



UNIVERSIDAD ALBERTO HURTADO

**Facultad de Educación
Departamento de Pedagogías Medias y Didácticas Específicas**

**ANÁLISIS DE NÚMEROS ENTEROS EN TEXTOS ESCOLARES MINISTERIALES DE
SÉPTIMO Y OCTAVO AÑO BÁSICO**

2009-2018

**Por
Pamela Muñoz Cornejo**

**Profesor Guía: Dr. Roberto Vidal Cortes
Profesor informante María Soledad Montoya
Santiago, Chile
2019**

Tabla de contenidos

| | |
|---|----|
| Introducción | 6 |
| CAPÍTULO 1:..... | 8 |
| ANTECEDENTES, DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN. | 8 |
| 1.1 Antecedentes | 8 |
| 1.2 Planteamiento del problema y pregunta de investigación..... | 10 |
| 1.3 Objetivos | 15 |
| 1.3.1 Objetivo general | 16 |
| 1.3.2 Objetivos específicos | 16 |
| CAPÍTULO 2:..... | 17 |
| MARCO DE REFERENCIA..... | 17 |
| 2.1 Historia y epistemología del objeto número negativo | 17 |
| 2.2 Status actual del objeto número entero | 18 |
| 2.3 Marco didáctico..... | 19 |
| 2.3.1 Modelos concretos | 19 |
| 2.3.2 Modos de representación | 23 |
| 2.3.3 Justificaciones de la regla de los signos | 24 |
| CAPITULO 3:..... | 26 |
| MARCO METODOLÓGICO | 26 |
| 3.1 Enfoque y tipo de estudio..... | 26 |
| 3.2 Selección de participantes y escenarios..... | 26 |
| 3.3 Estrategias de recolección de información..... | 27 |
| 3.4 Recolección de datos..... | 28 |
| 3.4.1 matrices de recolección de datos..... | 28 |
| CAPITULO 4:..... | 33 |
| ANANLISIS DE LOS DATOS OBTENIDOS | 33 |
| 4.1 Matriz de identificación..... | 33 |
| 4.2 Análisis 7s09-13..... | 34 |
| 4.3 Análisis 7g14-15 | 38 |
| 4.4 Análisis 7s16-18..... | 41 |
| 4.5 análisis 8s09-10 | 44 |

| | |
|--|----|
| 4.6 Análisis 8mn12..... | 46 |
| 4.7 Análisis 8s11-13..... | 47 |
| 4.8 Análisis 8g14..... | 51 |
| 4.9 Análisis 8sm15-18..... | 55 |
| CAPITULO 5:..... | 61 |
| CONCLUSIONES | 61 |
| 5.1 Problema de investigación y su relevancia para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática | 61 |
| 5.2 Logro de objetivos propuestos | 62 |
| 5.3 Respuesta a la pregunta de investigación | 69 |
| 5.4 Proyecciones | 70 |
| Bibliografía..... | 71 |

Tabla de ilustraciones

| | |
|---|----|
| Ilustración 1: Metáfora regla de multiplicación entre números enteros | 12 |
| Ilustración 2: Metáfora regla de multiplicación entre números enteros | 13 |
| Ilustración 3: Cuadro regla multiplicación entre números enteros | 13 |
| Ilustración 4: Esquema problema de investigación..... | 15 |
| Ilustración 5: Ejemplo adición entre números positivos con recta numérica | 35 |
| Ilustración 6: Ejemplo adición entre números de distinto signo con recta numérica | 35 |
| Ilustración 7: ejemplo adición entre números negativos con recta numérica | 35 |
| Ilustración 8: Enunciación regla resta números enteros | 37 |
| Ilustración 9: Ejemplo sustracción con recta numérica | 37 |
| Ilustración 10: Actividad con fichas bicolor | 39 |
| Ilustración 11: Ejemplo sustracción con recta numérica | 41 |
| Ilustración 12: Indicación juego con fichas bicolor | 42 |
| Ilustración 13: Instrucción para restar números enteros | 44 |
| Ilustración 14: ejemplo multiplicación con recta numérica | 48 |
| Ilustración 15: propiedad conmutativa de la multiplicación | 48 |
| Ilustración 16: indicación para multiplicar números enteros..... | 49 |
| Ilustración 17: ejemplo multiplicación números enteros..... | 49 |
| Ilustración 18: ejemplo multiplicación entre números enteros..... | 49 |
| Ilustración 19: regla de los signos | 50 |
| Ilustración 20: ejemplo multiplicación con fichas bicolor..... | 52 |
| Ilustración 21: ejemplo multiplicación con fichas bicolor..... | 52 |
| Ilustración 22: ejemplo multiplicación con fichas bicolor..... | 53 |
| Ilustración 23: patrones numéricos; regla de los signos | 53 |
| Ilustración 24: multiplicación con recta numérica | 56 |
| Ilustración 25: multiplicación con tarjetas rectangulares..... | 57 |
| Ilustración 26: sistema de engranaje..... | 58 |
| Ilustración 27: multiplicación con tarjetas rectangulares..... | 58 |
| Ilustración 28: división con recta numérica..... | 59 |
| Ilustración 29: regla para dividir números enteros | 60 |

Resumen

Este trabajo consiste en un análisis de texto escolares, centrado en la unidad de números enteros propuestas para séptimo y octavo año básico entre los años 2009 y 2018. El propósito de esta investigación de tipo cualitativo, es indagar sobre los modelos concretos utilizados para la enseñanza de los números negativos, los modos de representación y su pertinencia para cada caso de las distintas operaciones matemáticas.

El análisis fue realizado usando como referentes teóricos los modelos concretos de desplazamiento y neutralización descritos por Eva Cid el año 2001, el enfoque de enseñanza de las Matemáticas concreto- pictórico – simbólico (COPISI) basado en los modos de representación planteados por Jerome Bruner y las justificaciones para la regla de multiplicación entre números negativos documentadas por Bernardo Gómez.

Las conclusiones obtenidas a partir de este trabajo fueron: Los modelos concretos más utilizados son la recta numérica y los problemas contextualizados en situaciones cotidianas.

El 98.5% de las actividades están en modo de representación simbólico, por lo que no existe tránsito entre los distintos modos de representación.

No todos los casos considerados para cada operación son representados a través de modelos concretos.

De los que son representados, solo los correspondientes a la adición pueden justificarse en la recta numérica, y podría ocurrir lo mismo con las fichas de dos colores, pero la manera en que se plantea la actividad no lo permite. En el caso de los problemas cotidianos no son necesarios los números negativos.

Los modelos concretos son abandonados de manera repentina para dar paso una regla o indicación para calcular de manera mecánica.

Introducción

A continuación, se presenta el trabajo de graduación para optar al grado de Magister en Didáctica de la Matemática. Esta investigación consiste en un análisis bibliográfico, que pretende caracterizar modelos concretos y determinar su utilidad para cada caso de las operaciones matemáticas en las actividades utilizadas para la enseñanza de los números enteros, propuestas en textos escolares licitados por el Ministerio de Educación chileno para séptimo y octavo año básico entre los años 2009 y 2018.

Actualmente el texto escolar es uno de los principales recursos de aprendizaje en los procesos educativos, presente en todas las aulas del país, este año se entregaron más de 17 millones de textos a los más de 3 millones de estudiantes inscritos en los cerca de 11.000 establecimientos educacionales subvencionados del país de los cuales 3.956 son establecimientos rurales, 6.686 urbanos, no contemplando aquellos colegios no acreditados o pendientes, para la región Metropolitana el universo de colegios es de 2.611, de los cuales 166 pertenecen a comunas rurales y 2.305 a zonas urbanas. (www.mineduc.cl).

El análisis se centró en la unidad de números enteros y para ello se utilizó como referente teórico la clasificación de modelos concretos propuesta por Eva Cid, los Modos de Representación del conocimiento matemático de Jerome Bruner adaptado bajo el enfoque concreto, pictórico y simbólico conocido por la sigla COPISI y las justificaciones de la regla de los signos recopilada por Bernardo Gómez.

Esta investigación fue estructurada en cinco capítulos, los cuales son brevemente descritos a continuación:

Capítulo 1: en él se expone los antecedentes compuestos por publicaciones sobre el uso de modelos concretos y obstáculos epistemológicos relacionados con la enseñanza de los números enteros.

Capítulo 2: presenta los fundamentos teóricos que sostienen esta investigación, comienza por la historia y epistemología del objeto números negativos, seguido de su estatus actual. Los modelos concretos propuestos por Eva Cid, modos de representación de Jerome Bruner adaptado en COPISI y la justificación de la regla para la multiplicación de números enteros.

Capítulo 3: describe la metodología empleada para la investigación, explicando el enfoque cualitativo, la estrategia utilizada para seleccionar la muestra y los instrumentos empleados para la recolección de datos.

Capítulo 4: Contiene un análisis cualitativo-descriptivo de la información obtenida al aplicar las matrices de recolección de información.

Capítulo 5: muestra las conclusiones obtenidas a partir del análisis.

CAPÍTULO 1:

ANTECEDENTES, DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN.

1.1 Antecedentes

Los números negativos se originan en un contexto algebraico, tal como lo plantea Eva Cid (2000), dado que los matemáticos los establecen como solución de ecuaciones en un momento en que el álgebra era considerada una técnica de resolución para problemas aritméticos, por este motivo los sumando que aparecían como respuesta a una ecuación cobraban inmediatamente sentido, por el contrario, los sustraendo aislados carecían de sentido ya que los números eran entendidos como medidas de magnitud, como cantidades y no era posible interpretar una cantidad menor que “nada”.

A partir de la situación antes descrita surge, junto a este objeto matemático, inmediatamente un obstáculo epistemológico, ya que, un sustraendo aislado no podía tener sentido porque indicaba que había que quitar “de donde no había”, así que cuando una ecuación tenía como resultado un número negativo, este era considerado una solución falsa, ficticia o imposible como algunos autores, por ejemplo, Stevin, Carnot, Descartes, citados por Cid (2000) se refirieron a esto, en el trabajo matemático previo al siglo XVIII, época en que se legitimaron los números negativos por la comunidad matemática.

Con el pasar del tiempo los matemáticos fueron necesitando los números negativos para sustentar algunas situaciones, por ejemplo, el aceptarlos como solución a las ecuaciones permitió establecer el Teorema Fundamental del Álgebra: toda ecuación polinómica de grado n con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces.

Otro ejemplo, es que la geometría analítica puso de manifiesto la biyección existente entre los puntos de la recta y los números reales, para esto los sustraendos debían formar parte de los números reales, entre otras razones que obligaban a los matemáticos a aceptar la existencia de los números negativos. (Cid, 2001).

Un hecho fundamental que permitió que se reconociera la existencia de los números negativos fue que Peacock (1833) proclamó la independencia del álgebra respecto de la aritmética, definiéndola como el arte de razonar sobre unos símbolos cuyo significado ya no venía dado por las nociones intuitivas de la aritmética elemental, sino por un conjunto de reglas formales que definían su comportamiento Según lo citado por Gallardo & Torres (2005). Por lo tanto, en este contexto no se busca interpretar el significado de los números negativos en el mundo sensible y desaparece la resistencia hacia este objeto.

Al superar los obstáculos anteriores y aceptar los números negativos como cantidades reales se puede justificar su estructura aditiva, sin embargo, su estructura multiplicativa continuó generando conflictos para los matemáticos, principalmente la multiplicación entre números negativos. Surge la necesidad de que este tipo de multiplicaciones tengan un resultado positivo, pero la explicación del porqué esto debiera ser de tal manera continuó sin poder resolverse hasta que Hankel en 1867 propuso prolongar las propiedades de la multiplicación de los Reales positivos a los Reales, resolviendo definitivamente el problema según lo expuesto por Cid (2001).

Algunos autores han hecho intentos de dar una buena explicación matemática para la regla de los signos, principalmente aquella que implica la multiplicación de dos números negativos, que es la que más conflictos causa. Bernardo Gómez (2007) documenta las justificaciones de la regla de los signos que han dado grandes matemáticos a lo largo de la historia. Comienza desde la más antigua, que corresponde a Diofanto en el s.III, en la que solo se enuncia la regla sin justificación. Y continúa con Euler, Mac-Laurin, Laplace, Klein, entre otros. Algunas de estas explicaciones son más apropiadas para ser llevadas al ámbito escolar, sin embargo, ninguna permite dar una justificación real a la regla y la mayoría no facilita su reconstrucción en caso de olvido por parte del estudiante. La explicación que ofrece Crowley y Dunn (1985) es la que mejor justifica y permite reconstruir la regla de los signos en el ámbito escolar, esta utiliza la modelización numérica para observar el patrón existente en los múltiplos de un número.

Eva Cid y Pilar Bolea en el año 2010 en su artículo “Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico” proponen como modelo epistemológico para la introducción de los números negativos en un contexto algebraico, la modelización algebraica. En este documento se presentan las siguientes razones para sustentar la necesidad de buscar un contexto alternativo al aritmético:

La contextualización aritmética no permite justificar de manera creíble la existencia de estos objetos; fomenta la idea de un número solo como resultado de una medida, lo que parece haber sido un obstáculo epistemológico para la comunidad matemática; los modelos concretos pueden contribuir a que los alumnos adquieran creencias erróneas sobre los números negativos y pueden llegar a añadir dificultad más que propiciar el aprendizaje. (Cid Bolea, 2010 p.580)

En el artículo antes mencionado se expone que una de las principales diferencias entre el álgebra y la aritmética es la forma en que se entienden los signos + y - , en la aritmética son operativos binarios mientras que en el álgebra son predicativos unarios, por este motivo plantean que los números enteros serían mejor comprendidos en un contexto algebraico.

En la bibliografía sobre los números negativos se pueden distinguir tres áreas: propuestas de enseñanza, dificultades de aprendizaje y errores, además de las implicaciones didácticas de la epistemología del número. Según Cid (2003) la mayor parte de estas publicaciones corresponden a propuestas de enseñanza y las clasifica también en tres tipos: inductivas, deductivas y constructivas. La autora destaca que pese a poder distinguir entre estos tres tipos de propuestas, la mayoría de ellas tienen en común el uso de modelos concretos.

Cid distingue dos tipos de modelos concretos: los de neutralización y los de desplazamiento . Dentro de los de neutralización, los más utilizados son los de deudas y haberes, pérdidas y ganancias, puntuaciones positivas y negativas y personas que entran y salen de un lugar o suben y bajan. En los modelos de desplazamiento encontramos personas u objetos que avanzan o retroceden, termómetros o escalas de diversas magnitudes, ascensores, nivel del mar, años antes y después de Cristo y desplazamientos representados por vectores unidireccionales en la recta numérica. (2003)

1.2 Planteamiento del problema y pregunta de investigación

En Chile las Bases curriculares a partir del año 2009 proponen la introducción a la enseñanza de los números enteros en séptimo año básico, planteando como primer objetivo de aprendizaje: “Mostrar que comprenden la adición y la sustracción de números enteros”, esto implica, según las bases curriculares, que sean capaces de representar los números enteros en la **recta numérica**, representarlos de manera **concreta**, **pictórica** y **simbólica**; darle

significado a los símbolos + y – según el contexto y **resolver problemas en contextos cotidianos**. (Mineduc, 2016)

Esta situación reproduce el contexto en que históricamente surgen los números negativos, o sea, intentando darles sentido dentro de la aritmética y enfrentándose a la idea de los números utilizados para contar que han desarrollado hasta esa etapa los estudiantes. Por este motivo es probable que sea natural que se genere el mismo obstáculo epistemológico en los estudiantes, que se generó en los matemáticos, es decir, ¿cómo darle sentido a un número que está restando de donde no hay? Además, se pide a los estudiantes utilizar números negativos para resolver problemas perfectamente solucionables usando números naturales, por lo que su uso se hace de manera forzosa e innecesaria, en situaciones que continúan reforzando la idea de cantidad, por ejemplo, los problemas de deudas y ganancias

Bruno y Martínón en 1997 publicaron una investigación sobre los procedimientos de resolución de problemas aditivos con números negativos. Una de sus conclusiones es que *“problemas aditivos que son perfectamente asimilados con números positivos presentan dificultades cuando en ellos hay negativos”*. (p.257)

Este escenario provoca que sea muy difícil abandonar su representación concreta, la recta numérica, por ejemplo. Según la investigación de Bruno y Martínón (1997) los estudiantes tienen mayor facilidad y seguridad para resolver problemas utilizando la recta numérica, mientras que al pedirles que utilicen operaciones la mayor parte de ellos no lo logra. Posteriormente Alicia Bruno (2000) propone que también hay estudiantes que resuelven utilizando primero la recta numérica y luego buscan una operación cuyo resultado coincida con el obtenido en la recta.

En octavo año básico se comienza a estudiar las operaciones de multiplicación y división de los números enteros planteando como objetivo, en las Bases curriculares, que los estudiantes sean capaces de demostrar que comprenden dichas operaciones (MINEDUC, 2016). Sin embargo, no se ha intencionado, y menos logrado con anterioridad, una comprensión de los números negativos, ni de su estructura aditiva. Por lo que esta comprensión que se pretende alcanzar termina reduciéndose a la aplicación de una regla memorística.

La manera más común en la que se presenta la regla es: “signos distintos dan negativo y signos iguales dan positivo”, como se puede evidenciar en una gran cantidad de videos de

youtube que son utilizados por los estudiantes, en los cuales hay enseñantes que tratan la multiplicación de números enteros. La total descontextualización y nula comprensión de esta frase genera incluso que muchas veces los estudiantes apliquen esta regla al sumar. También se utilizan malas metáforas con el afán de hacer “más fácil” la memorización de la regla, por ejemplo: “el amigo de mi amigo es mi amigo, el amigo de mi enemigo es mi enemigo, el enemigo de mi amigo es mi enemigo, y el enemigo de mi enemigo es mi amigo”, quitándole por completo el contenido matemático.

Como una referencia, en internet podemos encontrar las siguientes imágenes para ser utilizado por los docentes:

Ilustración 1: Metáfora regla de multiplicación entre números enteros



<https://www.pinterest.cl/pin/417145984209617784/>

Ilustración 2: Metáfora regla de multiplicación entre números enteros

amigo o enemigo

Todos los habitantes de un pueblo están divididos en dos bandos enemigos. Así, los que viven ahí siempre siguen estas reglas:

- El amigo de mi amigo será mi amigo
- El amigo de mi enemigo será mi enemigo
- El enemigo de mi amigo será mi enemigo
- El enemigo de mi enemigo será mi amigo

Si al amigo lo marcamos con un + y al enemigo con un -, tendríamos

- $(+)(+) = (+)$
- $(+)(-) = (-)$
- $(-)(+) = (-)$
- $(-)(-) = (+)$

que son, justamente, las reglas para multiplicar números enteros.

Por ejemplo:

$$(+5)(-7) = (-35)$$

el amigo del enemigo será enemigo.

$$(-3)(-6) = (+18)$$

el enemigo del enemigo será amigo

¡Un poco de práctica siempre es buena!

Completa la siguiente tabla

<https://es.slideshare.net/nhcarlos/juego-matematico-8131996>

Como tercer ejemplo, muchas veces se presenta un cuadro de la siguiente manera:

Ilustración 3: Cuadro regla multiplicación entre números enteros

| |
|-------------------|
| $(+) : (+) = (+)$ |
| $(+) : (-) = (-)$ |
| $(-) : (+) = (-)$ |
| $(-) : (-) = (+)$ |

Tratando los símbolos como si fueran números y se pudiese operar con ellos, además no ofrece ninguna explicación al respecto.

En un intento por generar una explicación cercana a los estudiantes se utilizan algunos modelos concretos para representar la multiplicación, por ejemplo, en el Programa de estudio, se plantea la utilización de la recta numérica, sin embargo, la multiplicación de un número positivo por uno negativo, como $3 \cdot (-2)$ es bastante engorrosa, pues mientras se desplaza por la recta numérica debería decirse algo así como “repito tres veces la acción de retroceder dos unidades” o en el caso de $(-2) \cdot 3$ “repito dos veces el contrario de la acción de avanzar tres unidades.” La situación se vuelve insostenible al multiplicar dos números negativos como $(-2) \cdot (-3)$, el discurso sería “repito dos veces la acción contraria a retroceder tres unidades”. (Cid, 2001)

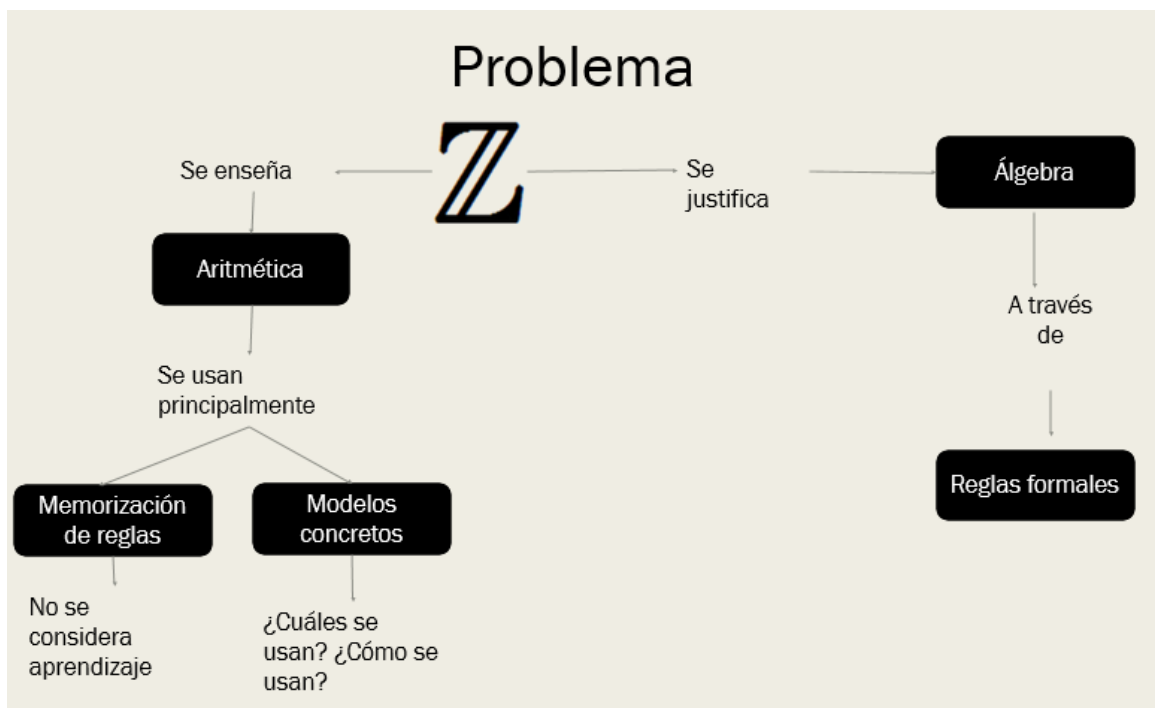
Como expone Eva Cid (2001) el uso de este modelo concreto no hace más que confundir a los estudiantes y centrarse en el intento de comprender el modelo en lugar de comprender el objeto matemático en estudio. A demás no ofrece, como ninguno de los ejemplos antes presentados, una explicación matemática para la multiplicación de los números enteros.

El uso de modelos concretos tiene algunos inconvenientes, ya que puede llevar a los estudiantes a razonamientos erróneos. Por ejemplo, en el caso de utilizar fichas bicolors pueden creer que si tienen 3 fichas que representan números negativos y un compañero tiene solo 2 fichas del mismo tipo, el tres negativo es mayor porque son más fichas, y es mejor tener tres fichas que dos; en el caso de las deudas si una persona debe \$100 y otra debe \$200, la segunda tiene una deuda mayor, por lo tanto -200 es mayor que -100 . (Cid, 2001)

Pese a que los números enteros se justifican mejor en un contexto algebraico, en la actualidad son introducidos en la educación escolar en un contexto aritmético y principalmente apoyándose en modelos concretos. Frente a esta situación se hace necesario analizar la pertinencia de los modelos utilizados para cada caso de las cuatro operaciones, ya que, estas se comportan de manera diferentes y puede un modelo justificarlas de manera más satisfactoria que otro.

La problemática puede explicarse a través del siguiente esquema:

Ilustración 4: Esquema problema de investigación



Construcción propia

En base a los antecedentes y la problemática expuesta surge la pregunta de investigación: ¿Cuáles son los modelos concretos utilizados para la enseñanza de los números enteros, de qué manera se propicia el tránsito entre los distintos modos de representación y qué casos de las cuatro operaciones se logra justificar a través de ellos?

A partir de estos antecedentes, es posible generar los siguientes objetivos, para guiar la investigación:

1.3 Objetivos

A continuación, se plantean el objetivo general y los objetivos específicos que permitirán dar respuesta a la pregunta de investigación planteada.

1.3.1 Objetivo general

Analizar las actividades utilizadas para la enseñanza de los números enteros, tanto en representación como en operatoria, propuestas en textos escolares licitados por el Ministerio de Educaciones entre los años 2009 y 2018 para los niveles de séptimo y octavo años básico.

1.3.2 Objetivos específicos

1. Caracterizar los modelos concretos y matemáticos utilizados para la enseñanza de los números enteros en textos escolares.
2. Caracterizar las actividades propuestas en los textos escolares según modo de representación concreto, simbólico y pictórico.
3. Identificar en los libros de texto, si existe predominancia de casos¹ en cada operación.
4. Determinar qué modelos concretos y modos de representación son utilizados para los distintos casos en cada operación.
5. Establecer qué casos de las operaciones no pueden justificarse a través de un modelo concreto

¹ Respecto de las combinaciones que se producen entre los números positivos, negativos y el cero.

CAPÍTULO 2:

MARCO DE REFERENCIA

2.1 Historia y epistemología del objeto número negativo

El objeto matemático en el que se centró este trabajo es el conjunto de los números enteros, especialmente en los enteros negativos. Como ya se ha mencionado, estos tienen una génesis algebraica, al menos en occidente, a finales del siglo XV. Sin embargo, en oriente, específicamente China, los números negativos son utilizados desde el siglo V a través de un sistema de varillas de color rojo para representar las cantidades negativas y de color negro para las cantidades positivas, también lo hacían con bolas de ambos colores y el ábaco. (Gallardo & Hernández, 2007)

Anne (2002) expone que entre el s.VI y el s.VII también se pueden observar en obras de matemáticos indios, por ejemplo, Bramagupta, quien explica la forma de hacer adiciones usando deudas y bienes: “una deuda restada de la nada se convierte en un bien, un bien restado de la nada se convierte en una deuda”.

En su origen el interés estaba puesto en los problemas del mundo real, natural, lo sensible, por este motivo es que no fueron aceptados por la comunidad Matemática por mucho tiempo. Hernández, M. (2010) menciona que:

“La formalización de los números enteros es mucho más artificial que la de los racionales, de modo que a lo largo de la Historia no fue hasta el s. XVI cuando apareció, debido a las dificultades que entrañan para la mente humana.”

La confusión existente entre el signo de la operación y el signo del número, y la diferencia entre sumar y aumentar no se esclarecieron hasta finales del siglo XIX. Pese a que antes se operaba con estos números llamados defectuosos prolongando las reglas de lo positivo hacia lo negativo, nunca abandonaron la incomodidad que esto les causaba.

Anne, B. (2002), Plantea que la no aceptación de los números negativos se debe a varios obstáculos, sin embargo, hay uno que sobre sale: el cero absoluto. Al entender el cero como absoluto, es decir, por debajo del cual hay nada, se hace imposible aceptar la existencia de los números negativos.

Según Hernández, M. (2010) La introducción de los números negativos en Europa la realiza Nicolas Chuquet, matemático francés. En su obra titulada Triparty en la science des nombres, utiliza con habilidad tanto el cero como los números negativos de origen hindú, siendo publicada en 1484. En la primera parte de su obra realiza operaciones aritméticas con números enteros, utilizando las cuatro operaciones fundamentales suma, resta, producto y división.

Gallardo, A., & Hernández, A. (2007) mencionan que la obra de Chuquet contribuyó a establecer los cimientos del lenguaje algebraico a fines del siglo XV. Y agregan que es posible afirmar que la importancia de esta obra radica en que sus lenguajes y métodos algebraicos permitieron encontrar soluciones de algunos problemas que sus contemporáneos consideraban insolubles. Si el método conducía a un número negativo, este número era la respuesta y debía ser interpretado en el proceso en que estaba involucrado. En el lenguaje simbólico creado por Chuquet los números negativos adquirieron presencia escrita, ya no serían invisibles ni absurdos.

Hernández (2010) menciona que en el siglo XIX Weierstrass definió los números enteros como clases de pares de naturales mediante una relación de equivalencia obvia que permitía la resta de naturales. En esta época los números negativos y positivos adquieren el status de números enteros.

En 1867 apareció la obra de Herman Hankel, "Teoría del Sistema de Números Complejos", donde los obstáculos concernientes a estos números son superados. Su libro estuvo consagrado a la exposición formal de la teoría de los números complejos y no es más que a título de preliminares que resolvió el problema de los números negativos. (Gallardo & Hernández, 2007)

2.2 Status actual del objeto número entero

Actualmente se considera a los números enteros una estructura algebraica, es decir, es un objeto matemático consistente en un conjunto no vacío y una relación o ley de composición interna definida en él. El conjunto Z tiene una estructura de anillo conmutativo y con unidad.

Considerando que las dos leyes de composición se llaman aditiva y multiplicativa, y que se les suele denotar con $+$ y \cdot respectivamente, Armando Rojo (1978) define la estructura de anillo de la siguiente manera:

Sean un conjunto no vacío A , y dos funciones: $+$ y \cdot .

Definición

La terna $(A, +, \cdot)$ es un anillo si y solo si:

1. $(A, +)$ es un grupo abeliano.
2. (A, \cdot) es un semigrupo.
3. El producto es distributivo a izquierda y derecha respecto de la suma.

Estas condiciones se traducen en los siguientes axiomas:

A_1 : La adición es ley de composición interna en A .

A_2 : La adición es asociativa en A .

A_3 : Existe neutro en A que denotamos con 0 , respecto de la adición.

A_4 : Todo elemento de A admite inverso aditivo u opuesto.

A_5 : La adición es conmutativa.

A_6 : El producto es ley de composición interna en A .

A_7 : El producto es asociativo en A .

A_8 : El producto es doblemente distributivo respecto de la suma.

2.3 Marco didáctico

El análisis se realizará desde tres referentes teóricos: se considerarán los aportes realizado por Eva Cid con respecto a la enseñanza de los números enteros, especialmente su clasificación respecto de los modelos concretos y las consecuencias que su uso puede traer en la enseñanza; además, los modos de representación planteados por Jerome Bruner, adaptado a la enseñanza desde el enfoque concreto, pictórico y simbólico (COPISI); y finalmente, las justificaciones de la regla de los signos recopiladas por Bernardo Gómez.

2.3.1 Modelos concretos

Eva Cid, plantea que parece haber un consenso con respecto a la introducción de los números negativos a través de la utilización de modelos concretos, sin embargo, estos pueden causar algunos efectos no deseados.

Para exponer las razones de lo poco pertinente que puede ser en algunos casos el uso de modelos concretos, inicia explicando el proceso de modelización matemática de la siguiente manera:

En el proceso de modelización matemática propio de las ciencias experimentales o sociales, el objeto de estudio es un cierto sistema o fenómeno del mundo sensible mientras que el sistema matemático es el modelo que lo representa, esto quiere decir que lo que nosotros realmente estudiamos es el modelo matemático, deduciendo, a partir de él, el comportamiento del sistema inicial. El modelo es, por consiguiente, un dispositivo mediador entre nuestra necesidad de conocer y nuestra capacidad de hacerlo.

“Pero en la enseñanza de la aritmética elemental esta relación entre objeto de estudio y modelo se invierten. Nuestro objeto de estudio es ahora la noción aritmética (...) y buscamos un sistema físico o social con el que nuestros alumnos estén familiarizados para, a través de él, mostrar y justificar el comportamiento de la nueva noción” (Cid, 2001, p. 2)

Explica también que el modelo concreto utilizado para la introducción de una noción matemática tiene dos funciones:

“(...) por un lado, justifica el comportamiento de la noción aritmética, nos dice por qué sus reglas de uso son las que son y no otras, nos hace ver que la construcción de la noción no es caprichosa, no es así “porque sí”. Por otro lado, permite al niño reconstruir, en caso de olvido, las reglas de uso de la noción, por medio del análisis de un sistema que les resulta familiar y en el que se puede argumentar con un grado de abstracción adecuado a su edad. El modelo concreto es un apoyo para la comprensión de la noción y también para su reconstrucción en caso de olvido”. (Cid, 2001, p. 2)

Cuando el profesor considera que la noción ha sido comprendida, plantea otras situaciones que se pueden modelizar a través de la noción matemática, de esta forma la matemática recupera su función habitual dentro de la cultura, modelizar en lugar de ser modelizada. (Cid, 2001)

Janvier (1983) clasifica en tres los tipos de modelo: el de equilibrio, el de la recta numérica y el híbrido. Eva Cid (2003) Toma lo planteado por Janvier y lo modifica, reemplazando el

modelo de equilibrio por “Neutralización” y el de recta numérica por Desplazamiento, deja fuera el modelo híbrido argumentando que todos los modelos concretos pueden clasificarse en algunos de los dos ya nombrados.

Estos modelos son utilizados de manera relativamente eficiente en el campo aditivo de los números enteros, sin embargo, no resultan tan útiles para explicar su orden, ni cómo se comportan en el campo multiplicativo.

La suma de enteros se justifica, bien como un desplazamiento, aplicado a una posición para obtener otra posición, bien como una composición de desplazamientos que da como resultado otro desplazamiento, bien como una composición de desplazamientos que se aplica a una ficha situada en la casilla cero y da como resultado la nueva posición de la ficha. La resta significa la operación inversa de cualquiera de las anteriores.

El producto se interpreta como composición repetida de desplazamientos para obtener un desplazamiento resultante al que se le cambia o no el sentido según que el entero que indica la repetición sea negativo o positivo.

Los modelos concretos permiten justificar bastante bien la estructura aditiva de los números enteros. Sin embargo, no resultan tan eficaces como medio de reconstrucción de dicha estructura en caso de olvido. En realidad, el conocimiento previo que tienen los profesores del comportamiento de los enteros es una guía que les permite elegir dentro del modelo aquellos argumentos que conducen al establecimiento correcto de las reglas de suma y resta, pero, si no se conoce previamente lo que se quiere obtener, es muy fácil seguir una argumentación que lleve a cometer errores.

Al usar los modelos de neutralización, por ejemplo, en el caso de las fichas bicolor, se hace necesario reconocer cierto color de fichas como algo “negativo”, en el sentido cotidiano de esta palabra. Si esto no es completamente interiorizado dificulta la aceptación de la estructura ordinal de los números enteros, como plantea Eva Cid (2001, p.8)

“El tema se complica cuando se intenta justificar la estructura ordinal de los números enteros. (...) con mucha frecuencia esta justificación exige una valoración adicional sobre si una determinada situación es mejor o peor que otra pero, qué niño va a aceptar que tener 5 fichas azules es peor (o menos) que tener 2 fichas azules, o que efectuar un desplazamiento hacia la izquierda de 5 casillas es peor (o menos) que efectuar un desplazamiento hacia la izquierda de 2 casillas.”

Finalmente, Cid (2001), se refiere a este problema con el siguiente resumen: los modelos concretos justifican con dificultad la estructura ordinal de los números enteros (desde luego, con más dificultad que la suma o la resta) e incluso, podríamos decir que fomentan la aceptación de un orden de izquierda a derecha.

Con respecto a la justificación del comportamiento de los números enteros en el campo multiplicativo mediante modelos concretos, Cid (2001) comenta que la mayoría de los investigadores opina que ninguno de ellos resuelve el problema de manera razonable., agregando que “son tan artificiosas y tan alejadas de la experiencia de los niños, tan poco creíbles, como el hecho mismo de afirmar, sin más explicaciones, que menos por menos es más” (p.9)

Cid (2001), presenta la siguiente conclusión:

“Existen indicios suficientes para permitirnos afirmar que los modelos concretos que se utilizan en la enseñanza de los números enteros no cumplen satisfactoriamente la doble función de justificación y reconstrucción de la noción (...) aunque justifican con cierta facilidad la suma y la resta de enteros (esta última con más dificultades), explican difícilmente el orden y no permiten justificar el producto de una manera que resulte inteligible para los niños. Por otro lado, la posibilidad de que los alumnos utilicen los modelos para reconstruir las reglas de cálculo en caso de olvido queda muy mermada desde el momento en que estos proporcionan con igual facilidad argumentos que conducen a errores en los cálculos y razonamientos con números enteros.” (Cid, 2001, p. 10)

Además, agrega que

“(...) La estructura algebraica que más se asemeja al modelo de neutralización es la estructura de espacio vectorial unidimensional y la más cercana a un modelo de desplazamiento es el espacio afin unidimensional. (...) en cambio, la estructura de anillo totalmente ordenado conmutativo y con unidad, propia de los números enteros, difícilmente podremos mostrarla por medio un modelo concreto.” (Cid, 2001, p. 11)

Finalmente, advierte que la mayor parte de los inconvenientes generados por el uso de modelos concretos en la enseñanza de los números enteros, radican en la pretensión de justificar su comportamiento en entornos aritméticos elementales, ya que, en ellos se identifica

el número con medidas de cantidades de magnitud, desplazamiento o posiciones, relacionándolos con estructuras cercanas al espacio afín.

Cid (2001) plantea que la solución escolar es la introducción de los números negativos en entornos algebraicos, sin embargo, esto requiere poner en marcha prototipos de enseñanza que deben ser previamente diseñados y experimentados. Hasta tanto esos prototipos no estén a disposición de los profesores, lo único que éstos pueden hacer es seguir utilizando los modelos concretos habituales, pero sin enfatizarlos en exceso y procurando paliar, en la medida de lo posible, los efectos secundarios que puedan producir.

2.3.2 Modos de representación

Jerome Bruner (1963), plantea que el aprendizaje se basa, en la categorización o procesos mediante los cuales simplificamos la interacción con la realidad a partir de la agrupación de objetos, sucesos o conceptos. El aprendiz construye conocimiento (genera proposiciones, verifica hipótesis, realiza inferencias) según sus propias categorías que se van modificando a partir de su interacción con el ambiente. Es por todo esto que el aprendizaje es un proceso activo, de asociación, construcción y representación. La estructura cognitiva previa del alumno provee significado, permite organizar sus experiencias e ir más allá de la información dada (Bruner, 1963). (Guilar, 2009)(p.237)

Bruner propone que el ser humano representa la realidad mediante tres modos básicos: El primero corresponde al modo “enactivo”, que es la representación que surge de la interacción con un objeto determinado de la realidad, como una comida, una herramienta, entre otros; el segundo modo, es el “icónico”, aquí el objeto es representado mediante una imagen o un esquema; el tercer modo de representación es el “simbólico”, para ello se utiliza un símbolo arbitrario, como una palabra, o en el caso de la Matemática, el lenguaje matemático. (Guilar, 2009)

En Chile se plantea desde el Ministerio de Educación, la enseñanza de las Matemáticas con el modelo concreto-pictórico y simbólico (COPISI) que está basado en los modos de representación propuestos por Bruner.

Desde este modelo se propone que los estudiantes sean animados a participar en actividades matemáticas concretas que fomentan el pensamiento exploratorio, permitiendo

realizar trabajo analítico y colaborativo. La representación pictórica del concepto ayuda a los estudiantes a hacer conexiones entre ideas matemáticas y representarlas visualmente, antes de pasar a su representación más abstracta. Este enfoque de enseñanza y aprendizaje en 3 etapas — Concreto-Pictórico-Simbólico — incentiva a los estudiantes a hacer conexiones entre principios y símbolos.

Los niños pueden solucionar problemas en distintos niveles de abstracción, transitando en ambos sentidos desde el material concreto a las representaciones simbólicas. Esta es la esencia del modelo "concreto, pictórico, simbólico". La manipulación de material concreto y su representación pictórica mediante esquemas simples permite a los estudiantes desarrollar imágenes mentales. Con el tiempo, prescinden gradualmente de los materiales y representaciones pictóricas, y operan solamente con símbolos (www.curriculumnacional.cl/wp-content/uploads/1b_6b/otros/OGA_EGB_MAT.pdf)

Bruner (1984) sostiene que “si la educación no consiste en inculcar habilidades y fomentar la representación de la propia experiencia y del conocimiento buscando el equilibrio entre la riqueza de lo particular y la economía de lo general, entonces no sé en qué consiste” (Guilar, 2009, p. 237)

2.3.3 Justificaciones de la regla de los signos

Gómez (2005) en su trabajo “La justificación de la regla de los signos en libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más?, plantea que la enseñanza de la multiplicación de números enteros es considerada algo fácil para los estudiantes, ya que, solo se espera que memoricen una regla y la sepan aplicar. La suma es justificada en los textos escolares a través de, por ejemplo, deudas y ganancias. Pero una multiplicación entre dos deudas no puede ser interpretada como una ganancias, por lo tanto el modelo debe ser abandonado, si no se presenta una alternativa, se avandonará sin mayor explicación y esto irá en contra de la imagen de racionalidad de las matemáticas.

Por este motivo el autor hizo una recopilación de las distintas alternativas que se han usado en los textos a lo largo de la historia para justificar la multiplicación entre dos números enteros. Estas fueron clasificadas bajo los siguientes epígrafes:

- La regla sin justificación.

- La justificación de la regla en el marco de las restas indicadas con solución positiva.
- La justificación de la regla en el marco en el que se evitan las cantidades negativas aisladas.
- La justificación de la regla en el marco de la teoría de los pares ordenados.
- La justificación de la regla en el marco de las modelizaciones intuitivas.

Esta última fue utilizada en el análisis del presente trabajo de investigación. Las modelizaciones intuitivas o divulgativas pueden ser físicas, geométricas o numéricas, su atractivo es que son consistentes con la experiencia personal y ayuda a los estudiantes a hacer plausible la regla, aunque no son demostraciones.

A este tipo pertenece la justificación desde la modelización física sobre desplazamientos, de Rey Pastor y Puig Adam, en ella se sitúa un objeto o persona en una recta graduada donde un movimiento a la izquierda se interpreta como un movimiento en dirección negativa y a la derecha como un movimiento en dirección positiva, así mismo, el tiempo futuro se denota con un valor positivo y el tiempo pasado con uno negativo.

A partir de esta justificación se describe una situación en la que un tren va en sentido negativo y se pregunta dónde estaba un par de horas antes, el resultado es un tren situado en una posición que se considera positiva, desde ahí se plantea la regla de los signos.

Gómez (2005) concluye que: *“las modelizaciones preparan a los estudiantes, de un modo intuitivo, a aceptar la razonabilidad del resultado, pero no ofrecen ninguna información acerca de la necesidad matemática de la regla.”(p.273)*

CAPITULO 3:

MARCO METODOLÓGICO

3.1 Enfoque y tipo de estudio.

La siguiente investigación consiste en un análisis bibliográfico, es decir, una revisión detallada de textos escolares de Matemáticas, usando el referente teórico descrito con anterioridad para alcanzar los objetivos propuestos. El análisis fue realizado desde el enfoque de investigación cualitativo, ya que, se pondrá énfasis en el proceso de revisión de los textos con respecto a la enseñanza de los números enteros y no en los resultados, ni en datos estadísticos. La descripción del material e identificación de modelos concretos utilizados en estos textos escolares, así como los distintos casos posibles en las operaciones fueron el centro de la investigación.

La investigación de tipo cualitativo está orientada a la “comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de práctica y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimientos” (Sandin, 2003, pág. 123)

3.2 Selección de participantes y escenarios.

Se utilizaron los textos desde el año 2009 hasta el año 2018 de las editoriales Santillana, Galileo y SM para séptimo y octavo año básico. El periodo de tiempo escogido responde a que la propuesta ministerial previa a 2009 consideraba la introducción de los números negativos incluyendo números racionales negativos, desde 2009 en adelante se propone la introducción como conjunto de los números enteros, siendo este el objeto matemático sobre el que se desea investigar. Las editoriales seleccionadas para la investigación son aquellas que fueron licitadas por el Ministerio de Educación, la importancia de trabajar con estos textos y no otros, radica en que al ser los que se entregan de manera gratuita en todas las escuelas públicas del país y en las particulares con subvención del Estado que los soliciten, son los textos que llegan a la mayor parte de la población escolar chilena.

3.3 Estrategias de recolección de información.

Las estrategias de recolección de información, se desarrollaron en las siguientes 4 etapas de la investigación:

Etapa I: Selección de antecedentes y planteamiento del problema.

Se comienza por la recolección y lectura de los antecedentes correspondientes al objeto matemático, su historia y epistemología, y otras investigaciones desde la Didáctica de la Matemática.

Etapa II. Recolección del material para analizar

Se recolectan todos los textos de Matemáticas entregados por el Ministerio de Educación entre los años 2009 y 2018, para séptimo y octavo año básico.

Etapa III. Establecer criterios de análisis para los textos.

Se crean los criterios necesarios para dar cuenta de la presencia o ausencia de distintos modelos concretos y casos posibles en cada operación, la forma en que se trabajan y utilizan. A partir de esto se diseña la matriz de recolección de datos.

Etapa IV. Análisis del contenido de los libros de texto.

El trabajo fue realizado en tres áreas: En primer lugar, orden y comparación, que corresponde al nivel de séptimo año básico; en segundo lugar, adición y sustracción enseñados en el mismo nivel; y en tercer lugar, multiplicación y división propuestas para octavo año básico.

En cada una de ellas se identificó en primer lugar, la presencia o ausencia de modelos concretos, estos modelos fueron clasificados en modelos de desplazamiento y modelos de neutralización en el caso de representación, adición y sustracción; para el caso de la multiplicación y división se clasificaron nombrándolos según los modelos encontrados en cada libro. Posteriormente se procedió al análisis de cada uno de ellos poniendo de manifiesto fortalezas y debilidades. Finalmente se analizó la forma en que se presentan y utilizan en las actividades.

3.4 Recolección de datos

Solo se clasificó las secciones que tienen el objetivo de enseñar el orden y representación, la adición y la sustracción de números enteros, dejando fuera las tareas destinadas a activar aprendizajes previos, así como la sección que utiliza de forma conjunta adición y sustracción. El motivo es que la sección de activación de conocimientos previos utiliza solo números naturales, y la que corresponde al uso en conjunto de ambas operaciones no usa modelos concretos, solo plantea ejercicios.

Lo mismo se realizó para octavo básico, es decir, se clasificaron las actividades destinadas a enseñar multiplicación y división de números enteros dejando fuera la sección que plantea operatoria combinada.

Fue clasificado cada problema, ejercicio o cálculo.

3.4.1 matrices de recolección de datos

Para el diseño de la matriz de recopilación de datos para los textos escolares correspondientes a séptimo básico se consideraron cinco casos para la adición y seis para la sustracción, representados con las variables a y b pertenecientes ambas a los números naturales y considerando a menor que b .

Los casos para adición son: $a + b$; $(-a) + (-b)$; $a - (-a)$; $(-a) + b$; $a + (-b)$.

Para la sustracción los casos son: $b - a$; $a - b$; $(-b) - (-a)$; $(-a) - (-b)$; $a - (-b)$; $-a - b$

La información y actividades propuestas en los libros analizados fueron separadas en actividades desarrolladas: que corresponden a ejemplos o en algunos casos a actividades guiadas que pretenden interactuar con el estudiante indicando paso a paso lo que deben hacer y mostrando cual es la respuesta correcta a cada pregunta, haciendo partícipe al estudiante en la construcción del ejemplo. Y en actividades por desarrollar: con las cuales el estudiante puede construir su aprendizaje o ejercitar según sea el caso.

También se clasificó cada actividad en modelos concretos, desde la perspectiva propuesta por Eva Cid, y modelos matemáticos, a su vez dentro de estos modelos se separó en modos de representación concretos, pictóricos y simbólicos.

La importancia de distinguir entre los distintos casos posibles para una operación y cruzar esa información con el modelo y modo de representación utilizado, radica en que cada caso se comporta de una manera diferente, por lo tanto, una misma representación puede ser pertinente para un caso y para otro no.

Dentro de los modelos matemáticos se clasificó lo que corresponde a operatoria, operatoria con patrones y a problemas que se plantean en situaciones puramente matemáticas, todos correspondientes al modo de representación simbólico.

Dentro de los modelos concretos se consideran todas aquellas representaciones que utilizan material manipulable físicamente, las imágenes sin lenguaje matemático, la recta numérica y los problemas contextualizados con situaciones cotidianas.

Para el diseño de la matriz de recolección de datos usada para los libros de octavo básico, se consideraron distintos casos posibles para la multiplicación y división de números enteros, se dejó fuera las operaciones de adición y sustracción que no están presentes en estos textos pues son objeto de estudio para el nivel anterior (séptimo básico).

Los casos posibles fueron clasificados en cinco distintos para cada operación y fueron representados con las variables a y b , pertenecientes ambas a los números naturales, así la multiplicación quedó clasificada en: el primer factor positivo y el segundo negativo ($a \cdot -b$); el primer factor negativo y el segundo positivo ($-a \cdot b$); ambos factores negativos ($-a \cdot -b$); ambos factores positivos ($a \cdot b$); y finalmente cero en uno de sus factores ($a \cdot 0$ ó $-a \cdot 0$). Para la división la clasificación fue hecha de a siguiente manera: dividendo negativo y divisor positivo ($-a : b$); dividendo positivo y divisor negativo ($a : -b$); dividendo y divisor negativos ($-a : -b$); dividendo y divisor positivos ($a : b$); dividendo cero y divisor positivo o negativo ($0 : a$ ó $0 : -a$).

Para los modelos utilizados en las operaciones de multiplicación y división se utilizaron los mismos nombres que aparecen en los textos escolares.

Como modelo concreto con representación concreta se clasificaron:

- Fichas bicolores: corresponde a fichas en las que un color representa una unidad negativa y el otro color representa una unidad positiva.

- Discos matemáticos: es un sistema de engranajes que muestra cómo al girar en un sentido arbitrariamente positivo o negativo va cambiando el signo del producto que se obtiene dependiendo de la cantidad de factores (discos).
- Tarjetas rectangulares: es similar a las fichas bicolor, cada tarjeta representa por una de sus caras una unidad positiva y por la otra una unidad negativa.
- Como modelo concreto de representación pictórica fueron clasificadas fichas bicolor y tarjetas rectangulares que solo aparecen en imágenes sin invitar a hacer su uso en forma física.
- Como modelo concreto de representación simbólica, se consideró la recta numérica y papeles de dos colores, el primero es una imagen y el segundo un material físico, sin embargo, fueron clasificados como modo de representación simbólico por el lenguaje matemático utilizado en ellos. También dentro de los modelos concretos de representación simbólica están todos los problemas de planteo que son contextualizados en situaciones cotidianas.

CAPITULO 4:

ANANLISIS DE LOS DATOS OBTENIDOS

A continuación, se presenta la identificación de cada texto analizado, mostrando año de publicación, título, autores, editorial y el código con el que son identificados durante el análisis.

4.1 Matriz de identificación

| Identificación | | | | | |
|----------------|----------------|------------|---|------------|----------|
| Nivel | Año | Título | Autores | Editorial | Código |
| 7° | 2009-2013 | Matemática | Javiera Setz Mena. Florencia Darrigrandi Navarro. | Santillana | 7s09-13 |
| | 2014 - 2015 | Matemática | Jennie M. Bennett, Edward B. Burger, David J. Chard, Earlene J. Hall, Paul A. Kennedy, Freddie L. Renfro, Tom W. Roby, Janet K. Scheer & Bert k. Waits. | Galileo | 7g14-15 |
| | 2016 - 2018 | Matemática | Richard Merino Leyton Verónica Muñoz Correa Bernardita Pérez Ureta Pedro Rupin Gutiérrez | Sm | 7sm16-18 |
| 8° | 2009-2010 | Matemática | Rossana Herrera Concha Francisco Rojas Sateler | Santillana | 8s09-10 |
| | 2012 | Matemática | Pablo León Velasco Paula Olivares Muñoz Paz Parra Riveros | mn | 8mn12 |
| | 2011-2013 | Matemática | Eduardo Bórquez Avendaño Florencia Darrigrandi Navarro Mario Zañartu Navarro | Santillana | 8s11-13 |
| | 2014 | Matemática | Jennie M. Bennett, Edward B. Burger, David J. Chard, Earlene J. Hall, Paul A. Kennedy, Freddie L. Renfro, Tom W. Roby, Janet K. Scheer & Bert k. Waits. | Galileo | 8g14 |
| | 2015-2018 | Matemática | Daniel Catalán Navarrete Bernardita Pérez Ureta Camila Prieto Córdoba Pedro Rupin Gutiérrez | sm | 8sm15-18 |

Las matrices de recolección de datos se encuentran en los anexos de esta investigación. Para los análisis se ha elaborado tablas que resumen la información recogida por cada matriz.

4.2 Análisis 7s09-13

A continuación, se presenta la clasificación de actividades propuestas por el texto:

| Código: 7s09-13 | Actividades desarrolladas | | | Actividades por desarrollar | | |
|--------------------|---------------------------|--------------|---|-----------------------------|---------------|----|
| Casos | | | | | | |
| a + b | M. simbólico | Recta numer. | 1 | M. simbólico | Recta numer. | 3 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 4 |
| (-a) + (-b) | ----- | ----- | 0 | M. simbólico | Recta numer. | 4 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 9 |
| a + (-a) | M. simbólico | Recta numer. | 1 | M. simbólico | Recta numer. | 1 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 9 |
| (-a) + b | ----- | ----- | 0 | M. simbólico | Recta numer. | 4 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 11 |
| | | | | M. simbólico | St. Cotidiana | 2 |
| a + (-b) | M. simbólico | Recta numer. | 1 | M. simbólico | Recta numer. | 1 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 8 |
| | | | | M. simbólico | St. Cotidiana | 1 |

En este texto el 100% de las actividades propuestas están representadas en modo de representación simbólico, perteneciendo el 31,7% de estas a modelos concretos. En este texto solo se utilizan dos tipos de modelos concretos: problemas contextualizados en situaciones cotidianas, que corresponden a un 16% de los modelos concretos; el 84% corresponde a actividades en las que es utilizada la recta numérica.

Las actividades desarrolladas como ejemplo para presentar los casos de la adición son modelos concretos correspondientes a recta numérica que no presentan los casos en que ambos sumandos son negativos, ni cuando el sumando de menor valor absoluto es negativo y el otro positivo, sin embargo, en las actividades a desarrollar se espera que los estudiantes puedan representar todos los casos usando recta numérica.

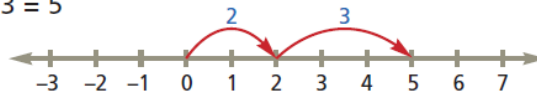
Presenta la adición entre números enteros con el caso en que ambos sumandos son positivos, modelando una situación cotidiana con ayuda de la recta numérica.

Ilustración 5: Ejemplo adición entre números positivos con recta numérica

En un campeonato de fútbol, el 7° A ganó el primer partido con un marcador de 2 goles a favor.

El partido siguiente lo ganó también, esta vez con 3 goles a favor.
¿Cuántos goles a favor lleva en total?

Esto lo escribimos así: $2 + 3 = 5$

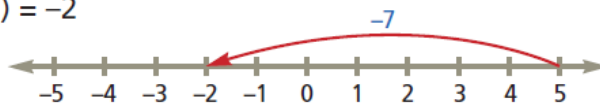


Continúa presentando el caso en que en sumando de menor valor absoluto es positivo y el otro es negativo:

Ilustración 6: Ejemplo adición entre números de distinto signo con recta numérica

En el siguiente partido, el equipo tuvo peor suerte y perdió por 7 goles en contra. ¿Cuál es la diferencia de goles para este equipo, hasta el momento?

Lo expresamos así: $5 + (-7) = -2$

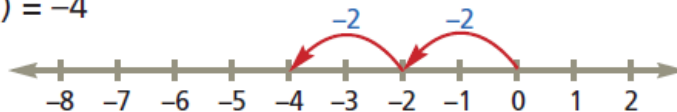


Para terminar con el caso donde ambos sumandos son negativos:

Ilustración 7: ejemplo adición entre números negativos con recta numérica

En el último partido, aún afectados por la derrota anterior, volvieron a perder, esta vez por 2 goles en contra. ¿Cuál es, finalmente, la diferencia de goles para este equipo?

Lo indicamos así $(-2) + (-2) = -4$



En estos tres casos el modelo concreto cumple con su doble función, permite mostrar y justificar el comportamiento de la adición de enteros, además de facilitar su reconstrucción.

La sustracción es enseñada a través de las siguientes actividades:

| Código: 7s09-13 | Actividades desarrolladas | | | Actividades por desarrollar | | |
|--------------------|---------------------------|---------------|---|-----------------------------|---------------|----|
| Casos | | | | | | |
| $b - a$ | ----- | ----- | 0 | M. Simbólico | St. cotidiana | 3 |
| | | | | M. Simbólico | Operatoria | 1 |
| $a - b$ | ----- | ----- | 0 | M. Simbólico | Operatoria | 1 |
| $(-b) - (-a)$ | ----- | ----- | 0 | M. Simbólico | Operatoria | 3 |
| $(-a) - (-b)$ | M. simbólico | Recta numer. | 1 | M. Simbólico | Recta numer. | 6 |
| | | | | M. Simbólico | Operatoria | 2 |
| $a - (-b)$ | M. simbólico | St. cotidiana | 1 | M. Simbólico | Operatoria | 10 |
| $-a - b$ | ----- | ----- | 0 | M. Simbólico | Recta numer. | 1 |
| | | | | M. Simbólico | St. cotidiana | 3 |
| | | | | M. Simbólico | Operatoria | 10 |

El 100% de las representaciones utilizadas para enseñar la sustracción se presentan en modo simbólico, de ellas el 35,7% corresponde a modelos concretos propuestos en dos formas: recta numérica y problema contextualizado en situación cotidiana.

Este texto utiliza tanto para adición como para la sustracción los mismos dos modelos concretos, sin embargo, la recta numérica tiene mucha más presencia para la adición que para la sustracción, en el segundo caso el 53,3% de las actividades se resuelve a través del uso de la recta numérica, dando paso que a los problemas contextualizados en situaciones cotidianas ocupen un 46,7 %. Esto se debe a que son menos los casos de la sustracción que se representan usando la recta numérica, solo uno de ellos es mostrado en las actividades desarrolladas y se agrega un caso más en las actividades por desarrollar.

Las actividades inician con ejemplos en que el sustraendo es negativo, pide a los estudiantes pensar en la operación inversa preguntándose ¿Qué número deben sumar al sustraendo para obtener el minuendo? A través de este ejemplo, se establece que en este caso se debe sumar al minuendo el opuesto del sustraendo, como se muestra en la siguiente imagen.

Ilustración 8: Enunciación regla resta números enteros



NO OLVIDES QUE...

- Para restar dos números enteros, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

Ejemplos:

$$-4 - (-1) = -4 + (+1) = -3$$

$$-3 - 7 = -3 + (-7) = -10$$

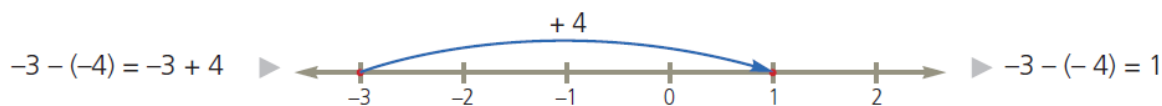
En general, si **a** y **b** son números enteros, se cumple que:

$$a - b = a + (-b)$$

Posteriormente solicita a los estudiantes usar la recta numérica para resolver este tipo de sustracciones, sin embargo, no lo plantea como una sustracción, si no como un caso más de adición. Lo que deja de manifiesto, que este modelo no puede representar este casos de la sustracción.

Ilustración 9: Ejemplo sustracción con recta numérica

Resuelve las siguientes sustracciones utilizando la recta numérica. Observa el ejemplo.



a) $-5 - (-3) =$

c) $-5 - (-1) =$

e) $-9 - 2 =$

b) $-7 - 5 =$

d) $-5 - 8 =$

f) $-4 - (-8) =$

Lo que sigue son actividades a desarrollar, en su mayoría operatoria y algunos problemas de planteo contextualizados en situaciones cotidianas, estas últimas, al igual que para adición, son problemas que pueden ser planteados con números naturales.

4.3 Análisis 7g14-15

A continuación, se presenta la clasificación de actividades propuestas para la enseñanza de la adición en el texto 7g14-15.

| Código: 7g14-15 | Actividades desarrolladas | | | Actividades por desarrollar | | |
|--------------------|---------------------------|----------------|---|-----------------------------|---------------|----|
| Casos | | | | | | |
| a + b | M. Pictórico | Fichas bicolor | 1 | M. Simbólico | Recta numér. | 2 |
| | | | | M. Simbólico | Operatoria | 3 |
| (-a) + (-b) | M. Pictórico | Fichas bicolor | 1 | M. Simbólico | Recta numer. | 3 |
| | | | | M. Simbólico | Operatoria | 11 |
| a + (-a) | M. Simbólico | Operatoria | 1 | M. Simbólico | Operatoria | 4 |
| (-a) + b | ----- | ----- | 0 | M. Pictórico | Temperatura | 1 |
| | | | | M. Simbólico | St. Cotidiana | 2 |
| | | | | M. Simbólico | Recta numer. | 4 |
| | | | | M. Simbólico | Operatoria | 6 |
| a + (-b) | ----- | ----- | 0 | M. Pictórico | Temperatura | 1 |
| | | | | M. Simbólico | St. Cotidiana | 2 |
| | | | | M. Simbólico | Recta numer. | 4 |
| | | | | M. Simbólico | Operatoria | 15 |

El texto utiliza el modo de representación pictórico para explicar dos de los casos de la adición a través de las fichas bicolor, sin embargo, no considera este recurso para las actividades que se proponen para ser desarrolladas por los estudiantes.

Por otra parte, no muestra ninguno de los casos utilizando recta numérica y pide representar con este modelo todos los casos en las actividades por desarrollar, su uso corresponde a más del 22% del total de actividades.

Hay presencia de modo de representación pictórico, pero solo es un 3% dejando el 97% restante en modo de representación simbólico.

Los ejemplos en los que se usa las fichas bicolor, son acompañados de una indicación que pide a los estudiantes calcular la adición basándose en el valor absoluto de los sumando, esto genera que la representación pictórica utilizada sea prescindible y pierda su valor como modelo que permita a los estudiantes generar una imagen mental de la noción.

Ilustración 10: Actividad con fichas bicolor

Sumar enteros usando valores absolutos

Halla cada suma. Puedes usar fichas de colores: cada ficha amarilla representa +1 y cada ficha roja representa -1.

A $-7 + (-4)$

Los signos son los mismos. Halla la suma de los valores absolutos.

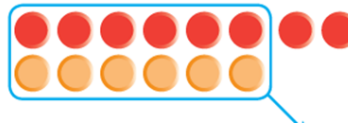
$-7 + (-4)$ *Razona: $7 + 4 = 11$.*
 -11 *Usa el signo de los dos enteros.*



B $-8 + 6$

Los signos son diferentes. Halla la diferencia de los valores absolutos.

$-8 + 6$ *Razona: $8 - 6 = 2$.*
 -2 *Usa el signo del entero con el mayor valor absoluto.*



Como se puede observar en la imagen, se explica lo que cada color de ficha representa (amarillo 1 y rojo -1) pero no explica cómo operar con ellas, no deja claro que dos de distinto color se neutralizan, por lo que la manera en que los estudiantes pueden resolver esta situación haciendo correctamente el cálculo, es que conozcan con anterioridad cómo operar con números enteros o se apeguen rigurosamente a la indicación de regirse por el valor absoluto de los números. Esta indicación parte con la palabra “razona” sin embargo, lo que le sigue es un mandato, mostrando una incongruencia entre lo que se espera lograr con la actividad y lo que realmente genera, razonamiento versus mecanización. Es la enunciación de una regla sin explicación, disfrazada a través de una representación icónica aislada, de construcción de aprendizaje.

Las actividades usadas para enseñar la sustracción de números enteros fueron clasificadas en el siguiente cuadro:

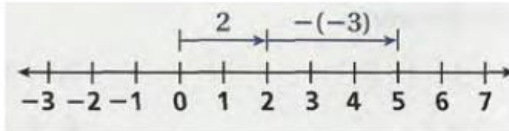
| Código: 7s14-15 | Actividades desarrolladas | | | Actividades por desarrollar | | |
|--------------------|---------------------------|---------------|---|-----------------------------|---------------|---|
| | Casos | | | | | |
| b – a | M. simbólico | St. Cotidiana | 1 | M. simbólico | Operatoria | 2 |
| | M. simbólico | Operatoria | 2 | | | |
| a – b | M. simbólico | Recta numer. | 1 | M. simbólico | Recta numer. | 2 |
| | M. simbólico | Operatoria | 1 | M. simbólico | St. cotidiana | 1 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 6 |
| (-b) – (-a) | M. simbólico | Operatoria | 1 | M. simbólico | Operatoria | 3 |
| (-a) – (-b) | ----- | ----- | 0 | M. simbólico | Recta numer. | 3 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 5 |
| a – (-b) | M. simbólico | Operatoria | 1 | M. simbólico | Recta numer. | 5 |
| | M. simbólico | Recta numer. | 1 | M. simbólico | St. cotidiana | 6 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 4 |
| -a – b | M. simbólico | Operatoria | 2 | M. simbólico | Recta numer. | 3 |
| | M. simbólico | Recta numer. | 1 | M. simbólico | Operatoria | 8 |

El 100% de las actividades propuestas para la sustracción de números enteros están representadas de modo simbólico, el 40% de ellas corresponde a dos modelos concretos: problema contextualizado en una situación cotidiana y recta numérica, siendo la recta numérica la que tiene mayor presencia.

Las actividades desarrolladas que ejemplifican tres casos de la sustracción con recta numérica, indican que es necesario ubicarse en el cero, agregar el minuendo y luego moverse a la izquierda las unidades que indique el sustraendo en el caso de ser positivo, pero si el sustraendo es negativo indica que se deben mover a la derecha sin ofrecer una justificación para esto, como se muestra en la siguiente imagen:

Ilustración 11: Ejemplo sustracción con recta numérica

$$2 - (-3)$$



$$2 - (-3) = 5$$

Empieza en 0. Muévete 2 unidades hacia la derecha. Para restar -3 , muévete hacia la derecha.

4.4 Análisis 7s16-18

El siguiente cuadro muestra clasificadas las actividades usadas en el texto 7sm16-18 para la enseñanza de la adición:

| Código: 7sm16-18 | Actividades desarrolladas | | | Actividades por desarrollar | | | | | |
|---------------------|---------------------------|----------------|---|-----------------------------|----------------|----|--------------|---------------|---|
| Casos | | | | | | | | | |
| $a + b$ | M. simbólico | Recta numer. | 1 | M. simbólico | St. matemática | 1 | | | |
| $(-a) + (-b)$ | M. simbólico | Recta numer. | 1 | M. simbólico | Recta numer. | 2 | | | |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 21 | | | |
| | | | | M. simbólico | St. matemática | 1 | | | |
| $a + (-a)$ | M. pictórico | Fichas bicolor | 1 | M. simbólico | Operatoria | 4 | | | |
| | M. simbólico | Recta numer. | 1 | M. simbólico | St. matemática | 1 | | | |
| $(-a) + b$ | M. pictórico | Fichas bicolor | 1 | M. simbólico | Recta numer. | 5 | | | |
| | | | | M. simbólico | Recta numer. | 1 | M. simbólico | St. cotidiana | 3 |
| | | | | | | | M. simbólico | Operatoria | 5 |
| $a + (-b)$ | M. pictórico | Fichas bicolor | 1 | M. simbólico | Recta numer. | 2 | | | |
| | | | | M. simbólico | Recta numer. | 1 | M. simbólico | St. cotidiana | 3 |
| | | | | | | | M. simbólico | Operatoria | 5 |

Este libro plantea la mayor parte de sus actividades (95%) en modo de representación simbólico, incluyendo modelos concretos en forma de problemas de planteo contextualizados en una situación cotidiana y recta numérica. También propone una actividad en modo de

representación concreto, usando el recurso de las fichas bicolor, pero dicha actividad no fue contabilizada para cada caso de la adición porque esto variará para cada estudiante.

El trabajo con las fichas bicolor se propone como un juego en parejas, para el cual se dan las siguientes indicaciones:

Ilustración 12: Indicación juego con fichas bicolor

Cada participante juega con fichas de un solo color: las rojas representan los números negativos y las azules, los positivos.

Ambos jugadores lanzan los dados por turnos, toman tantas fichas de su color como los dados lo indiquen y las colocan sobre la mesa.

Las fichas se irán descartando de a pares, una azul con una roja, y las sobrantes en la mesa se las llevará el jugador al que le corresponde el color de las fichas. Gana el participante que obtenga la mayor cantidad de fichas, por ejemplo:

Según Eva Cid, para justificar el orden de los números enteros es necesario considerar una valoración moral que establezca que el sentido positivo es mejor que el negativo, por lo tanto, “es mejor” tener ganancias que pérdidas o puntos a favor que en contra. Desde esta perspectiva debería considerarse “mejor” tener fichas azules que fichas rojas. El problema se genera si gana el jugador que tiene las fichas rojas, por ejemplo, al terminar el juego puede quedar un jugador con 5 fichas azules y el otro con 6 rojas, según las indicaciones el ganador es el que tiene 6 fichas, hasta ahí el juego es claro, sin embargo, el objetivo de utilizar un modelo concreto es dar sentido a los números negativos y justificar sus reglas de cálculo. Es difícil que los estudiantes acepten que el ganador del juego tiene una cantidad de fichas que representa un número menor que el que representan la cantidad de fichas que tuvo quien perdió el juego.

Las fichas de dos colores son un recurso de representación concreta que permite justificar y reconstruir las reglas de cálculo de la adición de números enteros, sin embargo, la forma en que se plantea este juego puede confundir a los estudiantes en relación al orden de este conjunto numérico e incluso en la interpretación de la información en caso de contextualizar un problema en situación cotidiana.

Por otra parte, el uso del modo de representación concreto, debe actuar en conjunto con el pictórico y el simbólico, ya que su fin último es permitir el tránsito entre las tres

representaciones para que el estudiante pueda comprender de forma más amplia la noción matemática estudiada. En este caso, se muestra una representación pictórica de las fichas bicolor, aunque no se pide al estudiante desarrollar alguna actividad en este modo de representación. Respecto a la representación simbólica, la actividad no intenciona que se haga una conexión con las otras representaciones, el título indica que se trabajará con sumandos, pero no se ofrece ninguna otra información o explicación que ayude a consolidar la idea de que se están resolviendo adiciones, si no es guiada atentamente por el profesor, esta actividad puede no aportar a la comprensión de la adición de números enteros y ser considerada por los estudiantes solo como un juego.

Las actividades propuestas para la enseñanza de la sustracción con números enteros fueron clasificadas de la siguiente manera:

| Código: 7sm16.18 | Actividades desarrolladas | | | Actividades por desarrollar | | |
|---------------------|---------------------------|---------------|---|-----------------------------|----------------|----|
| Casos | | | | | | |
| b – a | M. sim/pict. | St. cotidiana | 1 | M. simbólico | St. cotidiana | 3 |
| | M. simbólico | Recta numer. | 1 | M. simbólico | Operatoria | 20 |
| | M. simbólico | Operatoria | 1 | | | |
| a – b | M. simbólico | Recta numer. | 3 | M. simbólico | St. cotidiana | 1 |
| | M. simbólico | Operatoria | 1 | M. simbólico | Recta numer. | 3 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 5 |
| | | | | M. simbólico | St. matemática | 2 |
| (-b) – (-a) | M. simbólico | Recta numer. | 1 | ----- | ----- | 0 |
| | M. simbólico | Operatoria | 1 | ----- | ----- | 0 |
| (-a) – (-b) | M. simbólico | Recta numer. | 1 | M. simbólico | Recta numer. | 3 |
| | M. simbólico | Operatoria | 1 | M. simbólico | Operatoria | 5 |
| a – (-b) | ----- | ----- | 0 | M. simbólico | Operatoria | 8 |
| -a – b | ----- | ----- | 0 | M. simbólico | Operatoria | 4 |


El 100% de las actividades tanto desarrolladas como por desarrollar están representadas de manera simbólica, el modelo concreto más utilizado es la recta numérica con un 18% de presencia.

Comienza con un problema contextualizado situación cotidiana de altura y profundidad, representada también de manera pictórica. En base a este problema se pide calcular una sustracción entre dos números positivos con resultado positivo y otra entre dos números positivos con resultado negativo.

Luego presenta cuatro casos de la sustracción con recta numérica, acompañado de la operación que corresponde a cada uno, también representados simbólicamente como la adición del inverso aditivo.

Luego indica cómo resolver estas sustracciones sin usar el modelo concreto, como se muestra en la siguiente imagen:

Ilustración 13: Instrucción para restar números enteros



- La **resta de números enteros** se obtiene sumando al minuendo el **inverso aditivo** del sustraendo.
- La sustracción y la adición de números enteros se pueden combinar para generar una **operación combinada**. En este caso, puedes:
 - Transformar las sustracciones en adiciones.
 - Operar de izquierda a derecha.

Posteriormente se presentan actividades a desarrollar con recta numérica, operatoria y problemas de planteo contextualizados en situaciones cotidianas.

4.5 análisis 8s09-10

El texto 8s09-10 comienza planteando una situación de virus computacionales a través de la cual se presentan resueltos los casos de la multiplicación que corresponde a: el primer factor positivo y el segundo negativo ($a \cdot -b$); el primer factor negativo y el segundo positivo ($-a \cdot b$); ambos factores negativos ($-a \cdot -b$); ambos factores positivos ($a \cdot b$). Inmediatamente después presentan un cuadro con una regla general para multiplicar números enteros y una imagen que muestra cómo se relacionarían las distintas combinaciones de signos.

Posteriormente se presentan operaciones para resolver, que involucran los cuatro casos expuestos a través de los problemas de virus computacionales e incluye el caso en el que uno de los factores es cero, asumiendo que la propiedad del elemento neutro aplicada a la multiplicación entre números naturales, se aplica por extensión en la multiplicación entre números enteros sin mayor explicación.

Luego propone problemas de planteo contextualizados en situaciones cotidianas de puntajes y temperaturas. A continuación, se muestra un cuadro resumen con las actividades propuestas en el texto:

| Código: 8s09-10 | Actividades desarrolladas | | | Actividades por desarrollar | | |
|--------------------|---------------------------|----------|---|-----------------------------|-------------|---|
| Casos | | | | | | |
| $-a \cdot b$ | M. simbólico | Virus PC | 1 | M. simbólico | Temperatura | 1 |
| | | | | | Operatoria | 6 |
| $a \cdot -b$ | M. simbólico | Virus PC | 1 | M. simbólico | Temperatura | 1 |
| | | | | | Puntajes | 2 |
| | | | | | Operatoria | 4 |
| $-a \cdot -b$ | M. simbólico | Virus PC | 1 | M. simbólico | Operatoria | 8 |
| $a \cdot b$ | M. simbólico | Virus PC | 1 | M. simbólico | Temperatura | 2 |
| | | | | | Puntaje | 2 |
| | | | | | Operatoria | 3 |
| $0 \cdot a$ | ----- | ----- | 0 | M. simbólico | Operatoria | 2 |

La enseñanza de la división comienza presentando una regla, acompañada de un cuadro similar al presentado para la multiplicación y cuatro ejemplos correspondientes a la operatoria con los casos: dividendo negativo y divisor positivo ($-a : b$); dividendo positivo y divisor negativo ($a : -b$); dividendo y divisor negativos ($-a : -b$); dividendo y divisor positivos ($a : b$). Dejando fuera el caso en el que el dividendo es cero.

Continúa solo con operaciones para practicar y no propone ningún problema de planteo, por lo que la única presencia de modelos concretos que se puede observar en el apartado de la multiplicación, desaparece en el de la división.

| Código: 8s09-10 | Actividades desarrolladas | | | Actividades por desarrollar | | |
|--------------------|---------------------------|------------|---|-----------------------------|------------|----|
| Casos | | | | | | |
| $-a : b$ | M. simbólico | Operatoria | 1 | M. simbólico | Operatoria | 6 |
| $a : -b$ | M. simbólico | Operatoria | 1 | M. simbólico | Operatoria | 13 |
| $-a : -b$ | M. simbólico | Operatoria | 1 | M. simbólico | Operatoria | 7 |
| $a : b$ | M. simbólico | Operatoria | 1 | M. simbólico | Operatoria | 4 |
| $0 : a$ | ----- | ----- | 0 | M. simbólico | Operatoria | 0 |

El texto propone únicamente actividades representadas en modo simbólico, principalmente operaciones. Al excluir los modos de representación concreto y pictórico, no permite el desarrollo de una imagen mental del objeto estudiado, ni que los estudiantes puedan hacer conexiones entre sus este y sus experiencias, por lo que el trabajo con números enteros se reduce a la memorización de una regla y su aplicación en ejercicios.

A partir de un problema sobre gastos de un hogar (luz, gas, etc.), se muestra la división entre dividendo negativo y divisor positivo, para dar paso inmediatamente a la presentación de la regla para dividir números enteros. Posteriormente solo aparecen operaciones para practicar.

4.6 Análisis 8mn12

A continuación, se presenta un resumen de las actividades propuesta para la multiplicación de números enteros en el texto 8mn12

| Código: 8mn12 | Actividades desarrolladas | | | Actividades por desarrollar | | |
|------------------|---------------------------|---------------|---|-----------------------------|-------------|----|
| Casos | | | | | | |
| $-a \cdot b$ | M. simbólico | St. cotidiana | 1 | M. simbólico | Temperatura | 2 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 10 |
| $a \cdot -b$ | ----- | ----- | 0 | M. simbólico | Operatoria | 6 |
| $-a \cdot -b$ | M. simbólico | St. cotidiana | 1 | M. simbólico | Operatoria | 8 |
| $a \cdot b$ | ----- | ----- | 0 | M. simbólico | Operatoria | 6 |
| $0 \cdot a$ | ----- | ----- | 0 | ----- | ----- | 0 |

Se ejemplifican dos casos de la multiplicación usando modelos concretos en forma de problemas de planteo contextualizados en una situación cotidiana, el primer ejemplo corresponde al caso del primer factor positivo y el segundo negativo, mientras que el segundo ejemplo corresponde al caso en el que los dos factores son negativos. El 94% de las actividades por desarrollar corresponde a operatoria.

| Código: 8mn12 | Actividades desarrolladas | | | Actividades por desarrollar | | |
|------------------|---------------------------|---------------|---|-----------------------------|------------|---|
| Casos | | | | | | |
| $-a : b$ | ----- | ----- | 0 | M. simbólico | Operatoria | 2 |
| $a : -b$ | ----- | ----- | 0 | M. simbólico | Operatoria | 4 |
| $-a : -b$ | M. simbólico | St. Cotidiana | 1 | M. simbólico | Operatoria | 6 |
| $a : b$ | ----- | ----- | 0 | M. simbólico | Operatoria | 6 |
| $0 : a$ | ----- | ----- | 0 | ----- | ----- | 0 |

Con la división ocurre lo mismo, se presenta un problema de planteo contextualizado en una situación cotidiana y luego se presentan operaciones para practicar. El 100% de las actividades a desarrollar son operaciones.

La multiplicación y división se presentan en forma conjunta, a partir del mismo problema, se ejemplifica cada caso a, excepto los casos en los que se involucra el cero y uno los casos en los que se multiplica o divide números de distinto signo enunciando inmediatamente la regla.

4.7 Análisis 8s11-13

Las actividades propuestas en este texto son presentadas en la siguiente tabla:

| Código: 8s11-13 | Actividades desarrolladas | | | Actividades por desarrollar | | |
|--------------------|---------------------------|--------------|---|-----------------------------|-------------|----|
| Casos | | | | | | |
| $-a \cdot b$ | M. simbólico | Recta numer. | 1 | M. simbólico | Papel color | 1 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 12 |
| $a \cdot -b$ | M. simbólico | Puntajes | 1 | M. simbólico | Papel color | 1 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 9 |
| $-a \cdot -b$ | M. simbólico | Puntajes | 1 | M. simbólico | Papel color | 1 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 9 |
| $a \cdot b$ | M. simbólico | Puntajes | 1 | M. simbólico | Papel color | 1 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 3 |
| $0 \cdot a$ | M. simbólico | Puntajes | 1 | M. simbólico | Operatoria | 1 |

El texto presenta ejemplos para todos los casos considerados en esta investigación para la multiplicación de números enteros, todos los ejemplos corresponden a modelos concretos representados de forma simbólica. El uso de un modelo concreto puede hacer más familiar o cercana la Matemática a los estudiantes, considerando que dependiendo del caso el modelo puede ser más o menos pertinente, más adelante se analizará la pertinencia de estos dependiendo del caso que pretenden modelar.

Con respecto a los modos de representación solo se utiliza el simbólico, por lo que no hay exploración, ni trabajo colaborativo, solo se debe aplicar lo enseñado.

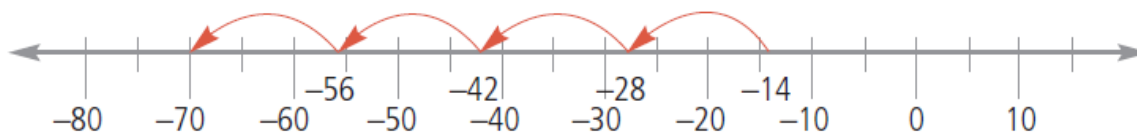
El texto comienza la unidad de multiplicación de números enteros con un ejemplo resuelto a través del uso de la recta numérica y como una suma iterada por el caso del primer

factor positivo y el segundo negativo, indicando que el segundo factor es el que determina la cantidad de veces que se repite el primero como sumando.

Para la operación $(-14) \cdot 5$ propone el siguiente modelo:

Ilustración 14: ejemplo multiplicación con recta numérica

Podemos calcular $(-14) + (-14) + (-14) + (-14) + (-14)$ apoyándonos en la recta numérica:



Después explica que en caso de querer resolver la operación $(-5) \cdot 14$ se debe aplicar la propiedad conmutativa de la multiplicación y la presenta en el siguiente cuadro:

Ilustración 15: propiedad conmutativa de la multiplicación

Ayuda

Propiedad conmutativa de la multiplicación:

$$a \cdot b = b \cdot a, \text{ con } a \text{ y } b \text{ números enteros.}$$

Con esto evita presentar realmente el caso en el que el primer factor es positivo y el segundo es negativo, ya que no podría representarse de la misma manera en la recta numérica, agregaría dificultad el decir que se debe realizar la acción opuesta a añadir catorce veces cinco, por esto se escoge invitar a los estudiantes a usar en este caso la propiedad conmutativa de la multiplicación, el problema es que se intenta eliminar el segundo caso mostrándolo solo en función del primero, sin aclarar que son dos casos diferentes.

Ilustración 16: indicación para multiplicar números enteros

No olvides que...



- Para multiplicar un número natural por un número entero negativo, la expresión se puede escribir como una adición iterada de sumandos iguales y, luego, calcular la operación.

Ejemplos: $(-12) \cdot 3 = (-12) + (-12) + (-12) = -12 - 12 - 12 = -36$

$$2 \cdot (-7) = (-7) \cdot 2 = (-7) + (-7) = -7 - 7 = -14$$

Posteriormente plantea un problema contextualizados en situaciones cotidianas donde muestra, a través de puntajes obtenidos por distintos personajes, los otros casos posibles de la multiplicación, incluyendo cuando uno de los factores es cero. Nuevamente usando los casos $a \cdot b$ y $b \cdot -a$ como si se tratara del mismo.

Ilustración 17: ejemplo multiplicación números enteros

La expresión que permite calcular con cuántos puntos terminó

Cristián al final de las 5 etapas, si obtuvo -10 en cada una es:

$(-10) \cdot 5 = -50$, o bien: $5 \cdot (-10) = -50$. Por lo tanto, Cristián terminó con -50 puntos al final del juego.

No existe una representación en modo pictórico que permita mostrar ambos casos de manera idéntica, incluso en modo simbólico representado como una suma iterada no son idénticos, en un caso el sumando es -10 y en el otro es 5 . En la situación planteada el jugador cursó cinco etapas en las que obtuvo el mismo puntaje (-10) por lo que su puntaje final debe entenderse como la suma del puntaje obtenido en cada etapa, es decir, 5 veces -10 y no puede interpretarse en la realidad, que es donde nos pretende acercar este modelo, como que cursó -10 etapas obteniendo 5 puntos en cada una.

Para mostrar la multiplicación entre dos números negativos se propone la siguiente situación:

Ilustración 18: ejemplo multiplicación entre números enteros

La expresión que permite determinar cuántos puntos obtuvo

Alejandra en las 2 últimas etapas, si en cada una obtuvo (-12) puntos,

es: $(-12) \cdot 2 = -24$ puntos. Entonces, al no jugar las últimas dos

etapas dejó de perder 24 puntos. La expresión matemática en este

caso, considerando que representaremos con (-2) a las dos etapas

que no jugó, es: $(-12) \cdot (-2) = 24$.


Notemos que $(-12) \cdot (-2) = 12 \cdot 2 = 24$.

Esta manera de representar la multiplicación entre dos números negativos es descrita por Gómez como una modelización intuitiva que prepara al estudiante para aceptar que el resultado es razonable, sin embargo, no ofrece información acerca de la necesidad matemática de que el resultado sea el obtenido.

Finalmente, establece una regla para la multiplicación acompañada de un cuadro que muestra el signo del producto dependiendo de las distintas combinaciones que puedan generarse.

Este texto presenta mediante modelos concretos todos los casos de la multiplicación considerados para esta investigación, tanto en actividades desarrolladas a modo de ejemplo como en las que propone para práctica.

Ilustración 19: regla de los signos

No olvides que... 

- Para cualquier número entero a , se tiene que $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
- Para multiplicar números enteros, se deben multiplicar sus valores absolutos y al resultado anteponer el signo + si los factores tienen el mismo signo, o el signo - si tienen distinto signo.
- La tabla que se muestra a la derecha te permite recordar la regla de los signos.

• Al multiplicar dos números que tienen igual signo, el resultado es positivo. Por ejemplo:
 $(+5) \cdot (+7) = +35$ $(-6) \cdot (-2) = +12$

• Al multiplicar dos números que tienen diferente signo, el resultado es negativo. Por ejemplo:
 $(+8) \cdot (-9) = -72$ $(-6) \cdot (+4) = -24$

| Signo del 1 ^{er} factor | Signo del 2 ^o factor | Signo del producto |
|----------------------------------|---------------------------------|--------------------|
| + | + | + |
| - | - | + |
| + | - | - |
| - | + | - |

Para la operación de división se presenta a continuación un cuadro de resumen de las actividades que se plantean en el texto.

| Código: 8s11-13 | Actividades desarrolladas | | | Actividades por desarrollar | | |
|--------------------|---------------------------|---------------|---|-----------------------------|----------------|---|
| Casos | | | | | | |
| -a : b | M. simbólico | St. cotidiana | 1 | M. simbólico | Papel color | 1 |
| | | Operatoria | 1 | M. simbólico | St. Matemática | 1 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 7 |

| | | | | | | |
|---------|--------------|------------|---|--------------|----------------|----|
| a : -b | M. simbólico | Operatoria | 1 | M. simbólico | Papel color | 1 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 10 |
| -a : -b | M. simbólico | Operatoria | 1 | M. simbólico | Papel color | 1 |
| | | | | M. simbólico | St. Matemática | 1 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 10 |
| a : b | M. simbólico | Operatoria | 1 | M. simbólico | Papel color | 1 |
| | | | | M. simbólico | St. Matemática | 2 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 12 |
| 0 : a | ----- | ----- | 0 | ----- | ----- | 0 |

Para la enseñanza de la división de números enteros se presenta solo un modelo concreto en forma de problema de planteo contextualizado en una situación cotidiana, siendo utilizado para ejemplificar el caso en el que el dividendo es negativo y el divisor es positivo. Los demás casos son ejemplificados mediante una operación y deja fuera el caso en el que el divisor es cero. Solo se utiliza el modo de representación simbólico.

4.8 Análisis 8g14

| Código: 8g14 | Actividades desarrolladas | | | Actividades por desarrollar | | |
|--------------|---------------------------|----------------|---|-----------------------------|----------------|----|
| Casos | | | | | | |
| -a · b | M. pictórico | Fichas bicolor | 2 | M. concreto | Fichas bicolor | 5 |
| | M. simbólico | Operatoria | 1 | M. simbólico | Recta numer. | 10 |
| M. simbólico | | | | Operatoria | 27 | |
| a · -b | M. simbólico | St. cotidiana | 3 | M. simbólico | Recta numer. | 19 |
| | M. simbólico | Patrones | 1 | M. simbólico | Operatoria | 27 |
| | M. simbólico | Operatoria | 1 | M concreto | Fichas bicolor | 12 |
| | M. simbólico | Recta numer. | 2 | | | |
| -a · -b | M. simbólico | Operatoria | 1 | M. simbólico | Operatoria | 21 |
| | M. simbólico | Patrones | 1 | | | |
| a · b | M. simbólico | Operatoria | 1 | M. simbólico | Operatoria | 13 |
| 0 · a | M. simbólico | Operatoria | 1 | M. simbólico | Operatoria | 3 |

El texto utiliza modelos concretos para enseñar la multiplicación entre números enteros, estos modelos son representados de modo concreto, pictórico y simbólico, por lo que permite el tránsito entre un modo de representación y otro. Muestra con una operación de ejemplo el caso en el que uno de los factores es cero e incluye este caso en las operaciones a desarrollar.

Las actividades que se resuelven usando la recta numérica corresponden a un 21% del total de las actividades por desarrollar, siendo la segunda representación más utilizada después de la operatoria (66%).

Comienza la unidad mostrando como puede ser representada la multiplicación usando fichas bicolor como se muestra en la siguiente imagen:

Ilustración 20: ejemplo multiplicación con fichas bicolor

Multiplicar enteros usando fichas de colores

A Cada ficha amarilla representa +1 y cada ficha roja representa -1.

Usa fichas amarillas para representar el **producto** de $2 \cdot 4$.



La lectura que se hace de la operación consiste en considerar que el primer factor indica la cantidad de veces que se repetirá el segundo factor.

Ilustración 21: ejemplo multiplicación con fichas bicolor

B Usa las fichas rojas para representar el producto de $-2 \cdot 4$.

Usando la propiedad conmutativa puedes escribir $-2 \cdot 4$ como $4 \cdot -2$.



En el segundo ejemplo pide usar la propiedad conmutativa de la multiplicación asumiéndola como una extensión matemática, pues no explica que también se cumple para el conjunto de los números enteros.

Puede representarse de manera pictórica la operación $4 \cdot -2$ usando cuatro grupos de dos fichas del color que representa una unidad negativa, pero el caso de $-2 \cdot 4$ no puede representarse con grupos pues no puede haber una cantidad negativa de grupos.

Ilustración 22: ejemplo multiplicación con fichas bicolor

C Escribe la multiplicación que representan las fichas.



El tercer ejemplo ordena las fichas como un arreglo bidimensional para mostrar que $-7 \cdot 4$ es igual que $4 \cdot -7$, el segundo caso se interpreta como cuatro veces menos siete, en la representación pueden verse 4 filas de 7 fichas negativas cada una, sin embargo, este caso es lo mismo que decir que hay 7 columnas de 4 fichas negativas cada una, es decir $7 \cdot -4$ y no $-7 \cdot 4$. Por esta razón un arreglo bidimensional no puede representar de manera correcta la conmutatividad en la multiplicación cuando participan números negativos.

Se utiliza recta numérica para representar la multiplicación entre dos números positivos y en el caso en el que el primer factor es positivo y el segundo es negativo, para ambos casos este modelo concreto permite justificar y reconstruir la regla para resolver estas multiplicaciones, el texto no incluye la representación con recta numérica para los otros casos de la multiplicación.

Todos los casos posibles considerados en esta investigación son mostrados a través de la observación de patrones numéricos.

Ilustración 23: patrones numéricos; regla de los signos

Completa el patrón

- A**
- $5 \cdot 3 = 15$
 - $5 \cdot 2 = 10$
 - $5 \cdot 1 = 5$
 - $5 \cdot 0 = 0$
 - $5 \cdot -1 = \underline{\quad}$
 - $5 \cdot -2 = \underline{\quad}$
 - $5 \cdot -3 = \underline{\quad}$

Estudia el patrón. Cuando el segundo factor disminuye en 1, el producto disminuye en 5. Usa esta regla para completar el patrón.

- $5 \cdot 2 = 10$
- $5 \cdot 1 = 5$
- $5 \cdot 0 = 0$
- $5 \cdot -1 = -5$
- $5 \cdot -2 = -10$
- $5 \cdot -3 = -15$

Entonces, los productos que faltan son -5 , -10 y -15 .

- B**
- $-5 \cdot 3 = -15$
 - $-5 \cdot 2 = -10$
 - $-5 \cdot 1 = -5$
 - $-5 \cdot 0 = 0$
 - $-5 \cdot -1 = \underline{\quad}$
 - $-5 \cdot -2 = \underline{\quad}$
 - $-5 \cdot -3 = \underline{\quad}$

Estudia el patrón. Cuando el segundo factor disminuye en 1, el producto disminuye en 5. Usa esta regla para completar el patrón.

- $-5 \cdot 3 = -15$
- $-5 \cdot 2 = -10$
- $-5 \cdot 1 = -5$
- $-5 \cdot 0 = 0$
- $-5 \cdot -1 = 5$
- $-5 \cdot -2 = 10$
- $-5 \cdot -3 = 15$

Esta forma de justificar es la multiplicación entre números enteros es llamada por Gómez modelización numérica, y fue planteada por Crowley y Dunn en 1985. Consiste en modelizar un patrón numérico para hacer suficientemente confiable para los estudiantes la regla de multiplicación de números enteros. Este modelo muestra matemáticamente la necesidad de que factores de distinto signo generen un producto negativo y factores de igual signo generen un producto positivo. Esto corresponde a un modelo matemático que permite justificar la regla y reconstruirla para todos los casos de manera más sólida y confiable que cualquiera de los modelos concretos propuestos en los textos analizados.

Posteriormente se enuncia la regla y se presentan actividades a desarrollar.

Para la división las actividades utilizadas se presentan en el siguiente cuadro:

| Código: 8g14 | Actividades desarrolladas | | | Actividades por desarrollar | | |
|-----------------|---------------------------|---------------|---|-----------------------------|---------------|----|
| Casos | | | | | | |
| -a : b | M. simbólico | St. Cotidiana | 2 | M. simbólico | Operatoria | 16 |
| | M. simbólico | Operatoria | 1 | | | |
| a : -b | M. simbólico | Operatoria | 1 | M. simbólico | Operatoria | 14 |
| -a : -b | M. simbólico | Operatoria | 1 | M. simbólico | Operatoria | 10 |
| a : b | ----- | ----- | 0 | M. simbólico | St. Cotidiana | 2 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 5 |
| 0 : a | ----- | ----- | 0 | M. simbólico | Operatoria | 2 |

La división solo es representada a través del modo simbólico y principalmente con operaciones, solo se presenta con un problema contextualizado en una situación cotidiana el caso donde el dividendo es negativo y el divisor es positivo a modo de ejemplo y luego dos problemas de este tipo en las actividades a desarrollar, este caso, el de dividendo positivo y divisor negativo y en el que ambos son negativos explica a través de un ejemplo de operatoria. El 96% de las actividades a desarrollar corresponde a operatoria.

Se presenta la división relacionándola con su operación inversa, se pide a los estudiantes asociar a cada división con una multiplicación y de esta manera se establece una regla para divisor números enteros. Después presenta un problema de temperaturas que es resuelto a través de la aplicación de la regla recientemente establecida, desde ahí en adelante se proponen actividades a desarrollar casi en su totalidad correspondientes a operatoria.

4.9 Análisis 8sm15-18

A continuación, se muestra un cuadro resumen de las actividades propuestas en el texto para la enseñanza de la multiplicación:

| Código: 8sm15- 18 | Actividades desarrolladas | | | Actividades por desarrollar | | |
|-------------------------|---------------------------|----------------|---|-----------------------------|---------------|----|
| Casos | | | | | | |
| $-a \cdot b$ | ----- | ----- | 0 | M. concreto | Disc. Matem. | 1 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 4 |
| $a \cdot -b$ | M. pictórico | Tarj. Rectang. | 1 | M. concreto | Disc. Matem. | 1 |
| | M. simbólico | Recta numer. | 2 | M. simbólico | Recta numér. | 5 |
| | M. simbólico | Temperaturas | 1 | M. simbólico | St. Cotidiana | 3 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 8 |
| $-a \cdot -b$ | M. pictórico | Tarj. Rectang. | 1 | M. concreto | Disc. Matem. | 1 |
| | | | | M. simbólico | St. Cotidiana | 2 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 4 |
| $a \cdot b$ | ----- | ----- | 0 | M. simbólico | Recta numer. | 1 |
| | | | | M. simbólico | St. Cotidiana | 2 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 12 |
| $0 \cdot a$ | ----- | ----- | 0 | M. simbólico | Operatoria | 1 |

Las actividades propuestas en el texto utilizan tanto modelos concretos como modelos matemáticos en forma de operatoria. Los modelos concretos utilizados propician el tránsito entre los distintos modos de representación (concreto, pictórico y simbólico), generando la posibilidad de que el objeto matemático sea mejor comprendido que solo a través de la aplicación de una regla memorística. En el caso de la multiplicación entre un número positivo y uno negativo es explicado a través de la representación pictórica de las tarjetas rectangulares, para luego pedirles a los estudiantes que completen una conclusión en la que se afirma que para este caso “o viceversa” el producto será negativo, sin embargo la representación del caso en el que el primer factor es negativo y el segundo es positivo no es idéntica, no habla de la propiedad conmutativa de la multiplicación para números enteros y la referencia a esta se reduce a la palabra “viceversa”, dejando un vacío entre la representación que se propone y la que correspondería al caso $-a$ por b .

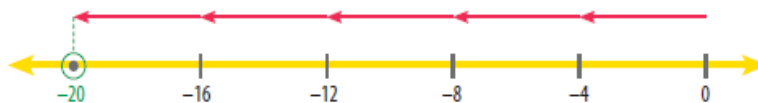
La manera en que son utilizados estos modelos se analiza a continuación:

La multiplicación de números enteros se propone a partir de un problema de temperatura ya resuelto, mediante un desplazamiento en la recta numérica. En base a este ejemplo se intenta construir una regla para esta operación.

Frente a la pregunta ¿Cuál fue el descenso de la tempera? Se puede responder, 20 °C. Por este motivo, no es realmente necesario el uso de números negativos, ya que tanto el cálculo como la respuesta puede representarse usando números naturales, en tanto se interprete como un descenso.

Ilustración 24: multiplicación con recta numérica

Paso 3 repite 5 veces esta flecha, poniendo una flecha a continuación de la otra. Señala la posición en la recta numérica a la que apunta la última flecha.



Como la posición señalada con verde es el resultado de la multiplicación, entonces:

$$5 \cdot (-4) = \underline{\quad}$$

Y como una variación negativa de temperatura indica un descenso, la respuesta a la pregunta es:

R: El descenso de temperatura durante la simulación fue de 20 °C.

La segunda propuesta es utilizar un material concreto que consiste en tarjetas que por una cara tienen el número 1 y por la otra el número -1. El ejemplo presentado muestra la multiplicación entre dos números negativos descompuestos en sumandos -1 y organizados en un arreglo bidimensional. Para que el sistema propuesto funcione, el primer factor debe expresarse como un número positivo multiplicado por 1, en caso de ser positivo originalmente, o por -1 en caso de ser negativo. Luego se introduce una regla que indica que si se multiplicó por 1, las tarjetas permanecen en la misma posición, por el contrario, el -1 genera que haya que voltear todas tarjetas. Esta regla es igual de arbitraria que simplemente decir que una multiplicación entre dos números del mismo signo genera un producto positivo y una multiplicación de dos números de distinto signo genera un producto negativo.

Este modelo permite la reconstrucción de la regla para multiplicar números enteros en caso de olvido, solo si se recuerda la regla previamente establecida para su funcionamiento, por lo que el modelo se vuelve redundante. Tampoco explica el por qué este objeto se comporta de la manera en que lo hace.

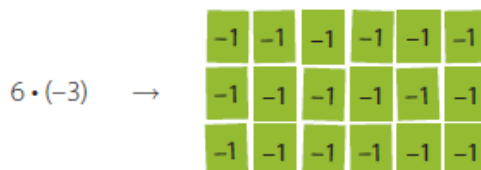
Si un modelo concreto no explica las reglas de comportamiento de un objeto matemático y no permite su reconstrucción, no está cumpliendo con su función.

Ilustración 25: multiplicación con tarjetas rectangulares

Paso 1 Aplica la regla de multiplicación obtenida en la situación 1 para establecer que $-6 = -1 \cdot 6$. Por lo tanto, puedes escribir:

$$-6 \cdot (-3) = -1 \cdot 6 \cdot (-3)$$

Paso 2 Representa el producto $6 \cdot (-3)$ construyendo un ordenamiento rectangular de 6 tarjetas por 3 tarjetas, todas con el -1 en su cara superior.



Paso 3 Aplica la regla definida para multiplicar por el factor -1 . En este caso, se invierten las tarjetas del ordenamiento.



Paso 4 Suma los valores de las caras visibles de las tarjetas.

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 18$$

Por lo tanto:

R: El resultado de la multiplicación $-6 \cdot (-3)$ es 18.

Los ejemplos presentados en el texto, corresponden a modelos concretos: en el primer caso, es una representación pictórica y el segundo usa material concreto acompañado de una representación simbólica. Desde una mirada general, podría decirse que está en conformidad con lo planteado desde el enfoque concreto-pictórico-simbólico. Sin embargo, desde esta perspectiva, el trabajo con material concreto debe fomentar el pensamiento exploratorio, así como el trabajo analítico y colaborativo.

Las tarjetas rectangulares, como se refiere a ellas el texto de estudio, funcionan en la medida en la que se aplique de forma mecánica una regla preestablecida, no resiste análisis ni exploración, podría intencionarse el trabajo colaborativo, pero al no necesitar análisis, sino solamente aplicación, no hay mayor diferencia en el éxito al usar este modelo si se hace de forma colaborativa o no.

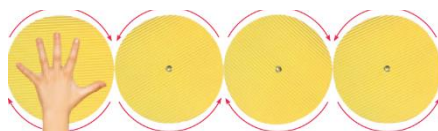
En el primer modelo presentado, la recta numérica, si se puede explicar el comportamiento del objeto en el caso de la multiplicación de un número positivo por un

negativo, pues se muestra como una suma repetida de un número negativo, también puede ser utilizada en caso de olvido para reconstruir su regla de comportamiento. Por lo que este modelo concreto sí cumple con la doble función planteada por Cid.

También permite el tránsito entre su representación pictórica y su representación simbólica. El problema aquí, no es el uso de la recta numérica, sino la situación que pretende modelar, ya que en ella es totalmente prescindible el uso de números enteros.

Otro material concreto presentado, es llamado “discos matemáticos”, este sistema de engranajes pretende mostrar el patrón existente en la multiplicación de números de signo negativo usando (-1) como ejemplo base. Mediante este sistema se muestra que con una cantidad par de factores negativos el último disco gira, según una convención, en sentido positivo; y con una cantidad impar de factores, gira en sentido negativo.

Ilustración 26: sistema de engranajes

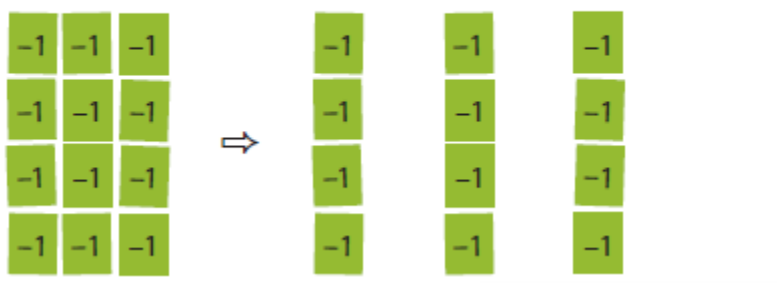


[En este caso el modelo permite reconstrucción en caso de olvido, pero no explica por qué funciona de esta manera.

Con respecto a la división, se establece una regla para dividendo negativo con divisor positivo mediante el reparto equitativo de tarjetas rectangulares. A diferencia de la multiplicación este modelo no necesita establecer una regla previa, sino la representación del dividendo mediante descomposición aditiva de sumandos -1.

Ilustración 27: multiplicación con tarjetas rectangulares

Usa las tarjetas de valor -1 para resolver la división $-12 : 3$. Para ello, divide el grupo de 12 fichas en tres grupos con la misma cantidad de fichas:



El mismo ejemplo es representado en la recta numérica, se dibuja un vector entre el cero y el dividendo y se segmenta en la cantidad de partes que indica el divisor, se indica que el cociente es el que marca el término del primer tramo. Este modelo concreto no explica por qué la división se comporta de esta manera y su reconstrucción en caso de olvido es más engorrosa que recordar la regla.

Ilustración 28: división con recta numérica

Dibuja una recta numérica y ubica la posición del 0. Luego, dibuja a partir de ella una flecha de 12 unidades de longitud que apunte hacia la izquierda, para evidenciar que se trata de un valor negativo.



Divide la flecha de 12 unidades en 3 flechas de igual longitud. Señala con verde la posición de la recta numérica a la que apunta la primera flecha.



Se hace necesario mostrar un ejemplo de dividendo positivo y divisor negativo, pues para los estudiantes puede no ser evidente que también en este caso el cociente es negativo, sin embargo, con ninguno de los dos modelos concretos propuestos se presenta este caso. El motivo es obvio, para las tarjetas rectangulares, el funcionamiento no sería igual de simple, se tendría que introducir una regla que genere el voltear las tarjetas como en el caso de la multiplicación. Tampoco se incluye en la recta numérica, pues al representar un dividendo positivo, se haría imposible que una de los segmentos que representa el divisor muestre un número negativo.

Para finalizar las actividades desarrolladas, se muestra paso a paso el algoritmo comúnmente utilizado, incluyendo ambos casos de división de signos distintos, para indicar en el paso 3 que se debe aplicar una regla para división enunciándola por primera vez.

Ilustración 29: regla para dividir números enteros

► Para concluir

Para **dividir números enteros** puedes usar representaciones concretas, la recta numérica o aplicar la operación inversa de la división, y determinar el signo del cociente aplicando una regla de signos similar a la usada en la multiplicación de números enteros:

$$\begin{array}{l} + : + \\ - : - \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} + : + \\ - : - \end{array}} \right\} + \qquad \begin{array}{l} + : - \\ - : + \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} + : - \\ - : + \end{array}} \right\} -$$

El resumen de las actividades propuestas para la división se hace muestra en el siguiente cuadro:

| Código: 8sm15- 18 | Actividades desarrolladas | | | Actividades por desarrollar | | |
|-------------------------|---------------------------|-------------------|---|-----------------------------|-------------------|---|
| Casos | | | | | | |
| -a : b | M. pictórico | Tarj. Rectang. | 1 | M. concreto | Tarj. Rectang. | 6 |
| | | | | M. simbólico | Recta numer. | 6 |
| | M. Simbólico | Recta numer. | 1 | M. simbólico | St. Cotidiana | 2 |
| | | | | M. simbólico | Operatoria | 3 |
| a : -b | M. Simbólico | Operatoria | 1 | M. simbólico | Operatoria | 3 |
| -a : -b | ----- | ----- | 0 | M. Simbólico | Operatoria | 4 |
| a : b | ----- | ----- | 0 | M. Simbólico | Recta numer. | 2 |
| | | | | M. Simbólico | St. Cotidiana | 1 |
| | | | | M. Simbólico | Operatoria | 1 |
| 0 : a | ----- | ----- | 0 | M. Simbólico | Operatoria | 2 |

Los casos de un número negativo dividido en uno positivo y uno positivo dividido en uno negativo son mostrados en ejemplos representados de modo simbólico y pictórico, para que los estudiantes posteriormente trabajen con modo de representación concreto y simbólico. Para los otros casos solo se espera que apliquen la regla presentada por el libro.

CAPITULO 5:

CONCLUSIONES

Las conclusiones de esta investigación se exponen en relación a:

- El problema de investigación y su relevancia para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.
- El logro de los objetivos propuestos.
- La respuesta a la pregunta de investigación.
- Las proyecciones de la investigación.

5.1 Problema de investigación y su relevancia para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática

En la escuela los números enteros son enseñados en un contexto aritmético apoyándose principalmente en modelos concretos, por esta razón surge la necesidad de analizar la pertinencia de estos modelos para todos los casos que se puedan encontrar en las distintas operaciones, ya que, cada uno de ellos tiene características particulares que pueden representarse y justificarse de una manera más o menos satisfactoria dependiendo de cada caso.

Para los docentes es importante conocer los alcances y limitaciones de los modelos y representaciones utilizados en la enseñanza de los números enteros, (como también de otros objetos matemáticos), para tomar de manera acertada la decisión de utilizar uno u otro para cada caso, paliar lo mayor posible sus efectos negativos y ser conscientes de que estos modelos no ofrecen un tránsito hacia la formalización del aprendizaje. En este sentido la presente investigación ofrece una revisión y análisis de uno de los insumos pedagógicos más utilizados por los docentes en sus clases.

La investigación realizada deja en evidencia que los modelos concretos utilizados para la enseñanza de números enteros en los textos escolares no se sostiene para todos los casos de las distintas operaciones, por lo que se abandonan de manera abrupta para introducir una regla o una indicación de procedimientos mecánicos, sin relación con el dispositivo que pretendía ser mediador entre el modelo concreto del objeto matemático y su representación formal, por la misma razón tampoco existe tránsito entre los modos de representación concretos y pictóricos que son ínfimamente utilizados y el modo de representación simbólico.

Considerando que las propuestas actuales para la enseñanza de los números negativos no son eficientes, esta evidencia sirve de antecedente para futuras investigaciones que planteen una alternativa a las actualmente utilizadas.

5.2 Logro de objetivos propuestos

El objetivo general planteado para esta investigación “Analizar las actividades utilizadas para la enseñanza de los números enteros, tanto en representación como en operatoria, propuestas en textos escolares licitados por el Ministerio de Educaciones entre los años 2009 y 2018 para los niveles de séptimo y octavo años básico.”, fue llevado a cabo mediante el cumplimiento de los objetivos específicos cuyas conclusiones se exponen a continuación:

Objetivo específico 1:

Los modelos concretos y matemáticos utilizados para la enseñanza de los números enteros, fueron clasificados para orden, representación, adición y sustracción, todas correspondientes al nivel de séptimo básico; en modelos concretos de desplazamiento y de neutralización.

Los modelos concretos de desplazamiento presentes en los textos analizados son: recta numérica, huso horario, temperatura, altitud y profundidad.

El modelo que marca mayor presencia es la recta numérica con un 20% del total de actividades propuestas en los textos analizados, en segundo lugar, están los problemas contextualizados en situaciones de temperaturas con un 9,5% de presencia.

Los modelos concretos de neutralización presentes en los textos analizados son: fichas bicolor, y conceptos económicos como deudas y ganancias, movimientos en cuentas bancarias, entre otros. Son solo utilizados para adición y sustracción y corresponde en conjunto al 11% del total de actividades. Las fichas bicolor son propuestas de forma material para una actividad que no puede ser contabilizada pues variará para cada estudiante.

Los modelos matemáticos fueron separados en problemas contextualizados en una situación matemática y operatoria, ocupándose esta última en el 47% del total de actividades, mientras que las situaciones matemáticas solo tienen una presencia del 4,7%.

Las operaciones de multiplicación y división de números enteros, todas presentes en los textos de octavo año básico, también fueron clasificadas en modelos concretos, sin embargo, no pudo hacerse la distinción entre modelos de neutralización y desplazamiento, ya que estos solo aplican al campo aditivo.

Los modelos concretos utilizados para la multiplicación y división en los textos analizados fueron los siguientes: fichas bicolor, discos matemáticos, tarjetas rectangulares, recta numérica, temperatura, precipitaciones, conceptos económicos, puntajes, alturas, población animal, virus computacionales, ley de coulomb.

La variedad de modelos concretos utilizados para estas operaciones es superior a los utilizados en el campo aditivo, y corresponde a un 26% del total de actividades propuestas.

Objetivo específico 2:

Las actividades fueron clasificadas en modos de representación concreto, pictórico y simbólico. El 98,5% de las actividades corresponden al modo de representación simbólico, el 1,5% restante corresponde a representaciones en modo pictórico y concreto, presente en solo dos de los ocho textos analizados. El principal problema es que las actividades planteadas no propician el tránsito entre los distintos modos de representación, generando una ruptura entre las representaciones concretas o pictóricas y el modo de representación simbólico.

Objetivo específico 3:

Para cada operación se clasificaron las actividades según los distintos casos posibles utilizando las variables a y b , ambas pertenecientes a los números naturales y considerando que a es menor que b , de la siguiente manera:

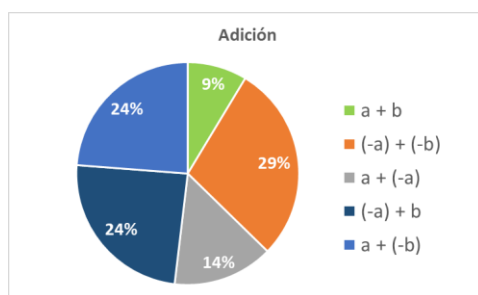
- Adición: $a + b$; $(-a) + (-b)$; $a + (-a)$; $(-a) + b$; $a + (-b)$. En los textos analizados todos estos casos están presentes tanto en actividades desarrolladas, ya sea con un modelo concreto o con operatoria a modo de ejemplo, como en actividades a desarrollar.
- Sustracción: $b - a$; $a - b$; $(-b) - (-a)$; $(-a) - (-b)$; $a - (-b)$; $-a - b$. en ninguno de los tres textos analizado se enseñan todos los casos posibles, en uno de ellos solo se presentan dos casos, sin embargo, en las actividades a desarrollar por los estudiantes, sí están todos los casos presentes.

- Multiplicación: $(-a) \cdot b$; $a \cdot (-b)$; $(-a) \cdot (-b)$; $a \cdot b$; $0 \cdot a$. La multiplicación con uno de sus factores cero, solo está presente en las actividades desarrolladas en dos de los cinco textos analizados, mientras que en las actividades por desarrollar está en cuatro de los cinco textos, los otros casos están presentes en ambos tipos de actividades.
- División: $(-a) : b$; $a : (-b)$; $(-a) : (-b)$; $a : b$; $0 : a$. En ninguno de los textos es considerado el caso en las actividades desarrolladas en que el dividendo es cero, sin embargo, tres de los cinco textos lo incluyen en sus actividades a desarrollar. Uno de ellos solo explica el caso en que divisor y dividendo es negativo, pero incluye todos los otros casos en sus actividades a desarrollar.

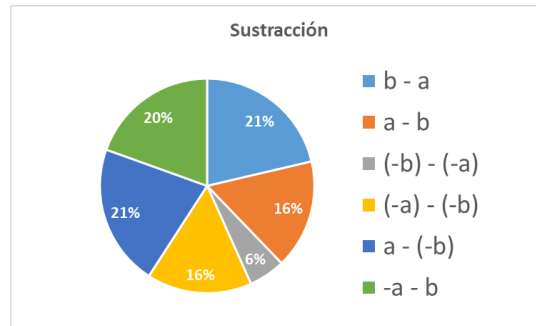
Hacer esta clasificación permitió corroborar que todos los casos de las operaciones considerados para esta investigación están presentes en los textos analizados, principalmente en las actividades a desarrollar por los estudiantes.

A continuación, se muestra la presencia de cada caso de las operaciones en los textos analizados.

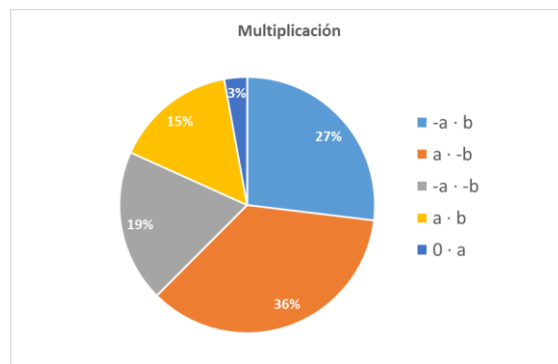
Respecto de la adición se observa que todos los casos considerados están presentes, sin que ninguno de ellos tenga una predominancia significativa. Como se observa en el gráfico.



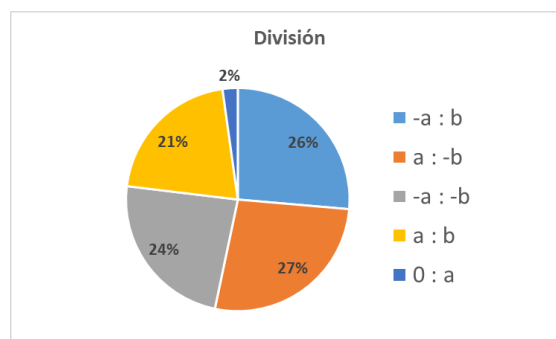
Todos los casos considerados para la sustracción están presentes, siendo la sustracción entre dos números negativos con resultado negativo la que menos apariciones tiene en los textos analizados, los demás casos presentan una diferencia máxima de 5 puntos porcentuales. Como se representa en el gráfico que está a continuación.



Para la multiplicación se consideraron cinco casos, todos ellos están presentes en los textos analizados siendo el caso de la multiplicación por cero el que tiene menos apariciones, no está en todos los textos y no tiene más de cuatro ejercicios en los que sí aparece. La multiplicación entre números de distinto signo con el primer factor positivo es la que más presencia tiene, especialmente en las actividades que sirven para ejemplificar usando modelos concretos. El siguiente gráfico muestra la presencia de cada caso de la multiplicación.



La división con cero en el dividendo fue utilizada en dos de los libros analizados, los otros cuatro casos tienen una presencia similar, con un máximo de 6 puntos porcentuales, como se observa en el gráfico.



Objetivo específico 4:

Respecto de los modelos concretos utilizados para representar cada caso de la adición y la sustracción de números en los textos analizados se evidenció que:

Todos los casos tanto de la adición como de la sustracción fueron representados usando recta numérica, tanto en actividades desarrolladas como en actividades por desarrollar

Las fichas bicolor aparecen en dos de los tres textos analizados y son utilizadas para representar solamente la adición en los casos en los que los sumandos son de distinto signo.

Los problemas contextualizados en situaciones cotidianas son utilizados para todos los casos de la adición y solo en dos de los seis casos considerados para la sustracción, dejando fuera aquellos en los que minuendo y/o sustraendo son negativos, es decir, se usa para sustracciones entre números positivos con resultado positivo o negativo.

Solo las fichas bicolor se representa de modo concreto y también simbólico.

Objetivo específico 5:

Todos los casos para la adición y sustracción son representados a través de modelos concretos, sin embargo, que los puedan representar no significa que todo ellos puedan justificarse a través de estos modelos.

La recta numérica justifica de manera aceptable para los estudiantes el comportamiento de todos los casos de la adición entre números enteros y también permite su reconstrucción en caso de olvido.

En la sustracción nos encontramos con representaciones que no son tan intuitivas, como pretende serlo un modelo concreto y se hace necesario agregar una regla, sin explicación, para que el modelo funcione; así tenemos el caso en el que se utiliza en los textos recta numérica para representar la sustracción con sustrayendo negativo, se incorpora la indicación de desplazarse a la derecha sin mayor explicación, el modelo no logra justificar la razón de dicho movimiento y simplemente se impone una regla que asegura el éxito en la tarea de manera mecánica.

Con respecto a otros casos de la sustracción, se indica cómo expresarla en forma de adición y luego representarla en la recta numérica, por lo que, el modelo es nuevamente usado para la adición y no para la sustracción como se intenta mostrar.

Las fichas bicolor, como modelo de neutralización, puede mostrar los distintos casos de la adición sin mayores inconvenientes, sin embargo, la manera en que este recurso es utilizado en los textos que fueron parte del análisis, no permite explotar todo su potencial, pues en uno de los textos va acompañado de la indicación de hacer el cálculo con el valor absoluto del número, poniendo a las fichas en una situación prescindible, y en el otro se plantea como un juego que nunca intenciona la formalización de la operación.

Los problemas aditivos contextualizados en situaciones cotidianas que se plantean en los textos analizados pueden resolverse, en su mayoría, usando números naturales. Se fuerza a los estudiantes a representar los datos usando números enteros que no son necesario. El único caso en el que se puede necesitar un número entero para representar, es en las situaciones de desplazamientos en las que, por ejemplo, una posición intermedia corresponde a un número negativo y desde ahí debe efectuarse otro desplazamiento. Sin embargo, este tipo de modelos tiene el objetivo de que el estudiante pueda ayudarse de la intuición para comprender la noción matemática estudiada, si su intuición lo lleva a operar con números naturales, el modelo no está cumpliendo su función.

La multiplicación de números enteros en los textos analizados es principalmente representada usando problemas contextualizados en situaciones cotidianas, para los casos en que los factores son de distinto signo se plantea una suma iterada con sumando negativo la cantidad de veces que indique el factor positivo, si el caso propuesto es que el factor que debería indicar la cantidad de veces que se repite la suma es negativo, se pide aplicar la propiedad conmutativa y resolver de la manera ya explicada. Debido a esto, es que en realidad solo se trabaja el primero de los dos casos mencionados, interpretando el segundo en función del otro. Al presentarlo como una adición, se repite el problema planteado con anterioridad, es decir, se obliga a calcular con números negativos cuando no son necesarios, pues bastaría con interpretar la información como una pérdida o disminución de temperaturas, según sea el caso.

También se utilizan tarjetas para las cuales es necesario introducir una regla arbitraria para que funcione el modelo, esta corresponde a voltear las tarjetas en caso de que uno de los factores sea negativo, por lo que no justifica ninguno de los casos de la multiplicación y menos permite reconstruir la regla, más bien, exige recordar una regla tan arbitraria como la tradicionalmente utilizada.

La División es representada con recta numérica para el caso dividendo negativo y divisor positivo, este es el único caso en el que se usa este modelo concreto, a través de él

puede justificarse un cociente negativo, no incluye otros casos pues ¿Cómo sería posible representar en la recta un dividendo positivo y un divisor negativo? ¿O ambos negativos y que la segmentación que se haga indique una posición positiva? Es imposible, la recta numérica puede representar y no justificar algunos casos, pero estos es imposible incluso representarlos.

La cantidad y variedad de modelos concretos usados para las distintas operaciones va disminuyendo, se inicia con la adición, luego la sustracción y la multiplicación representadas como adición y para la división casi no se usan, esto muestra que los modelos concretos no pueden sostenerse para todas las operaciones y sus distintos casos, generando un vacío en lo que pretende ser un tránsito entre los modelos concretos y los modelos matemáticos, transformándolo en un salto abrupto y sin explicación.

En resumen, todos los casos de la adición son representados en los textos analizados, mediante modelos concretos, principalmente usando recta numérica, todos ellos se logran justificar la manera en que se opera con enteros, también facilitan su reconstrucción en caso de que los estudiantes necesiten recordar cómo resolver una adición, por lo tanto, se cumple con la doble función del modelo concreto.

Respecto de la sustracción, cuando minuendo y sustraendo son números positivos, la recta numérica cumple también con su doble función, todos los demás casos son representados como como adiciones del inverso aditivo, por lo tanto, se vuelve a la primera operación analizada y no se centra en la sustracción misma. Tenemos que $(-b) - (-a)$; $a - (-b)$ y $(-a) - b$ son representados como $(-b) + a$; $a + b$ y $(-a) + (-b)$, lo que son expresiones iguales, sin embargo que algo sea igual no significa que sea lo mismo. Estos tres casos no son realmente representados.

El caso $(-a) \cdot b$ es representado usando recta numérica, arreglo bidimensional con fichas y tarjetas. Los arreglos bidimensionales no pueden justificar la operación, ya que, el área de lo figura que forma sería negativa, y eso no es posible. El caso $a \cdot (-b)$ es representado igual al anterior apelando a la propiedad conmutativa de la multiplicación por lo que no es realmente considerado. $(-a) \cdot (-b)$ no es representado por ningún modelo concreto.

La división $(-a) \cdot b$ es representada en la recta numérica cumpliendo con la reconstrucción en caso de olvido. Los casos $a \cdot (-b)$ y $(-a) \cdot (-b)$ son imposibles de representar en la recta numérica.

5.3 Respuesta a la pregunta de investigación

La pregunta planteada para la investigación fue ¿Cuáles son los modelos concretos utilizados para la enseñanza de los números enteros, de qué manera se propicia el tránsito entre sus distintos modos de representación y qué casos de las cuatro operaciones se logra justificar a través de ellos?

Los modelos concretos más utilizados en los textos escolares que componen la muestra, son la recta numérica y los problemas contextualizados en situaciones cotidianas, también están presentes las fichas bicolor y en uno de los casos un sistema de engranajes que muestra el caso de la multiplicación entre números negativos. Estos dos últimos son los únicos propuestos para ser utilizados en modo de representación concreta.

En el caso de las fichas de dos colores se plantea como un juego para aprender la adición entre un número negativo y uno positivo, sin embargo, no establece su relación con la operación dejando un vacío entre el material utilizado y la formalización del aprendizaje. Este modelo puede ser utilizado con una representación pictórica, no obstante, ninguno de los textos lo propone de esta manera.

Con el sistema de engranajes propuestos se intenciona la representación simbólica de la multiplicación entre dos o más números negativos, aunque no existe la posibilidad de usar el modo de representación pictórico, ya que este modelo necesita movimiento.

El principal modo de representación utilizado, en todos los textos que se analizaron, es el simbólico, la representación pictórica es casi inexistente y la concreta está presente solo en dos de los textos analizados. Por esta razón el tránsito entre los distintos modos de representación que se espera lograr bajo el enfoque COPISI, respecto a la enseñanza-aprendizaje de los números enteros, no existe en los textos escolares utilizados en los últimos diez años.

Respecto a qué casos de las distintas operaciones se justifican a través de los modelos concretos utilizados, cabe destacar que varios de los casos considerados para esta investigación no solo no se justifican, sino que además no fueron representados, si se hace el ejercicio de representarlos nos encontramos con que hay algunos en los muy forzado e incluso imposible.

5.4 Proyecciones

- Considerando que no existe una alternativa a los modelos concretos para la introducción en la enseñanza de los números enteros, podría realizarse un análisis más detallado, es decir, revisar cada problema contextualizado en situaciones cotidianas y cada actividad que propone el uso de recta numérica, fichas, tarjetas u otro modelo de los que son propuestos en textos escolares nacionales e internacionales, con el fin de determinar cuáles de ellos son más pertinentes para cada caso. A partir de eso generar una recopilación de actividades que sirvan como insumo para el quehacer docente.
- Diseñar una propuesta de enseñanza que no considere los modelos concretos como punto de partida para el aprendizaje de los números enteros, sino situaciones que les permitan surgir en un contexto algebraico.

Bibliografía

Anne, B. (2002). Algunos elementos de la historia de los números negativos. Obtenido el 5 de junio de 2017 del sitio web: <https://www.yumpu.com/es/document/view/14541384/algunos-elementos-de-la-historia-de-los-numeros-negativos>.

Bennett J.,Burger E., Chard D., Hall E., Kennedy P., Renfro F., Roby T. Scheer J., & Waits B. (2014). Matemática 7° básico. Santiago: Galileo.

Bennett J.,Burger E., Chard D., Hall E., Kennedy P., Renfro F., Roby T. Scheer J., & Waits B. (2014). Matemática 8° básico. Santiago: Galileo.

Borquez E., Darrigrandi F. & Navarro M. (2011). Matemática 8° básico. Santiago: Santillana

Bruno, A. (2000). *Algunas investigaciones sobre la enseñanza de los números negativos*. Universidad de La Laguna.

Bruno, A y Martínón, A (1997). *Procedimientos de resolución de problemas aditivos con números negativos*. Universidad de La Laguna.

Catalán D., Pérez B., Prieto C., & Rupin P. (2015). Matemática 8° básico. Santiago: SM.

Chevallard. Y. (1985) La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.

Cid, E. (2000). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Boletín del 10º Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

Cid, E (2001). *Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos*. Pre-publicaciones seminario matemático García de Galeano nº31.

Cid, E. (2003). *La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión*. Seminario Matemático García de Galeano. Universidad de Zaragoza.

Cid, E. & Bolea P. (2010). *Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un contexto algebraico*. Universidad de Zaragoza.

Concha R. & Rojas F., (2016). Matemática 7° básico. Santiago: SM.

Gallardo, A., & Hernández, A. (2007). Historia versus enseñanza: los números negativos. Cinvestav-IPN, México. Obtenido el día 3 de junio de 2017 del sitio web: <http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig2/gallardo.pdf>

Gallardo, A. & Torres O. (2005) El álgebra aritmética de George Peacock: un puente entre la aritmética y el álgebra simbólica. México.

Gómez, B (2007). *La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más?* Universidad de Valencia.

Gómez, M (2005). La transposición didáctica: historia de un concepto. Revista Latinoamericana de Estudios Educativos. Colombia.

Hernández, M. (2010). Evolución histórica del concepto de Número.

Herrera R. &, Rojas F. (2009). Matemática 8°básico. Santiago: Santillana.

León, P., Olivares P., & Parra P. (2012). Matemática 8°básico. Santiago: MN.

MINEDUC (2016) Programa de estudio séptimo básico. Chile.

MINEDUC (2016) Programa de estudio octavo básico. Chile.

MINEDUC. (s.f.). *www.textos Escolares.cl*. Obtenido el 6 de junio de 2017, de http://www.textos Escolares.cl/index2.php?id_portal=65&id_seccion=3748&id_contenido=15677.

Pinterest. (22 de diciembre de 2018). www.pinterest.cl. obtenido de Pinterest: <https://www.pinterest.cl/pin/417145984209617784/>.

Pinterest. (22 de diciembre de 2018). www.pinterest.cl. obtenido de Pinterest: <https://es.slideshare.net/nhcarlos/juego-matematico-8131996>.

Rojo, A (1978). Álgebra I. El Ateneo. Buenos Aires.

Setz J. & Darrigrandi F., (2009). Matemática 7° básico. Santiago: Santillana.

Anexos

| Código: 7g14-15 | | | | Orden y representación | | Adición | | | | | | | | Sustracción | | | | | | | | Frecuencia abs. | Porcentaje | | | | | | | | | |
|----------------------|----------------------------------|---------------------|----------------|--------------------------------------|---------------------------|-------------------------------------|-------------|----------|----------|---------------------------|-------|-------------|----------|-------------------------------------|----------|-------|-------|---------------------------|-------------|----------|----------|-----------------|------------|-------|-------|-------------|------------|----------|----------|----|----|---|
| | | | | Actividades guiadas o desarrolladas. | Actividades a desarrollar | Actividades desarrolladas o guiadas | | | | Actividades a desarrollar | | | | Actividades desarrolladas o guiadas | | | | Actividades a desarrollar | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | a + b | (-a) + (-b) | a + (-a) | (-a) + b | a + (-b) | a + a | (-a) + (-b) | a + (-a) | (-a) + b | a + (-b) | b - a | a - b | (-b) - (-a) | (-a) - (-b) | a - (-b) | (-a) - b | | | b - a | a - b | (-b) - (-a) | (a) - (-b) | a - (-b) | (-a) - b | | | |
| Modelos concretos | Modo de rep. Concreto | Neutralización | Fichas bicolor | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| | | | Fichas bicolor | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | |
| | Modo de rep. Pictórico | desplazamiento | Neutralización | conceptos económicos | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | | | Otros | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | Huso horario | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | Temperaturas | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| | Modo de representación simbólico | Situación cotidiana | Desplazamiento | Altitudes | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | | | Recta numérica | 7 | 31 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 4 | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 3 | 5 | 3 | 69 | | | |
| | | | | conceptos económicos | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | |
| | | | | puntajes | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | temporalidad | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | Temperaturas | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 6 | 0 | 13 | | |
| | | | | Altitudes | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 4 | | | |
| | | | | Modo de representación simbólico | Operatoria | Operatoria | 0 | 9 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 11 | 4 | 6 | 15 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 6 | 3 | 5 | 4 | 8 | 82 | |
| situación matemática | | | | | | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | | |
| Total | | | | 7 | 50 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 5 | 14 | 4 | 13 | 22 | 1 | 2 | 1 | 0 | 2 | 3 | 2 | 9 | 3 | 8 | 17 | 11 | 179 | | | | |

| Código: 75m16-18 | | | | Orden y representación | | Adición | | | | | | | | | | Sustracción | | | | | | | | | | Frecuencia abs | | | | | |
|-------------------|----------------------------------|---------------------|------------------------|--------------------------------------|---------------------------|-------------------------------------|-------------|----------|----------|----------|---------------------------|-------------|----------|----------|----------|-------------------------------------|-------|-------------|-------------|----------|---------------------------|-------|-------|-------------|------------|----------------|----------|----------|-----|----|---|
| | | | | Actividades guiadas o desarrolladas. | Actividades a desarrollar | Actividades desarrolladas o guiadas | | | | | Actividades a desarrollar | | | | | Actividades desarrolladas o guiadas | | | | | Actividades a desarrollar | | | | | | | | | | |
| | | | | | | a + b | (-a) + (-b) | a + (-a) | (-a) + b | a + (-b) | a + a | (-a) + (-b) | a + (-a) | (-a) + b | a + (-b) | b - a | a - b | (-b) - (-a) | (-a) - (-b) | a - (-b) | (-a) - b | b - a | a - b | (-b) - (-a) | (a) - (-b) | | a - (-b) | (-a) - b | | | |
| Modelos concretos | Modo de rep. Concreto | Neutralización | Fichas bicolor | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | x | x | x | x | x | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| | | | Modo de rep. Pictórico | Neutralización | Fichas bicolor | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| | conceptos económicos | 0 | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | Otros | 0 | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | Huso horario | 0 | | | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | |
| | Temperaturas | 7 | | | 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 24 | |
| | Modo de representación simbólico | Situación cotidiana | Desplazamiento | Altitudes | 1 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | |
| | | | | Recta numérica | 2 | 31 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 5 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 3 | 0 | 0 | 60 | |
| | | | | Neutralización | conceptos económicos | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| | | | | puntajes | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | temporalidad | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| | | Situación cotidiana | Desplazamiento | Temperaturas | 1 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 11 | |
| | | | | Altitudes | 2 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 16 | |
| | | | | Operatoria | 0 | 27 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 21 | 4 | 16 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 20 | 5 | 1 | 5 | 8 | 4 | 128 | | |
| | | | | situación matemática | 0 | 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 23 | | |
| Total | | | | 13 | 130 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 9 | 24 | 5 | 24 | 10 | 3 | 4 | 2 | 2 | 0 | 0 | 25 | 9 | 2 | 8 | 8 | 4 | 290 | | | |

| Código: 8s09-10 | | | Multiplicación | | | | | | | | | | División | | | | | | | | | |
|-----------------------|----------------------------------|------------------------|---------------------------|----------|-------------|-------|-------|-----------------------------|----------|-------------|-------|-------|---------------------------|----------|-------------|-------|------------------|-----------------------------|----------|-------------|-------|------------------|
| | | | Actividades desarrolladas | | | | | Actividades por desarrollar | | | | | Actividades desarrolladas | | | | | Actividades por desarrollar | | | | |
| | | | a · (-b) | (-a) · b | (-a) · (-b) | a · b | 0 · a | a · (-b) | (-a) · b | (-a) · (-b) | a · b | 0 · a | (-a) : b | a : (-b) | (-a) : (-b) | a : b | 0 : (-a) ó 0 : a | (-a) : b | a : (-b) | (-a) : (-b) | a : b | 0 : (-a) ó 0 : a |
| Modelos concretos | Modo de repr. concre | Fichas bicolor | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0:00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0:00 | |
| | | Discos matemáticos | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0:00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0:00 | |
| | | Tarjetas rectangulares | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | Modo de repres. pictórico | Fichas bicolor | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | Tarjetas rectangulares | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | Modo de representación simbólico | Situación cotidiana | Recta numérica | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | papeles de colores | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | Temperaturas | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | Precipitaciones | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | Conceptos económicos | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Puntajes | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Alturas | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Población animal | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Virus computacionales | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Ley de coulomb | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Matemático | Modo de representación simbólico | Situación matemática | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | Patrones | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | Operatoria | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 4 | 8 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 6 | 13 | 7 | 4 | 0 |

| Código: 8mn12 | | | Multiplicación | | | | | | | | | | División | | | | | | | | | | |
|-----------------------|----------------------------------|------------------------|---------------------------|----------|-------------|-------|-------|-----------------------------|----------|-------------|-------|-------|---------------------------|----------|-------------|-------|------------------|-----------------------------|----------|-------------|-------|------------------|---|
| | | | Actividades desarrolladas | | | | | Actividades por desarrollar | | | | | Actividades desarrolladas | | | | | Actividades por desarrollar | | | | | |
| | | | a · (-b) | (-a) · b | (-a) · (-b) | a · b | 0 · a | a · (-b) | (-a) · b | (-a) · (-b) | a · b | 0 · a | (-a) : b | a : (-b) | (-a) : (-b) | a : b | 0 : (-a) ó 0 : a | (-a) : b | a : (-b) | (-a) : (-b) | a : b | 0 : (-a) ó 0 : a | |
| Modelos concretos | Modo de repr. concre | Fichas bicolor | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | Discos matemáticos | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | Tarjetas rectangulares | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | Modo de repres. pictórico | Fichas bicolor | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | Tarjetas rectangulares | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | Modo de representación simbólico | Situación cotidiana | Recta numérica | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | Papeles colores | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | Temperaturas | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | Precipitaciones | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | Conceptos económicos | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Puntajes | | | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Alturas | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Población animal | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Virus computacionales | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Ley de coulomb | | | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Matemático | Modo de representación simbólico | Situación matemática | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | Patrones | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | Operatoria | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | 6 | 8 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 6 | 6 | 0 | |

| Código: 8s11-13 | | | Multiplicación | | | | | | | | | | División | | | | | | | | | | | |
|-----------------------|----------------------------------|------------------------|---------------------------|----------|-------------|-------|-------|-----------------------------|----------|-------------|-------|-------|---------------------------|----------|-------------|-------|------------------|-----------------------------|----------|-------------|-------|------------------|---|---|
| | | | Actividades desarrolladas | | | | | Actividades por desarrollar | | | | | Actividades desarrolladas | | | | | Actividades por desarrollar | | | | | | |
| | | | a · (-b) | (-a) · b | (-a) · (-b) | a · b | 0 · a | a · (-b) | (-a) · b | (-a) · (-b) | a · b | 0 · a | (-a) : b | a : (-b) | (-a) : (-b) | a : b | 0 : (-a) ó 0 : a | (-a) : b | a : (-b) | (-a) : (-b) | a : b | 0 : (-a) ó 0 : a | | |
| Modelos concretos | Modo de repr. concreto | Fichas bicolor | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| | | Discos matemáticos | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | Tarjetas rectangulares | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | Modo de repres. pictórico | Fichas bicolor | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | Tarjetas rectangulares | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | Modo de representación simbólico | Situación cotidiana | Recta numérica | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | Papeles de dos colores | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| | | | Temperaturas | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | Precipitaciones | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | Conceptos económicos | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Puntajes | | | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Alturas | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Población animal | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Virus computacionales | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Ley de coulomb | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Matemático | Modo de representación simbólico | Situación matemática | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | | |
| | | Patrones | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | Operatoria | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 | 9 | 9 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 7 | 10 | 6 | 12 | 0 | | |

| Código: 8g14 | | | Multiplicación | | | | | | | | | | División | | | | | | | | | | |
|-------------------|----------------------------------|------------------------|----------------------------------|----------------------|-------------|-------|-------|-----------------------------|----------|-------------|-------|-------|---------------------------|----------|-------------|-------|------------------|-----------------------------|----------|-------------|-------|------------------|---|
| | | | Actividades desarrolladas | | | | | Actividades por desarrollar | | | | | Actividades desarrolladas | | | | | Actividades por desarrollar | | | | | |
| | | | a · (-b) | (-a) · b | (-a) · (-b) | a · b | 0 · a | a · (-b) | (-a) · b | (-a) · (-b) | a · b | 0 · a | (-a) : b | a : (-b) | (-a) : (-b) | a : b | 0 : (-a) ó 0 : a | (-a) : b | a : (-b) | (-a) : (-b) | a : b | 0 : (-a) ó 0 : a | |
| Modelos concretos | Modo de repr. concre | Fichas bicolor | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | Discos matemáticos | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | Tarjetas rectangulares | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | Modo de repres. pictórico | Fichas bicolor | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 12 | 5 | 0 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | Tarjetas rectangulares | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | Modo de representación simbólico | Situación cotidiana | Recta numérica | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 19 | 10 | 0 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | Papeles de colores | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | Temperaturas | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | Precipitaciones | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | Conceptos económicos | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| | | | Puntajes | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | Alturas | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | Población animal | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | Virus computacionales | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Ley de coulomb | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Matemático | | | Modo de representación simbólico | Situación matemática | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Patrones | 1 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | Operatoria | 1 | | 0 | 1 | 1 | 0 | 27 | 27 | 21 | 13 | 3 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 16 | 14 | 10 | 5 | 2 | |

| Código: 8sm15-16-17-18 | | | Multiplicación | | | | | | | | | | División | | | | | | | | | | |
|------------------------|----------------------------------|------------------------|---------------------------|----------|-------------|-------|-------|-----------------------------|----------|-------------|-------|-------|---------------------------|----------|-------------|-------|------------------|-----------------------------|----------|-------------|-------|------------------|---|
| | | | Actividades desarrolladas | | | | | Actividades por desarrollar | | | | | Actividades desarrolladas | | | | | Actividades por desarrollar | | | | | |
| | | | a · (-b) | (-a) · b | (-a) · (-b) | a · b | 0 · a | a · (-b) | (-a) · b | (-a) · (-b) | a · b | 0 · a | (-a) : b | a : (-b) | (-a) : (-b) | a : b | 0 : (-a) ó 0 : a | (-a) : b | a : (-b) | (-a) : (-b) | a : b | 0 : (-a) ó 0 : a | |
| Modelos concretos | Modo de repr. concre | Fichas bicolor | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | Discos matemáticos | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | Tarjetas rectangulares | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | Modo de repres. pictórico | Fichas bicolor | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | Tarjetas rectangulares | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | Modo de representación simbólico | Situación cotidiana | Recta numérica | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| | | | Papeles de colores | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | Temperaturas | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | Precipitaciones | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | Conceptos económicos | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Puntajes | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Alturas | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| Población animal | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Virus computacionales | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Ley de coulomb | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Matemático | Modo de representación simbólico | Situación matemática | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| | | Patrones | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | Operatoria | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | 4 | 4 | 12 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 4 | 1 | 2 | |