulo según las características de sus lados: triángulo equilátero, triángulo isósceles y triángulo escaleno.
c) La clasificación del triángulo según las características de sus ángulos: triángulo acutángulo, triángulo rectángulo y triángulo obtusángulo.
d) Concepto de congruencia, en el sentido de igualdad, ideal posibilidad de “sobreponer” (D´Amore,B. y Fandiño M. (2009)).
e) Notaciones simbólicas de geometría para la situación 2.

f) Noción de área de un triángulo

- Para el rectángulo de la tarea 2 ,el estudiante recuerda que:

a) Es un polígono de cuatro lados que integra la clasificación de los cuadriláteros y , en particular, es un paralelogramo.
b) El rectángulo tiene sus lados opuestos paralelos
c) Sus lados opuestos son de igual medida .
d) Cada diagonal lo separa en dos triángulos rectángulos.
e) Sus diagonales son de igual medida.
f) Notaciones simbólicas de geometría para la situación 2
g) Noción de área de un rectángulo.

Situación 2

Caracterización y teoremas en acto	N° de estudiantes de un total de 13	%
A través de la visualización conjetura que la diagonal divide el rectángulo en 2 triángulos congruentes y que por lo tanto sus expresiones algebraicas para el área del rectángulo es b•h y para el área de cada triángulo es $\frac{b \bullet h}{2}$	6	≈46%
Expresa confusión a través de sus esquemas dando a conocer que las expresiones algebraicas para el triángulo y el rectángulo es la misma (b •h o bien $\frac{b \bullet h}{2}$) o expresando que la expresión general para el rectángulo es $b^2 \bullet h^2$ y que para el triángulo es $\frac{b \bullet h}{2}$	7	≈54%

Evidencia de la situación 2:

Estudiante E10. Situación 2a

a) Al observar la secuencia ¿Qué otra figura geométrica observas, además del rectángulo?

Observo triongulos en los regiones interiores del rectongulo

Estudiante E10. Situación 2b

b) Al observar ambas figuras, ¿Cuáles son sus diferencias y qué tienen en común?

No presentan diferencia ambas figuras, sino, tienen en común que ambas son iguales y tienen el mismo dobles en su diagonal.

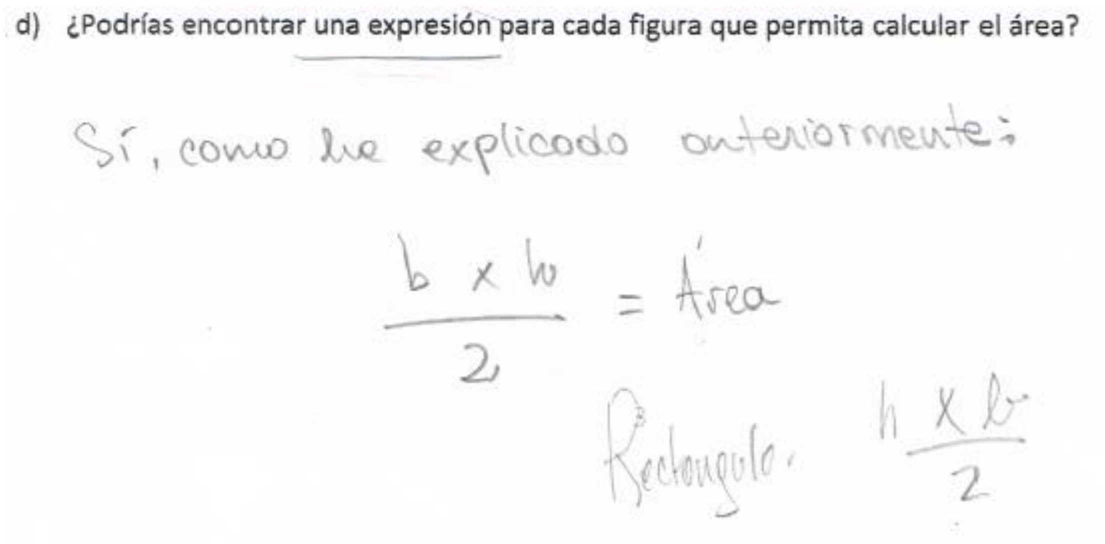
Estudiante E10. Situación 2c

c) ¿Cómo obtendrías el área de ambas figuras? Explica

Multiplicando b por h dividido en dos y así obtener el área requerida.

$$\left(\frac{b \times h}{2}\right)$$

Estudiante E10. Situación 2d


d) ¿Podrías encontrar una expresión para cada figura que permita calcular el área?

Sí, como he explicado anteriormente:

$$\frac{b \times h}{2} = \text{Área}$$

Rectángulo. $\frac{h \times b}{2}$

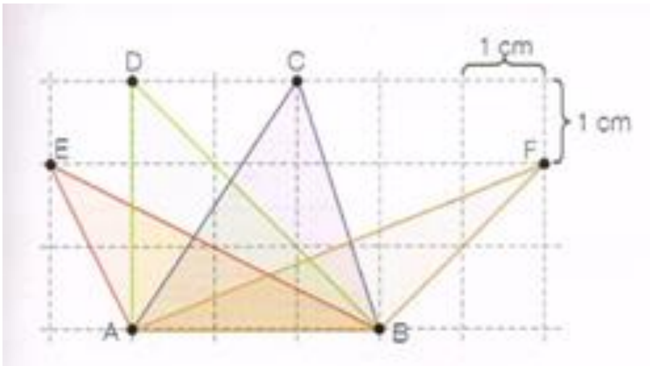
Análisis de la situación 2 a, 2b 2c y 2d,

E10 reconoce claramente las figuras y los conceptos implícitos que da a conocer la situación 2 pero manifiesta confusión, con los teoremas en acto , al señalar la misma expresión general para el cálculo del área , tanto para el rectángulo como para el triángulo. El estudiante forma parte del grupo del 54% que expresa confusión a través de sus esquemas, dando a conocer que las expresiones algebraicas para el triángulo y el rectángulo es la misma (b •h o bien $\frac{b \bullet h}{2}$) o bien que para el rectángulo es $b^2 \bullet h^2$ y que para el triángulo es $\frac{b \bullet h}{2}$

El estudiante pertenece al 54 % de aquellos que presentan problemas, cuando se complejizan las tareas dadas. En este caso se trata de una situación en la cual no se requiere de medidas expresadas numéricamente, para conjeturar y obtener la expresión general para calcular el área de una superficie poligonal, relacionada con el rectángulo y el triángulo. E10 demuestra que se confunde al argumentar los procesos relacionados con las sub-tareas, para alcanzar el objetivo de la situación 2 ya que, si bien es cierto, observa los dos triángulos que se forman al efectuar el doblez del rectángulo a través de su diagonal, no logra comprender que dicho doblez cumple con la función de dividir en dos triángulos dicho rectángulo y que por lo tanto esto da origen a dos expresiones distintas para calcular el área del triángulo y del rectángulo. Una vez más se evidencia, en este alumno de pregrado en educación básica, que la adquisición de los conceptos adquiridos en su trayectoria no han sido suficientemente asimilados de modo que pueda enfrentar satisfactoriamente este tipo de problemas.

5.3 Situación 3.

3) Analiza los triángulos y luego completa la tabla.



Triángulo	Medida de la Base	Medida de la altura	Área
ABE			
ABD			
ABC			
ABF			

a) ¿Cuáles triángulos tienen igual área?
b) Explica las características que se deben cumplir para que tengan igual área.
c) ¿Qué ocurre con el área si a todos los triángulos se les aumenta en 2cm su base y se conserva la medida de altura? Explica

Objetivo de la situación 3: El estudiante debe aplicar conceptos y propiedades involucrados en la figura geométrica para dar respuestas a las diversas interrogantes y determinar que aquellos triángulos que conservan la misma base y la misma altura tienen la misma área.

Situación 3: Cuadro comparativo que considera la base , la altura de triángulos y el cálculo de área , utilizando cuadrículas.

E1	**E2**	**E3**
-Al señalar las alturas presenta problema con la medida de ellas de los triángulos obtusángulos lo cual afecta el cálculo del área de los triángulos ABE Y ABF. - Para el área de los triángulos utiliza la unidad de medida cm	-El área de cada triángulo se presenta en términos numéricos en forma correcta. - Para el área de los triángulos utiliza la unidad de medida cm y no cm^2.	-El área de cada triángulo se presenta en términos numéricos y con la unidad de medida en forma correcta. -Presentó la altura del ∆ABF como 1,1 cm en lugar de 2 cm. En entrevista semiestructurada se le

y no cm^2.		pide que explique. Responde así: “Me equivoqué, error de conteo de cuadrícula”.

E4	E5	E6
-El área de cada triángulo se presenta en términos numéricos en forma correcta. - Para el área de los triángulos utiliza la unidad de medida cm y no cm^2.	-El área de cada triángulo los calcula utilizando únicamente el producto de base por altura. En cada caso no divide en dos. -Para el área de cada triángulo utiliza cm^2.	- El área de cada triángulo se presenta en términos numéricos en forma correcta. -Omite la unidad de medida.

E7	E8	E9
-El área de cada triángulo los calcula utilizando únicamente el producto de base por altura. En cada caso no divide en dos. -Para la base y altura utiliza la unidad de medida “cm”. -Omite la unidad de medida para el área. -Presenta problemas con la altura de los triángulos obtusángulos.	- El área de cada triángulo se presenta en términos numéricos en forma correcta. --Para la base y altura utiliza la unidad de medida “cm”. -Omite la unidad de medida para el área de los triángulos	- El área de cada triángulo se presenta en términos numéricos en forma correcta. -Para la base y altura utiliza la unidad de medida “cm”. - Para el área de los triángulos utiliza la unidad de medida cm y no cm^2

E10	E11	E12	E13
- El área de cada triángulo se presenta en términos numéricos en forma correcta. -Para la base y altura utiliza la unidad de medida	-Identifica la base y altura de tres de los triángulos dados. -Calcula el área de tres triángulos. -Presenta problemas para determinar la	-El área de cada triángulo se presenta en términos numéricos en forma correcta. - Para el área de los triángulos utiliza la unidad de	- El área de cada triángulo los calcula utilizando únicamente el producto de base por altura. En cada caso no divide en dos. -Para la base y

"cm". - Para el área de los triángulos utiliza la unidad de medida cm y no cm^2	medida de la altura de un triángulo obtusángulo. -Presenta problemas para calcular el área de un triángulo obtusángulo. -Omite la unidad de medida.	medida cm y no cm^2.	altura utiliza la unidad de medida "cm". -Omite la unidad de medida para área.

Situación 3 letra a

E1	E2	E3
-Expresa que solo dos triángulos tienen la misma área. -En entrevista semiestructurada se le interroga sobre cómo identifica la altura de cada triángulo. Responde: "Solo una medida aproximada ,desde lo más cercano a un ángulo de 90°(recto) desde la base".	-Como respuesta señala lo siguiente: $\Delta ABE \cong \Delta ABF$ $\Delta ABD \cong \Delta ABC$	-Solo determinó a través de cálculos que dos triángulos poseen la misma área. Expresa lo siguiente: Á ΔABC= Á ΔABD

E4	E5	E6
-Responde que solo los triángulos ABD Y ABC tienen la misma área.	-Efectuó el cálculo de área para triángulos como si fuesen rectángulos y sus respuestas lo hacen deducir que los triángulos ABE y ABF tienen la misma área entre sí y los triángulos ABD Y ABC tienen la misma área entre sí. Expresa que aunque tengan la misma área ,eso no implica que la	Señala: El ΔABE con el ΔABF. El ΔABD con el ΔABC.

	forma de ellos sea “igual”.	

E7	E8	E9
-Las áreas de los triángulos calculadas presentan errores Y en base a esto responde que presentan la misma área los triángulos ABD Y ABF.	-En su comparación de área de triángulos presenta los pares de triángulos de la misma área. -Incorpora la unidad de medida como “cm” y no como “cm^2 “	-En su comparación de área de triángulos presenta los pares de triángulos de la misma área. -Reitera lo expresado con anterioridad: la unidad de medida como “cm” y no como “cm^2 “

E10	E11	E12	E13
-Señala que: “son iguales” : ΔABE=ΔABF ΔABD=ΔABC	-Solo considera un par de triángulos para responder: Escribe ABD=ABC	Señala: Los Δ ABE= ABF Los Δ ABD=ABC	-Efectuó el cálculo de área para triángulos como si fuesen rectángulos y sus respuestas lo hacen deducir que los triángulos ABD y ABC tienen la misma área entre sí . -En entrevista semiestructurada se le interrogó para que explicara el proceso para calcular el área de cada triángulo y expresó que “contó los cuadros”.

Situación 3 letra b

E1	E2	E3
-Expresa: Deben tener la misma	- Señala: “mismas medidas”.	-Escribe: “misma base, misma

medida en la base y la altura	-En entrevista semiestructurada se le pregunta qué significa “mismas medidas”, para él y cuáles son esas medidas. Él explica que: 23cm de base y 2cm de altura (2 figuras iguales).	altura” , “base y altura congruentes”.

E4	**E5**	**E6**
-Señala: Las características que deben tener son: misma base y misma altura, y por lo tanto el resultado de esas dos multiplicadas y divididas en dos debe dar lo mismo.	Expresa: Deben tener la misma medida en la base y la altura	Explica: “Como la fórmula utilizada fue : Á ∆ = $\frac{b \bullet h}{2}$ Y cada cuadrado tenía lados de 1 cm ,al repetirse la base y la altura el resultado debe ser igual”.

E7	**E8**	**E9**
- Expresa: Deben tener la misma medida en la base y la altura.	- Expresa: Deben tener la misma medida en la base y la altura.	- Expresa: Deben tener la misma medida en la base y la altura.

E10	**E11**	**E12**	**E13**
-Explica: “Para que tengan igual área deben cumplir que al multiplicar la base del triángulo por la altura de esta y dividirlo en dos , el resultado de lo mismo, por ende , tendrán la misma área”.	- Expresa: Deben tener la misma medida en la base y la altura	-Escribe: “Las características que se deben cumplir es que tengan la misma base y altura para que el área sea igual”.	-Señala: “Tienen que tener igual medida”.

Situación 3 letra c

E1	E2	E3
-Señala que al cambiar la medida de la base y conservar la altura "a todos los triángulos le cambiaría la medida ,mientras que a los triángulos ABD ABC ,no les afectaría el cambio , ya que seguirían teniendo la misma medida de área.	-Efectúa los cálculos de área correspondientes con la unidad de medida en "cm" y no en "cm^2 ". -No explica.	-Señala que aumenta en 2 su área. -En entrevista semiestructurada se le pregunta ¿En todos los triángulos va a ocurrir que el área aumenta en "2 cm", según tu respuesta? Se le pide que explique. Responde lo siguiente: "Sin darme cuenta ,en mi confusión , pensé que también era esa diferencia de 2 cm, asumiendo que en todos el área aumentaba en 2. Sólo fue un problema de confusión al dejar el ejercicio al final ,con lo que yo cargaba con el estrés de los demás ejercicios". Posteriormente realizó nuevamente cálculos, con errores.

E4	E5	E6
Escribe: "aumenta el área ,puesto que el resultado al dividir por 2 aumenta". -Realiza cálculos para el ΔABD pero no compara con las áreas de los otros triángulos.	-Expresa que el área cambia de medida ,ya que aumentamos la base también esta aumentará".	-Expresa que cambia y aumenta el resultado del área en el caso de los triángulos ABE y ABF, su resultado aumenta 2 cm Y en el caso de los triángulos ABD Y ABC ,su resultado aumenta en 3 cm.

E7	E8	E9
-Expresa que el área cambiaría porque cambiaría el resultado de	-Explica que al aumentar 2 cm se "extiende" su área .	-Señala que el área total aumenta en todos los casos .

la multiplicación.	-Ejemplifica con el ∆ABE .Señala que quedaría así: 5 x 2 = $\frac{10}{2}$ = 5	-Efectúa los cálculos del área de cada triángulo omitiendo la unidad de superficie. -Concluye que los triángulos ABE y ABF aumentan "2 cm" y los triángulos ABD y ABC aumentan "3 cm". -Agrega la unidad de medida en cm y no en cm^2

E10	**E11**	**E12**	**E13**
-Expresa que "aumentaría y alteraría el resultado de las áreas ,sin embargo ,los triángulos que se consideraban iguales lo seguirán siendo". -Efectúa cálculos para el área de triángulos con unidad en "cm".	-Escribe: "aumenta de igual manera el área ya que se modifica una medida".	-Explica: "Toda su base aumenta al doble pero su altura queda igual formando un triángulo isósceles , manteniendo así la igualdad de los triángulos ,es decir, que tienen la misma medida"	-"Señala que sería el mismo proceso solo que con otro resultado".

Situación 3.

Estudio de las categorías en la secuencia de situaciones presentadas por los estudiantes en torno a la conservación del área dada la misma base y la misma altura de un triángulo.

Situación 3 : Conceptos en acto que el estudiante recuerda para la secuencia de tareas dadas y lograr el objetivo .

El estudiante debe observar 4 triángulos donde se utilizan cuadrículas y un cuadrado unitario de lado 1 cm , responder las interrogantes , determinar aquellos que tienen la misma área y lograr el objetivo

- Para los triángulos de la tarea 3, el estudiante recuerda que:

a) Es un polígono de tres lados y que sus elementos principales son sus lados ,vértices y ángulos.

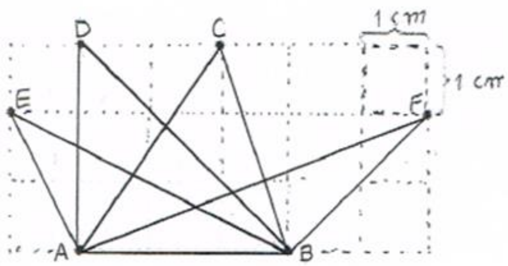
b) La clasificación del triángulo según las características de sus lados: triángulo equilátero, triángulo isósceles y triángulo escaleno.
c) La clasificación del triángulo según las características de sus ángulos: triángulo acutángulo, triángulo rectángulo y triángulo obtusángulo.
d) El elemento secundario relacionado con las alturas de un triángulo.
e) Concepto de congruencia, en el sentido de igualdad, ideal posibilidad de “sobreponer”, (D´Amore,B. y Fandiño M. (2009)
f) El cuadrado unitario.
g) Unidades de medidas basadas en el sistema métrico decimal
h) Notaciones simbólicas de geometría para la situación 3.
i) Noción de área de un triángulo.

Primer Análisis Evidencia de la situación 3: Estudiante E13. Situación relacionada con la completación de la tabla dada.

Análisis de la tabla de completación perteneciente al estudiante E13.

Situación3: Teoremas en acto	N° de estudiantes de un total de 13	%
Aplican la fórmula para calcular el área de los triángulos y concluyen que los triángulos que presentan la misma base y altura tienen la misma área.	7	≈54%
Aplican la fórmula del rectángulo o bien se confunden con la altura del triángulo obtusángulo para obtener el área de los triángulos. Esto significa que no logran concluir que si los triángulos tienen la misma base y la misma altura, tienen la misma área.	6	≈46%

3) Analiza los triángulos y luego completa la tabla.



Triángulo	Medida de la Base	Medida de la altura	Área
ABE	4 cm	2 cm	8
ABD	3 cm	3 cm	9
ABC	3 cm	3 cm	9
ABF	3 cm	2 cm	6

La evidencia del estudiante E13 muestra que al efectuar el cálculo de áreas para cada triángulo, considera algunos valores numéricos con error, el producto de la base por la altura no la divide en dos y omite la unidad de medida para expresar la medida de la superficie de ellos. El estudiante integra el grupo del 39% que omite la unidad de medida para el área de los triángulos, por un lado, y por otro lado, pertenece al 46% de ellos que confunde los procesos para obtener el área de un triángulo con aquel que corresponde al área de un rectángulo, según la tabla de análisis que viene a continuación.

Segundo análisis

Situación 3: Teoremas en acto: determinar el área de un triángulo unida a la unidad de medida	N° de estudiantes de un total de 13	%
La omiten	5	≈39%
La expresan en “cm”	6	≈46%
La expresan en “cm^2”	2	≈15%

Tercer análisis

Situación 3: Teoremas en acto: Si la base de cada triángulo se aumenta en 2 cm y la altura se conserva, los estudiantes	N° de estudiantes de un total de 13	%
Explican que aumenta el área, sin realizar cálculos.	2	≈15%
Explican, en lenguaje natural y en registro numérico, que el área cambia.	6	≈46%
Explican en forma confusa y en base al error del cálculo del área , que ésta aumenta.	5	≈39%
Al aumentar la base en 2 cm y conservar la altura, los estudiantes no presentan esquemas para analizar lo que ocurre con la forma de los triángulos dados y sus respectivas áreas.	13	≈100%

Estudiante E13. Situación 3a

a) ¿Cuáles triángulos tienen igual área?

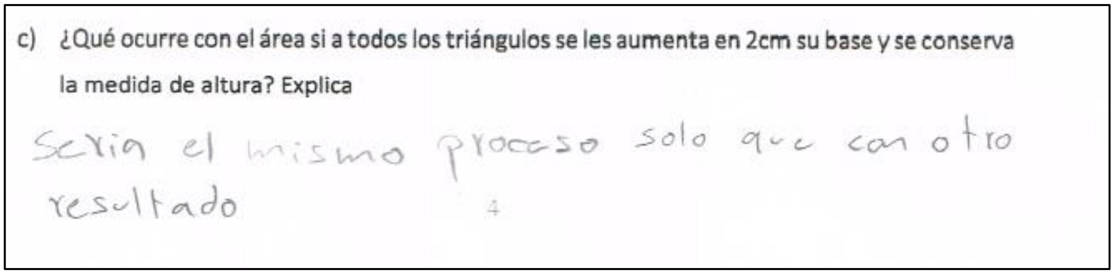
El ABD y el ABC

Estudiante E13. Situación 3b

b) Explica las características que se deben cumplir para que tengan igual área.

tienen que tener igual medida.

Estudiante E13. Situación 3c


c) ¿Qué ocurre con el área si a todos los triángulos se les aumenta en 2cm su base y se conserva la medida de altura? Explica

Seria el mismo proceso solo que con otro resultado

4

Análisis de los esquemas 3 a, 3 b, 3 c, presentados por E13:

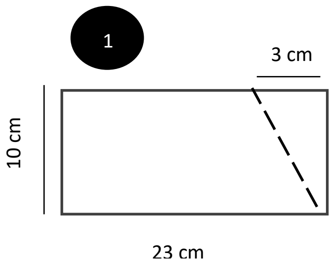
Con respecto a la situación 3a, el estudiante E13 responde que sólo los dos triángulos acutángulos tienen la misma área, dejando sin respuesta lo que sucede con los otros dos triángulos obtusángulos. La tarea 3b solicita que exprese las características que se requieren para que los triángulos posean la misma área, respondiendo que tienen que tener igual medida, sin extender su explicación dada en lenguaje natural. De la situación 3c, que plantea el problema del cambio de la medida de la base común de cada triángulo, conservando la medida de la altura, el estudiante señala que "sería el mismo proceso solo que con otro resultado". Lo expresado por E13, lo ubica en el grupo del 39% donde los estudiantes explican en forma confusa y en base al error del cálculo del área, que ésta, aumenta. Además, integra la categoría del 100% de ellos, que se caracteriza por el hecho de que al aumentar la base en 2 cm y conservar la altura, los estudiantes no presentan esquemas para analizar lo que ocurre con la forma de los triángulos dados y sus respectivas áreas

Análisis general de la situación 3.

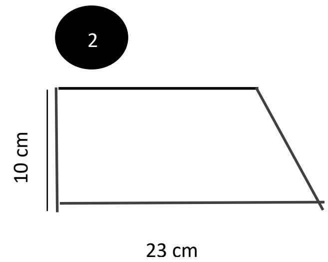
En general, el estudiante E13, al calcular el área de un triángulo como si fuese un rectángulo, evidencia que aquellas fórmulas adquiridas de memoria, se olvidan y no le permiten lograr la respuesta experta. Por otro lado ,el estudiante omite la unidad de medida para calcular el área de los triángulos, lo que indica que sus cálculos relacionados con la medida de una superficie están desconectados de las unidades bidimensionales. En síntesis, sus esquemas muestran que los conceptos y propiedades para obtener el objetivo no ha sido asimilados satisfactoriamente para abordar este tipo de situaciones geométricas..

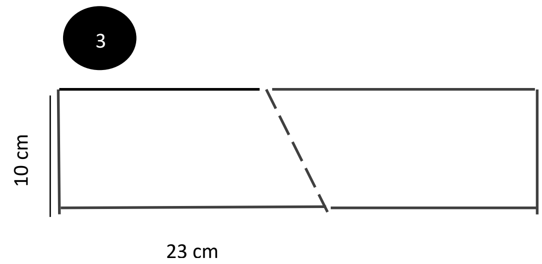
5.4 Situación 4

4) José tiene un trozo de madera con forma de rectángulo y le recorta un trozo triangular. Él quiere unir el trozo de madera recortado con el de la figura 2, obteniendo el trozo de madera de la figura 3.



La figura representa el recorte del trozo triangular en el rectángulo





La figura representa dos trozos de maderas con iguales características

a) Explica como calcularías el área del rectángulo de la figura 1, sin el recorte.
b) Explica como obtendrías el área de la figura 2.
c) La figura 1, recortada, se une con la figura 2, como se muestra en la figura 3. Explica con tus propias palabras porque se pueden unir ambos trozos.
d) Explica el proceso que te permite determinar el área de la figura 3.

Objetivo de la situación 4: El estudiante determina, a través de una secuencia de situaciones contextualizadas, el área de un rectángulo.

Situación 4 letra a

E1	**E2**	**E3**
-Expresa: b • h -Calcula 23 • 10 = 230 cm -La unidad de medida la señala en cm.	-Escribe en lenguaje natural: “calculo el área completa del rectángulo y luego el área del trozo y lo resto” -No calcula.	-Señala: Área del rectángulo 1 = 10 x 23 = 230 cm^2

E4	**E5**	**E6**
-Calcula 10 • 23 = 230. -Omite la unidad de superficie.	-Escribe en lenguaje natural: 1)”Sacar área del recorte”.	-Expresa que “utilizando la fórmula del área en este caso: 10 • 23 → 230 cm

	2)"Sacar área del rectángulo total. 3)"Luego , restarle al rectángulo total el área del recorte" -Se observa que se anticipa con la respuesta de 4b.	- La unidad de medida la señala en cm.

E7	**E8**	**E9**
Escribe :"largo por ancho porque el recorte que queda del trozo será de la misma medida"	-Calcula: 26 x 10 = 260 cm. -Obtiene un cálculo con error. -La unidad la expresa en cm y no en cm^2. -Explica que procedió "calculando la base sin descontar los 3 cm x altura".	-Expresa en lenguaje natural "calculo el área del triángulo total y luego le resto el área del recorte". -Calcula el área del rectángulo: 10 •23 = 230 cm. Utilizando la unidad cm. -Calcula el área del triángulo: $\frac{3 \cdot 10}{2} = \frac{30}{2}$ = 15 cm , Utilizando la unidad en cm.

E10	**E11**	**E12**	**E13**
-Señala: "seguiría→ haciendo el mismo procedimiento de calcular área: $\frac{23\ x\ 10}{2} = \frac{230}{2} = 115cm$ → Área	Expresa "con la fórmula a^2•b^2 Sería 10^2+23^2= 100 + 529 =629	-Expone textualmente: "Para calcular el área del rectángulo ocupo la fórmula : b•h = 23 • 10 cm = 230 cm. - La unidad de medida la señala en cm.	-Escribe: "multiplicaría el largo por el ancho".

Situación 4 letra b

E1	E2	E3
-Señala: " calcularía las áreas del rectángulo completo y también el área del triángulo que se extrajo. Después restaría al rectángulo el valor del área del triángulo"	-Realiza cálculos tales como: Para área del triángulo: $\frac{3 \cdot 10}{2} = \frac{80}{2}$ = 15 cm. Para área del rectángulo: $10^2 \cdot 23^2$=100•529= 52900cm. Finalmente, realiza una sustracción : 52900 – 15 52885cm	-Realiza el siguiente esquema: Á∆= $\frac{3cm\ x\ 10cm}{2} = 15cm^2$ Luego ,calcula: Á figura 2 = 230cm^2–15cm^2= 215cm^2

E4	E5	E6
-Presenta esquema en lenguaje natural y simbólico: "El área de la figura 2 lo obtengo sacando el área del triángulo que se forma al final". Señala: 20 •10= 200. 3•10= $\frac{30}{2}$=15 Luego, escribe: "área total 215"	-Presenta esquema en lenguaje natural y simbólico: "primero sacaría el área del triángulo que recortamos al principio(3 x 10= 30cm^2),luego sacaría el área del cuadrilátero que queda (10 x 23 = 230 cm^2),luego los resultados los restaría".	-Presenta un esquema confuso: "como el recorte mide 3cm • 10cm , la altura del lado derecho cambia por lo tanto hay que calcular la hipotenusa la cual sería $\sqrt{109}$ Y también el ancho cambia ,para eso al 23–3 →20. Para calcular el área multiplicaría el 10•23 y luego le retaría el resultado del área del tozo recortado.

E7	E8	E9
-Solo expresa en lenguaje natural "multiplicando base por	-Su esquema es el siguiente: 23 x 10 = 230cm	-Explica que utiliza la respuesta del ejercicio a ,restando las medidas. –

altura”.	-Agrega “calculando la base con los 3cm descontados”	efectúa la sustracción y obtiene: Área del rectángulo = 215 cm . -Considera el trapecio como un rectángulo. -Su unidad de medida es cm.

E10	E11	E12	E13
-Considera que se procede “exactamente igual que la figura 1 ya que presenta la misma medida y presenta el recorte”. -Escribe:$\frac{23 \cdot 10}{2} = 115\ cm$,utilizando cm.	-Para el área del trapecio expresa en lenguaje natural: “trazo una línea desde arriba hacia abajo hasta formar un triángulo y un rectángulo y luego sumo sus áreas”.	Expresa en lenguaje natural: “Para poder sacar el área le quitaría 2cm a la base quedando en 23cm y de esta manera tendría una figura rectangular regular y recién ahí ocuparía la fórmula que ya conocemos”.	Para el área del trapecio explica en lenguaje natural: “multiplicar largo x el ancho y dividir en 2”.

Situación 4 letra c

E1	E2	E3
-Explica en lenguaje natural: “Teniendo el mismo corte. Basta con girar la segunda figura y acomodarla .Si el corte es similar se pueden acoplar fácilmente”.	- Explica en lenguaje natural: “porque poseen la misma ranura de corte, iguales en grados”	- Explica en lenguaje natural: “Al rotar una de las figuras (cualquiera) en 180 grados queda invertida a la otra figura ,permitiendo la unión”.

E4	E5	E6
- Explica en lenguaje natural:	- Explica en lenguaje natural:	- Explica en lenguaje natural:

"Se puede unir porque a ambas figuras se les recorta un tozo triangular de las mismas medidas".	"Se pueden unir ya que son iguales en característica, entonces el cuadrilátero (N° 1) lo invertimos en 180° para que las piezas queden ordenadas"	"ya que son figuras que tienen igual medida"

E7	**E8**	**E9**
- Explica en lenguaje natural: "Se pueden unir ambos trozos porque estos son congruentes entre sí y los dos son cuadriláteros"	-Explica en lenguaje natural: "Se pueden unir porque el corte del rectángulo fue proporcional para unir al otro trozo".	-Explica en lenguaje natural: "porque ambas figuras tienen las mismas medidas y son proporcionales".

E10	**E11**	**E12**	**E13**
-Explica en lenguaje natural: "La figura 1 se queda en esa misma posición ,mientras que la figura 2 se gira en 180° para lograr la figura 3"	-Explica en lenguaje natural: "Ambas tienen la profundidad y al rotar una de esas dos figuras coinciden por el recorte".	-Explica en lenguaje natural: "Ambas figuras para poder ser unidas debo voltear la segunda figura para que de esta manera pueda unirla sin tener inconveniente.	-Explica en lenguaje natural: "Porque a uno se le corta una parte de igual medida que la otra figura".

Situación 4 letra d

E1	**E2**	**E3**
- Explica en lenguaje natural: "La medida de la altura se mantiene, y para el segundo trazo a esa figura se le cortaron 3cm, esto pasa en ambas partes, por lo que el largo o base de la figura queda	-Explica en lenguaje natural y simbólico. "Sumar una base menos 3cm y la otra completa dando una longitud de 43cm de base y altura de 10cm".	-Explica en lenguaje natural y simbólico: "Al ser congruente ,la figura con el recorte, con la figura 2,podemos decir: 215cm^2 x 2 = A_3= 430 cm^2

en 43 cm .Luego multiplicar b •h Y obtener el resultado.		

E4	E5	E6
-Explica en lenguaje natural y simbólico: “El área de la figura 3 se obtiene multiplicando su base por la altura ,es decir : 10 •43 = 430 cm. -Para área utiliza “cm” y no “cm^2" -En entrevista semiestructurada se le pregunta: ¿consideras que es importante señalar la unidad de medida, al calcular el área de las figuras 1 , 2 , 3? ¿cuál es en este caso? Se le pide que explique. Responde así: “Considero que es importante porque permite sacar los futuros cálculos , en este caso las medidas del ancho e y el largo sirven para poder sacar área y perímetro , de la misma manera ,sirve para sacar las áreas de los triángulos que se forma y las hipotenusas”	-Explica en lenguaje natural y simbólico: “Primero tuvimos que observar cuánto vale la parte superior del cuadrilátero (figura n°1), en la cual los 23 cm se les resta 3 cm. Para obtener el área de la figura 3 primero sumé los lados inferiores (23+20 cm = 43 cm) y luego , el resultado fue multiplicado por 10 (43 x 10 = 430 cm^2)”.	-Explica en lenguaje natural y simbólico: “Ya que son figuras de igual base y altura, se suman las bases y se mantienen las alturas”: 10 • 46→460 .

E7	E8	E9
-Explica en lenguaje natural: “El área del rectángulo siempre se determina de la misma forma ,	-Su esquema es el siguiente: 46 x 10 = $\frac{460}{2}$=230 Sumando 23cm + 23cm por la	-Expresa :”Sumar una base menos 3 y la otra completa dando una longitud de 43 cm de base y altura de 10 cm”

multiplicando su base por la altura o sumando dos de sus lados y después multiplicar su resultado por el número de lado".	altura que es 10 cm y el resultado se divide en dos"	

E10	E11	E12	E13
-Señala: "ya que son figuras de igual base y altura, se suman las bases y se mantienen las alturas : 10 •46 =460 -No indica unidad de medida.	-Expresa que primero observó cuanto valía la parte superior del cuadrado de la figura Nº 1, en la cual los 23 cm se les resta 3 cm. Para obtener el área de la figura 3 primero sumó los lados inferiores (23 +20 =43 cm) y luego el resultado fue multiplicado Por 10 (43 •10=430 cm^2)	-Su esquema en lenguaje natural es el siguiente: "El área del rectángulo siempre se determina de la misma forma, multiplicando su base por la altura o sumando dos de sus lados y después multiplicar su resultado por el número de lado.	-Su esquema en lenguaje natural es el siguiente: "Como giramos la figura 2 , la medida de arriba (20 cm quedó en la base, por lo cual.se añade o se suma a los 23 cm de la figura 1 unida a la 2 ,completando así todas las medidas pertinentes para sacar el área": $\frac{43\ x\ 10}{2}$=$\frac{430}{2}$ = 21,5 cm -Su unidad de superficie la expresa como cm.

Situación 4

Estudio de las categorías presentadas en la secuencia de situaciones por los 13 estudiantes para lograr determinar el área de la superficie del rectángulo de la figura 3

Conceptos en acto que el estudiante recuerda para la secuencia de tareas dadas y lograr el objetivo .

- Para cada **triángulo** de la tarea 4, el estudiante recuerda que:

a) Es un polígono de tres lados y que sus elementos principales son sus lados ,vértices y ángulos.
b) La clasificación del triángulo según las características de sus lados: triángulo equilátero, triángulo isósceles y triángulo escaleno.
c) La clasificación del triángulo según las características de sus ángulos: triángulo acutángulo, triángulo rectángulo y triángulo obtusángulo.
d) Unidades de medidas basadas en el sistema métrico decimal
e) Notaciones simbólicas de geometría para la situación 1.
f) Noción de área de un triángulo

- Para cada **rectángulo** de la tarea 4 ,el estudiante recuerda que:

a) Es un polígono de cuatro lados que integra la clasificación de los cuadriláteros y , en particular, es un paralelogramo.
b) El rectángulo tiene sus lados opuestos paralelos
c) Sus lados opuestos son de igual medida .
d) Unidades de medidas basadas en el sistema métrico decimal
e) Notaciones simbólicas de geometría para la situación 4.
f) Noción de área de un rectángulo.

•Para cada **trapecio** de la tarea 4, el estudiante recuerda que:

a) Un trapecio es un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos.
b) En un trapecio ,los lados paralelos son de distinta medida y se llaman bases del trapecio.
c) Las alturas del trapecio son segmentos que se trazan perpendicularmente desde los vértices al lado opuesto,
d) Por ser las bases paralelas entre sí , las alturas son de igual medida.
e) Los trapecios se clasifican en : escalenos, isósceles , trisoláteros y rectángulos.

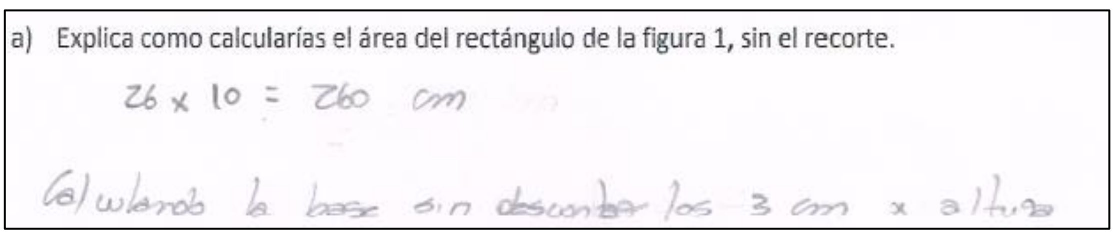
Primer análisis

Situación 4: Caracterización y teoremas en acto	N° de estudiantes de un total de 13	%
Los estudiantes reconocen que la figura 2 es un trapecio y calculan su área por descomposición ,observando la figura 1, en forma satisfactoria.	4	≈31%
Los estudiantes reconocen que la figura		

2 es un trapecio y calculan su área por descomposición ,observando la figura 1, en forma insatisfactoria.	6	≈46%
Los estudiantes no reconocen que la figura 2 es un trapecio y calculan el área a través de la fórmula del rectángulo, en forma insatisfactoria.	3	≈23%

Evidencia de la situación 4

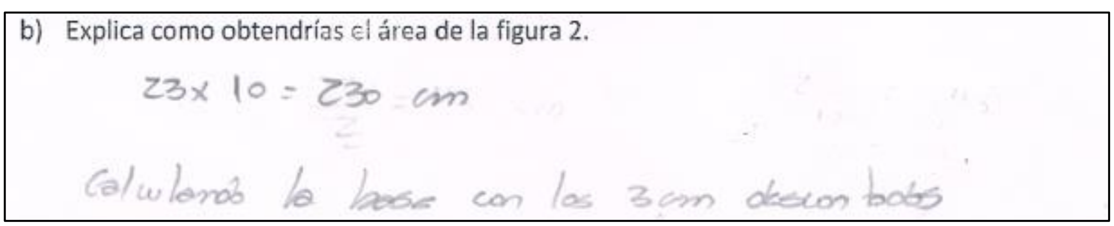
Estudiante E8. Situación 4a


a) Explica como calcularías el área del rectángulo de la figura 1, sin el recorte.

26 x 10 = 260 cm

Calculando la base sin descontar los 3 cm x altura

Estudiante E8. Situación 4b


b) Explica como obtendrías el área de la figura 2.

23x 10 = 230 cm

Calculando la base con los 3cm descontados

Análisis de la situación 4 a y 4 b del estudiante E8.

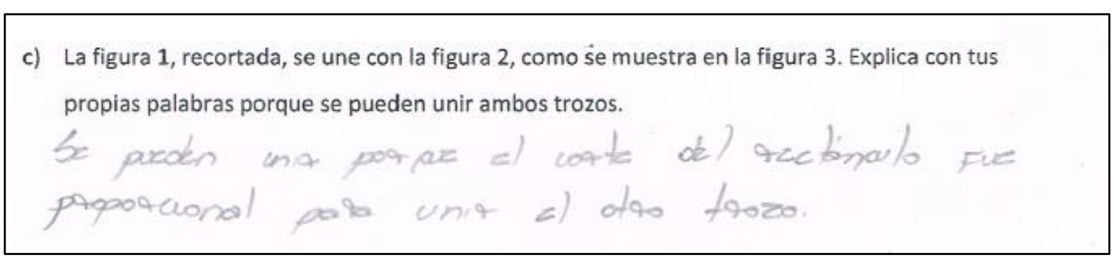
El estudiante presenta su esquema de la tarea 4 a, utilizando la fórmula del área de un rectángulo efectuando los cálculos numéricos y expresando la unidad de medida como unidad unidimensional. Para 4 b, su esquema considera la diferencia entre 26 cm y 3cm obteniendo 23 cm y posteriormente, calcula el área del trapecio de la figura 2 como si fuese un rectángulo, expresando la unidad de medida en unidad lineal. En esta evidencia se tiene que E8 se ubica en la categoría del 23 % de estudiantes que no reconocen que la figura 2 es un trapecio y calculan el área a través de la fórmula del rectángulo, en forma insatisfactoria.

Segundo análisis:

Situación 4: Caracterización y teoremas en acto	N° de estudiantes de un total de 13	%
Considerando la respuesta "c" del cuestionario , los estudiantes presentan su esquema para calcular el área de un rectángulo de la figura 3 en forma satisfactoria.	5	≈38%
Los estudiantes manifiestan dificultades para calcular el área de la figura 3, al aplicar la fórmula del área triángulo para el área del rectángulo o viceversa o bien al enfocar las medidas de los lados del rectángulo de esta última imagen geométrica en forma errónea.	8	≈62%

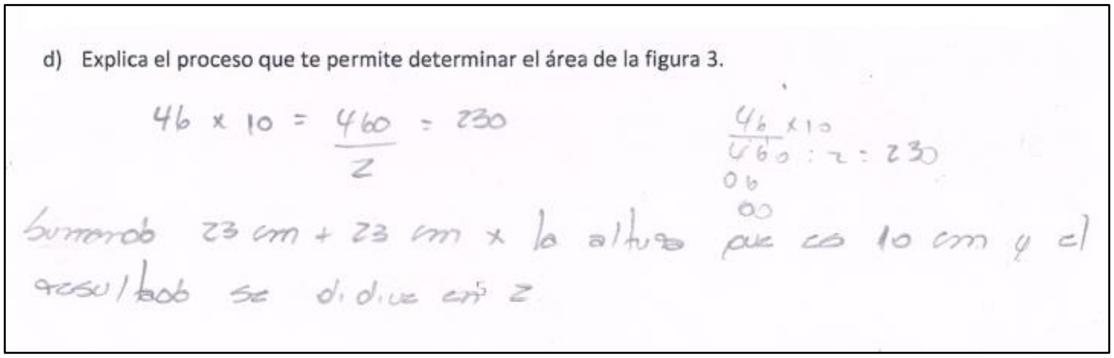
Evidencia de la situación 4

Estudiante E8. Situación 4c


c) La figura 1, recortada, se une con la figura 2, como se muestra en la figura 3. Explica con tus propias palabras porque se pueden unir ambos trozos.

Se pueden unir porque el corte del rectángulo fue proporcional para unir el otro trozo.

Estudiante E8. Situación 4d


d) Explica el proceso que te permite determinar el área de la figura 3.

$46 \times 10 = \frac{460}{2} = 230$

46 x 10
460 : 2 = 230
06
00

Sumando 23 cm + 23 cm x la altura que es 10 cm y el resultado se divide en 2

Análisis de las situaciones 4c y 4d del estudiante E8.

El estudiante E8 argumenta que en la situación 4c, ambas figuras se unen debido a que el corte fue “proporcional”, sin extender su explicación utilizando conceptos geométricos para complementar. En relación a la tarea 4d, reconoce que la figura 3 es un rectángulo, efectúa los cálculos de área del rectángulo, dividiendo en dos y omitiendo la unidad de medida. Su esquema utiliza los números y el lenguaje natural.

El estudiante E8 pertenece al 62% de estudiantes que manifiestan dificultades para calcular el área de la figura 3, al aplicar la fórmula del área triángulo para el área del rectángulo o viceversa o bien al enfocar las medidas de los lados del rectángulo de esta última imagen geométrica en forma errónea.

Tercer Análisis

Situación 4: Caracterización y teoremas en acto	N° de estudiantes de un total de 13	%
Al expresar cual es el área del rectángulo de la figura 3, los estudiantes la señalan como “cm^2”.	3	≈23%
Al expresar cual es el área del rectángulo de la figura 3 , los estudiantes omiten la unidad de medida o bien la señalan en “cm”.	10	≈77%

Análisis de la unidad de medida para el área, de la situación 4d.

El estudiante E8 integra el grupo del 77% de estudiantes que omiten la unidad de medida para la superficie de la figura 3,lo cual ,evidencia que el estudiante no le da la importancia que corresponde a la unidad de medida dentro de este contexto.

Análisis general basado en los esquemas presentados por E8:

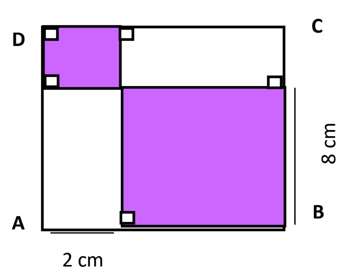
E8 presenta, en sus esquemas, confusión al enfocar las medidas de los lados de las figuras 1 y 3 . Como consecuencia de esto , sus respuestas para el área de los rectángulos son erradas, no logrando la respuesta experta. Además, cuando escribe la unidad para la medida de una superficie, la escribe como unidad unidimensional. Respecto a la figura 2 ,no utiliza los conceptos y propiedades del trapecio, para utilizar una estrategia diferente a la utilización de la fórmula del rectángulo, y obtener el área de ella. Como evidencia ,en ninguno de sus esquemas se nombra la figura del trapecio. Por último, el estudiante presenta dificultades con sus teoremas en acto al confundir el proceso de cálculo de área, para la figura 3, utilizando la fórmula del triángulo en lugar de la expresión algebraica del área del rectángulo.

E8 se sitúa dentro del 62% de los estudiantes que presentan confusión en sus esquemas, al aplicar fórmulas del área del triángulo en lugar de ocupar la del área del rectángulo u otra estrategia. Además, E8 presenta la característica de omitir la unidad de medida para el área de la figura 3,que corresponde al 77%.

5.5 Situación 5

1) Describe el proceso para calcular el área de la región pintada:

ABCD es un cuadrado de lado 10 cm



Objetivo de la situación 5: El estudiante utiliza conceptos y propiedades para medir la superficie pintada del cuadrado.

Situación 5

E1	**E2**	**E3**
-Expresa en lenguaje natural que se debe calcular el área del cuadro más grande multiplicando b•h. Luego se calcula el área del cuadrado más pequeño multiplicando b•h. Al sumar ambos resultados revela la medida del área de la región pintada.	- Expresa en lenguaje natural y simbólico que se calcula el área por separada y luego se suman. -Escribe lo siguiente: Δ_1=8•8= 64cm Δ_2=2•2=4cm Expresa: $\Delta_{T=}$68cm. -Utiliza cm como unidad de medida.	- Expresa en lenguaje simbólico : A□1= 2cm x 2cm =4cm^2 A□2=8cm x 8cm = 16cm^2 A total= 16cm^2+4cm^2= 20cm^2

E4	**E5**	**E6**
-Expresa en lenguaje natural y simbólico: “El área de la región pintada se obtiene primero sacando una región y luego la otra”. Realiza cálculos y escribe: 8•8=64cm 2•2 =4cm Señala: “El área total de la región pintada es 68 cm , Justificando a través de una adición. -Agrega información para la zona no pintada, escribiendo: 2•8=16cm+2•8=16cm Por lo tanto ,expresa: “el área total es 68cm que corresponde a la región pintada más 32cm que corresponde a la región no pintada, es decir, 100cm ,por lo tanto 10•10cm”.	-En primer lugar, utilizó el dibujo geométrico de la tarea para identificar los cuadrados ensombrecidos asignándole números(cuadrado N°1 y cuadrado N°2). Señala: En el cuadrado N°1 su área sería 2 x 2 = 4 cm^2 Para el cuadrado N° 2 su área sería 8 x 8 = 64cm^2 Para finalizar, el área total entre estos cuadrados se suman las áreas 4+64 =68cm^2	-Expresa en lenguaje natural y simbólico: “Se calculan las áreas de ambos cuadrados y luego se suman sus resultados” Agrega: “Al momento en el que nos dicen que ABCD es un cuadrado de lado de 10cm y nos das algunos lados debemos calcular cuánto nos falta para llegar a los 10cm”. Finalmente, escribe los cálculos: Á□$_1$ 2•2=4 Á□$_2$ 8•8=64 Señala: Á□$_1$+ Á□$_2$ 64 + 4 =68

-En su esquema presenta la unidad de medida como “cm” para el área.		

E7	E8	E9
-Expresa en lenguaje natural y simbólico: 8•8=64=8^2 1•1=1=1^2 Agrega: “Para determinar el área de los cuadriláteros se debe saber que tienen 2 medidas similares o las 4 ,de esta forma se determina el resultado de manera más fácil”	-En primer lugar, utilizó el dibujo geométrico de la tarea para señalar medidas en centímetros. Posteriormente calcula de la siguiente manera: 2^2= 4cm 8^2=64cm -Utiliza “cm” para el área.	- Expresa en lenguaje simbólico : 1 región =2cm•2c =4cm de área . 2 región =8cm•8cm =64cm de área. Área total pintada = 64 + __4_ 68cm región total pintada. -Utiliza “cm” para el área.

E10	E11	E12	E13
En primer lugar, utilizó el dibujo geométrico de la tarea para identificar los cuadrados ensombrecidos asignándole números(cuadrado N°1 y cuadrado N°2). Posteriormente escribe: $\frac{2\ x\ 2}{2}$=$\frac{4}{2}$ =2cm ÁREA 2)$\frac{8\ x\ 8}{2}$=$\frac{64}{2}$	-En primer lugar, utilizó el dibujo geométrico de la tarea para señalar medidas de los lados del cuadrado. - Expresa en lenguaje natural y simbólico lo siguiente: “determinar la medida ,sacar el área de ambos cuadrados ,luego sumar. Luego ,escribe: -Mayor 8•8=16 -Menor	-En primer lugar, utilizó el dibujo geométrico de la tarea para señalar medidas en centímetros. - Expresa en lenguaje natural y simbólico lo siguiente: a^2=2^2=4 a^2=8^2=64 -Luego, escribe: “Para sacar el área de la región pintada de ambos cuadrados ,el chico y el grande, le asignaría las medidas	-Expresa en lenguaje natural y simbólico lo siguiente: “Se suman todos los lados de cada cuadrado”: 2+2+2+2=8 8+8+8+8=32 -Omite la unidad de medida.

=32cm ÁREA	2•2= 4 16+4= 20 Finalmente, expresa : “Área zona ennegrecida ,20”.	correspondientes completando lo que falta. Si me dicen que el cuadrado mide 10 cm y en el lado solo hay 8cm debo completar y poner 2cm que sería lo que me falta para llegar a 10cm.Así lo haría en cada lado y luego ocuparía la fórmula del cuadrado para sacar área a^2 -Finalmente, expresa lo siguiente: Á□=a^2 Á□= a^2 Á□=2^2 Á□=8^2 Á□=4 Á□=64 -Omite la unidad de medida para el área.	

Situación 5

Estudio de las categorías presentadas en la situación 5 por los 13 estudiantes para lograr determinar el área de la superficie pintada de la figura

Situación 5 :

Conceptos en acto que el estudiante recuerda para la tarea dada y lograr el objetivo .

- Para cada **cuadrado** de la tarea 5 ,el estudiante recuerda que:

a) Es un polígono de cuatro lados que integra la clasificación de los cuadriláteros y , en particular, es un paralelogramo.
b) El cuadrado tiene sus lados opuestos paralelos
c) Todos sus lados son de igual medida .

d) Unidades de medidas basadas en el sistema métrico decimal
e) Notaciones simbólicas de geometría para la situación 5.
f) Noción de área de un cuadrado.

- Para cada **rectángulo** de la tarea 5 ,el estudiante recuerda que:

a) Es un polígono de cuatro lados que integra la clasificación de los cuadriláteros y , en particular, es un paralelogramo.
b) El rectángulo tiene sus lados opuestos paralelos
c) Sus lados opuestos son de igual medida .
d) Unidades de medidas basadas en el sistema métrico decimal
e) Noción de área de un rectángulo.

Primer análisis

Situación 5: Caracterización y teoremas en acto	N° de estudiantes de un total de 13	%
Al expresar cual es el área total de la región pintada, los estudiantes omiten la unidad de medida o bien la señalan en "cm".	**11**	≈85%
Al expresar cual es el área total de la región pintada del cuadrado de la figura, los estudiantes la señalan como cm^2 .	**2**	≈15%

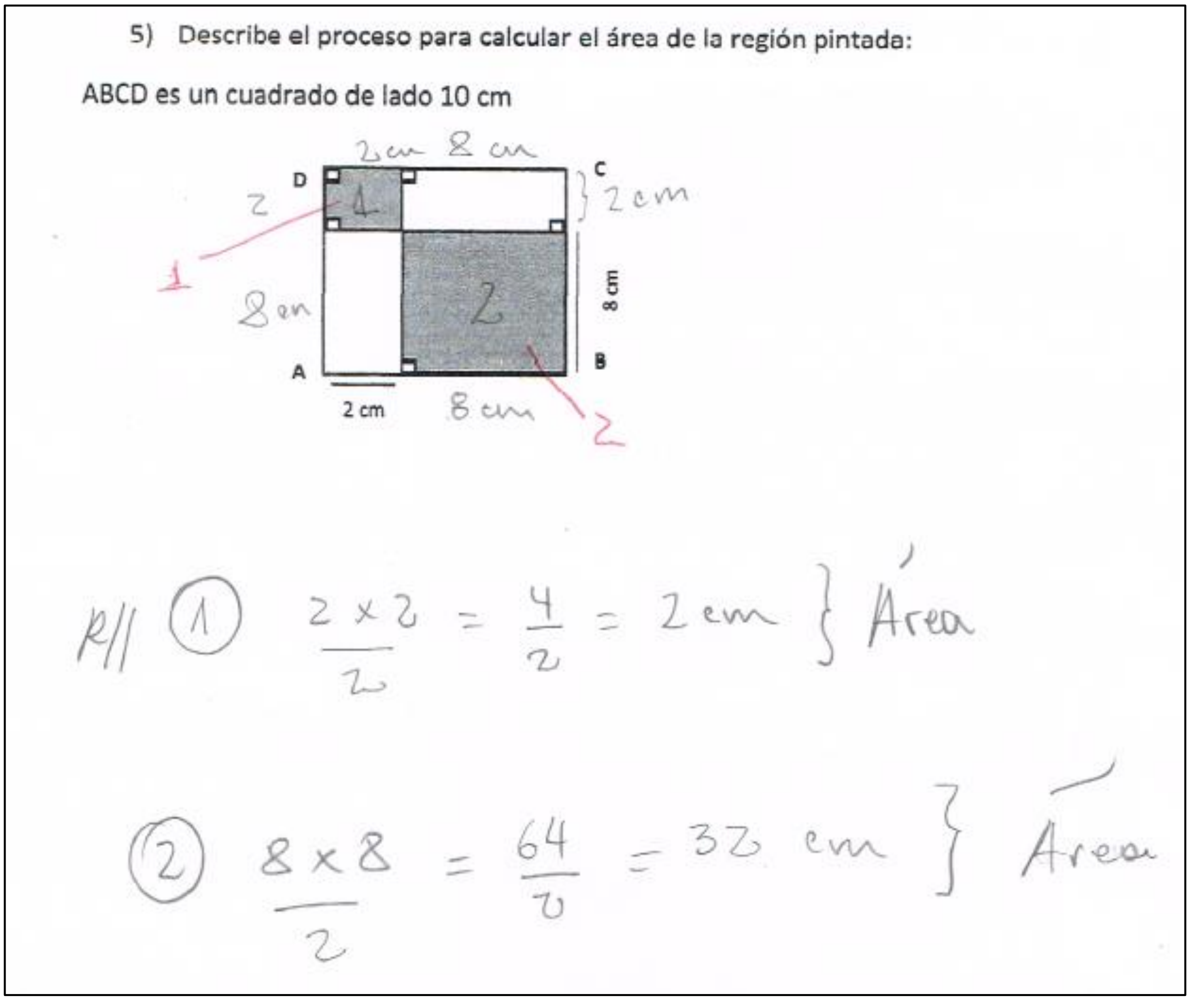
Segundo análisis

Situación 5: Caracterización y teoremas en acto	N° de estudiantes de un total de 13	%
Los estudiantes calculan el área de los cuadrados pintados, por separado, y posteriormente suman sus partes.	5	≈38%
Los estudiantes calculan el área de los cuadrados pintados, por separado y no suman sus partes.	3	≈23%
Presentan errores de cálculo relacionados son		

las potencias o aplican la fórmula de área del triángulo para el área del cuadrado o se confunden con el perímetro	5	≈38%

Evidencia de la situación 5

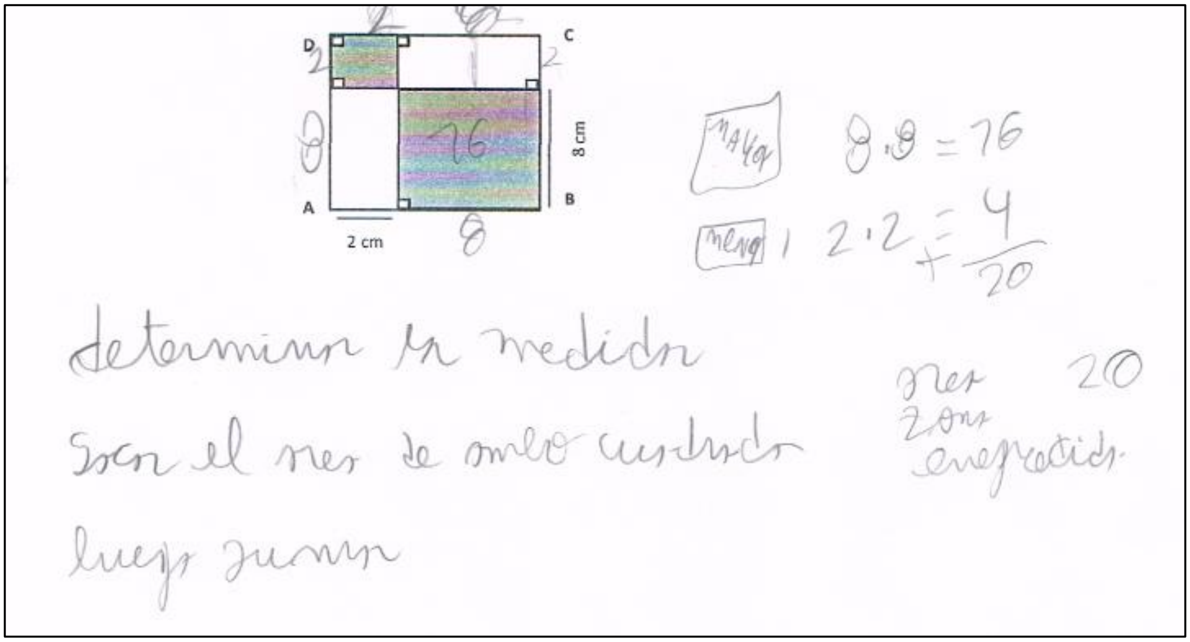
Estudiante E10. Situación 5



Análisis de los esquemas presentados por E10:

E10 presenta un esquema donde utiliza la fórmula del área del triángulo en lugar de usar la expresión para el área de un cuadrado. Por otro lado utiliza la unidad unidimensional ,al dar a conocer el área para los cuadrados, calculados con error. Cuando se pide el área total de la zona pintada, no suma las partes que la componen. El estudiante presenta errores al calcular el área pintada aplicando la fórmula de área del triángulo para el área de los cuadrados, ubicándose dentro del 38% de estudiantes que presentan estos errores. Además, integra el 85% de aquellos que expresan la unidad para medir una superficie como unidad unidimensional.

Estudiante E11. Situación 5



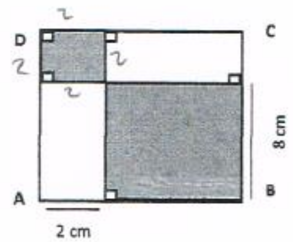
Análisis de los esquemas presentados por E11:

E11 presenta su esquema utilizando la figura ya que marca las medidas de los lados del cuadrado ABCD. Argumenta en lenguaje natural y muestra en el registro numérico sus cálculos de área de los cuadrados solicitados en la situación. Sin embargo, calcula el área del cuadrado de 8cm de lado, con error. Por otro lado, omite la unidad de medida que corresponde a la medición de una superficie. El estudiante E11 pertenece al 38% del grupo que presenta errores de cálculo y como consecuencia no obtiene la respuesta experta. Además, integra el 85% de ellos que omite la unidad de medida para el área de la superficie solicitada. De acuerdo a las evidencias, se concluye que aún en este nivel de educación, persiste el problema del cálculo numérico utilizado en todos los ejes de matemática y no se le da importancia a la unidad bidimensional para medir una superficie.

Estudiante E13. Situación 5

5) Describe el proceso para calcular el área de la región pintada:

ABCD es un cuadrado de lado 10 cm



Se suman todos los lados de cada cuadrado.

$2 + 2 + 2 + 2 = 8$

$8 + 8 + 8 + 8 = 32$

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 16 \\ +16 \\ \hline 32 \end{array}$$

Análisis de los esquemas presentados por E13:

E13 expone su esquema efectuando el cálculo del perímetro para cada cuadrado pintado en lugar de calcular sus áreas, manifestando confusión entre las nociones de perímetro y área , no logrando el objetivo de la situación. En sus cálculos omite la unidad de medida, tanto en sus procesos como en la respuesta final. El estudiante pertenece al 38% de los alumnos que se confunden al calcular el área del cuadrado usando el concepto de perímetro e integra el 85% de aquellos que omiten la unidad de medida para superficie.

:

5.6 Situación 6.

5)

Observa la forma de la cubierta de la siguiente mesa de picnic, de lados de igual medida:

a) Para calcular el área de un polígono regular, ¿se podría dividir en figuras más pequeñas? , ¿En cuáles?
b) ¿Cuáles de las medidas de un polígono regular que son necesarias para calcular su área? Marca todas las que sean necesarias con una “X”:

a) Lados
b) Diagonales
c) Apotema (Perpendicular trazada desde el centro de un polígono regular a cualquiera de sus lados).
d) Perímetro
e) Bisectrices

c)Basándote en las respuestas a y b. ¿Cuál sería la expresión general para calcular el área del pentágono regular que corresponde a la cubierta de la mesa?

- **Objetivo de la situación 6:** El estudiante aplica conceptos y propiedades para obtener la expresión algebraica de área de un pentágono regular.

Situación 6 letra a

E1	E2	E3
-Señala en lenguaje natural lo siguiente: “En triángulos, donde ya se tienen los valores de ambos catetos, que se pueden usar como base y altura, después sumar todos los resultados” -Se observa que la imagen del pentágono la subdivide en 3 triángulos a partir de un vértice.	-Solo expresa en lenguaje natural: “Triángulo Isósceles”. -Se observa que no utiliza la imagen de la tarea”.	-Solo expresa en lenguaje natural: “5 triángulos congruentes” -Se observa que no utiliza la imagen de la tarea”.

E4	E5	E6
-Señala en lenguaje natural lo siguiente: “Se puede dividir en tres triángulos trazando líneas desde uno de sus vértices”. Se observa que la imagen del pentágono la subdivide en 3 triángulos a partir de un vértice.	-Solo expresa en lenguaje natural: “5 triángulos”. -Se observa que no utiliza la imagen de la tarea.	-Solo expresa en lenguaje natural: “Si, en triángulos”. -Se observa que no utiliza la imagen de la tarea.

E7	E8	E9
-Señala en lenguaje natural lo siguiente: “El polígono regular se puede dividir en forma de triángulos”. -Se observa que la imagen del pentágono la subdivide en 3 triángulos a partir de un vértice.	- Señala en lenguaje natural lo siguiente: “Si se podría, en 8 triángulos al interior”. -Se observa que la imagen del pentágono queda subdividida trazando diagonales a partir de los vértices.	-Señala en lenguaje natural lo siguiente: “Se podría dividir en triángulos ,en 3 triángulos”. -Se observa que dibuja un pentágono y lo subdivide trazando las diagonales”.

E10	E11	E12	E13
-Señala en lenguaje natural lo siguiente: “Se puede dividir en 5 triángulos	-Señala en lenguaje natural lo siguiente: “Si, en triángulos”. -Se observa que	-Señala en lenguaje natural lo siguiente: “Si se podría dividir en figuras	-Señala en lenguaje natural lo siguiente: “Se podría dividir en triángulos”.

equiláteros”. -Se observa que divide el pentágono en triángulos ,a partir de su centro en forma intuitiva.	no utiliza la imagen de la tarea”.	más pequeñas ,en triángulo, trazando diagonales entre un vértice y otro y luego de esto aplicar la fórmula”. -Se observa que la imagen del pentágono queda subdividida trazando diagonales a partir de los vértices.	-Se observa que la imagen del pentágono la subdivide en 3 triángulos a partir de un vértice.

Situación 6 letra b

E1	**E2**	**E3**
-Considera que la medida necesaria de un polígono regular para calcular el área es “lados”.	-Considera que las medidas necesarias de un polígono regular para calcular el área son: “perímetro” y “bisectrices”.	-Considera que las medidas necesarias de un polígono regular para calcular el área son: “lados”, “diagonales”, “apotema”, “perímetro” y “bisectrices”.

E4	**E5**	**E6**
-Considera que las medidas necesarias de un polígono regular para calcular el área son: “apotema” y “perímetro”.	-Considera que las medidas necesarias de un polígono regular para calcular el área son: “lados” y “apotema” .	-Considera que las medidas necesarias de un polígono regular para calcular el área son: “lados” y “diagonales”.

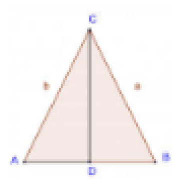
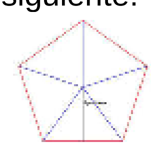
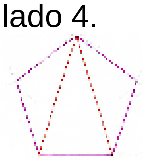
E7	**E8**	**E9**
-Considera que las medidas necesarias de un polígono regular para calcular el área son: “lados” , “perímetro” y “bisectrices”.	-Considera que las medidas necesarias de un polígono regular para calcular el área son: “lados” , “perímetro” y “diagonales”.	-Considera que la medida necesaria de un polígono regular para calcular el área es “lados”.

E10	**E11**	**E12**	**E13**
-Considera que	-Considera que	-Considera que	-Considera que

las medidas necesarias de un polígono regular para calcular el área son: “apotema” , “perímetro” y “bisectrices”.	las medidas necesarias de un polígono regular para calcular el área son: “lados” , “diagonales” y “apotema”.	las medidas necesarias de un polígono regular para calcular el área son: “lados” y “apotema” .	las medidas necesarias de un polígono regular para calcular el área son: “lados” , “perímetro” y “diagonales”.

Situación 6 letra c

E1	**E2**	**E3**
-Presenta el siguiente esquema : $\left(\frac{b \bullet h}{2}\right)$•(n lados–2)	-Presenta el siguiente esquema: $\frac{Perímetro\ \bullet Altura}{2}$	-Presenta el siguiente esquema: $\left(\frac{Lado \cdot potema}{2}\right) x5$

E4	**E5**	**E6**
-Presenta el siguiente esquema: $\frac{perímetro \bullet altura}{2}$ =área pentágono	Presenta lo siguiente:  Escribe $(\overline{DB}$x $\overline{dc})$ x 2 Luego dibuja un pentágono como el siguiente:  Finalmente ,señala: $\left[\overline{(DB\ \ x\ \ \overline{DC})\ x\ 2}\right]$ x 5	Presenta un dibujo de un pentágono regular de lado 4.  Luego calcula: 4•4=16•3 =48 Señala en lenguaje natural: “Lado • Lado y luego sumar el área de los 3 ∆ formados por diagonales”.

E7	**E8**	**E9**
-Expresa en lenguaje natural: “La expresión general para determinar su área es la sumatoria de sus lados ,el resultado dividir por número de lado”.	-Presenta el siguiente esquema : $\frac{B\ x\ A}{8}$	-No presenta esquema.

E10	**E11**	**E12**	**E13**
-Utiliza la figura de la situación y la divide en 5 triángulos. -Le asigna el número 60 a cada lado y adiciona 5 veces el 60 obteniendo 300. -Escribe : Perímetro=300. -Realiza los siguientes cálculos: 300(5– 2):180 =300•3:180 =900:180 =5,6cm	-Expresa en lenguaje natural: “Sacar el área de los triángulos que se forman y juntar y sería el área total”.	-Señala lo siguiente: Pentágono=triángulo $\frac{b\bullet h}{2}$ -Expresa en lenguaje natural: “Sacaría el área de cada triángulo y luego las sumaría todas para que me dé el área total del pentágono regular”	-Expresa en lenguaje natural: “Dividir en Δ y luego multiplicar Largo x ancho Dividiendo en 2”.

Situación 6

Estudio de las categorías presentadas en la situación 6 por los 13 estudiantes para lograr determinar el área de la superficie de un pentágono regular.

Situación 6

Conceptos en acto que el estudiante recuerda para la tarea dada y lograr el objetivo de la situación .

- Para el pentágono regular de la tarea 6 ,el estudiante recuerda que:

- Es un polígono de 5 lados de igual medida .
- Cada ángulo interior de un pentágono regular es de igual medida.
- La noción de triángulo, sus clasificaciones y propiedades.

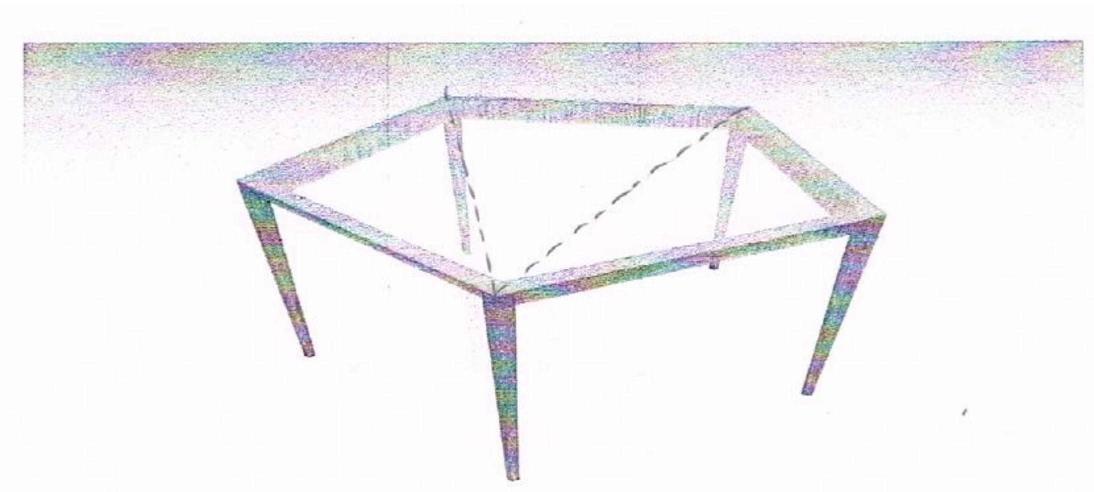
- El concepto de apotema como perpendicular trazada desde el centro de un polígono regular a cualquiera de sus lados , o bien, la apotema de un polígono regular es la menor distancia entre el centro a cualquiera de sus lados. Otra forma de definir: es un segmento cuyos extremos son el centro de un polígono regular y el punto medio de cualquiera de sus lados, y es siempre perpendicular a dicho lado. O bien, segmento perpendicular a un lado, hasta el centro del polígono.
- El área de un polígono regular es igual a la suma de las áreas de sus triángulos centrales o bien es igual al producto de su apotema por su semi -perímetro junto a su unidad al cuadrado.

Situación 6.

Análisis general de las respuestas de la situación 6

Situación 6: Caracterización y teoremas en acto	N° de estudiantes de un total de 13	%
Los estudiantes obtienen expresiones confusas al dividir el pentágono en triángulos a partir de un solo vértice o trazando todas las diagonales o sin realizar subdivisiones de la figura.	8	≈62%
Los estudiantes logran la expresión general para calcular el área de un pentágono, dividiéndolo en triángulos de igual área a partir del centro del pentágono.	5	≈38%

Evidencia de la situación 6: Estudiante E1. Situación 6.



a) Para calcular el área de un polígono regular, ¿se podría dividir en figuras más pequeñas? , ¿En cuáles?

en triangulos, donde ya se tienen los valores de ambos catetos, que se pueden usar como base y altura, despues sumar todos los resultados

b) ¿Cuáles de las medidas de un polígono regular son necesarias para calcular su área? Marca todas las que sean necesarias con una "X":

X a) Lados
b) Diagonales
c) Apotema (Perpendicular trazada desde el centro de un polígono regular a cualquiera de sus lados).
d) Perímetro
e) Bisectrices

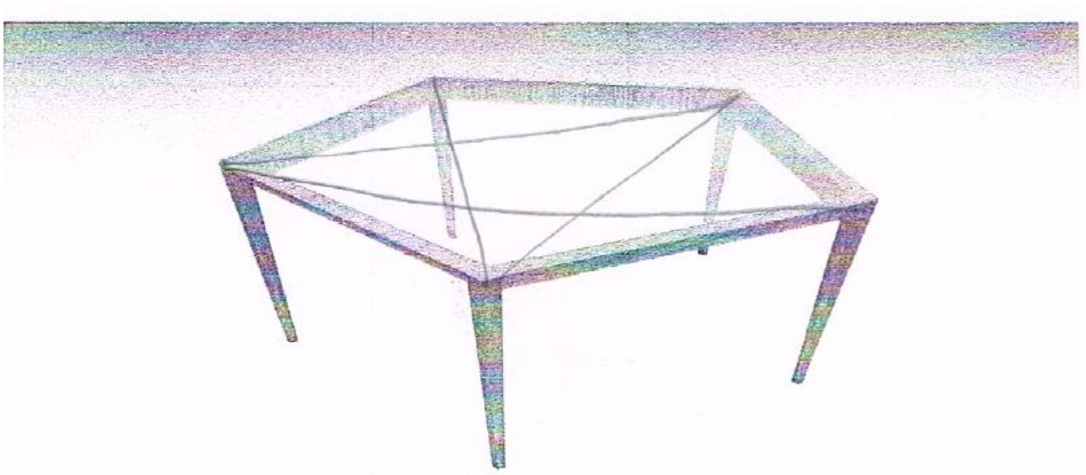
c) Basándote en las respuestas a y b. ¿Cuál sería la expresión general para calcular el área del pentágono regular que corresponde a la cubierta de la mesa?

$\left(\frac{b \cdot h}{2}\right) \cdot (n \text{ lados} - 2)$

Análisis de los esquemas presentados por E1:

E1 señala que el pentágono se divide en triángulos a partir de un vértice ,utilizando la figura de la situación. Además, se deduce a través de la mención de la palabra "catetos ", que visualiza triángulos rectángulos. Por otro lado, considera que solo es necesario conocer la medida de los lados para calcular el área de un pentágono. Finalmente, señala que el cálculo del área se realiza a través de una expresión donde incorpora la fórmula del área de un triángulo multiplicado por una expresión que tiene relación con la fórmula de la medida de la suma de los ángulos interiores de un polígono regular, donde se señala que se multiplica 180° por (n – 2) triángulos, que se forman al dividir , un polígono en triángulos a partir de un vértice. El estudiante manifiesta confusión con sus teoremas en acto que pone en funcionamiento para ir obteniendo la expresión general para calcular el área de un pentágono regular. El estudiante E1 integra el 62% de estudiantes que estudiantes que obtienen expresiones confusas al dividir el pentágono en triángulos a partir de un solo vértice o trazando todas las diagonales o sin realizar subdivisiones de la figura. En este caso, se observa que recuerda conceptos y propiedades, pero no los interrelaciona para determinar la expresión general para el área del pentágono regular de la tarea.

Estudiante E8. Situación 6.



a) Para calcular el área de un polígono regular, ¿se podría dividir en figuras más pequeñas? , ¿En cuáles?

Si se podría, en 8 triangulos al interior

b) ¿Cuáles de las medidas de un polígono regular son necesarias para calcular su área? Marca todas las que sean necesarias con una "X":

a) Lados
b) Diagonales
c) Apotema (Perpendicular trazada desde el centro de un polígono regular a cualquiera de sus lados).
d) Perímetro
e) Bisectrices

c) Basándote en las respuestas a y b. ¿Cuál sería la expresión general para calcular el área del pentágono regular que corresponde a la cubierta de la mesa?

$$\frac{B \times A}{8}$$

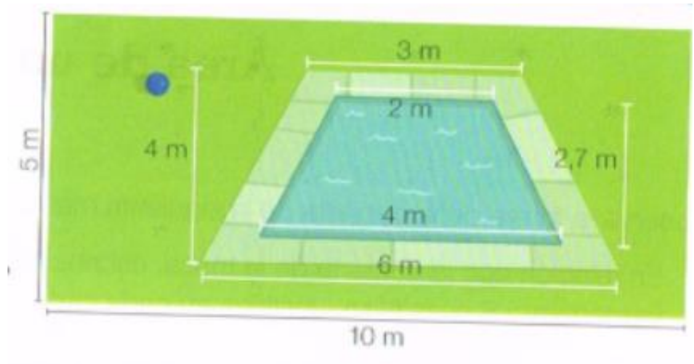
Análisis de los esquemas presentados por E8:

E8 presenta su esquema señalando que el pentágono regular lo puede dividir en triángulos ,en su región interior, trazando las diagonales a partir de todos sus vértices. Esto lo indica utilizando la imagen de la tarea. Considera, además, que requiere de las medidas de los lados y de las diagonales. Finalmente, su proceso lo induce a una respuesta donde utiliza la base por la altura dividida en 8, lo cual evidencia confusión con sus teoremas en acto que pone en funcionamiento. El estudiante integra el 62% de los alumnos obtienen expresiones confusas al dividir el pentágono en triángulos a partir de un solo vértice o trazando todas las diagonales o sin realizar subdivisiones de la figura. En este caso, se observa que recuerda conceptos y propiedades pero no los interrelaciona para determinar el área del pentágono regular de la tarea, al igual que el estudiante E1.

Situación 7.

1) El patio de Josefa tiene forma rectangular. En este construirá una piscina con forma de trapecio como la que se muestra en la imagen. ¿Cuánta superficie le

queda para plantar pasto? Describe detalladamente el proceso de razonamiento que utilizarás para responder la pregunta.



- **Objetivo de la situación :** El estudiante resuelve el problema relacionado con la realidad utilizando conceptos y teoremas en acto para medir la superficie requerida.

Situación 7

E1	E2	E3
-Expresa en lenguaje natural, que es necesario hacer el cálculo del área del trapecio, pero separado en dos triángulos y un cuadrado (∆□∆) y después hay que sumar los resultados. -escribe: "Al final se debe determinar el área que ocupa el patio y a eso restarle el área que ocupa la piscina". "Así obtendrá el valor de la superficie en la que puede plantar pasto". -En entrevista semiestructurada se le solicitó que respondiera la pregunta:¿Cuánta superficie le queda para plantar pasto? Al responder presenta	-Utiliza el dibujo de la tarea para señalar algunas medidas que utiliza para efectuar cálculos. -Sus esquemas no señalan las áreas que está considerando para responder la pregunta. -Presenta cálculos en forma desordenada y confusa no logrando la respuesta experta. -La unidad que utiliza para área es "m".	- Utiliza el dibujo de la tarea para señalar algunas medidas que utiliza para efectuar cálculos. -Calcula el área del patio que tiene forma de rectángulo, cambiando la unidad de medida de "m" por "cm". En su respuesta escribe: Á rectángulo= 5cm x 10cm=50cm^2 -Para calcular la superficie que ocupará la piscina considera el mismo largo del patio de forma rectangular y como consecuencia no logra la respuesta experta. -Al descomponer el trapecio, marca en la

sus esquemas descomponiendo el trapecio y visualizando un cuadrado en lugar de un rectángulo, no logrando la respuesta experta.		figura el triángulo 1 y el triángulo 2 y expresa que se trata de dos triángulos congruentes:$\Delta 1 \cong \Delta 2$ -Su respuesta para el área para plantar pasto es 40 cm^2. -En lenguaje natural escribe: “Para sacar el Á del trapecio, determino el área del rectángulo formado por la base x altura. Luego le sustraigo los triángulos sobrantes .Al determinar el Á de la piscina , la resto al área del rectángulo de la superficie total determinando el área de la superficie importada”.

E4	E5	E6
-Presenta su esquema realizando los siguientes cálculos: 6 + 3 = 9 m •4 $=\frac{36\ m}{2}$ =18 m Agrega: 5•10 = 50 m Finalmente escribe: 50 –18 = 32 m. -Se observa que para el área expresa la unidad de medida “m”.	-En su esquema presenta la siguiente secuencia: “Primero sacaría el área del patio de Josefa : 5m x 10m= 50m^2 Luego sacar el área de la piscina: 4m x 6m = 24m^2 Para la piscina en forma de trapecio, hay que marcar líneas imaginarias, en la cual me transformará el trapecio a un rectángulo. Del rectángulo construido hay que calcular lo que no va en la piscina, en área(triángulo)”.	-Escribe en lenguaje natural: “Sacar el área del patio y luego sacar el área de la piscina al momento de tener ambas áreas para saber cuánta superficie le queda para plantar pasto .Se debe restar el área total de la superficie menos el área de la piscina”. -Además realiza los siguientes cálculos: Á total rectángulo=50cm Á total piscina= 4•6= 24 50 –24 = 26 -Se observa que no logra la respuesta experta.

	-En entrevista semiestructurada se le solicita responder:¿cuánta superficie le queda a Josefa para plantar pasto? Presenta el siguiente esquema: Área Patio total→ Área de la piscina→Triángulos restantes. Luego escribe: 5m x 10=50m^2 10m x 4m=24m^2 1,5m x4m=$\frac{6}{2}$=3 3 x 2 = 6m^2 ↓ Área Piscina(final)= 24 – 6 = 18 m^2. -Se observa que no responde la pregunta de la tarea.	

E7	**E8**	**E9**
-Escribe en lenguaje natural: "El patio al tener forma de rectángulo y la piscina forma de trapecio , ésta no ocupará gran espacio, por lo cual quedarán 2,7 m de lado para plantas ,6 m de base y 3 de lado. El proceso utilizado es ver lo sobrante del rectángulo tras el espacio ocupado por el trapecio". En entrevista semiestructurada se le solicita responder:¿cuánta superficie le queda para	Sólo presenta esquemas relacionados con cálculos tales como: 10 x 5 =50 3+6=9 x 4=$\frac{36}{2}$=18 58 –18=40 -Se observa que no especifica qué tipo de superficie ha medido. -No utiliza unidades de medida. -No logra la respuesta experta a través del cálculo.	-Presenta su esquema describiendo lo siguiente: "Área total de la superficie: 5 •10 = 50m Luego se debe sacar el área de la piscina. Se resta el área total de la superficie con lo de la piscina. Obtenemos la superficie que nos queda para plantar". En entrevista semiestructurada se le solicita responder:¿cuánta superficie le queda para plantar pasto?¿se puede

plantar pasto? Presenta el siguiente esquema: 2,7+2,7+3+6=14,4 Además escribe: Le quedan 14,4m Para plantar pasto alrededor de la piscina.		calcular?¿cómo lo harías?¿cuál es? Expresa lo siguiente: “En primer lugar podemos sacar el área del patio rectangular, luego podemos continuar con calcular el área del trapecio y finalmente le restamos la piscina a la superficie del patio” -Área superficie: 5 •10=50m -Para el área del trapecio escribe: $\frac{b_1 + b_2}{2}$•h h= $\frac{6-3}{2}=\frac{3}{2}$ Área trapecio: $\frac{6+3}{2}$ •1,506,75. 50–6,75043,25 Señalando que es el área para plantar.

.

E10	E11	E12	E13
- En su esquema presenta la siguiente secuencia: “En primer lugar determinar del patio en total=Á= 10m x 4= 40 metros. Luego, determinamos el perímetro de la piscina para después… 6,0+3,0+5,4=14,4 2,7+2,7=5,4 …restar el área de	- En su esquema presenta la siguiente secuencia: -“Sacar el área del rectángulo y luego restar el área del trapecio” . -Área del rectángulo= 5 •10 = 50 -Área del trapecio= 4^2•6 •3 = 16 •18 =287 -Se observa que no utiliza la unidad	-Expresa en lenguaje natural lo siguiente: “ Para poder plantar pasto le queda 4m en su base porque resté a los 10 m que mide en total su base ,los 6 m que medirá la base del trapecio, es decir , su piscina y lo que queda lo utilizará en pasto . El mismo procedimiento	-Expresa en lenguaje natural lo siguiente: “Calcularía el área de rectángulo ,luego sacaría los lados del trapecio y según lo que sobre sería donde plantar el pasto”. En entrevista semiestructurada se le solicita responder: ¿cuánta superficie le queda para plantar pasto a

la piscina al área del patio para ver cuál es el área que quedó para colocar pasto: 40,0 –14,4=25,6. Realiza, además, otros cálculos tales como: 5 – 4 = 1cm 10 – 6 = 4 cm 5 – 2,7 = 3,3 cm 10 – 3 = 7 cm -En los cálculos anteriores cambia la unidad de medida de “m” a “cm”. --Calcula el área del patio que tiene forma rectángular utilizando la unidad de medida de “m” y no “m^2 “. -Se observa que realizó una sustracción entre área del rectángulo y perímetro del trapecio- -No logra la respuesta experta.	de medida. -No logra la respuesta experta.	utilizaría para su altura o los 5 m que mide su altura le resto los 4 m que medirá en total la piscina, con la cerámica incluida, pero en la parte de arriba podrá plantar el doble que en la parte de abajo porque la parte superior de la piscina mide la mitad que su base por ende podrá plantar el doble de lo se plantará en su base” -Presenta los siguientes cálculos escritos: Base: 10 – 4 = 6m Altura: 5-4 = 1m Trapecio grande = b • h 10 •4 = 40m Rectángulo total= b • h 10 •5= 50 m 50 m – 40 m =10m Quedarían 10m para plantar árboles.	Josefa? -Responde lo siguiente: 10 – 6 = 4 5 – 4 = 1 5 – 2,7 = 2,3 -Se observa que no utiliza unidades de medida, según lo señalado en la tarea. -Se observa que no especifica qué tipo de superficie ha medido.

Situación 7

Estudio de las categorías presentadas en la secuencia de situaciones por los 13 estudiantes para lograr determinar el área de la superficie entre el patio de forma de rectángulo y piscina con forma de trapecio.

Situación 7 :

Conceptos en acto que el estudiante recuerda para la secuencia de tareas dadas y lograr el objetivo .

• Para el **triángulo** , el estudiante recuerda que:

a) Es un polígono de tres lados y que sus elementos principales son sus lados ,vértices y ángulos.
b) La clasificación del triángulo según las características de sus lados: triángulo equilátero, triángulo isósceles y triángulo escaleno.
c) La clasificación del triángulo según las características de sus ángulos: triángulo acutángulo, triángulo rectángulo y triángulo obtusángulo.
d) Unidades de medidas basadas en el sistema métrico decimal
e) Notaciones simbólicas de geometría para la situación 1.
f) Noción de área de un triángulo

• Para el **rectángulo** ,el estudiante recuerda que:

a) Es un polígono de cuatro lados que integra la clasificación de los cuadriláteros y , en particular, es un paralelogramo.
b) El rectángulo tiene sus lados opuestos paralelos
c) Sus lados opuestos son de igual medida .
d) Unidades de medidas basadas en el sistema métrico decimal
e) Notaciones simbólicas de geometría para la situación 4.
f) Noción de área de un rectángulo.

•Para el **trapecio**, el estudiante recuerda que:

a) Un trapecio es un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos.
b) En un trapecio ,los lados paralelos son de distinta medida y se llaman bases del trapecio.
c) Las alturas del trapecio son segmentos que se trazan perpendicularmente desde los vértices al lado opuesto,
d) Por ser las bases paralelas entre sí , las alturas son de igual medida.
e) Los trapecios se clasifican en : escalenos, isósceles , trisoláteros y rectángulos.
f) Noción de área de un trapecio.

Primer análisis

Situación 7: Caracterización y teoremas en acto	N° de estudiantes de un total de 13	%
Al expresar cuanta superficie queda para plantar pasto , los estudiantes omiten la unidad de medida o la	11	≈85%

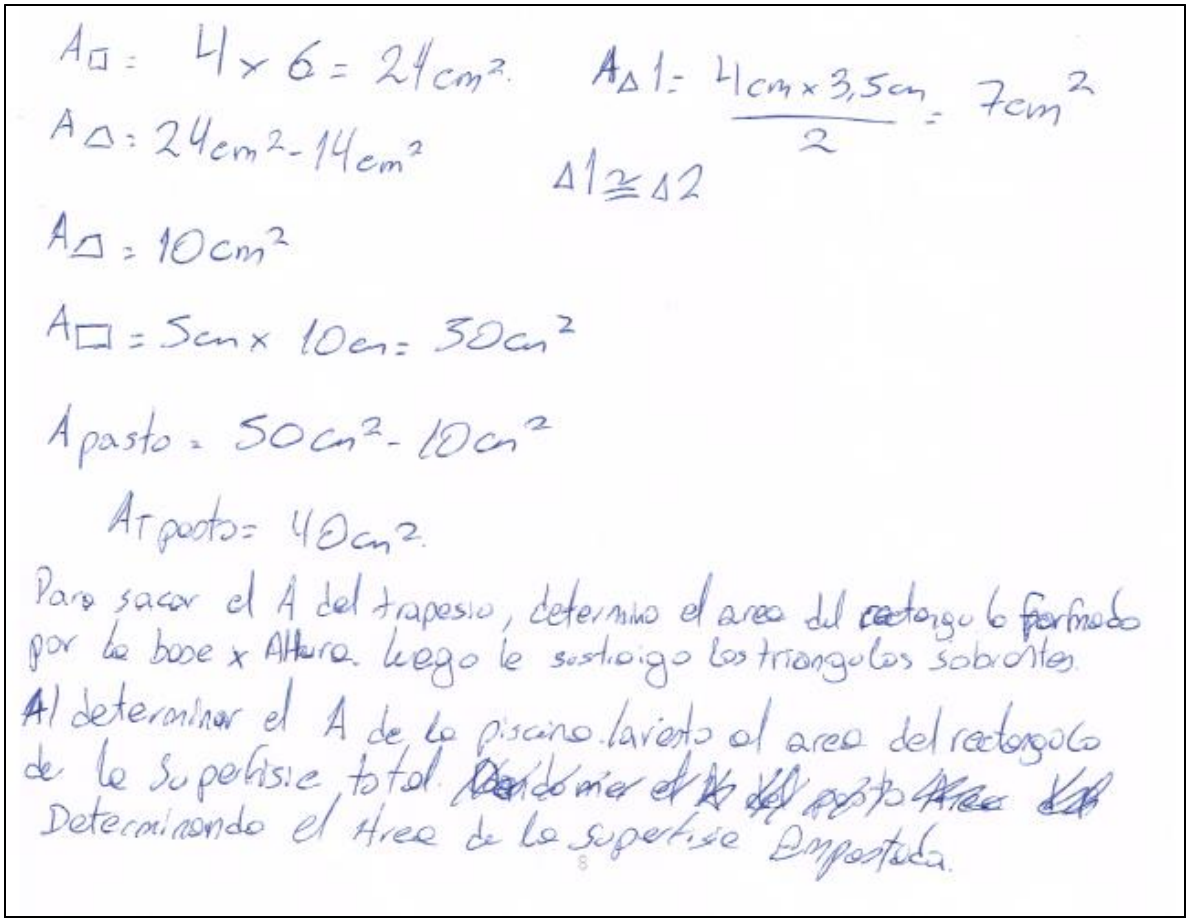
señalan en "m" o cambian la unidad sin realizar las conversiones.		
Al expresar cuanta superficie queda para plantar pasto, los estudiantes la señalan en "m^2 "	2	≈15%

Segundo análisis

Situación 7: Caracterización y teoremas en acto	N° de estudiantes de un total de 13	%
Los estudiantes muestran sus esquemas en lenguaje natural, calculan el área del patio, calculan el área de la piscina en forma de trapecio descomponiendo en 2 triángulos y un rectángulo , y efectúan la diferencia entre ambas áreas, no logrando la respuesta experta.	10	≈77%
Los estudiantes calculan el área del patio con forma de rectángulo y el área de la piscina con forma de trapecio como si fuesen ambas rectángulos, utilizan la fórmula y realizan la sustracción de ambas áreas, no logrando la respuesta experta.	2	≈15%
Los estudiantes logran la respuesta experta a través de las fórmulas de área de un rectángulo ,de área de un trapecio y la diferencia de ambas.	1	≈8%

Evidencia de la situación 7

Estudiante E3. Situación 7.



$A_{\square} : 4 \times 6 = 24 cm^2.$ $A_{\Delta}1 = \frac{4cm \times 3,5cm}{2} = 7cm^2$

$A_{\Delta} : 24cm^2 - 14cm^2$ $\Delta 1 \cong \Delta 2$

$A_{\Delta} = 10cm^2$

$A_{\square} = 5cm \times 10cm = 50cm^2$

$A_{pasto} = 50cm^2 - 10cm^2$

$A_{T\,pasto} = 40cm^2.$

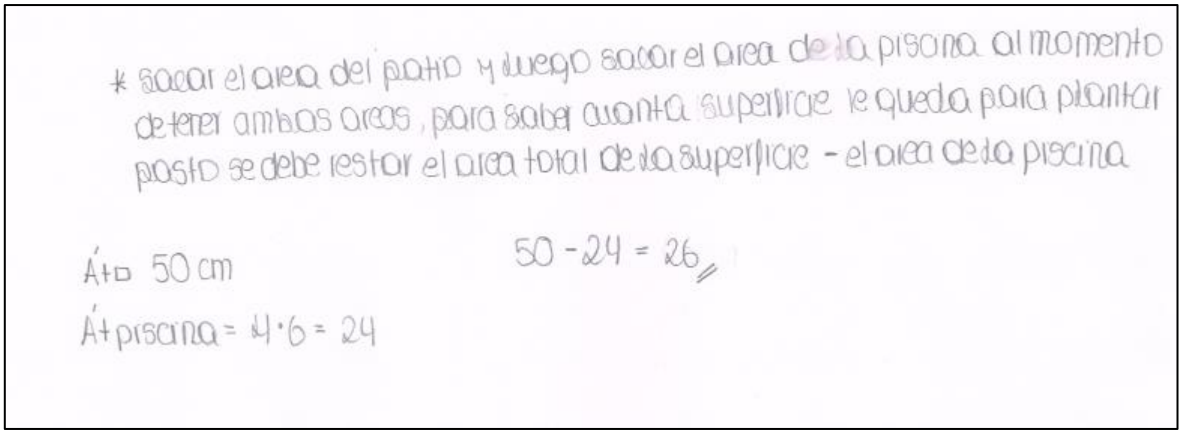
Para sacar el A del trapesio, determino el area del rectangulo formado por la base x Altura. luego le sustraigo los triangulos sobrantes.
Al determinar el A de la piscina lo resto al area del rectangulo de la Superfisie total. Determinando el Area de la superfise Empastada.

Análisis de los esquemas presentados por E3:

E3 presenta un buen esquema para obtener el área para plantar pasto pero enfoca en forma errada las medidas al aplicar uno de sus teoremas en acto. Para obtener la base de los triángulos considera la base del rectángulo ,que corresponde al patio, y no la base mayor del trapecio. Esto demuestra que tuvo problema con la visualización de la imagen o no reflexionó con respecto a las medidas que presenta la tarea. Por otro lado cambió la unidad de medida ,de metros a centímetros, sin efectuar la conversión que corresponde.

E8 forma parte del 85 % de los estudiantes que presentan problemas con la unidad de medida y del 77 % de aquellos que inician un proceso con una estrategia adecuada ,relacionada con los teoremas en acto, pero que al observar las medidas de los lados que debe considerar, para lograr el objetivo de la situación, comete errores.

Estudiante E6. Situación 7.


* sacar el area del patio y luego sacar el area de la piscina al momento de tener ambas areas, para saber cuanta superficie le queda para plantar pasto se debe restar el area total de la superficie - el area de la piscina

Át□ 50 cm

Át piscina = 4·6 = 24

50 - 24 = 26

Análisis de los esquemas presentados por E6:

E6 presenta un esquema con la aplicación de teoremas en acto que tienen relación con la fórmula de área de un rectángulo, para ambas figuras El estudiante no hace distinción con respecto a la forma, para calcular el área del patio y el área de la piscina, teniendo esta última forma de trapecio. Posteriormente efectúa una sustracción entre ambas áreas, no logrando la respuesta experta. Por otro lado, para el área del rectángulo utiliza la unidad unidimensional cm, cambiándola de “m” a “cm”, sin efectuar la conversión correspondiente .Para el área de la piscina y el espacio que resta para pasto, la omite. E6 forma parte del 85 % de los estudiantes que presentan problemas con la unidad de medida y del 15 % de aquellos que no utilizan los conceptos en acto, que deben estar presentes, para dar curso a la utilización de los teoremas en acto y lograr la respuesta experta.

5.8 Situación 8.

1) El terreno de un club campestre tiene forma de hexágono regular y se encuentra dividido en dos zonas con forma de trapecio. Considerando que el segmento $\overline{FC}$ que separa ambas zonas mide 100m y que además GD = GB = 43,3m, ¿cuál es el área de ambas zonas?

• **Objetivo de la situación 8:**. El estudiante aplica estrategias que involucran conceptos y propiedades de los polígonos, para obtener el área de la superficie de un club campestre que posee forma de hexágono.

Respuestas de los alumnos para la situación 8

E1	E2	E3
-Presenta su esquema en lenguaje natural y realizando cálculos de la siguiente manera: -"Se debe calcular el área del cuadro central de cada trapecio multiplicando b•h. Luego, calcular la medida de los triángulos exteriores de cada lado y sumarlos para obtener el área de cada trapecio". -En sus cálculos consideró que cada lado del hexágono medía 43,3m, por lo tanto no logra la respuesta experta, es decir , el área de ambas zonas ,que es 6495 m^2. En entrevista semiestructurada se le solicita :¿Podrías explicar por qué piensas que cada lado mide 43,3 m? Señala lo siguiente: "creí que la figura quedaba formada por 2 trapecios y dentro de éstos habrían dos triángulos y un cuadrado , por ende, el cuadrado tendría la misma medida de sus lados(Δ □ Δ) -Se le solicitó al estudiante si podría explicar si existe diferencia entre los	-Presenta su esquema con algunos cálculos sin unidad correspondiente al área de una superficie. Es decir: 100 •43,3= 4332 Área total =866 Área de cada zona=433. En entrevista semiestructurada se le pregunta ¿consideras m que la unidad de medida es importante? ¿cuál sería? Responde así: "La unidad de medida es importante y seria (m). Además se le solicitó si podría explicar si existe diferencia entre los términos "área" y "superficie" en geometría. El estudiante respondió: "En realidad no hay ninguna diferencia porque la superficie de una figura es equivalente al área".	-Presenta su esquema utilizando el registro numérico para efectuar sus cálculos: -Efectúa la sustracción : 100 –70,75 =29,25 -Divide: 29,25:2 =14,621. -Calcula el área de del ∆DGC como: Á∆= 29,25 x 43,3 obteniendo 19481,05. -Calcula el área de un rectángulo : 100m x 43,3m =3330$m^{2.}$ -Obtiene el área de un trapecio de la siguiente manera: Á trapecio= 3330m^2+19481,05 =22811,05m^2 -Finalmente, para el área total procede así: Á total= 22811,05m^2 •2= 45622.1m^2. -No obtiene la respuesta experta , que es 6495m^2

términos de "área" y "superficie" en geometría. Él señaló lo siguiente: "área" representa el espacio que se ocupa desde una vista superior del plano y la "superficie" es lo mismo. No hay ninguna diferencia porque pregunta acerca del espacio que se ocupa en un plano(2D).		

E4	**E5**	**E6**
-Expone su esquema utilizando el lenguaje natural y el registro numérico para efectuar cálculos: Señala lo siguiente: 50 •43,3=$\frac{2165}{2}$ =1082,5•6 =6495 m $\frac{6495}{2}$= 3247,5 -"El área se obtiene multiplicando base por altura ,luego dividir por 2 porque cada uno es un triángulo y luego se multiplica por el número de triángulos ,es decir 6. El área de cada zona es 3247,5 m". -Se observa que en algunos resultados usa la unidad de medida "metro(m)".	-Presenta su esquema en lenguaje natural, exponiendo lo siguiente: "El trapecio tiene como fórmula base x altura, en la cual debo sacar los triángulos pintados, su respectiva área, la cual se restaría del trapecio total". En entrevista semiestructurada se le solicita responder :¿cuál es el área de ambas zonas? El estudiante no responde la pregunta.	-Expone su esquema utilizando el lenguaje natural y el registro numérico para efectuar cálculos: "Se debe multiplicar la base por la altura para calcular el área de ambas zonas y luego sumar" Multiplica: 100 •43,3=4330 Efectúa una adición: 4330+4330=8660 Escribe: "El área de cada zona es 4330 y del terreno completo 8660". -En entrevista semiestructurada se le pregunta : ¿Consideras que la unidad de medida es importante para calcular el área? Respuesta: sí.

		Se le realiza otra pregunta: ¿Podrías explicar lo que entiendes por “área” y lo que entiendes por “superficie”, en geometría? Justifica tu respuesta. Contesta lo siguiente: “El área es lo que está dentro de la figura(medida) y superficie pienso que es como la “base” de cierta figura, mas bien en figuras que no son planas(porción línea cerrada)”

E7	**E8**	**E9**
Presenta el siguiente esquema: 43,3 :2 = 21,65 -Utiliza el dibujo de la situación considerando la medida del segmento DB como 43,3 m y no como lo señala la tarea ,es decir, GD=GB=43,3m. -Escribe:$\frac{b \bullet h}{2}$ Luego, explica: “En ambas zonas el área será la misma por tener las mismas medidas” -Escribe: “Perímetro por Apotema”. -En entrevista semiestructurada se le pregunta: ¿Podrías calcular el área de ambas zonas , según tu explicación? Y ¿Cuál es la diferencia entre	Presenta su esquema de la siguiente manera: Altura=43,3 $$\frac{(100+50) \bullet 43{,}3}{2}$$ $$\frac{150 \bullet 43{,}3}{2}$$ $$\frac{6495}{2}$$ 3247,5=Área -En entrevista semiestructurada se le solicitó que respondiera las siguientes preguntas : -¿Consideras importante la unidad de medida para este problema? ¿Cuál sería? Su respuesta fue:	-Presenta el siguiente esquema: “Se multiplica 100 •43,3 cm 3 veces en ambos casos. Y para obtener el área completa se suman ambas áreas”. En entrevista semiestructurada se Le solicita lo siguiente:¿Podrías recurrir a diversas estrategias para obtener el área de ambas zonas? Responde así: -“Si, se puede sacar el área de ambos trapecios o se puede sacar el área de uno y multiplicarlo por 2”.

área y superficie? No responde la primera pregunta y para la segunda expresa: “Si, la diferencia entre área y superficie es que la primera es la medida de adentro y la segunda es la medida de la base”.	“si, por supuesto, solo que en ocasiones olvido escribirla. En el ejercicio ,en específico, la unidad de medida Sería los metros” -Los conceptos de “área” y” superficie ¿son diferentes o no? Justifica tu respuesta en breves palabras. La respuesta fue la siguiente: “si, son diferentes. El área es toda la parte interior de un plano y la superficie es la base del plano”.	

E10	**E11**	**E12**	**E13**
-Utiliza la figura de la situación y la divide en 2 figuras . -Recurre al siguiente esquema: $Á= \frac{100 \; x \; 44{,}3}{2}$ $=\frac{4430}{2}$ =2215 -Luego, escribe dos veces: 1) 2215 2) 2215 Explica: “Como miden lo mismo tienen la misma medida”.	-Traza líneas en la figura dada y escribe lo siguiente: (100 •43,3) •2= 4330 •20 8660.	--Presenta el siguiente esquema: Trapecio=b•h Parque de diversiones: 100m •43,3m =4330 Zona de deportes: 100m •43,3m =4330 “Ambas zonas tienen la misma área debido a que es un hexágono regular y además tienen la misma medida”. En entrevista semiestructurada se le pregunta lo siguiente, según lo que escribió: “Ambas zonas tienen la misma	-Solo calcula lo siguiente: 100 x 3,3 = 3300 -En entrevista semiestructurada se le pregunta: ¿Por qué multiplica 100 por 3,3? Explica Responde lo siguiente: “La verdad es que no me acuerdo porque hice eso y tampoco sabría desarrollar el ejercicio.

		área debido a que es un hexágono regular y además tienen la misma medida ”¿cuáles son esas medidas?. Su respuesta es : “Las medidas son que su altura es 43,3 y su base mide 100m y para ambos casos nos faltaría la base menor para calcular el área del trapecio”	

Estudio de las categorías presentadas por los 13 estudiantes para obtener el área de un club campestre

Situación 8

Conceptos en acto que el estudiante recuerda para la secuencia de tareas dadas y lograr el objetivo .

- Para el **triángulo** , el estudiante recuerda que:

a) Es un polígono de tres lados y que sus elementos principales son sus lados ,vértices y ángulos.
b) La clasificación del triángulo según las características de sus lados: triángulo equilátero, triángulo isósceles y triángulo escaleno.
c) La clasificación del triángulo según las características de sus ángulos: triángulo acutángulo, triángulo rectángulo y triángulo obtusángulo.
d) Unidades de medidas basadas en el sistema métrico decimal
e) Concepto de congruencia, en el sentido de igualdad, ideal posibilidad de “sobreponer”, (D´Amore,B. y Fandiño M. (2009)).
f) Notaciones simbólicas de geometría para la situación 1.
g) Noción de área de un triángulo

- Para el **rectángulo** ,el estudiante recuerda que:

a) Es un polígono de cuatro lados que integra la clasificación de los cuadriláteros y , en particular, es un paralelogramo.
b) El rectángulo tiene sus lados opuestos paralelos
c) Sus lados opuestos son de igual medida .
d) Unidades de medidas basadas en el sistema métrico decimal

e) Notaciones simbólicas de geometría para la situación 4.
f) Noción de área de un rectángulo.

•Para el **trapecio**, el estudiante recuerda que:

a) Un trapecio es un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos.
b) En un trapecio ,los lados paralelos son de distinta medida y se llaman bases del trapecio.
c) Las alturas del trapecio son segmentos que se trazan perpendicularmente desde los vértices al lado opuesto,
d) Por ser las bases paralelas entre sí , las alturas son de igual medida.
e) Los trapecios se clasifican en : escalenos, isósceles , trisoláteros y rectángulos.
f) Noción de área de un trapecio.

•Para el hexágono regular, el estudiante recuerda que:

a) Es un polígono de 6 lados de igual medida .
b) Cada ángulo interior de un hexágono regular es de igual medida.
c) Un hexágono regular se puede dividir en 6 triángulos equiláteros.
d) Un hexágono regular se puede dividir en dos trapecios congruentes.
e) El concepto de apotema como perpendicular trazada desde el centro de un polígono regular a cualquiera de sus lados , o bien, la **apotema** de un polígono regular es la menor distancia entre el centro y cualquiera de sus lados. Es un segmento cuyos extremos son el centro de un polígono regular y el punto medio de cualquiera de sus lados, y es siempre perpendicular a dicho lado.
f) El área de un polígono regular es igual a la suma de las áreas de sus triángulos centrales o bien es igual al producto de su apotema por su semi-perímetro, junto a su unidad al cuadrado.

Primer Análisis

Situación 8: Caracterización y teoremas en acto	N° de estudiantes de un total de 13	%
Al expresar cuál es el área de ambas zonas ,los estudiantes omiten la unidad de medida o bien la señalan en “m”	12	≈92%
Al expresar cuál es el área de ambas zonas los estudiantes señalan como unidad de medida: “m^2 “.	1	≈8%

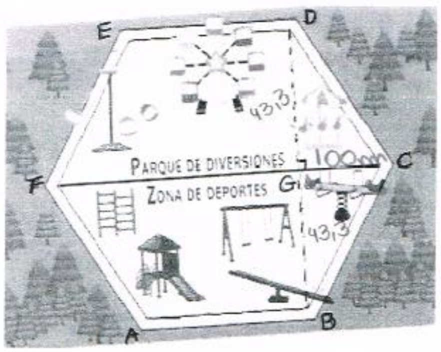
Segundo análisis.

Situación 8: Caracterización y teoremas en acto	N° de estudiantes de un total de 13	%
Los estudiantes consideran la forma de hexágono dividida en 2 trapecios , calcula las áreas de ellos como si fuesen rectángulos, no logrando el objetivo.	9	≈69%
Los estudiantes consideran la forma de hexágono dividida en 2 trapecios y calculan el área de un trapecio como si fuese un triángulo, posteriormente no suman las partes ,no logrando el objetivo.	2	≈15%
Los estudiantes consideran la forma de hexágono dividida en 2 trapecios y calculan el área de un trapecio utilizando la fórmula, posteriormente no suman las partes ,no logrando el objetivo.	1	≈8%
Los estudiantes consideran la forma del hexágono dividido en 6 triángulos equiláteros, calculan el área de un triángulo, multiplican por 6 y obtienen el área total de la zona.	1	≈8%

Evidencia de la situación 8

Estudiante E12. Situación 8.

8) El terreno de un club campestre tiene forma de hexágono regular y se encuentra dividido en dos zonas con forma de trapecio. Considerando que el segmento $\overline{FC}$ que separa ambas zonas mide 100m y que además GD = GB =43,3m, ¿cuál es el área de ambas zonas?



trapecio = b · h

parque de diversiones 100 m · 43.3 m = 4330

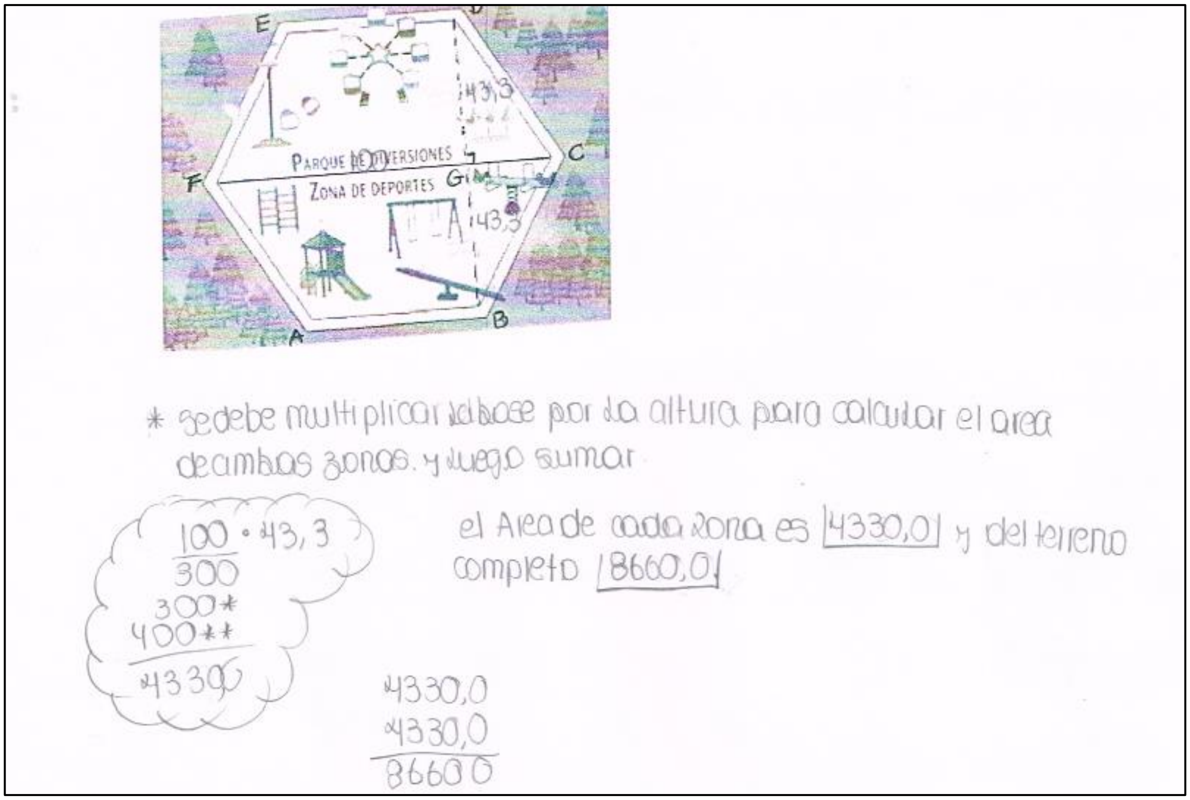
zona de deportes · 100 m · 433 m = 4330

ambas zonas tienen la misma área debido a que es un hexagono regular y además tienen la misma medida

Análisis de los esquemas presentados por E12:

E12 inicia su esquema visualizando que el hexágono regular lo puede dividir en dos trapecios. Escribe una fórmula para el área del trapecio como si fuese un rectángulo, lo que indica confusión con los conceptos en acto al no tener presente que las características del trapecio y del rectángulo son diferentes. Luego, realiza los cálculos de área de ambas zonas ,por separado, sin sumarlas, el objetivo de la situación. Por otro lado ,incorpora la unidad de medida durante el proceso de sus cálculos, pero al finalizar, en su respuesta final, la omite. El estudiante E12 pertenece al 69% de los estudiantes que consideran que el parque tiene la forma de hexágono regular y es posible dividirlo en 2 trapecios. Posteriormente, calcula las áreas de ellos como si fuesen rectángulos, no logrando el objetivo de la situación. Además, el alumno forma parte del 92% de aquellos que omiten la unidad de medida para medir una superficie. Se observa que el estudiante sólo recurre a una fórmula para calcular el área solicitada y no sugiere otras estrategias para lograr el objetivo de la tarea planteada.

Estudiante E6. Situación 8.

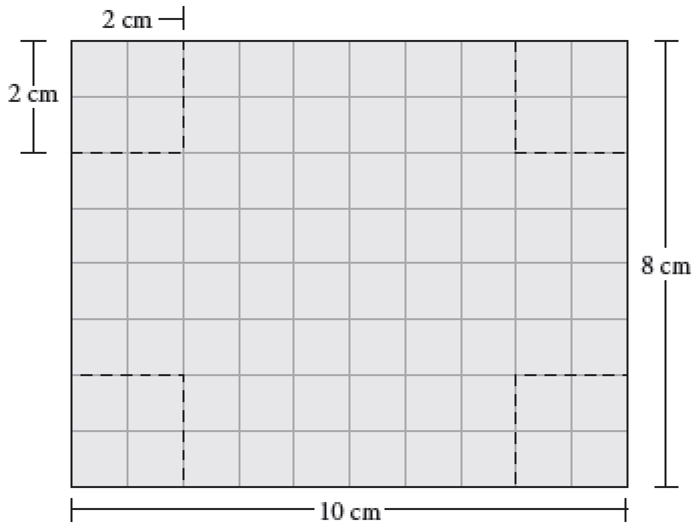


Análisis de los esquemas presentados por E6:

E6 evidencia, a través de su esquema, que utiliza conceptos y propiedades que están relacionados con el hexágono y con las sub-divisiones posibles que se pueden obtener de ella , pero al efectuar el proceso, con la utilización de teoremas en acto, se confunde . Utiliza la expresión algebraica que corresponde al área del rectángulo, para determinar el área total de la zona requerida. Respecto a la unidad de medida, la omite. El estudiante E6 pertenece al 69% de los estudiantes que consideran la forma de hexágono que posee el parque, sin embargo calcula el área de él como si fuesen dos rectángulos, no logrando el objetivo. Además, forma parte del 92 % de aquellos que omiten la unidad de medida para medir la superficie. Se observa que el estudiante sólo recurre a una fórmula para calcular el área solicitada y no sugiere otras estrategias para lograr el objetivo de la tarea planteada.

5.9 Situación 9.

a) Fabiola desea construir una caja a partir de un cartón rectangular de 10cm de largo y 8 cm de ancho, cortándole las puntas tal como se muestra en la figura.



b) Una vez confeccionada la caja, ¿Cómo se verá de frente, de perfil y desde arriba? Dibuja cada una de esas vistas. Considera que cada uno de los siguientes cuadraditos mide 1cm de lado.
c) Explica cómo puedes obtener el área de cada una de las caras de la caja?
d) Explica como puedes obtener el área total de la caja sin tapa y explica cómo obtener el área total de la caja si tuviese tapa?Describe tus procesos..

Objetivo de la situación 9:. El estudiante determina el área de cada una de las partes que componen un cuerpo geométrico y su área total, utilizando cuadrículas o procesos que involucran conceptos y teoremas.

Situación 9, letras “a” y “b”.

E1	**E2**	**E3**
-El estudiante debe observar la imagen de la tarea y debe dibujar cada una de las vistas. El estudiante dibuja por	-El estudiante debe observar la imagen de la tarea y debe dibujar cada una de las vistas. El estudiante dibuja por	-El estudiante debe observar la imagen de la tarea y debe dibujar cada una de las vistas. El estudiante dibuja por

separada las vistas de la red dada, respetando la medida de cada cuadrito.	separada las vistas de la red dada, pero no asume la medida de cada cuadrito.	separada las vistas de la red dada, respetando la medida de cada cuadrito.

E4	**E5**	**E6**
-El estudiante debe observar la imagen de la tarea y debe dibujar cada una de las vistas. El estudiante dibuja por separada las vistas de la red dada, pero no asume la medida de cada cuadrito.	-El estudiante debe observar la imagen de la tarea y debe dibujar cada una de las vistas. El estudiante no dibuja por separado cada una de las vistas, que son tres. Dibuja una caja	-El estudiante debe observar la imagen de la tarea y debe dibujar cada una de las vistas. El estudiante dibuja por separada las vistas de la red dada, respetando la medida de cada cuadrito.

E7	**E8**	**E9**
-El estudiante debe observar la imagen de la tarea y debe dibujar cada una de las vistas. -El estudiante dibuja, repitiendo la red dos veces para las vistas de frente y de arriba. El dibujo de perfil Respeta la medida de la red primitiva.	-El estudiante debe observar la imagen de la tarea y debe dibujar cada una de las vistas. El estudiante no representa las vistas solicitadas de acuerdo a las medidas de la red dada.	-El estudiante debe observar la imagen de la tarea y debe dibujar cada una de las vistas. El estudiante dibuja por separada las vistas de la red dada, respetando la medida de cada cuadrito.

E10	**E11**	**E12**	**E13**
-El estudiante debe observar la imagen de la tarea y debe dibujar cada una de las vistas. -El estudiante dibuja las vistas de frente y de perfil en forma	-El estudiante debe observar la imagen de la tarea y debe dibujar cada una de las vistas. El estudiante dibuja por separada las vistas de la red	El estudiante debe observar la imagen de la tarea y debe dibujar cada una de las vistas. El estudiante dibuja por separada las vistas de la red	-El estudiante debe observar la imagen de la tarea y debe dibujar cada una de las vistas. El estudiante no dibuja por separado cada una de las vistas,

eficaz y para la vista desde arriba repite la red original.	dada, respetando la medida de cada cuadrito para las vistas de perfil y desde arriba pero no para la vista de frente.	dada, respetando la medida de cada cuadrito para las vistas de frente y desde arriba pero no para la vista de perfil.	que son tres. Dibuja una caja.

Situación 9 letra c

E1	**E2**	**E3**
-Presenta las imágenes de las vistas de perfil, de frente y desde arriba y expresa lo siguiente: “Se debe multiplicar la base por la altura en cada cara (b •h).	-Presenta una imagen donde no considera las medidas dadas para la situación Calcula: 2cm •4cm =8cm	-Calcula el área de la superficie de las tres caras que corresponden a las tres vistas de la parte “b”. -Presenta las medidas de las tres vistas, con sus respectivas áreas. -Además tiene lo siguiente: Á frente= 2 x 6 =12 cm^2 Á perfil= 2cm•4cm= 8 cm^2 Á arriba = 4cm x 6cm= 24 cm^2

E4	**E5**	**E6**
-Repite las imágenes de las vistas de la respuesta 8b y escribe para el área de las caras lo siguiente: a • b de cada lado. Explica: “Sacando el área de cada rectángulo y buscando los triángulos que se forman”.	-Explica que para obtener el área de cada una de las caras debe: “Sacar área del cuadrado y recortar sus pequeños rectángulos. Luego, cada rectángulo Por último sumar área del cuadrado más lo 4 rectángulos”.	-Explica lo siguiente: “Multiplicando la base con la altura” 6 •2=12 cara más larga 4 •8= 8 cara más angosta”.

E7	E8	E9
-Señala lo siguiente: "Cada una de las caras de la caja medirán lo mismo y se puede obtener el área por la medida de sus lados, haciendo una multiplicación". Calcula lo siguiente: $\frac{6•4}{2}$=$\frac{24}{2}$ /:2 = 12= á Expresa que "ya no se toman las medidas anteriores 10 y 8 cm, sino que las nuevas medidas 6 y 4 cm , para sacar el área".	-Efectúa los siguientes cálculos: 1) 6 x 4 =24cm 2) 6 x 2= 12cm 3) 6 x 4 =24cm	-Solo escribe "multiplicando el ancho por el largo".

E10	E11	E12	E13
-Repite dos dibujos de las caras de la caja. -Luego calcula lo siguiente: 6 x 2=$\frac{12}{2}$ cm=6cm 4 x 2= $\frac{8}{2}$cm=4cm	-Expone el siguiente esquema: "Tomando todas sus medidas y multiplicándolas entre ellas: -Frente-2 caras 6 •2 =12 -Perfil-2 caras 4 •2 = 8 -Fondo-1 cara 6 •4 =24	-Explica lo siguiente: "Para poder obtener el área de cada uno de sus caras debo primero que todo saber el valor de cada uno de sus lados sumando los centímetros que hay en cada lado y luego de eso anoto su total para poder aplicar la fórmula en la figura que se estime conveniente, que en este caso sería el rectángulo". Luego ,escribe lo siguiente: Á cuadrado=a^2	-Expresa solo lo siguiente cuando se le pide explicar cómo puede obtener el área de cada una de las caras de la caja: "Sumando todos sus lados"

		Á cuadrado=2^2 Á cuadrado=4cm Además ,agrega: Á rectángulo= b•h Á rectángulo= 10 •8 Á rectángulo= 80 cm.	

Situación 9 letra d

E1	**E2**	**E3**
-Expone lo siguiente en lenguaje natural: “Se debe calcular las áreas del total del cartón restando las áreas de las piezas que se cortaron, así obtener el área de la caja. Hacer de nuevo el área del fondo para medir la tapa y agregarlo”	-Expone lo siguiente en lenguaje natural: “Si tuviera tapa se calcularía el área de una sola cara de la caja y luego se multiplica por 6 y si no tuviera tapa solo se multiplica por 5” Lugo escribe: a^2•6 =área de caja con tapa. a^2•5= área de caja sin tapa. -En entrevista semiestructurada se le pide que explique el proceso para obtener el área de todas las caras de una caja con y sin tapa y por qué multiplica por 6 y por 5. Responde lo siguiente: “Con tapa: área de una sola cara de la caja y luego la multiplico por 6 que son el total de caras y para la caja sin tapa lo multiplico por 5”.	-Explica lo siguiente: “Sumo el área de las 2 caras de perfil ,más las dos caras frontales más 1 cara con tapa”. -Sin tapa: $24cm^2$+$16cm^2$ +$24cm^2$=$64cm^2$ -Para calcular el área de la caja con tapa, le sumo la tapa: $64cm^2$+$24cm^2$= $88cm^2$.

E4	E5	E6
-Expone lo siguiente en lenguaje natural: “El área total se obtiene buscando el área de cada uno de los lados y el fondo. Y el área total lo obtengo sumando el área de la tapa más lo anterior” Luego ,escribe, justificando con cálculos: Área total=58cm. Finalmente calcula: Área total con tapa=58+36=94cm.	-Expone lo siguiente en lenguaje natural: “Se puede obtener el área de los cuadrados pequeños. Se puede sacar el área del cuadrado completo y restar cada uno de sus pequeños cuadrados”. Escribe . Ejemplo: 10 •8=80cm^2 2•2 =4cm^2. 80-4-4-4-4= 80 – 16 =64cm^2.	-Expone en lenguaje natural y en el registro numérico, lo siguiente: Á total de la caja sin tapa= 6 •8= 48 Explica que “multipliqué la base de la caja por la altura de la caja”. Después efectúa lo siguiente: Área de la caja con tapa=6 •8 =48 48+28=76 Explica que: “realicé la misma operatoria anterior pero, además, calculé el perímetro de la tapa y la sumé al área de la caja.

E7	E8	E9
-Expone lo siguiente en lenguaje natural: “La caja con tapa aumenta unos centímetros en la medida de la suma por lo cual el área tendrá un resultado x”. “La caja sin tapa disminuirá unos centímetros de medida por lo cual su área tendrá un resultado distinto al de una caja con tapa”. En entrevista semiestructurada se le solicita obtener el área de la caja con tapa y sin tapa y responde lo siguiente:	-Presenta el siguiente esquema: -Sin tapa: 6 x 4 =24cm -Con tapa: 6 4 =24 x 2 = 48cm	-Expone lo siguiente en lenguaje natural: “El área sin tapa se saca multiplicando ancho por largo de la caja. Y para obtener con tapa ,se suma el área de la tapa más el área de la caja”. En entrevista semiestructurada se le pregunta ¿cuál sería el área total de la caja sin tapa y con tapa? Responde dibujando las vistas de frente, de perfil y desde arriba con sus medidas. - No escribe cual es el área de cada cara.

"No puedo obtener el área total de la caja sin tapa porque a ésta le faltará una cara y eso me impedirá obtener su área total. En cambio sí obtendré el área total de la caja con tapa, porque estarán todas sus caras" -No realizó cálculos.		

E10	**E11**	**E12**	**E13**
- Expone en lenguaje natural y en el registro numérico, lo siguiente: "Es lo mismo, ya que para sacar el área no es necesario la tapa, sino la base que es de 6 cm y la altura que es 2 cm" Á=$\frac{6\ x\ 2}{2}$ =$\frac{12}{2}$ =6 cm.	-Expone en lenguaje natural y en el registro numérico, lo siguiente: "Sumando el área de todas sus caras. Sumar un área basal más". Luego realiza los siguientes cálculos: -Área total sin tapa: 12+18+24=54 -Con tapa: 54+24=78. En entrevista semiestructurada se le pregunta si considera que la unidad de medida es importante y cuál es. Responde lo siguiente: "Si, es importante ,Por tiempo no está puesto; cm^2.	-Expone lo siguiente en lenguaje natural: "Para poder sacar el área .Primero sea la tapa. Debo sumar los centímetros de cada lado. Luego de eso ocupar la fórmula y de esta me daría un resultado ,al cual, yo, después , le sumaré el resultado del área de la tapa de la caja dándome el resultado final. Sacando así cada área primero para luego poder sumar".-En entrevista semiestructurada se le solicita que realice los cálculos. Su respuesta fue la siguiente: -Para el rectángulo de base 4cm y altura 2cm calculó el	-Expone lo siguiente en lenguaje natural: "Si tuviera tapa sería multiplicar todos sus lados. Si no tuviera tapa sería multiplicar sus lados y dividir en dos". En entrevista semiestructurada se le pregunta ¿Cuál es el área de la caja con tapa? Responde solo lo siguiente: 10•8=80

		perímetro y el área, es decir: P=12 y Á=6 Señala: 2 caras=12 •2 2 caras =24 lateral. -Para el rectángulo de base 6 cm y altura 2 cm calculó el perímetro y el área obteniendo: P=16 y Á=12 Señala: 2 caras=16 •2=32 Lateral. Para el rectángulo de base 6cm y altura 4 cm calculó el perímetro y el área, es decir: P=20 y Á= 24 Finalmente considera el cálculo de toda la caja sin la tapa sumando los perímetros, o sea: 24+32+20=76 -Se observa que no consideró la unidad de medida	

Estudio de las categorías presentadas en la secuencia de situaciones por los 13 estudiantes para obtener el área total de la caja

Situación 9 :

Los conceptos en acto que el estudiante recuerda para la secuencia de tareas dadas y lograr el objetivo.

Para el **rectángulo** ,el estudiante recuerda que:

a) Es un polígono de cuatro lados que integra la clasificación de los cuadriláteros y , en particular, es un paralelogramo.
b) El rectángulo tiene sus lados opuestos paralelos
c) Sus lados opuestos son de igual medida .
d) Unidades de medidas basadas en el sistema métrico decimal
e) Notaciones simbólicas de geometría para la situación 4.
f) Noción de área de un rectángulo.

Primer análisis

Situación 9: Caracterización y teoremas en acto	N° de estudiantes de un total de 13	%
Al expresar cual es el área total los estudiantes omiten la unidad de medida o bien la señalan en "cm".	11	≈85%
Al expresar cual es el área total los estudiantes la señalan como "cm^2".	2	≈15%

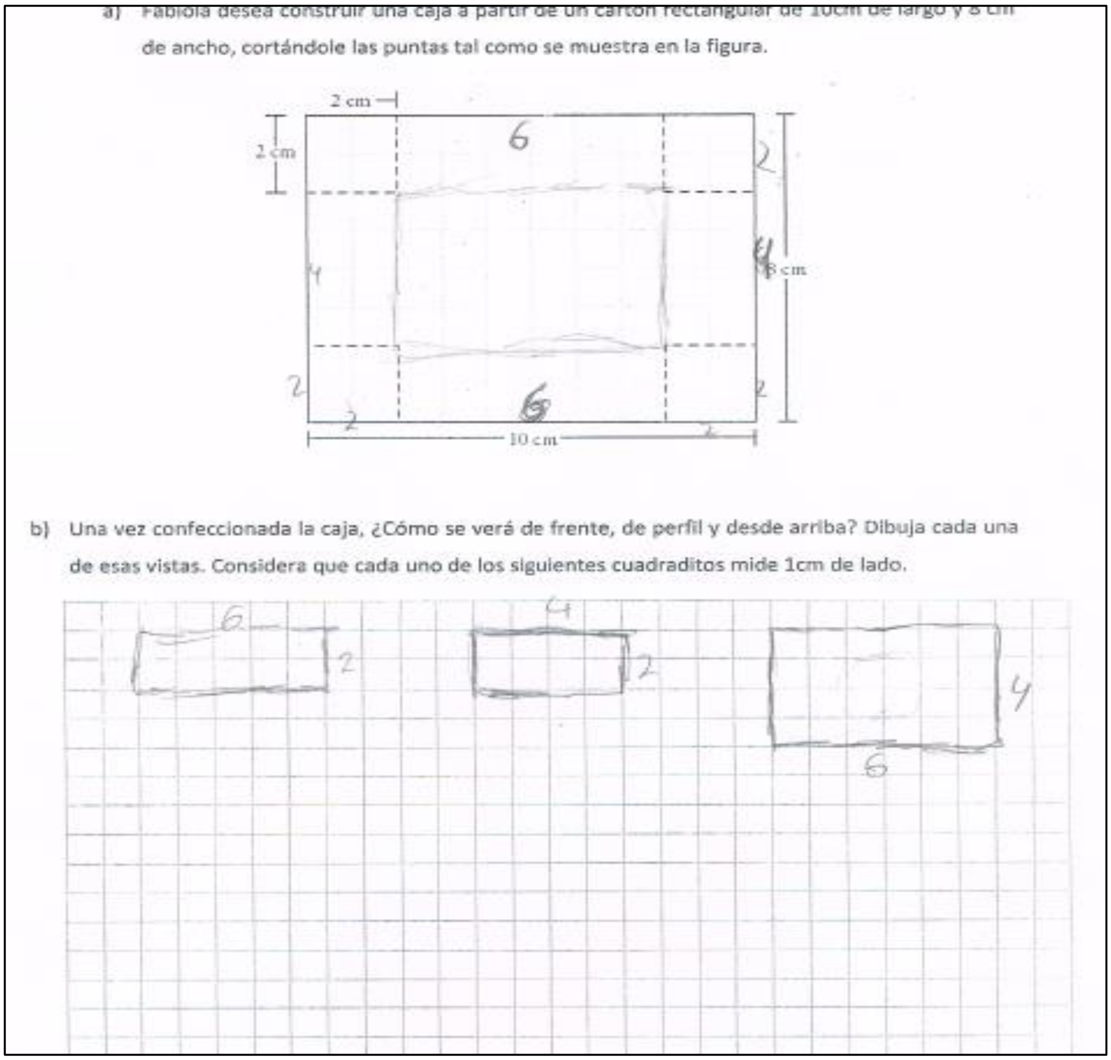
Segundo análisis

Situación 9: Caracterización y teoremas en acto	N° de estudiantes de un total de 13	%
Los estudiantes argumentan en lenguaje natural como obtener el área total de la caja.	4	≈31%
Los estudiantes realizan cálculos con error para obtener el área total de la caja, ya sea olvidando el cálculo de una o más caras o cometiendo errores ya que no enfoca correctamente las medidas de cada lado de las caras de la caja.	8	≈62%
Los estudiantes calculan el área total de la caja utilizando la fórmula para cada rectángulo y	1	≈8%

sumando sus partes, sin tapa y con tapa, logrando la respuesta correcta.		

Evidencia de la situación 9

Estudiante E11. Situación 9a y 9b


a) Fabiola desea construir una caja a partir de un cartón rectangular de 10cm de largo y 8 cm de ancho, cortándole las puntas tal como se muestra en la figura.

b) Una vez confeccionada la caja, ¿Cómo se verá de frente, de perfil y desde arriba? Dibuja cada una de esas vistas. Considera que cada uno de los siguientes cuadraditos mide 1cm de lado.

Estudiante E11. Situación 9c.

TOMANDO todas sus medida y MULTIPLICANDOLAS entre ellas

6 · 2	9 · 2	6 · 4
12	18	24
Frente	Perfil	Fondo
2 caras	2 caras	1 cara

Estudiante E11. Situación 9d.

d) Explica cómo puedes obtener el área total de la caja sin tapa y explica cómo obtener el área total de la caja si tuviese tapa?Describe tus procesos..

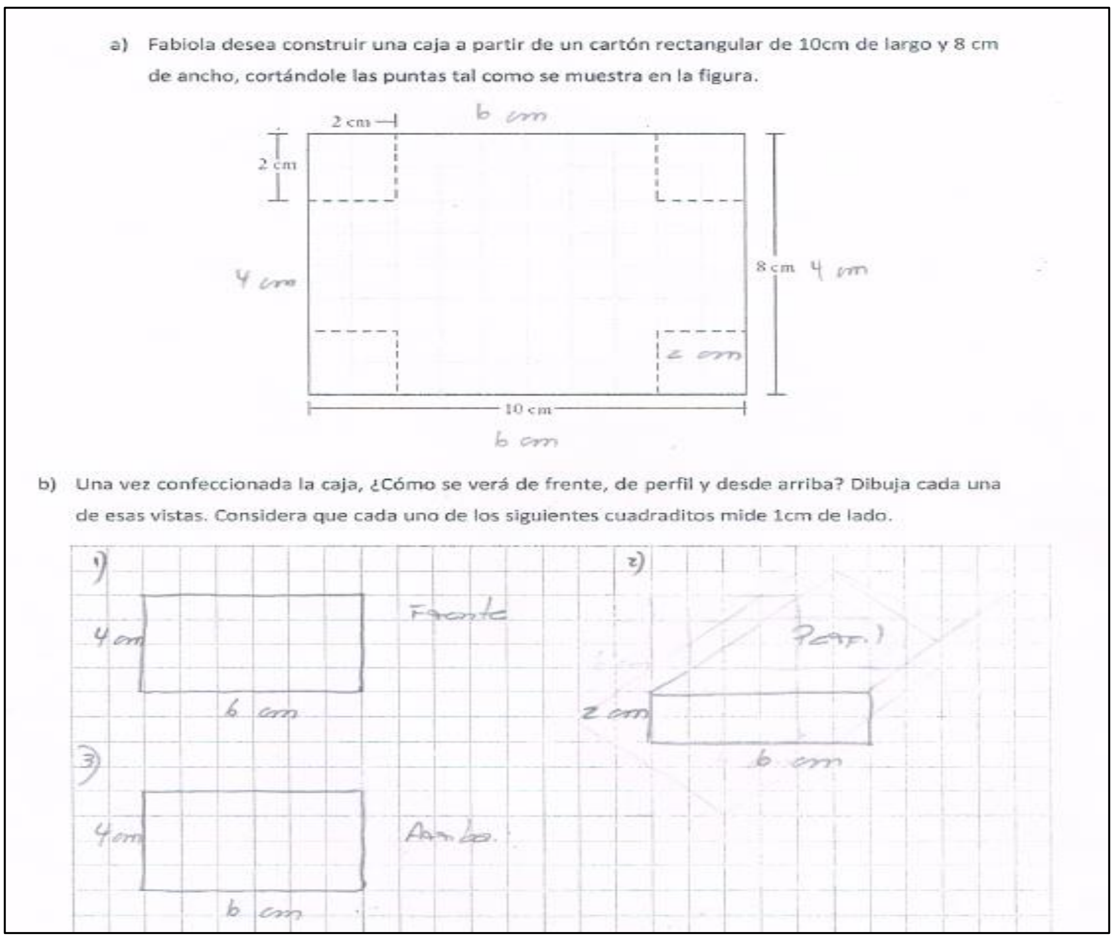
Sumando el área de todas sus caras
Suma un área base más

12 + 18 + 24	
54	54 + 24
	78
Área total sin tapa	con tapa

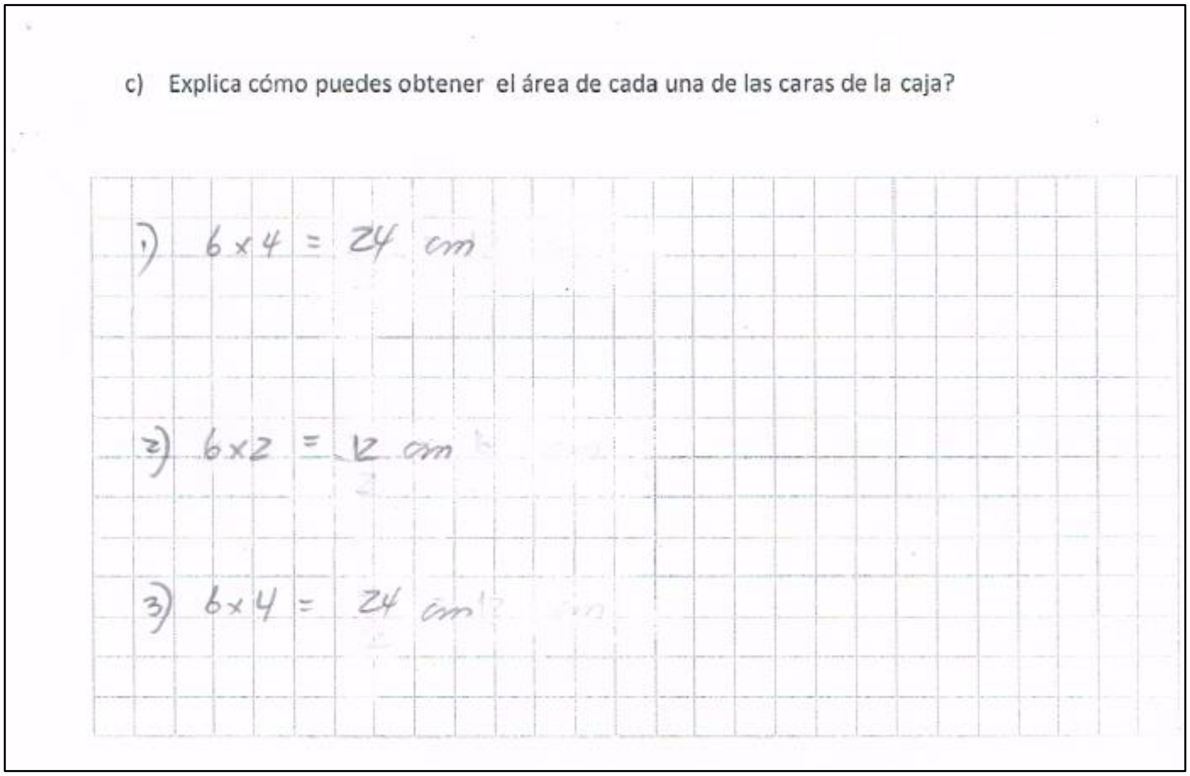
Análisis de los esquemas presentados por E11:

E11 visualiza y expone las medidas de las caras de la red de la caja ,omitiendo las unidades de medida de sus lados. Luego efectúa los cálculos de cada cara, explicando en forma escrita que se debe multiplicar cada área por dos. Al calcular las áreas omite la unidad de medida. En su esquema final, para calcular el área de la caja ,sin y con tapa, suma las áreas calculadas ,olvidando que dos de las caras se multiplican por dos ,para dar respuesta a la situación de área de la caja sin tapa; para el caso de la caja con tapa, utiliza el cálculo anterior y agrega sólo el área de la tapa. Esto tiene como consecuencia el hecho de no lograr la respuesta experta y por lo tanto no alcanzar el objetivo. El estudiante E11 integra el 62% de los estudiantes que realizan cálculos con error para obtener el área total de la caja, ya sea olvidando el cálculo de una o más caras o bien, cometiendo errores de cálculo. Respecto a la unidad de medida para una superficie, la omite en todos sus cálculos. E11 pertenece al 85 % del conjunto de estudiantes que presentan problemas con la unidad de medida, ya sea omitiéndola o bien expresándola como unidad unidimensional. Al no considerar estas propiedades, el estudiante no obtiene la respuesta experta de la situación.

Estudiante E8. Situación 9a y b.



Estudiante E8. Situación 9c.



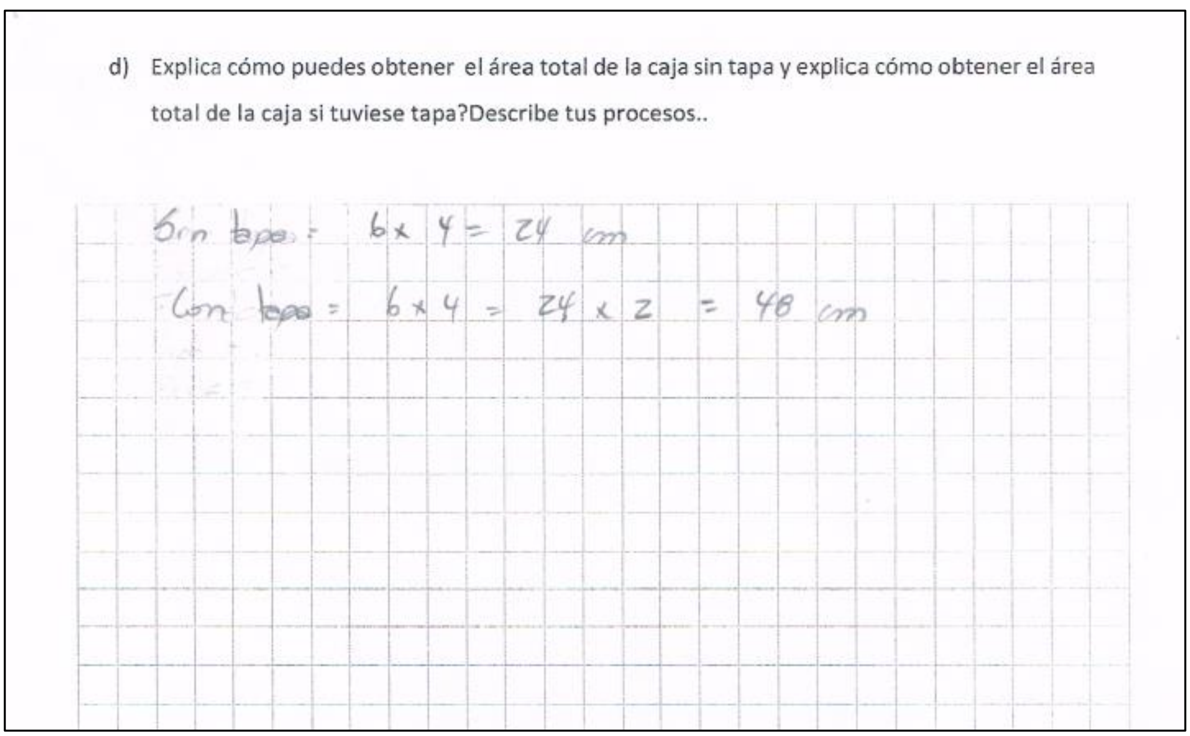
c) Explica cómo puedes obtener el área de cada una de las caras de la caja?

1) $6 \times 4 = 24$ cm

2) $6 \times 2 = 12$ cm

3) $6 \times 4 = 24$ cm

Estudiante E8. Situación 9d.



d) Explica cómo puedes obtener el área total de la caja sin tapa y explica cómo obtener el área total de la caja si tuviese tapa?Describe tus procesos..

Sin tapa: $6 \times 4 = 24$ cm

Con tapa = $6 \times 4 = 24 \times 2 = 48$ cm

Análisis de los esquemas presentados por E8:

El estudiante E8 visualiza y no expone correctamente las medidas de las caras que forman la caja. Luego efectúa los cálculos de cada cara, pero repite las medidas de una de ellas. Al calcular las área de las caras considera la unidad unidimensional. En su esquema final, solo calcula el área de la tapa de la caja y luego repite esta área para multiplicarla por dos. Nuevamente su unidad de medida para el área es unidimensional. En este caso, el estudiante E8 pertenece al 62% de los alumnos que realizan cálculos con error para obtener el área total de la caja, ya sea olvidando el cálculo de una o más caras o cometiendo errores donde no enfoca correctamente las medidas de cada lado de las caras de la caja. Además, integra el 85% de los estudiantes que se caracteriza por presentar la unidad de medida para una superficie como unidad unidimensional o bien la omiten. E8 pertenece al 85 % del conjunto de estudiantes que presentan problemas con la unidad de medida para área, ya sea omitiéndola o bien expresándola como unidad unidimensional, como clara señal de que carece de importancia o la considera igual a la unidad que se utiliza para la medición del perímetro. En general, se confundió con las medidas de las caras que forman parte de una caja, se observa que no consideró las caras paralelas que presentan la misma área, para los cálculos correspondientes. La evidencia muestra debilidad en relación con los conceptos en acto para aplicar correctamente los teoremas en acto, involucrados, para alcanzar el objetivo.

Análisis general relacionado con las unidades bidimensionales.

Al analizar las situaciones 1,3,4,5,7,8 y 9 se presentan los siguientes resultados que demuestran lo que ocurre en relación a la unidad cuadrada, en el conjunto de estudiantes que colaboraron en esta investigación:

	% de estudiantes que omiten la unidad de medida o la expresan como unidad lineal	% de estudiantes que expresan la unidad de área como unidad cuadrada.
Situación 1	54 %	46 %
Situación 3	85 %	15 %
Situación 4	77 %	23 %
Situación 5	85 %	15 %
Situación 7	85 %	15 %
Situación 8	92 %	8 %
Situación 9	85 %	15 %

Esta evidencia señala que el promedio aproximado del 80 % de los estudiantes tiene problemas con la unidad de medida, al determinar el área de una superficie de determinados polígonos en el plano. Solo el 20%, aproximadamente, no presenta dificultad con la unidad bidimensional.

Análisis general relacionado con las confusiones que presentan los estudiantes en sus esquemas.

Al analizar los resultados del cuestionario, se pudo detectar diversos tipos de confusiones que no permitieron a los estudiantes determinar el área ,ya sea en registro algebraico y/o en registro numérico. Las confusiones que se detectaron tienen relación con el mal uso de fórmulas para aquellas situaciones que utilizan el dibujo geométrico y que tienen la característica de ser figuras compuestas, se agregan los problemas con el cálculo numérico, no relacionan los conceptos y propiedades implícitos en las figuras geométricas, falta de comprensión de los enunciados, se observa falta de conexión con otras áreas del saber matemático. Por lo expuesto y como evidencia se presenta el siguiente cuadro, que sintetiza este tipo de problemas :

	% de estudiantes que presentan confusiones en sus esquemas y no logran el objetivo de cada situación del cuestionario.	% de estudiantes que logran el objetivo de cada situación del cuestionario.
Situación 1	38 %	62 %
Situación 2	54 %	46 %
Situación 3	46 %	54 %
Situación 4	62 %	38 %
Situación 5	61 %	39 %
Situación 6	62 %	38 %
Situación 7	92 %	8 %
Situación 8	92 %	8 %
Situación 9	62 %	39 %

El cuadro, basado en el análisis de resultados con la totalidad de las 9 tareas, muestra como evidencia, por un lado, que el promedio aproximado del 63 % de los estudiantes no logran determinar el área de superficie de polígonos en el plano. Por otro lado se tiene que el 37 %, aproximadamente, logra los objetivos planteados.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES Y PROYECCIONES

6.1 Conclusiones

El trabajo realizado ha pretendido dar respuesta a la problemática señalada en el capítulo I, expresada a través de la siguiente interrogante: “¿Cuáles son las concepciones de área de polígonos que han adquirido los alumnos de pedagogía de educación básica, desde la mirada de la “Teoría de los Campos Conceptuales?”.
Para dar respuesta a la pregunta del problema se formuló un objetivo general, expresado en los siguientes términos: “Analizar y caracterizar las concepciones de área de polígonos que han adquirido los estudiantes de pedagogía en educación básica, desde la mirada de la Teoría de los Campos Conceptuales”.

Con el fin de dar cumplimento al objetivo general, se aplicó un cuestionario de respuestas abiertas a 13 estudiantes de pedagogía en educación básica, para indagar y estudiar la forma en que éstos movilizaban sus conceptos en acto y teoremas en acto a través de sus esquemas, en nueve situaciones, relacionadas con el área de polígonos convexos en el plano. Los estudiantes de pregrado de pedagogía en educación básica debían recordar los conceptos en acto relacionados con el sistema métrico y con las definiciones, clasificaciones y propiedades involucrados con el triángulo, rectángulo, cuadrado, trapecio, pentágono regular y hexágono regular para mostrar, a través de sus esquemas, los teoremas en acto que en cada situación o tarea utilizarían para lograr los objetivos de cada pregunta. Los teoremas en acto que debieron estar presente en el desarrollo del cuestionario de respuestas abiertas tienen relación con lo siguiente: expresiones algebraicas o descomposición de una figura geométrica, según sea el caso, para determinar el área de los polígonos, ligadas a la unidad cuadrada, es decir, la relación entre las áreas, del rectángulo y el triángulo de las situaciones 1 y 2. La relación entre las áreas del rectángulo, triángulo y trapecio de la situación 4. La relación entre las áreas del rectángulo y el cuadrado de la situación 5. La relación entre triángulos que tienen la misma base y la misma altura, para determinar el área, de la situación 3. La relación de las áreas del pentágono regular y el triángulo de la situación 6 La relación entre las áreas del pentágono regular , el semiperímetro de él y apotema de la situación 6. La relación entre el área de un rectángulo y un trapecio de la situación 7. La relación entre el área de hexágono regular y el triángulo equilátero de la situación 7. La relación entre las áreas del hexágono regular y el trapecio de la situación 8. La relación entre la expresión algebraica de área de un rectángulo y la suma de las áreas de las diferentes caras en forma de rectángulo que componen una caja de la situación 9.

En cada una de las situaciones o tareas analizadas, del cuestionario, surgieron claras evidencias de que existen problemas con las unidades cuadradas y confusiones con el cálculo del área de polígonos en el plano de aquellas tareas que involucran dibujos geométricos con figuras compuestas.

El análisis del cuadro presentado en la página 136, del el capítulo V, expone los resultados, en porcentaje, que tiene relación con la unidad de medida, para el cálculo de las áreas de cada una de las situaciones del cuestionario. La unidad para medir una superficie corresponde a las magnitudes espaciales, cuya conceptualización requiere a la vez de la geometría, las estructuras aditivas y las multiplicativas (Vergnaud, 1990, pp. 9). En las respuestas de las situaciones 1,3,4,5,7,8 y 9 se evidencia que los estudiantes no han asimilado la importancia que posee la unidad bidimensional en sus esquemas o bien la escriben como unidad unidimensional. En los esquemas presentados por los alumnos se obtuvo como promedio porcentual, un 80%, de aquellos que la omiten o bien la expresan como unidad lineal, como si se tratase de tareas relacionadas con el perímetro en lugar de superficie. Esto demuestra que la conceptualización sobre las unidades de medida para área, adquirida en su trayectoria escolar, ha sido insuficiente y no les permite entregar la respuesta experta en los términos correspondientes. Además, este porcentaje demuestra que los objetivos relacionados con el eje de medición de la enseñanza básica ,de los programas que emanan del Ministerio de Educación, no se han logrado para este grupo de estudiantes, pues sólo el 20% de ellos, ha aprehendido los conceptos relacionados con las unidades para la medición de una superficie. Lo expuesto responde a la inquietud señalada en la problemática, indicada en el capítulo I, en relación a la unidad de medida del área de polígonos en el plano y la omisión o confusión existente en los estudiantes, en relación a ella.

Continuando con la revisión del análisis de los resultados del cuestionario, se puede constatar que los diversos tipos de problemas que se habían dado a conocer con respecto al cálculo del área de polígonos en el plano fueron evidenciados a través de los esquemas de las producciones de los estudiantes. Los problemas que no permitieron a los estudiantes determinar el área ,ya sea en registro algebraico y/o en registro numérico se debe a las confusiones u olvido de fórmulas. Las confusiones han quedado demostradas a través del uso y distorsión de las fórmulas, aprendidas de memoria, y llegar a una respuesta equivocada. En las diversas situaciones presentadas, los alumnos cometían errores cuando cambiaban el sentido de la expresión o cambiaban la fórmula que correspondía por otra fórmula. Los estudiantes también presentaron problemas con la visualización, los conceptos y propiedades implícitos en los dibujos geométricos del cuestionario. En general, ellos tenían absoluta claridad que su trabajo consistía en recordar los conceptos y propiedades adquiridas en la enseñanza básica y media para lograr las metas y submetas del cuestionario. Los estudiantes se concentraron en la lectura de las diversas tareas, comprendieron lo que se les solicitaba y tomaron las reglas de acción que se conectarían a la vez con los invariantes operatorios, es decir, con los conceptos en acto y teorema en acto, para lograr los objetivos de cada pregunta. Todos los conocimientos adquiridos relacionados con matemática y en particular, de geometría, tenían que estar presente en el proceso de resolución del cuestionario, y así quedó demostrado en el análisis de los resultados registrado a través de cuadros en el capítulo V. El problema con el área de polígonos en el plano surge y se evidencia con las respuestas erróneas causadas por una conceptualización insuficiente ya que la mayoría de los esquemas se apoyaron en fórmulas aprendidas de memoria que no les permitió o les anuló la posibilidad de inferir y así recurrir a otras estrategias para lograr la misma solución, en la mayoría de las tareas dadas.

Otros problemas detectados se relacionan con el cálculo numérico y también se observa, falta de conexión con situaciones ligadas a la realidad, como las situaciones 7,8 y 9, donde un promedio del 92% no logra la respuesta experta frente a un 8% que lo logra.

Por lo expuesto anteriormente se confeccionó el cuadro de análisis general en la página 136, capítulo v. Esta tabla muestra que el promedio aproximado del 63 % de los estudiantes no logra determinar el área de superficie de polígonos en el plano ,debido a las confusiones señaladas anteriormente y sólo el 37% logra los objetivos planteados en cada situación, del cuestionario. Esta evidencia nos indica, claramente, que los objetivos de aprendizaje, relacionados con la medición de superficie que emanan del Ministerio de Educación no se han logrado en forma satisfactoria en este conjunto de estudiantes de pregrado de pedagogía en educación básica. Además. nos demuestra que el tratamiento del área de polígonos permanece centrado en la aplicación de fórmulas durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, lo que no les permite reflexionar, observar, relacionar, conjeturar e inferir frente a cualquier tarea que se les pueda plantear. Finalmente, este trabajo nos indica que la problemática en torno al área de superficie de polígonos persiste a través del tiempo y repercute en la enseñanza superior, pese a las innovaciones e investigaciones que se están realizando en los últimos años, a nivel nacional e internacional.

6.2 Proyecciones

Basándose en los datos, análisis y conclusiones que entrega el estudio de área de polígonos en el plano, se puede deducir que este problema no está agotado, por lo tanto, se puede continuar indagando, con investigaciones que incluyan situaciones de mayor complejidad, en otros niveles educacionales o bien en otras instituciones de enseñanza superior El cuestionario, como herramienta, permite considerar y evaluar, al mismo tiempo, el sentido que los estudiantes le dan a las situaciones, tomando como marco referencial La Teoría de los Campos Conceptuales.

Esta investigación nos entrega datos que permiten aportar, en el ámbito local, con orientaciones que tienen una base científica, de modo que se pueda colaborar en el mejoramiento del tratamiento del objeto matemático estudiado, con alumnos de pregrado de pedagogía en educación básica.

Finalmente, este estudio permite tener la posibilidad de diseñar una propuesta didáctica para el tratamiento del área de polígonos, acompañada de herramientas tecnológicas (TIC), bajo la mirada de la “Teoría de los Campos Conceptuales” ,de Gérard Vergnaud , con la finalidad de contribuir en el mejoramiento del tratamiento de la conceptualización que se requiere para medir superficies en el plano.

CAPITULO VII

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alvarez, I., Angel, L., Carranza, E. y Soler-Alvarez, M. (2014).Actividades matemáticas: conjeturar y argumentar*. Números,* 85, 75-90.

Arrieta, X. y Meleán, R., (2009) Estrategia didáctica para el desarrollo de esquemas en resolución de problemas según la Teoría de los Campos Conceptuales*. Revista Universitaria de Investigación*, año 10, 10, 69-95.

Bennett, J., Burger, E., Chard, D., Hall, J., Kennedy, P., Renfro, F., Roby,T., et al. (2014) *Matemática, séptimo básico, texto del estudiante*. Santiago de Chile: Editorial Galileo.

Boyer, C. (2010). *Historia de la Matemática.* Madrid*:* Alianza Editorial.

Candia, E., (2014). *Análisis de las concepciones hacia las matemáticas que poseen estudiantes en proceso de formación para profesor de educación matemática.* Universidad del Biobío. Recuperado de repobib.ubiobio.cl/jspui/bitstream/123456789/275/3/Candia_Lagos_Esteban.pdf

Castro, C, y Marambio, V. (2016*) Matemática, séptimo básico*. Santiago de Chile:Editorial Santillana.

Clemens,S. et al., (1998) *Geometría*. México: Pearson. Addison Wesley

Corberán, R., (1996*) Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad.* Tesis de doctorado, Universidad de Valencia.

Corral, Y., (2010) Diseño de cuestionarios para recolección de datos. *Revista Ciencias de la educación*, 36, 152-168.

Chamorro, M.C. y Belmonte,J. (2003) *El problema de la medida.* Madrid: Síntesis

Chamorro, M.C. (2006) *Didáctica de las Matemáticas para Primaria.* Madrid: Editorial Pearson Educación..

D´Amore, B. y Fandiño, M. I., (2009). *Área y perímetro. Aspectos conceptúales y didácticos.* Bogotá: Magisterio.

Godino, J. y Ruiz, F. (2002) *Geometría y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Hernández, R. (2010) *Metodología de la Investigación.* Lima: Mc Graw Hill Educación.

Olmo, M. (2010) *Superficie y Volumen: ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* España: Editorial Síntesis.

Marmolejo, G. y González, M. T. (2015) El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. Estado de la cuestión. *Revista Electrónica de Investigación en Ciencias*, vol. 10, 1, pp.45-58.

Ministerio de Educación de Chile. (2016) *Programa de estudio de matemática.* Autor. Recuperado de www.curriculumenlineamineduc.cl/

Moreira, M.A, (2002) *La Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área*. Investigaciones en Enseñanza de las Ciencias. Recuperado desde *http://www.if.ufrgs.br/ienci.*

Nortes, A. y Nortes, R. (2013) Enseñanza, apredizaje y evaluación en el grado de maestro de primaria. Educatio siglo XXI,30(2), vol. 30,,2, pp.289-312.

Ramirez, R. (2011) Construcción de polígonos regulares. Trabajo de grado. Recuperado desde www.bdigital.unal.edu.co/7581/1/ricardoramirezchaparro.2011.pdf

Reyes, C. , Dissett, L. , Gormaz, R. (2013). *Geometría para futuros profesores de educación básica*. Santiago de Chile: Ediciones SM Chile S.A.

Sureda, P., Otero, M. (1990*)* Nociones Fundamentales de la Teoría de los Campos Conceptuales*. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias* ISSN pp18550- 6666.

Vergnaud, G. (2007) ¿En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo?;*Investigacoes em Ensino de Ciencias*, Vol12, pp285-302

Vergnaud, G. (1990) La Teoría de los Campos Conceptuales. *Recheches en Didactique des Mathematiques*, Vol10.N| 23pp.133-170

Vidal, R. (2010) El libro de texto de matemáticas en Chile en el último siglo.1910-2010. Universidad Alberto Hurtado. Recuperado desde mailing.uahurtado.cl/cuaderno_educacion_27/pdf/articulo_adjunto_27.pdf

.

ANEXOS

ANEXO 1 Cuestionario

CUESTIONARIO DE GEOMETRÍA

NOMBRE……………………………………………….

INSTITUCIÓN………………………………………..

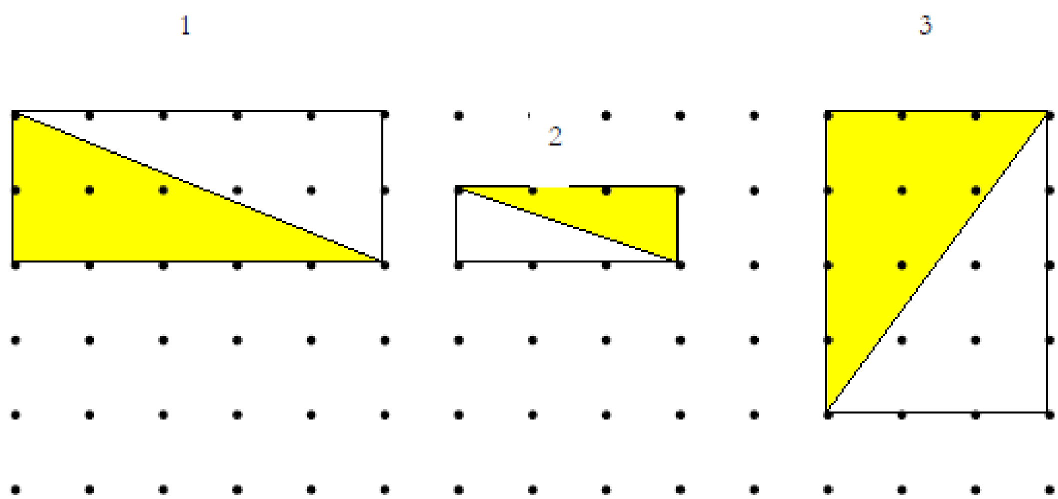
FECHA: ………………………………………………..

PROFESORA: PAULINA GONZÁLEZ ALVEAR

Este cuestionario forma parte de una investigación de la Universidad Alberto Hurtado para optar al grado académico de Magister en Didáctica de la Matemática, por lo que se le pide responder con letra clara cada pregunta, evitando el uso de correctos. Por favor, le solicito responda todas las preguntas.

Desarrollar las siguientes situaciones relacionadas con área de polígonos:

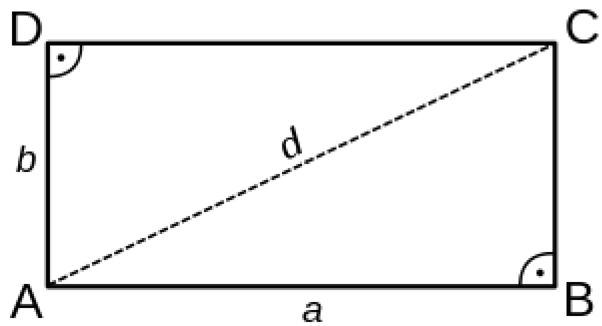
1) Entre cada punto existe un espacio de 1cm.



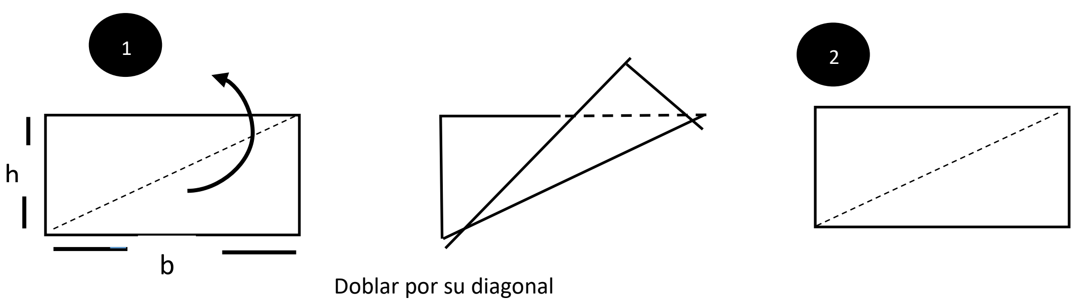
a) Observa los 3 rectángulos y los triángulos ennegrecidos de sus regiones interiores. Describe las medidas de los lados de cada rectángulo y las medidas de los lados de los triángulos que coinciden con dos de los lados del rectángulo .Compara las medidas.

b) Explica como determinarías el área de las 9 figuras. ¿Cuáles son tus conclusiones al determinar las áreas de los rectángulos y de los triángulos?

c) Podrías generalizar el cálculo de área a través de una expresión algebraica para todos los rectángulos y para todos los triángulos, dada la siguiente figura:



2) Observa la siguiente secuencia en la que se representa un rectángulo que se dobla por su diagonal.



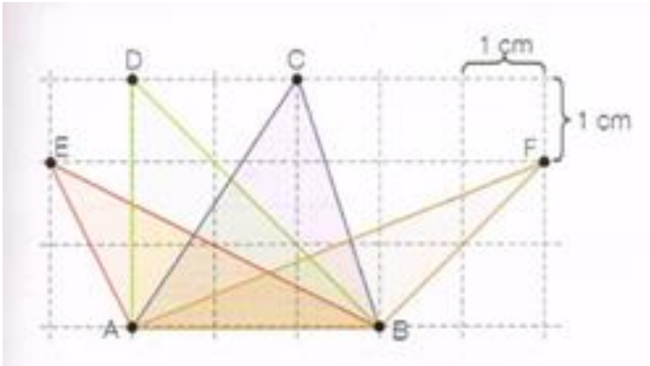
a) Al observar la secuencia ¿Qué otra figura geométrica observas, además del rectángulo?

b) Al observar ambas figuras, ¿Cuáles son sus diferencias y qué tienen en común?

c) ¿Cómo obtendrías el área de ambas figuras? Explica

d) ¿Podrías encontrar una expresión para cada figura que permita calcular el área?

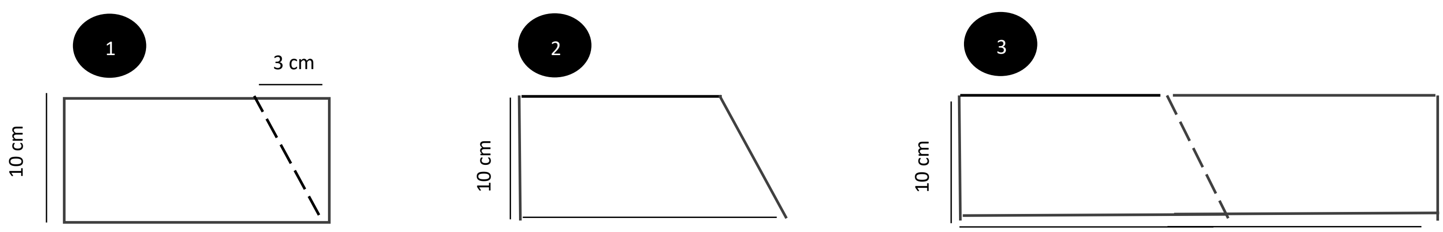
3) Analiza los triángulos y luego completa la tabla.



Triángulo	Medida de la Base	Medida de la altura	Área
ABE			
ABD			
ABC			
ABF			

a) ¿Cuáles triángulos tienen igual área?
b) Explica las características que se deben cumplir para que tengan igual área.
c) ¿Qué ocurre con el área si a todos los triángulos se les aumenta en 2cm su base y se conserva la medida de altura? Explica

4) José tiene un trozo de madera con forma de rectángulo y le recorta un trozo triangular. Él quiere unir el trozo de madera recortado con el de la figura 2, obteniendo el trozo de madera de la figura 3.



La figura representa el recorte del trozo triangular en el rectángulo

La figura representa dos trozos de maderas con iguales características

a) Explica como calcularías el área del rectángulo de la figura 1, sin el recorte.

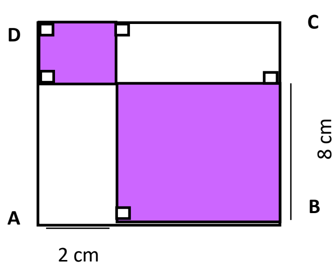
b) Explica como obtendrías el área de la figura 2.

c) La figura 1, recortada, se une con la figura 2, como se muestra en la figura 3. Explica con tus propias palabras porque se pueden unir ambos trozos.

d) Explica el proceso que te permite determinar el área de la figura 3.

5) Describe el proceso para calcular el área de la región pintada:

ABCD es un cuadrado de lado 10 cm



6)

Observa la forma de la cubierta de la siguiente mesa de picnic, de lados de igual medida:

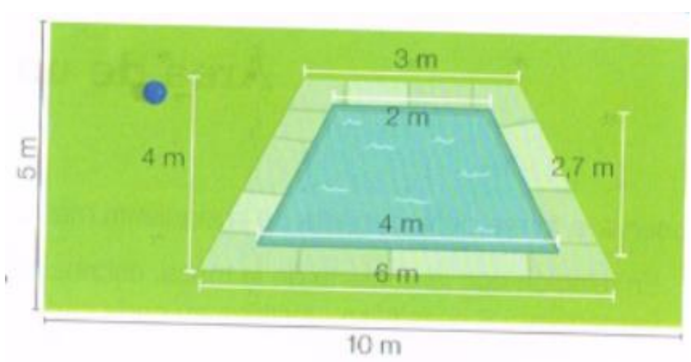
a) Para calcular el área de un polígono regular, ¿se podría dividir en figuras más pequeñas? , ¿En cuáles?

b) ¿Cuáles de las medidas de un polígono regular son necesarias para calcular su área? Marca todas las que sean necesarias con una “X”:

1) Lados
2) Diagonales
3) Apotema (Perpendicular trazada desde el centro de un polígono regular a cualquiera de sus lados).
4) Perímetro
5) Bisectrices

c) Basándote en las respuestas a y b. ¿Cuál sería la expresión general para calcular el área del pentágono regular que corresponde a la cubierta de la mesa?

7) El patio de Josefa tiene forma rectangular. En este construirá una piscina con forma de trapecio como la que se muestra en la imagen. ¿Cuánta superficie le queda para plantar pasto? Describe detalladamente el proceso de razonamiento que utilizarás para responder la pregunta.

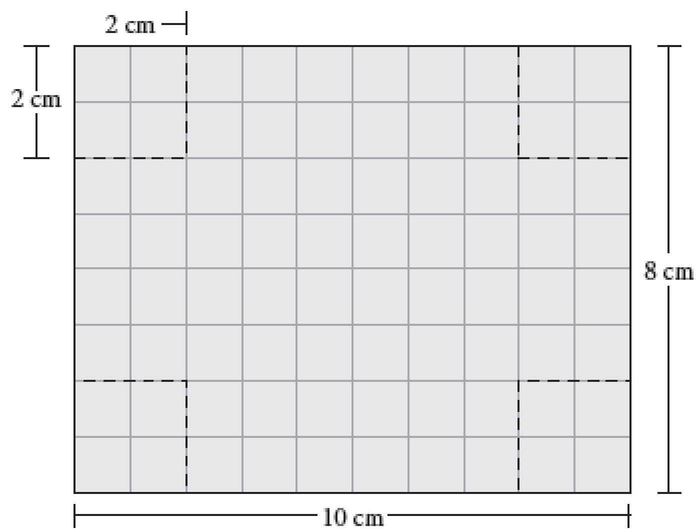


8) El terreno de un club campestre tiene forma de hexágono regular y se encuentra dividido en dos zonas con forma de trapecio. Considerando que el segmento $\overline{FC}$

que separa ambas zonas mide 100m y que además GD = GB = 43,3m, ¿cuál es el área de ambas zonas?

9)

a) Fabiola desea construir una caja a partir de un cartón rectangular de 10cm de largo y 8 cm de ancho, cortándole las puntas tal como se muestra en la figura.



b) Una vez confeccionada la caja, ¿Cómo se verá de frente, de perfil y desde arriba? Dibuja cada una de esas vistas. Considera que cada uno de los siguientes cuadraditos mide 1cm de lado.

c) Explica cómo puedes obtener el área de cada una de las caras de la caja?

d) Explica cómo puedes obtener el área total de la caja sin tapa y explica cómo obtener el área total de la caja si tuviese tapa?Describe tus procesos..

ANEXO II Respuesta experta del cuestionario

CUESTIONARIO DE GEOMETRÍA

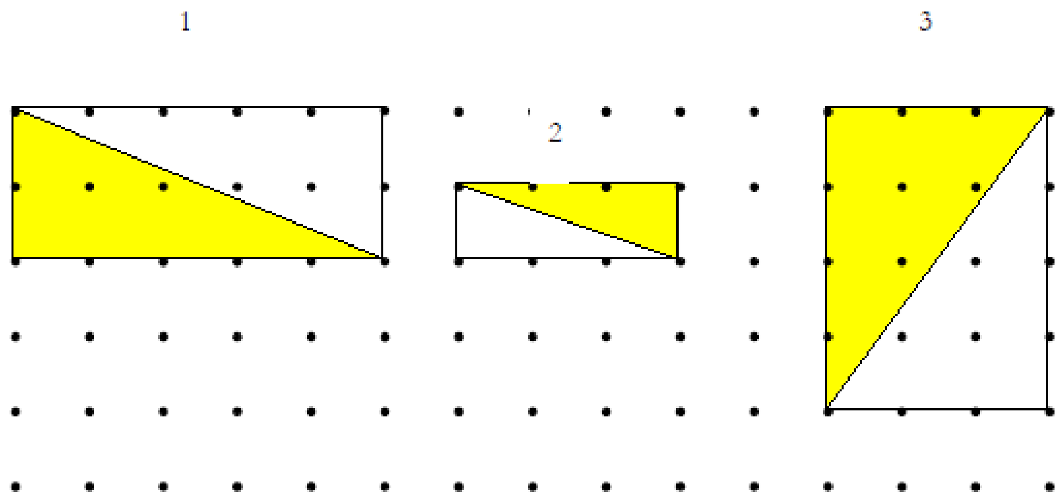
NOMBRE……………………………………………….

INSTITUCIÓN……………………………………..

Este cuestionario forma parte de una investigación de la Universidad Alberto Hurtado para optar al grado académico de Magister en Didáctica de la Matemática, por lo que se le pide responder con letra clara cada pregunta, evitando el uso de correctos. Por favor, le solicito responda todas las preguntas.

Desarrollar las siguientes situaciones relacionadas con área de polígonos:

1) Entre cada punto existe un espacio de 1cm.
   Adaptación: pregunta de tesis de Rosa Corverán



a) Observa los 3 rectángulos y los triángulos de color de sus regiones interiores. Describe las medidas de los lados de cada rectángulo y sus correspondientes triángulos.

b) Explica como determinar el área de las 6 figuras.

c) Podrías generalizar el cálculo de área a través de una expresión algebraica para los rectángulos y triángulos.

<u>RESPUESTA EXPERTA</u>

a) El estudiante observa que:

i) El rectángulo 1 tiene como medidas: base 5cm y altura 2cm, y el triángulo rectángulo, tiene como medidas 5cm para uno de sus catetos y 2cm para el otro cateto.

ii) El rectángulo 2 tiene como medidas: base 3cm y altura 1cm y el triángulo rectángulo tiene como medidas 3cm en uno de sus catetos y 1c, para el otro cateto.

iii) El rectángulo 3 tiene como medidas: base 3cm y altura 4cm, y el triángulo rectángulo tiene 4cm en uno de sus catetos y 3cm en el otro cateto.

b) Para determinar el área del rectángulo 1 se cuenta de punto a punto (1cm); lo correspondiente a la base (5cm) y la altura (2cm). Luego se multiplican entre sí para obtener el área de la siguiente manera: $5cm \cdot 2cm = 10cm^2$.
Para el triángulo rectángulo 1 se utilizan los mismos datos del rectángulo puesto que los catetos corresponden a la base y la altura. Posteriormente se divide en 2 pues la diagonal divide al rectángulo en 2 triángulos congruentes y la figura ennegrecida tiene por lo tanto el área del rectángulo dividida en dos, es decir,
$(5 \cdot 2)\ cm^2 : 2 = 5cm^2$

Se procede de la misma manera con las figuras 2 y 3, obteniendo:

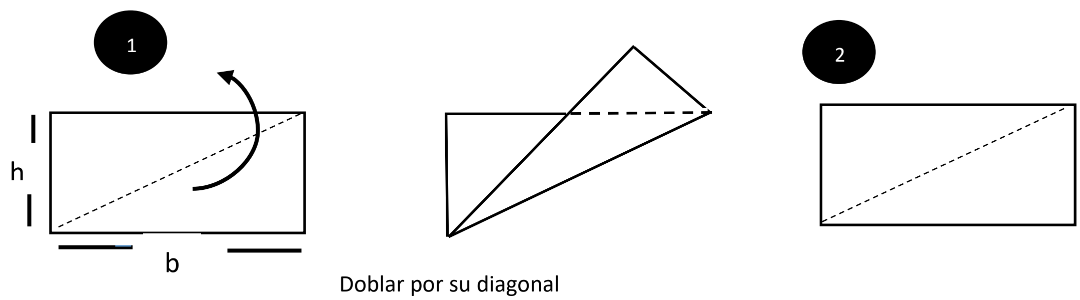
1) Para el rectángulo 2: 3cm •1cm = 3cm^2
2) Para el triángulo 2: (3 •1) cm^2 : 2 = 1,5cm^2
3) Para el rectángulo 3: 3cm •4cm = 12cm^2
4) Para el triángulo 3: (3 •4) cm^2 : 2 = 6cm^2

c) Al generalizar, se obtiene la expresión.

i. Para el área de los rectángulos : área = (base • altura) cm^2

ii. Para el área de los triángulos rectángulos: área = $\frac{(base \cdot altura)}{2} cm^2$

2) Observa la siguiente secuencia en la que se representa un rectángulo que se dobla por su diagonal.



Adaptación del Texto Santillana, 8vo básico. Año 2016.Situaciones 1-2-3

a) Al observar la secuencia ¿Qué otra figura geométrica observas además del rectángulo?

b) Al observar ambas figuras, ¿Cuáles son sus diferencias y qué tienen en común?

c) ¿Cómo obtendrías el área de ambas figuras? Explica

d) ¿Podrías encontrar una expresión para cada figura que permita calcular el área?

<u>RESPUESTA EXPERTA:</u>

a) Al observar las figuras y al efectuar el doblez del rectángulo por su diagonal se obtienen dos triángulos rectángulos.
b) I. Al observar la primera figura (1) se tienen los siguientes conceptos y teoremas ; el estudiante seleccionará lo que utilizará a través de sus procesos mentales:

i) Sus lados opuestos son paralelos
ii) Sus lados opuestos son de igual medida
iii) Sus ángulos opuestos son de igual medida.

iv) Sus ángulos consecutivos son suplementarios.
v) Una diagonal la separa en dos triángulos congruentes.
vi) Sus diagonales generan ángulos alternos internos.
vii) Es equiángulo, es decir, tiene cuatro ángulos de 90 grados.
viii) El rectángulo de la figura tiene dimensiones representadas por “b” y “h”
ix) Se observa que “b” representa la base del rectángulo y “h” representa su altura.

II. Al observar la figura (2) (última) se obtiene:

i) 2 triángulos rectángulos
ii) Cada triángulo rectángulo se caracteriza por tener un ángulo recto.
iii) Cada triángulo rectángulo posee un ángulo recto y de dos catetos.
iv) La suma de sus ángulos internos es 180º
v) Al efectuar el doblez se obtienen dos triángulos, congruentes, por teorema lado-lado-lado (LLL), es decir sus lados opuestos son iguales y la diagonal es común.
vi) Por ser triángulos congruentes tienen la misma área.

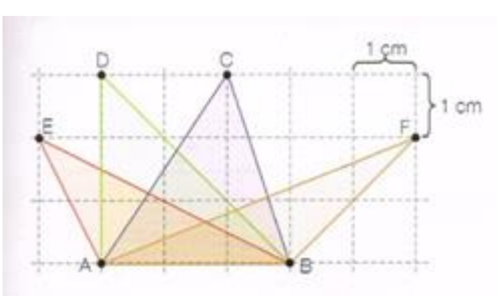
III. Al comparar el rectángulo con uno de los triángulos se observa:

i) Que tienen en común la base (b) y la altura (h)
ii) Entre el rectángulo y uno de los triángulos se tiene un ángulo recto en común.

c)
i) El área del rectángulo se obtiene a través del producto de su base “b” por su altura “h”.
ii) La figura (2) (última) está formado por triángulos rectángulos.
iii) Se deduce que el área de un triángulo es la mitad del área del rectángulo.

d) Las expresiones son:
i) Para el rectángulo sería el producto: b • h con una unidad al cuadrado.
ii) Para cada triángulo se tiene $\frac{b \cdot h}{2}$ con una unidad al cuadrado
iii) Si sumamos las áreas de los 2 triángulos obtenemos el área del rectángulo: $\frac{b \cdot h}{2} + \frac{h \cdot h}{2} = \frac{b \cdot h + b \cdot h}{2} = \frac{2b \cdot h}{2} = b \cdot h$ con la unidad al cuadrado.

3) Analiza los triángulos y luego completa la tabla



Triángulo	Medida de la Base	Medida de la altura	Área
ABE	3 cm	2 cm	3 cm^2
ABD	3 cm	3 cm	4,5 cm^2
ABC	3 cm	3 cm	4,5 cm^2
ABF	3 cm	2 cm	3 cm^2

a) ¿Cuáles triángulos tienen igual área?
b) Explica las características que se deben cumplir para que tengan igual área?
c) ¿Qué ocurre con el área si a todos los triángulos se les aumenta en 2cm su base y se conserva la medida de altura? Explica

RESPUESTA EXPERTA.

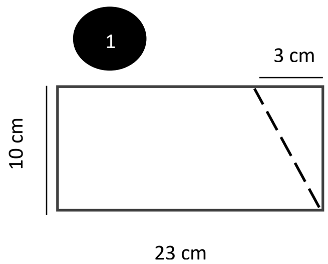
a) Se analiza la figura de la situación.
Se observa que se usa la unidad de medida "un cuadrado" o "baldosa unitaria" de 1cm de lado.
Posteriormente se estudia los triángulos que presentan las características que tiene relación con la base y la altura de triángulos: acutángulos, rectángulos y obtusángulo.
Se completa el cuadro y se responden las preguntas.
A través del conteo de baldosas unitarias el alumno determinará el área de cada triángulo y efectuará una comparación, escrito y visualizado en el cuadro a completar.

b) El estudiante debe deducir que aquellos triángulos que cumplen con el teorema de "triángulos de igual base e igual altura son congruentes y tienen la misma área"
c)

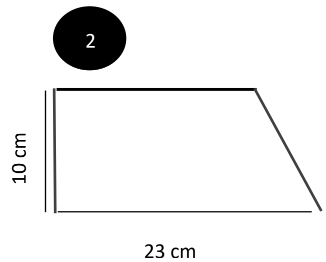
Triángulo	Medida de la Base	Medida de la altura	Área
ABE	5 cm	2cm	$\frac{10}{2} = 5cm^2$
ABD	5 cm	3cm	$\frac{15}{2} = 7{,}5cm^2$
ABC	5 cm	3cm	$\frac{15}{2} = 7{,}5cm^2$
ABF	5 cm	2cm	$\frac{10}{2} = 5cm^2$

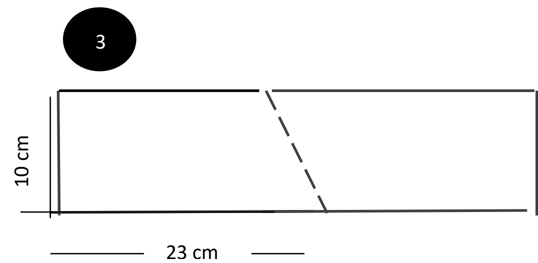
El estudiante debe deducir que al aumentar su base, el área de su región interior aumenta.

4) José tiene un trozo de madera con forma de rectángulo y le recorta un trozo triangular. Él quiere unir el trozo de madera recortado con el de la figura 2, obteniendo el trozo de madera de la figura 3.



La figura representa el recorte del trozo triangular en el rectángulo





La figura representa dos trozos de maderas con iguales características

a) Explica como calcularías el área del rectángulo de la figura 1, sin el recorte.
b) Explica como obtendrías el área de la figura 2.
c) La figura 1, recortada, se une con la figura 2, como se muestra en la figura 3. Explica con tus propias palabras porque se pueden unir ambos trozos.
d) Explica el proceso que te permite determinar el área de la figura 3.

<u>RESPUESTA EXPERTA</u>

Situación contextualizada

a) En la figura (1) se observa un rectángulo y un triángulo rectángulo y se tienen los siguientes conceptos presentes en ella.

Propiedades del rectángulo	Propiedades del triángulo rectángulo
Sus lados opuestos son paralelos	Uno de sus ángulos mide 90 grados
Sus lados opuestos son de igual medida	Sus lados están compuestos por 2 catetos y una hipotenusa.
Es equiángulo, es decir, tiene 4 ángulos rectos.	

Para determinar el área se debe multiplicar 23cm por 10cm obteniendo 230cm^2

b) La figura 2 es un trapecio rectángulo cuyas propiedades son:

i) Tiene dos ángulos rectos.
ii) Tiene un par de lados opuestos paralelos
iii) El área de la figura 2 se puede obtener de 2 maneras diferentes:

1) Como la base y la altura del trapecio coinciden con las medidas que presenta la figura 1 se utiliza el área del rectángulo y se resta con el área del triángulo

rectángulo que es 3cm por 10cm dividido en 2. Es decir 230cm^2 – 15cm^2 = 215 cm^2

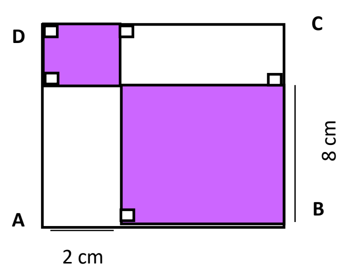
2) Otra forma es recordar la expresión $\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right) \cdot h$ donde $\frac{b_1+b_2}{2}$ es el promedio de las bases y h es altura.

c) Los trozos de madera se pueden unir pues ambos trozos presentan las mismas características. Solo se requiere efectuar el proceso de traslación y rotación que corresponde a los conceptos y teoremas de transformaciones isométricas. Además por sus características los trazos son congruentes y por lo tanto tienen la misma área.
d) Para obtener el área de la figura 3 se tienen dos procesos

i) El primero es sumar por si misma el área del trapecio 2, es decir: 215cm^2+215cm^2 = 430cm^2
ii) El segundo método es multiplicar: 2 • (área del trapecio) = 2 • 215cm^2 = 430 cm^2
iii) El tercer método es efectuar el proceso utilizando las medidas de longitud de las figuras. En la nueva figura se tiene como altura, 10cm, y base (23+20) cm. Posteriormente se multiplica 10cm por 43 cm , obteniendo 430 cm^2.

5) Describe el proceso para calcular el área de la región pintada:

ABCD es un cuadrado de lado 10 cm



(Adaptación del texto Santillana, 2016)

<u>RESPUESTA EXPERTA:</u>

Para calcular el área pintada se debe analizar el concepto del cuadrado y sus teoremas que deben estar presentes en los estudiantes:

i) Sus lados opuestos son paralelos
ii) Cada una de sus diagonales lo separa en dos triángulos congruentes.
iii) Sus lados opuestos son de igual medida.
iv) Sus ángulos opuestos son de igual medida
v) Sus ángulos consecutivos son suplementarios

vi) Sus diagonales se intersectan en su punto medio.
vii) Las diagonales generan ángulos alternos internos
viii) Es equiángulo: tiene sus cuatro ángulos que miden 90 grados.
ix) Es equilátero: tiene sus cuatro lados de igual medida
x) Sus diagonales son de igual medida y se dimidian perpendicularmente formando ángulos de 90 grados en el punto de intersección.
xi) Al intersectar las diagonales se forman 4 triángulos rectángulos congruentes.
xii) Las diagonales son bisectrices.

Procesos para obtener el área de la región achurada:

1)
a) En la figura se determina el área total del cuadrado y se deducen las medidas de los lados no marcados por las unidades de longitud señaladas.
b) Se determina el área total de la figura
c) Se determina el área del cuadrado menor $area_1 = (2cm)^2 = 4cm^2$
d) Se determina el área del cuadrado mayor $area_2 = (8cm)^2 = 64cm^2$
e) Se adicionan ambas áreas $\acute{A}_1 + \acute{A}_2 = 4cm^2 + 64cm^2 = 68cm^2$ Luego el área puntada es $68cm^2$

6)

(Adaptación del texto Santillana.2016)

Observa la forma de la cubierta de la siguiente mesa de picnic, de lados de igual medida:

a) Para calcular el área de un polígono regular, ¿se podría dividir en figuras más pequeñas? , ¿En cuáles?

b) ¿Cuáles de las medidas de un polígono regular son necesarias para calcular su área? Marca todas las que sean necesarias con una “X”:

1) Lados
2) Diagonales
3) Apotema
4) Perímetro
5) Bisectrices

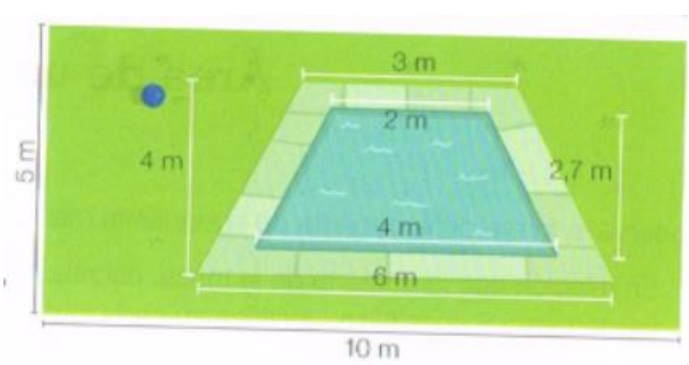
c) Basándote en las respuestas a y b. ¿Cuál sería la expresión general para calcular el área del pentágono regular que corresponde a la cubierta de la mesa?

RESPUESTA EXPERTA
Se observa que la cubierta de la mesa de picnic es un pentágono regular, es decir, todos sus lados tienen la misma medida.

a) Se ubica el punto medio de cada lado del pentágono regular y se trazan simetrales que se intersectan entre sí. La intersección de las simetrales dan origen al centro “O” del pentágono, y producto de esta construcción se obtienen 5 triángulos congruentes de igual base . El segmento trazado desde el punto medio de cada lado al centro del pentágono es llamado apotema.
b) La expresión general para determinar el área de la cubierta de la mesa es:

i) $Area\ pentagono = 5 \cdot \left[\frac{base\ de\ un\ triángulo\ por\ apotema}{2}\right]$ o bien
ii) $Area\ pentagono = semiperimetro\ \cdot apotema$

7) El patio de Josefa tiene forma rectangular. En este construirá una piscina con forma de trapecio como la que se muestra en la imagen. ¿Cuánta superficie le queda para plantar pasto? Describe detalladamente el proceso de razonamiento que utilizarás para responder la pregunta. (Adaptación del texto Santillana-2016, 7mo básico)



RESPUESTA EXPERTA:
Conocidos los conceptos y teoremas del rectángulo y trapecio descritos en los problemas 1 y 2, se tiene:

a) Cálculo del área del trapecio según datos de la imagen:
1era forma:

i) Se calcula el área del rectángulo correspondiente a la cubierta de la piscina : 4cm • 3cm = $12cm^2$

ii) Se calcula el área de un triángulo rectángulo y se multiplica por 2: $2\left(\frac{1,5\cdot 4}{2}\right)cm^2 = (1,5\cdot 4)cm^2 = 6,0cm^2$

iii) Se suman las 2 áreas: $12cm^2+6cm^2 = 18cm^2$

iv) Se calcula el área de la superficie rectangular (10 • 5) cm^2 = $50cm^2$

v) Se calcula el área para jardines por diferencia de área entre el rectángulo y el trapecio: Área jardines = $50cm^2$- $18cm^2$ = $32cm^2$

2da forma

Se calcula toda la superficie del trapecio que abarca la región del agua y borde $Á_1 = \left(\frac{(3+6)cm}{2}\right)\cdot 4cm$

$$A_1 = \frac{9cm}{2}\cdot 4cm$$

$$A_1 = 18cm^2$$

b) Se determina el área total del patio de Josefa (10 • 5) cm^2 = $50cm^2$
c) Por diferencia de áreas se calcula el área para jardines:
Área del rectángulo – Área del trapecio = $50cm^2$- $18cm^2$ = 32 cm^2

8) El terreno de un club campestre tiene forma de hexágono regular y se encuentra dividido en dos zonas con forma de trapecio. Considerando que el segmento $\overline{FC}$ que separa ambas zonas mide 100m y que además GD = GB = 43,3 m, ¿cuál es el área de ambas zonas?

RESPUESTA EXPERTA: En el hexágono se tiene la propiedad de que al trazar todas las diagonales se forman triángulos equiláteros y como la diagonal FG mide 100 y su punto medio corresponde a la intersección de las diagonales, se tiene que desde F al centro del hexágono y desde el centro hasta C ,cada segmento mide 50 por lo tanto cada lado del hexágono ,también, mide 50, De acuerdo a lo anterior se tienen los trapecios FCDE y FCAB.

Cada trapecio se calcula de la siguiente manera:

$\frac{100+50}{2}$ • 43,3 m^2= $\frac{150}{2}$• 43,3 m^2=(75)•43.3 m^2= 3247,5 m^2

Luego, se multiplica por 2 pues se trata de 2 trapecios que forman el hexágono, obteniéndose: 6495 m^2 como área total de la zona.

Otra estrategia de solución es:

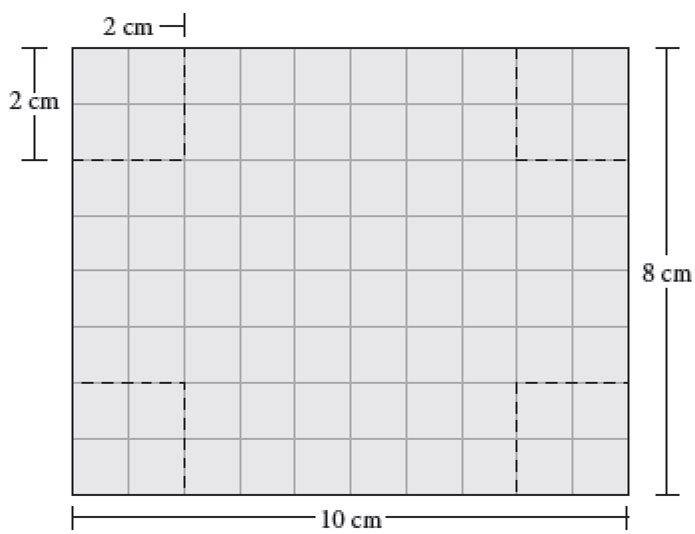
Considerando la medida de FC menos la medida GC que es 75 m.

Imaginar ,por construcción ,que el triángulo CDG se traslada y rota hasta el lado FE del hexágono. Lo mismo se realiza con el triángulo BCG hacia el lado AF del hexágono. Se forma así un rectángulo de base 75 m y altura 86,6 multiplicando base por altura se obtiene 6495 m^2.

Por último se tiene la última forma de solución, recurriendo a la expresión algebraica para calcular la superficie hexagonal que es "semiperímetro multiplicado por la apotema " o bién, lo que es equivalente a decir área de cada triángulo multiplicado por el n° de lados del polígono dado.

9)

a) Fabiola desea construir una caja a partir de un cartón rectangular de 10cm de largo y 8 cm de ancho, cortándole las puntas tal como se muestra en la figura.



b) Una vez

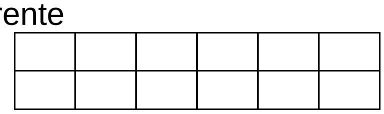
confeccionada la caja, ¿Cómo se verá de frente, de perfil y desde arriba? Dibuja cada una de esas vistas. Considera que cada uno de los siguientes cuadraditos mide 1cm de lado.

c) Explica cómo puedes obtener el área de cada una de las caras de la caja?

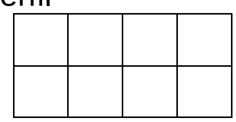
d) Explica cómo puedes obtener el área total de la caja sin tapa y explica cómo obtener el área total de la caja si tuviese tapa?Describe tus procesos..

RESPUESTA EXPERTA

a) Observación de la caja
b) De frente



De perfil



Desde arriba: Base de la caja

c) A_1 = 6cm • 2cm = 12 cm^2 Como son dos caras de igual medida se tiene que A_1 se multiplica por 2 obteniéndose (12 • 2) cm^2 = 24 cm^2
A_2 = 4cm • 2cm = 8 cm^2 Como son 2 caras laterales se tiene que
(2 • 8) cm^2 = 16 cm^2
A_3 = 6cm • 4cm = 24 cm^2

d)

i) El área total de la caja sin tapa se obtiene sumando cada una de sus caras.
$(12 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 24 \ \cdot 1)cm^2 = (24 + 16 + 24)cm^2 = 64cm^2$

ii) Si se agrega una tapa se multiplica A_3 por 2, es decir:
$A_3 = 2 \cdot 24cm^2 = 48cm^2$

iii) Se suman las áreas y se obtiene 2 A_1 +2 A_2 +2 A_3 = 88 cm^2