Universidad Alberto Hurtado

Facultad de Educación

Departamento de Pedagogías Medias y Didácticas Específicas

Programa Pedagogía en Matemática

Una propuesta de enseñanza aprendizaje respecto de los Criterios de Congruencia de Triángulos

Informe de trabajo final para optar al Título de Profesor de Matemática

Por

Cristóbal Alberto Hurtado Lara

Claudio Alejandro Riveros Bravo

Seminario de Título

Profesora Guía

Dra. María Soledad Montoya González

Santiago, Chile

Noviembre de 2021

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, agradezco de sobremanera a mi madre Patricia Lara Toledo, pues en todos y cada uno de los momentos de mi carrera siempre estuvo presente, dándome fuerza y ánimo en cada instancia en que me sentí débil e incapaz y haciéndome entender que todo iba a estar bien, llenándome de esperanza y de energías para afrontar cada uno de los problemas que se fueron presentando, sobre todo durante este año pandémico tan complejo. Eres una gran madre y estoy orgulloso de ti, así como tu también lo estás de mí ahora que he terminado este proceso, el cual no hubiese podido lograr sin tu ayuda.

A su vez, agradezco a mi familia, en especial a mis hermanas Natalia, Mirna y Janet, por estar constantemente preocupadas de mi proceso, dándome un fraterno apoyo y celebrando cada uno de mis logros con entusiasmo y alegría.

Agradezco también a las y los académicos de la carrera, en especial a Marcos Barra y Jorge Neira, quienes siempre tuvieron gestos de preocupación y apoyo, junto con un gran sentido del humor, que me hicieron tener una estadía más amena en la carrera, sobre todo durante los años de pandemia, en los cuales se mostraron de manera muy humana. Junto con ello, agradezco a mi compañero Claudio por estar siempre ahí en todos los problemas y por tener la fuerza para sacar adelante esta investigación en momentos dolorosos.

Finalmente, te agradezco a ti Héctor Hurtado Villalón, padre querido, que me observas desde el más allá y que pese a haberte ido de este mundo mucho antes de mi ingreso a la universidad, me llenaste de grandes valores que han ido construyendo lo que soy. Siempre te llevaré en mi corazón y estoy seguro de que estarías muy contento de lo que he logrado, y, si es que tu alma está todavía entre nosotros, estoy seguro de que estás completamente feliz.

Cristóbal Alberto Hurtado Lara

Si bien el objetivo de lograr terminar una carrera universitaria es tarea de una sola persona, mi camino a poder cumplir con este estuvo bendecido por la compañía de muchas personas importantes, quienes, de no haber estado presentes, hubiera sido todo mucho más complicado. Es por esto por lo que otorgo un especial agradecimiento a familiares y amigos cercanos quienes me apoyaron y animaron a poder seguir y conseguir este importante objetivo.

Quisiera agradecer también a todas esas personas especiales en mi vida quienes fueron gran parte de mi motivación a querer cumplir con este importante objetivo, las cuales otorgaron significado y sentido a todo el esfuerzo realizado.

No puedo dejar de agradecer también la guía y enseñanza otorgada en los cursos de investigación cursados y por lo tanto a la profesora encargada, sin olvidar tampoco la presencia de todos mis compañeros y todas mis compañeras, pues fueron un elemento clave en mi propio desarrollo y aprendizaje, como también parte importante para poder realizar y terminar con esta investigación.

Finalmente, un especial agradecimiento a mi compañero en esta investigación, quien no solo me apoyo con su ardua labor en el desarrollo de este trabajo, sino que también me brindo la contención y el ánimo necesario en cada reunión para poder seguir adelante y cumplir con cada entrega, y quien también estuvo dispuesto a darme de sus fuerzas para poder terminar juntos este proyecto.

Claudio Alejandro Riveros Bravo

ÍNDICE

RESUMEN

En el presente trabajo de investigación tiene por objetivo caracterizar las acciones que los estudiantes realizan al argumentar frente a una secuencia de enseñanza aprendizaje respecto de los criterios de congruencia de triángulos. Para ello, se plantea una problemática la cual es fundamentada con antecedentes acerca de la enseñanza de la geometría, del propio concepto de congruencia y de la poca importancia dada a este contenido en el actual texto del estudiante en comparación a textos de años anteriores, lo que provoca que el tópico en cuestión sea estudiado de manera mecánica.

En base a ello, la investigación se realiza con un enfoque cualitativo, utilizando elementos de la micro - ingeniería didáctica con el objetivo de analizar el desarrollo de la secuencia, realizada utilizando como guía el marco de referencia del Modelo de Van Hiele. De este modo, la secuencia de enseñanza aprendizaje fue llevada a cabo empleando elementos de la metodología antes descrita, haciendo énfasis en las observaciones realizadas antes y después de cada situación problema, con el objetivo de contrastar los análisis predictivos con los hechos ocurridos, elaborando conclusiones al respecto.

INTRODUCCIÓN

El presente Seminario de Título versa acerca de una investigación con enfoque cualitativo llevada a cabo de manera virtual en un grupo curso de primero medio en el Colegio Premilitar Ignacio Carrera Pinto, ubicado en Peñaflor, Santiago de Chile.

Primeramente, se presentará el fenómeno didáctico en relación con la problemática de la investigación junto con los antecedentes que respaldan y fundamentan aquello, realizando un análisis exhaustivo de dos textos de estudio de años anteriores y del programa de estudio en el cual se enmarca el tópico de estudio, para posteriormente exponer el objetivo general de la investigación junto con los objetivos específicos de esta.

Luego, se presentarán algunas ideas epistemológicas del contenido en cuestión junto con el estatus actual del objeto matemático, con el objetivo de conocer el hábitat de este en la matemática pura y recoger ideas que contribuyan a comprender de manera más completa el tópico en cuestión.

Posteriormente, se ahondará en el Modelo de Van Hiele como el marco teórico que nos guiará para cumplir los objetivos plasmados junto con los enfoques metodológicos utilizados como la Metodología de Estudio de Clases (MEC) y ciertos elementos de la Ingeniería Didáctica (ID), profundizando en sus aspectos más relevantes.

Más tarde, se realizará una descripción de la secuencia de enseñanza aprendizaje diseñada junto con los planes de cada una de las sesiones clases y los análisis a priori de las situaciones claves de la secuencia didáctica.

Junto con ello, se realizará un análisis de la sesión de clases analizada bajo la Metodología de Estudio de Clases, describiendo la sesión implementada, el plan de clases en forma detallada, los sucesos que ocurrieron durante la clase, la discusión generada en base al análisis grupal y realizando una reflexión final en base a lo trabajado.

Finalmente, se analizarán los resultados de cada una de las situaciones claves, para después confrontar aquellos análisis con los realizados durante el quinto capítulo. Luego de ello, se realizará una conclusión en base a todo lo investigado, profundizando en reflexiones y aprendizajes profesionales que nos orientarán para nuestro futuro trabajo como educadores.

CAPÍTULO I

PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS

1.1 Problemática

Al observar de manera sencilla el mundo que nos rodea, notaremos que es un innúmero de cuerpos y figuras, cada uno con una forma en particular que le confiere parte de su esencia y su existencia para nosotros, pues "La geometría es para el ser humano el idioma universal que le permite describir y construir su mundo, así como transmitir la percepción que tiene de este al resto de la humanidad" (Gamboa y Vargas, 2011, pág. 75). Y, si experimentamos y observamos de manera más reflexiva y con la sabiduría heredada del estudio de la geometría, podremos dar cuenta de un sin número de peculiaridades y propiedades presentes, junto con poder predecir también cómo se comportan distintos sucesos. Aquella reflexión sólo es posible cuando hemos estudiado y reflexionado sobre el área de la geometría, siendo este un acercamiento que tenemos por primera vez en la escuela y que va creciendo a medida que avanzamos progresivamente en los niveles de ella.

Sin embargo, lejos de aproximarse a ella y descubrirla a través de una construcción que posea sentido y significancia, en muchas ocasiones se vuelve "(...) un estudio memorístico de áreas, volúmenes, definiciones geométricas, y en construcciones de tipo mecanicista y completamente descontextualizadas" (Abrate, Delgado y Pochulu, 2006, pág. 1). Producto de ello, es común ver estudiantes que solo se dedican a memorizar fórmulas y repetir los procedimientos que han observado sin reflexionar sobre ellos. Al respecto, Barrantes y Blanco plantean que "Los estudiantes consideran que la mayor dificultad está en las fórmulas, porque había que memorizarlas, y en los problemas. Aunque hablan de la dificultad de los problemas, ellos mismos aclaran que dicha dificultad no estaba en el problema sino en saber la fórmula y en que fórmula aplicar. Recuerdan que se aprendían las fórmulas de memoria, pues no le enseñaban a razonarlas ni procedimientos alternativos, y que elaboraban recetarios como una forma de aprenderlas.” (Barrantes & Blanco, 2005, pág. 37). La problemática es tal que algunos docentes no son capaces de desarrollar actividades que propicien el descubrimiento y la experimentación, limitándose solo a enseñar el conocimiento geométrico como un conocimiento acabado. De acuerdo con los autores aludidos anteriormente, esto puede ocurrir ya que “el personal docente, debido a las concepciones y experiencias adquiridas en su formación, planea las lecciones y utiliza los mismos recursos que experimentó, en su momento, como estudiante. Muchas veces su vivencia personal le impide llevar a cabo una experiencia de aprendizaje que guíe al estudiante al descubrimiento de la geometría como generadora de conocimiento.” (Barrantes & Blanco, 2004, pág. 249).

Producto de esta mecanización, Abrate, Delgado y Pochulu señalan que es habitual que “(...) los docentes desplazaran paulatinamente los contenidos relativos a Geometría hacia las últimas unidades didácticas de su planificación escolar, llegándose, inclusive, a prescindir de su tratamiento en muchos cursos del Nivel Medio” (Abrate, Delgado y Pochulu, 2006, pág. 1).

Uno de los objetos matemáticos que sufre este tipo de problemática es la congruencia y los criterios de congruencia de triángulos, los cuales a menudo son presentados de manera mecánica, dando una receta de los criterios de congruencia y utilizando reglas mnemotécnicas que no aportan en nada a la construcción del contenido y de por qué estas sirven y/o funcionan para establecer la congruencia entre dos triángulos.

Así, en base a ello y lo mencionado anteriormente es que nos preguntamos:

¿Qué tipo de acciones realizan los estudiantes para argumentar al enfrentarse a una secuencia de clases acerca de criterios de congruencia de triángulos?

1.2 Antecedentes

Tanto la mecanización como el desplazamiento del área de la geometría impacta fuertemente en los distintos tópicos de ella. Ejemplos de esto son los conceptos de congruencia y semejanza, pues para Vanegas existe una “Falta de tratamiento de dichas relaciones de equivalencia en el aula de clases, debido al énfasis que hacen los docentes de primaria al pensamiento numérico y sistemas numéricos, lo que conlleva a destinar poco tiempo al tratamiento del pensamiento espacial y por lo tanto, el trabajo específico en cuanto a la semejanza y congruencia de figuras el nulo o muy poco” (Vanegas, 2019, pág. 20). Sumado a ello, también comenta que “Los conceptos de semejanza y congruencia no están bien definidos en la mayoría de los estudiantes, por el contrario, demuestran tener ideas muy vagas y/o erróneas de lo que significan estas dos relaciones. Por ejemplo, los estudiantes confunden la semejanza y la congruencia con la igualdad.” (Vanegas, 2019, pág. 20).

Además, como se deja de manifiesto en la problemática, es una realidad que muchas veces los docentes desplazan los contenidos de geometría hacia el final, es más, algunos estudiantes “(…) conciben la geometría escolar como una materia difícil, a la que se dedicaba poco tiempo, confirmándose, además, que si se impartía se hacía al final de curso. A esta situación colaboraban también los libros de texto pues sus contenidos eran desplazados al final y frecuentemente ignorados por los maestros” (Barrantes y Blanco, 2005, pág. 37)

Lo expuesto sirve de conexión para el análisis posterior, pues de acuerdo con Barrantes, López y Fernández “(…) el libro de texto sigue siendo un recurso ampliamente utilizado durante las etapas de escolaridad y un objeto de uso diario por parte de alumnos y profesores. Por lo tanto, siempre es necesario realizar una revisión crítica de estos para conseguir un uso eficaz encaminado a mejorar la enseñanza y el aprendizaje. (...). Este hecho hace que la elección del texto escolar sea una labor muy importante, aunque no es una tarea sencilla debido a la gran cantidad de variables que se deben tener en cuenta (Barrantes, López y Fernández, pág. 108)

Es pertinente entonces pensar en el texto del estudiante de séptimo básico ofrecido por el MINEDUC, pues es esta una de las preferencias de los profesores. Bastará con solo revisar los distintos índices para dar cuenta que el contenido criterios de congruencia solo tiene una pequeña aparición en aquel libro de estudio. Revisando la profundidad con la que se desarrolla, veremos reflejado lo expuesto anteriormente respecto de la poca importancia y espacio dado al contenido.

De este modo, para evitar llegar al grado de desconexión de la geometría y promover la enseñanza de esta de manera crítica, es importante propiciar actividades que sirvan a los estudiantes para el análisis, reflexión y búsqueda de soluciones en base a estrategias de justificación de aquellos problemas. Para ello, es importante tener en cuenta que “El aprendizaje de la geometría implica el desarrollo de habilidades visuales y de argumentación. Más aún, para lograr un aprendizaje significativo, es necesario construir una interacción fuerte entre estos dos componentes, de manera que el discurso teórico quede anclado en experiencias perceptivas que ayuden a construir su sentido, y a su vez las habilidades visuales sean guiadas por la teoría, para ganar en precisión y potencia.” (Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta, 2004, pág. 25)

Aquello es imperioso en las prácticas pedagógicas respecto del área de la geometría, pues Crespo (2005), luego de un trabajo realizado en el aula, concluye que “a través de las demostraciones y argumentaciones lógicas es posible eludir la tendencia de la algoritmización de la matemática en el aula, evitando el aprendizaje mecánico de fórmulas y la aplicación de estas de forma rutinaria.” (Jiménez, Miryam, 2013, pág.105). De ahí que gran parte de los cambios respecto de la manera en cómo se enseña la geometría deben ir en aquella dirección, promoviendo el desarrollo de aquella habilidad.

1.2.1 Análisis del programa de estudios

De acuerdo con el programa de estudio, el objeto matemático “Criterios de Congruencia de Triángulos” se encuentra en el nivel de séptimo básico en la Unidad 3: Geometría polígonos, diámetro y perímetro. Esta unidad tiene como propósito que los estudiantes encuentren y conjeturen relaciones respecto de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios. También se profundiza respecto a las características del círculo y la circunferencia y en las construcciones de los elementos secundarios del triángulo, junto con triángulos y cuadriláteros congruentes y la noción de vector en el plano cartesiano. Los contenidos a tratar involucran polígonos y sus áreas, círculo y circunferencia, vectores en el plano cartesiano, rectas perpendiculares y paralelas, congruencia de segmentos, triángulos y cuadriláteros y elementos notables del triángulo.

Los conocimientos previos para que los estudiantes puedan trabajar adecuadamente con los tópicos antes mencionados son construcción de triángulos, área de cubos y paralelepípedos, transformaciones isométricas (traslaciones, reflexiones y rotaciones), suma de ángulos interiores de triángulos y cuadriláteros y tipos de ángulos (agudos, obtusos, rectos, completos y extendidos)

Las habilidades que persigue la unidad están en su amplia mayoría vinculadas a la argumentación que deben desarrollar los estudiantes como justificación a los procedimientos realizados, junto con el uso de símbolos y conceptos matemáticos para llevar a cabo estas, las cuales son:

- Describir relaciones y situaciones matemáticas de manera verbal y usando símbolos. (OAH D)

- Explicar y fundamentar:

  Soluciones propias y los procedimientos utilizados.

Resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas. (OAH E)

- Fundamentar conjeturas dando ejemplos y contraejemplos. (OAH F)

- Evaluar la argumentación de otros dando razones. (OAH G)

- Usar modelos, realizando cálculos, estimaciones y simulaciones, tanto manualmente como con ayuda de instrumentos para resolver problemas de otras asignaturas y de la vida diaria. (OAH H)

Por otra parte, las actitudes a desarrollar están vinculadas a acciones como la curiosidad, esfuerzo y perseverancia que se debe tener al resolver desafíos y problemas matemáticos, junto con el trabajo colaborativo para afrontarlos. Estas son las siguientes:

- Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato. (OAA B)

- Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales. (OAA C)

- Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas. (OAA D)

El objetivo de aprendizaje en donde se enmarca el objeto matemático en cuestión es amplio, el cual se centra en la construcción tanto manual y/o con software educativo de los tópicos mencionados antes:

- **OA 12**

Construir objetos geométricos de manera manual y/o con software educativo: Líneas, como las perpendiculares, las paralelas, las bisectrices y alturas en triángulos y cuadriláteros. Puntos, como el punto medio de un segmento, el centro de gravedad, el centro del círculo inscrito y del circunscrito de un triángulo. **Triángulos y cuadriláteros congruentes.**

Los indicadores de evaluación dan cuenta de que lo establecido se haya cumplido y logrado, los cuales respecto de este objetivo son los siguientes:

- Aplican la propiedad del círculo como lugar geométrico para resolver problemas concretos; por ejemplo: la cobertura de una radioemisora, etc.

- Construyen la recta perpendicular a un punto en una recta y reconocen que la recta perpendicular a un punto fuera de ella tiene la distancia mínima entre el punto y la recta.

- Experimentan, concretamente o en forma pictórica, que doblando dos veces en dirección perpendicular, se continúa paralelamente a la dirección original, y aplican esto para construir paralelas de una recta.

- Construyen la altura en un triángulo isósceles, observando que lo divide en dos triángulos simétricos, y aplican este procedimiento para construir bisectrices.

- Aplican la construcción para resolver problemas de la vida diaria, mediante líneas perpendiculares, paralelas, bisectriz, triángulos y cuadriláteros.

Las Orientaciones Didácticas están enfocadas principalmente en que los estudiantes les den sentido a los contenidos matemáticos evitando la mecanización y favoreciendo siempre el descubrimiento y la construcción de los distintos tópicos matemáticos, por lo que el profesor debe ser capaz de implementar secuencias de aprendizaje que cumplan con ello, distanciándose de una enseñanza tradicional.

Una de las ideas claves para ello es el aprender haciendo, es decir, el propiciar que el estudiante descubra el tópico en base a los fenómenos que acontecen en las propias vivencias personales de cada uno y en la naturaleza, para luego llevar aquello al ámbito puramente matemático, transitando así de lo concreto hacia lo pictórico y simbólico.

Otra idea que se plantea es la puesta en escena del estudiante como actor y protagonista de la clase, siendo el docente un ente que va guiando a este hacia los objetivos y propósitos. Se hace énfasis en los tipos de actividades que este debe promover de modo que les permitan descubrir conceptos y adoptar estrategias, así como ser capaces de aceptar y reconocer los errores, usándolos como centro de discusión y de búsqueda de soluciones, junto con realizar actividades colaborativas de modo que los estudiantes discutan y reflexionen acerca de sus procedimientos, promoviendo el pensamiento crítico.

También, las orientaciones didácticas resaltan lo fundamental que es recurrir a las experiencias previas antes de iniciar cada contenido, ya que sirven de base para desarrollar los nuevos conocimientos, junto con establecer las conexiones adecuadas entre contenidos ya estudiados y de otras asignaturas, enriqueciendo el proceso de aprendizaje. Es clave que aquel proceso se dé de manera progresiva, iniciando una escalada de complejidad que vaya acorde a las situaciones que se vayan presentando.

Además, comentan la pertinencia de que este proceso se de en base a representaciones, analogías y metáforas, pues en base a ello es posible lograr una mejor comprensión de los conceptos y también un acercamiento que fomente su motivación por la matemática y que les familiarice con ella.

Por otro lado, las orientaciones didácticas también hacen hincapié en el uso de las TIC como medio para la consecución de los distintos objetivos, pues estas sirven para comprobar y desarrollar procedimientos de manera rápida y precisa.

Finalmente, comentan lo esencial del repaso y la ejercitación de los contenidos e ideas matemáticas claves de manera de afianzar el aprendizaje, junto con la importancia de una retroalimentación adecuada del docente para con los estudiantes con el objetivo de reconocer el esfuerzo que realizan, promover la discusión respecto de ejercicios y problemas y orientarlos acerca de qué áreas deben mejorar.

Respecto de las actividades que se encuentran en el programa de estudios, podemos evidenciar con bastante decepción, que lo que sostenemos en nuestra problemática se hace patente en él, pues a pesar de que se proponen una serie de actividades respecto al OA 12 como en todos los objetivos de aprendizaje, ninguna de ellas está asociada al contenido de Criterios de Congruencia de Triángulos, estando todas enfocadas en los elementos notables del triángulo y en construcciones geométricas. A pesar de ello, se realizará un análisis general de las actividades que allí aparecen, con el objetivo de dar forma al cuerpo de la investigación. En primera instancia, se deja explícito el objetivo de aprendizaje y los tópicos que se pretende abarcar en el siguiente recuadro.

Objetivo de Aprendizaje

OA 12

Construir objetos geométricos de manera manual y/o con *software* educativo:

› Líneas, como las perpendiculares, las paralelas, las bisectrices y alturas en triángulos y cuadriláteros.

› Puntos, como el punto medio de un segmento, el centro de gravedad, el centro del círculo inscrito y del circunscrito.

› Triángulos y cuadriláteros congruentes.

Extraído del programa de estudios (p.147)

Respecto de las actividades propuestas, en la mayoría de ellas se plantea que favorecen el desarrollo de la habilidad de representar y de resolver problemas, las cuales corresponden al OAH K y OAH A respectivamente. Por ejemplo, en uno de los problemas se busca que los estudiantes utilicen estrategias para estimar la llegada de un tsunami haciendo uso de puntos y elementos de la circunferencia y del triángulo utilizando una ilustración e involucrándose lo más posible en la situación en base a construcciones geométricas. También se potencia la actitud del trabajo en equipo, señalada en las observaciones al docente.

Otra de las actividades está orientada a realizar construcciones con el objetivo de establecer relaciones entre las figuras realizadas y visualizar propiedades. Se podría pensar por un momento que el inciso a) puede vincularse al contenido de criterios de congruencia, al pensar en que los estudiantes podrían aseverar que los triángulos son congruentes por el criterio Lado - Lado - Ángulo (mayor) que los triángulos son congruentes, argumentando que la altura es también transversal de gravedad y bisectriz, sin embargo, debido al contexto de la actividad y a lo efímero del espacio, es difícil dilucidar si la pregunta está concretamente orientada a ello.

8. Observan la construcción c) de la actividad 7. Piensan y realizan las construcciones con regla y compás.

a. Construyen la altura del vértice C en el triángulo isósceles ABC. ¿Qué propiedad tiene esta altura en el triángulo isósceles?

b. Observan la construcción de la altura en el triángulo isósceles y construyen la bisectriz del ángulo con el vértice S.

c. Resuelven problemas de construcción:

- Una persona se encuentra ubicada en el punto Q y debe llegar al camino h, ¿cuál es la distancia mínima que debe recorrer para llegar al camino? Dibujar un esquema que describa lo planteado en el enunciado.
- Tres personas están ubicadas de maneras que forman un triángulo, ¿Cuál es la distancia mínima que deben recorrer, para que las tres caminen lo mismo y se encuentren en un mismo punto?

Argumentar y comunicar

Describir relaciones y situaciones matemáticas usando símbolos. (OA d)

Extraído del programa de estudios (p.151)

Todas estas actividades apuntan al desarrollo de habilidades como la argumentación y la comunicación y deben ser abordadas con conocimientos respecto de elementos notables en el triángulo, los cuales junto con la respectiva construcción permiten llegar a la respuesta, como es el caso del inciso b) respecto de la construcción de la bisectriz. Respecto del inciso c), deben dar cuenta que la recta perpendicular al punto Q y el camino h es la distancia más corta, para posteriormente aplicar lo aprendido respecto del incentro de un triángulo como solución a la problemática planteada en base a la construcción de las bisectrices.

Así, gran parte de las actividades están orientadas a las construcciones geométricas poniendo énfasis en la habilidad de argumentación y otras están relacionadas a la resolución de problemas de modo de desarrollar estrategias para resolverlos. Si bien responden a los aprendizajes esperados planteados, se deja fuera por completo lo que respecta al objeto matemático de Criterios de Congruencia de Triángulos, por lo que es incongruente lo que se pretende desarrollar junto con las actividades que finalmente se exponen.

1.2.2 Análisis de Textos Escolares

Además de revisar el programa de estudio y las bases curriculares en donde se enmarca el objeto matemático, realizaremos un análisis de dos textos escolares de años pasados con el objetivo de enriquecer la mirada respecto del contenido en cuestión.

- **Matemática 1º Medio, Texto del Estudiante (2014)**

En el siguiente texto, el objeto matemático de Criterios de Congruencia de Triángulos se encuentra en la Unidad 3, en las lecciones 35, 36, 37 y 38 (pág. 214 - 226), posterior a la revisión del contenido de "Transformaciones Isométricas". Allí se tratan los contenidos matemáticos de congruencia, figuras congruentes, criterios de congruencia de triángulos y sus aplicaciones y demostraciones utilizando congruencia, siguiendo el mismo orden en que fueron nombrados.

La unidad comienza con un taller para introducir el tópico utilizando las ideas vistas en la unidad anterior respecto de las isometrías. Se les solicita a los estudiantes dibujar un triángulo dadas las coordenadas de sus vértices en el plano cartesiano, para posteriormente mediante una traslación, obtener las coordenadas de un nuevo triángulo. Luego de ello, los estudiantes deben medir los lados y los ángulos de ambos triángulos con regla y transportador, comparando las medidas obtenidas para después registrarlas en una tabla.

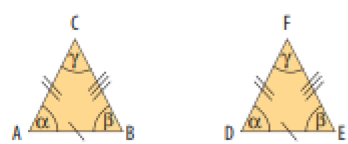
Posteriormente, se les pide a los estudiantes que apliquen una reflexión al triángulo obtenido, registrando nuevamente sus medias y comparándolas con los triángulos anteriores, para finalmente volver a aplicarle una isometría, esta vez una rotación, al nuevo triángulo obtenido, repitiendo el mismo procedimiento anterior.

Esta actividad tiene por objetivo que los estudiantes descubran que por medio de las transformaciones isométricas se pueden obtener figuras de igual forma y tamaño, esto es, con sus correspondientes lados y ángulos de igual medida. Si bien hay una buena intención al efectuar ese paso desde lo conocido a algo nuevo, la actividad se hace muy extensa al realizar el cálculo de una gran cantidad de elementos por medio de mediciones con regla y transportador. De este modo, el taller forzosamente trata de desarrollar aquella actividad como un problema, sin distar de lo que es un ejercicio, pues lo que principalmente se logra es comparar medidas y practicar el cálculo de áreas de triángulos en las isometrías, en contraste con la problematización para despertar el conocimiento nuevo en el estudiante.

Una vez que los estudiantes completan la tabla, el texto institucionaliza el tópico de la congruencia de figuras.

En resumen

Dos figuras geométricas se considerarán **congruentes** ($\cong$) si y solo si tienen la misma forma y tamaño. Utilizando transformaciones isométricas es posible obtener una figura congruente a otra dada. Se dirá que dos polígonos tienen igual forma y tamaño si todos los elementos de uno, es decir sus lados y ángulos son congruentes con los elementos correspondientes u homólogos del otro.



En este caso, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, lo que es distinto e incorrecto a $\Delta ABC \cong \Delta EFD$.

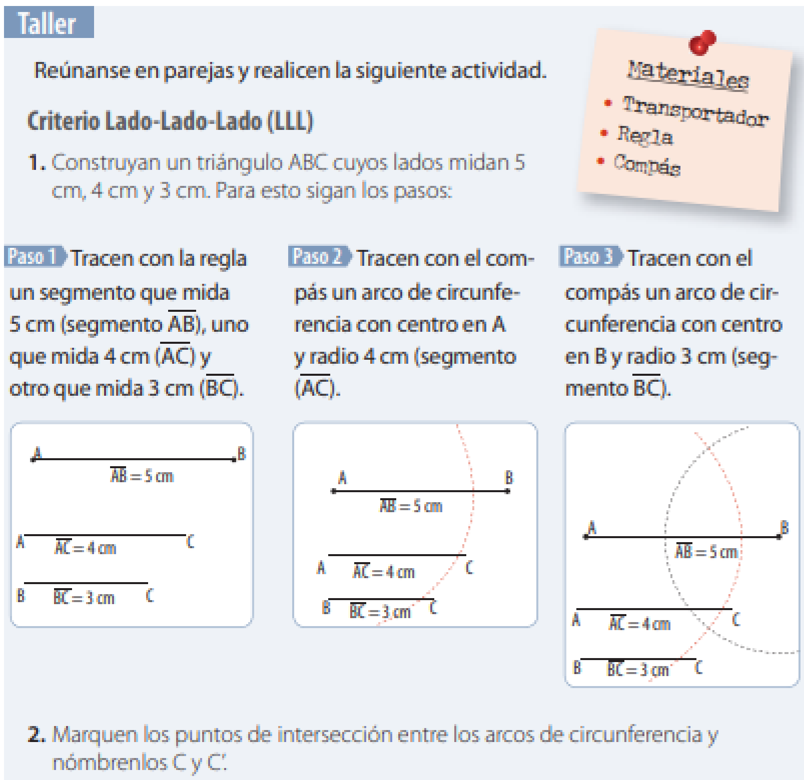
El lado $\overline{AB}$ es homólogo al lado $\overline{DE}$ y ambos tienen la misma medida, por lo tanto, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$.
El lado $\overline{BC}$ es homólogo al lado $\overline{EF}$ y ambos tienen la misma medida, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.
El lado CA es homólogo al lado FD y ambos tienen la misma medida, $CA \cong FD$.

El $\measuredangle BAC$ es homólogo al $\measuredangle EDF$ y ambos miden α, por lo tanto, $\measuredangle BAC \cong \measuredangle EDF$.
El $\measuredangle CBA$ es homólogo al $\measuredangle FED$ y ambos miden β, por lo tanto, $\measuredangle CBA \cong \measuredangle FED$.
El $\measuredangle ACB$ es homólogo al $\measuredangle DFE$ y ambos miden γ, por lo tanto, $\measuredangle ACB \cong \measuredangle DFE$.

Matemática 1º Medio, Texto del Estudiante (pág. 215)

Posterior a ello, el texto continuó con ejercicios para poner en práctica lo aprendido, identificando las partes correspondientes y congruentes entre figuras y reforzando lo estudiado en el tópico anterior identificando las isometrías aplicadas a distintas figuras. Los ejercicios tienen por objetivo que el estudiante afiance el contacto con el nuevo tema de estudio y desarrolle habilidades respecto de la argumentación y la comunicación al explicar por qué distintos pares de figuras son o no congruentes.

Luego, el texto realiza la introducción a los criterios de congruencia de triángulos, iniciando con el criterio de congruencia Lado – Lado – Lado. Para ello se realiza una actividad realizando la construcción de triángulos con el uso de regla y compás, la cual tiene por objetivo que los estudiantes den cuenta que con ciertos y mínimos elementos de la figura se puede determinar un único triángulo.



Taller

Reúnanse en parejas y realicen la siguiente actividad.

Criterio Lado-Lado-Lado (LLL)

1. Construyan un triángulo ABC cuyos lados midan 5 cm, 4 cm y 3 cm. Para esto sigan los pasos:

Materiales
- Transportador
- Regla
- Compás

Paso 1 Tracen con la regla un segmento que mida 5 cm (segmento $\overline{AB}$), uno que mida 4 cm ($\overline{AC}$) y otro que mida 3 cm ($\overline{BC}$).

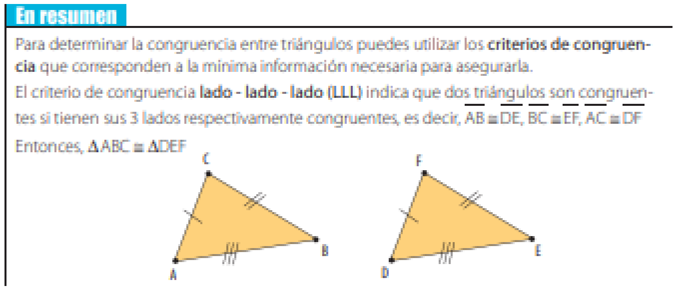
Paso 2 Tracen con el compás un arco de circunferencia con centro en A y radio 4 cm (segmento $\overline{AC}$).

Paso 3 Tracen con el compás un arco de circunferencia con centro en B y radio 3 cm (segmento $\overline{BC}$).

2. Marquen los puntos de intersección entre los arcos de circunferencia y nómbrenlos C y C'.

Matemática 1º Medio, Texto del Estudiante (pág. 218)

Si bien las actividades realizadas permiten construir el contenido por medio de la experimentación y la utilización de instrumentos, dependen fundamentalmente de las preguntas orientadoras que se realicen para poder hacer que los estudiantes se den cuenta que con los elementos dados se puede construir triángulos congruentes.


En resumen

Para determinar la congruencia entre triángulos puedes utilizar los **criterios de congruencia** que corresponden a la mínima información necesaria para asegurarla.

El criterio de congruencia **lado - lado - lado (LLL)** indica que dos triángulos son congruentes si tienen sus 3 lados respectivamente congruentes, es decir, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

Entonces, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Matemática 1º Medio, Texto del Estudiante (pág. 218)

El texto continúa con la enseñanza de los criterios de congruencia Lado – Ángulo – Lado y Ángulo – Lado – Ángulo. La introducción de estos no es distinta del modo en que el primer criterio fue construido, pues se realiza en base a construcciones geométricas en donde con los elementos involucrados en cada criterio se construyen parejas de triángulos para posteriormente comparar la medida de sus lados y sus ángulos.

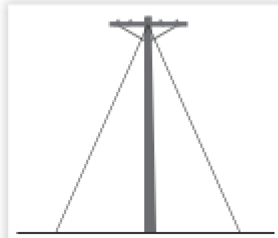
Posteriormente se realizan ejercicios de distinta índole con el objetivo de reforzar lo aprendido. Estos van desde la construcción de triángulos conocidas las medidas de algunos de sus elementos hasta la identificación de triángulos congruentes dadas ciertas ilustraciones, incluyendo inclusive una sección de resolución de problemas, lo que pone en práctica la utilización de los criterios ya mencionados desarrollando fuertemente la habilidad de argumentar.

Avanzando en la unidad, se da inicio a un nuevo tópico, el cual versa sobre demostraciones utilizando los criterios de congruencia. Para esto, se realiza una actividad que busca problematizar al estudiante con una situación de la vida real.

¿Cómo se realiza una demostración utilizando congruencia?

- El célebre matemático Euclides fue el primero en presentar la Geometría de una manera organizada y lógica, él demostró muchos teoremas mediante el razonamiento deductivo ¿Qué características tendrá este razonamiento?

Jaime está colocando un cableado para sostener un poste como muestra la figura. El poste forma con el suelo (horizontal) un ángulo recto.



Su amigo Mario le indica que si coloca el cable, que va en el suelo, dejando la misma longitud a ambos lados del poste, entonces los cables laterales que se unen en la parte superior del poste también serán de igual longitud. Jaime, un poco escéptico, le pide a su amigo que se lo demuestre antes de realizar el trabajo.

En realidad, lo que Mario debe demostrar es el teorema que dice: "Si en el ΔABC, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ y D es punto medio de $\overline{AB}$, entonces $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

Matemática 1º Medio, Texto del Estudiante (pág. 224)

A partir de aquella problematización viene la demostración. Si bien puede ser complejo mostrar una demostración formal, considerando que no es el contenido principal sino más bien un complemento respecto de lo ya visto, es bastante beneficioso abordar estas problemáticas para el desarrollo de habilidades.

Para realizar una demostración matemática de algún teorema o propiedad se pueden seguir los siguientes pasos.

Paso 1 **Identificar la hipótesis y la tesis del teorema.**

Hipótesis: En el ΔABC, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$.
D es punto medio de $\overline{AB}$.

Tesis: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

Paso 2 **Realizar la demostración y justificar cada afirmación.**

Afirmaciones	Justificaciones
Si $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ entonces $\measuredangle ADC$ y $\measuredangle BDC$ miden 90°.	Por hipótesis.
$\overline{CD}$ es lado común de $\measuredangle BDC$ y $\measuredangle ADC$.	Por construcción de ángulos.
Si D es punto medio entonces $\overline{AD} \cong \overline{BD}$.	Por hipótesis y por concepto de congruencia.
Los triángulos DCA y DCB son congruentes.	Por criterio LAL.
Entonces, $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.	Queda demostrado (q. e. d).

Por lo tanto, Jaime puede estar seguro que los cables laterales serán de igual longitud.

Matemática 1º Medio, Texto del Estudiante (pág. 224)

Lo anterior se fundamenta en lo que comenta Crespo, pues "A través de las demostraciones y argumentaciones lógicas, es posible evitar la tendencia de la algoritmización de la matemática en el aula, evitando el aprendizaje mecánico de fórmulas y la aplicación de estas de forma rutinaria. La consideración de las demostraciones como un tipo más de problemas a resolver, hace que los alumnos comprendan que simplemente se trata de procedimientos necesarios para la resolución de problemas y no vean al proceso de demostrar como algo destinado únicamente a los matemáticos. Los distintos tipos de argumentaciones en la clase de matemática permiten que los alumnos adquieran el dominio de formas de razonamiento que, si bien pueden aplicarlas inicialmente a un dominio formal, posteriormente les permitan enriquecer su manera de razonar ante problemáticas de diverso origen." (Crespo, 2005, pág. 29). Así, si bien el texto analizado introduce el tópico con una actividad bastante extensa, poco a poco comienza a construir el contenido para una vez luego de ello, poner en práctica lo aprendido tanto mediante la solución de ejercicios como con la resolución de problemas y demostraciones, lo cual se aleja de la lógica mecanicista y algorítmica mencionada con anterioridad, logrando promover fuertemente la habilidad de argumentación.

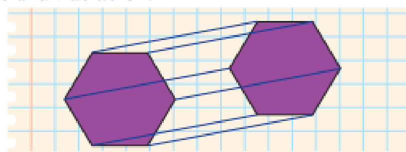
- **Matemática 1º Medio, Texto para el Estudiante (2012)**

En este segundo texto, el objeto matemático se encuentra en la Unidad 3: Geometría. Al igual que en el texto anterior, lo referente a congruencia, criterios de congruencia de triángulos y sus aplicaciones geométricas, se encuentra después de lo referido a las transformaciones isométricas.

El capítulo comienza reflexionando acerca del concepto de igualdad, comentando que, cuando hablamos de que dos cosas son iguales, estamos abusando del lenguaje, pues cuando dos objetos son iguales estos deben ocupar el mismo lugar en el espacio. Así, se deja en claro que este concepto de igual refiere a que si se ubica un objeto sobre otro, calzan de manera perfecta.

En base a ello, se introduce la definición de congruencia respecto a segmentos y figuras. Es menester mencionar que, en similitud con el texto analizado anteriormente, la definición de congruencia vuelve a tener conexión con la isometría.

En matemáticas pasa lo mismo: si dibujas dos hexágonos regulares de lado 10 cm cada uno, en una hoja de papel, no pueden ser iguales, pues están en lugares distintos de la hoja, pero con una isometría es posible transformar uno en el otro. En este caso la isometría es una traslación.



En matemáticas, cuando existe una isometría (traslaciones, rotaciones, reflexiones o composición de ellas) que transforma una figura en otra, no decimos que son iguales, sino que son **congruentes**.

Dos figuras son congruentes si una es la imagen de la otra, vía una isometría.

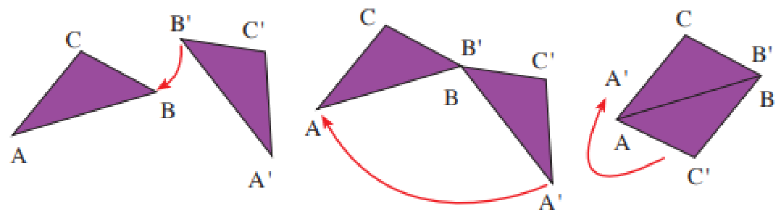
Como las isometrías preservan medidas de ángulos y segmentos, entonces si dos figuras son congruentes, las medidas de sus ángulos y segmentos son las mismas.

Matemática 1º Medio, Texto del Estudiante (pág. 159)

Posteriormente se agregan definiciones de congruencia de otros objetos como rectángulos y circunferencias mediante el uso de isometrías como la traslación, lo cual es positivo pues amplía el horizonte respecto de otras figuras, activando así otros conocimientos previos. Además, constantemente se ejemplifican las situaciones descritas utilizando dibujos, lo cual contribuye a la comprensión del tópico de congruencia de manera visual.

Hacia el final de esta introducción, se presenta la definición de congruencia de triángulos bastante similar a las ya vistas, haciendo uso de la reflexión, la rotación y la traslación.

Ahora, estudiemos el caso de los triángulos. Si dos triángulos son congruentes, entonces sus lados y ángulos miden lo mismo. A la inversa, si tenemos dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ tales que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, y además $m(\angle ABC) = m(\angle A'B'C')$, $m(\angle ACB) = m(\angle A'C'B')$, y $m(\angle CAB) = m(\angle C'A'B')$



Vía una traslación llevamos el punto B' en el punto B. Como $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, una rotación con centro en B, permite llevar A' en A. Luego, si es necesario, vía una reflexión entorno al eje $\overline{AB}$, se obtiene que C' calza con C. Luego los triángulos son congruentes. Entonces,

Dos triángulos son congruentes si y sólo si
sus lados y ángulos homólogos miden lo mismo.

Matemática 1º Medio, Texto del Estudiante (pág. 162)

Posterior a la institucionalización del contenido, se presenta una página con una serie de ejercicios para practicar lo aprendido. En la mayoría de los ejercicios se potencia la habilidad argumentación, pues además de calcular información respecto de las medidas de los lados y ángulos de distintas figuras, se realizan preguntas abiertas que sirven para que los estudiantes reflexionen, comparen y discutan sus respuestas, privilegiando el trabajo en equipo y en consecuencia promoviendo un aprendizaje colaborativo.

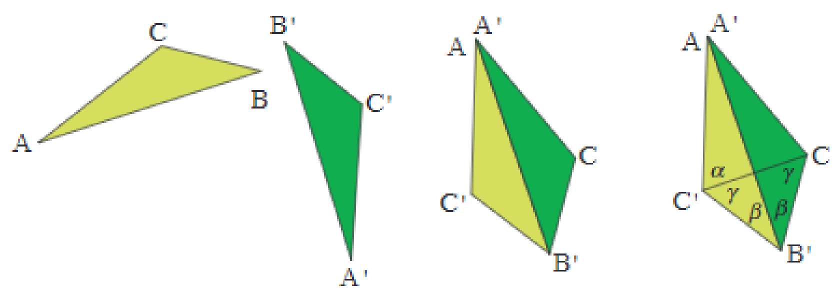
Luego, el texto da inicio al siguiente capítulo, enfocado específicamente en los criterios de congruencia de triángulos. Para esto, se comienza utilizando la definición respecto del conocimiento de los seis elementos de un triángulo, es decir, sus tres lados y tres ángulos, para poder conjeturar que dos triángulos son congruentes. Así, se comienza a reflexionar acerca de cuáles de estos elementos se puede prescindir para hacer esa conjetura. Aquella es una manera de tratar el tópico, ya que hace ver desde un principio el funcionamiento de los criterios de congruencia, pues los estudiantes darán cuenta de para qué sirven estos, siendo la mínima información posible para poder establecer que dos triángulos son congruentes.

En una primera instancia, se reducen de seis a cinco los elementos necesarios, pues al tener la medida de los dos ángulos de un triángulo, la del tercero se desprende mediante la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Por lo tanto, el texto concluye que, si dos triángulos tienen dos ángulos y tres lados de igual medida, son congruentes.

Luego de ello, se continúa ahondando respecto de si podemos reducir la cantidad de elementos para establecer la congruencia entre dos triángulos, para lo cual el texto introduce una demostración visual. En ella, se quiere probar que dos triángulos son congruentes si tres de sus lados y un ángulo son congruentes. Si bien, la demostración es compleja, está explicada y lograda para el nivel escolar, logrando entenderse de manera visual.

Entonces, hemos quitado una información redundante, ¿podremos quitar otra? ¿Bastará tres lados iguales y un ángulo igual para que dos triángulos sean congruentes? Investiguemos.

Consideremos dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, tales que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, y además $\angle ABC$ mide lo mismo que $\angle A'B'C'$.



Como $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, existe una isometría que lleva A en A' y B en B'. Tracemos ahora el segmento $\overline{CC'}$, Por la congruencia de los lados, se tiene que los triángulos. $\Delta CBC'$ y $\Delta CAC'$ son isósceles, entonces los ángulos $\angle CC'A$ y $\angle C'CA$ miden lo mismo. Del mismo modo los ángulos $\angle CC'B$ y $\angle C'CB$ miden lo mismo.

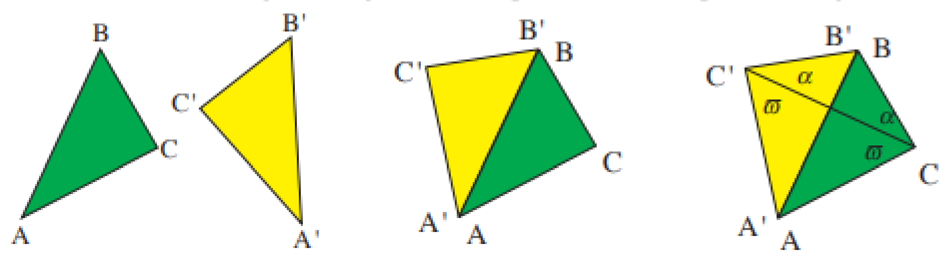
Por lo tanto, el ángulo $\angle ACB$ mide lo mismo que el ángulo $\angle A'C'B'$, entonces los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, tienen lados que miden lo mismo, y dos ángulos que miden lo mismo. Por lo tanto los triángulos son congruentes. Resumiendo, tenemos:

Si la medida de los lados de dos triángulos y la medida de uno de sus ángulos son iguales, entonces los triángulos son congruentes.

Matemática 1º Medio, Texto del Estudiante (pág. 164)

También, se hace una demostración muy similar para demostrar que solo se necesita saber que los tres lados de dos triángulos son congruentes para afirmar la congruencia entre aquellos triángulos, lo cual contribuye a la idea comentada con anterioridad, es decir, que los criterios de congruencia buscan utilizar la mínima cantidad de elementos para conjeturar la congruencia entre dos triángulos. Luego de ello, se define el criterio de congruencia Lado – Lado – Lado.

Entonces, nuestra conjetura es que si dos triángulos tienen los tres lados de igual medida entonces los triángulos son congruentes. Investiguemos este caso. Consideremos dos triángulos de iguales medidas, ΔABC y $\Delta A'B'C'$, tales que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$. Por lo que vimos en la página anterior, basta mostrar que tienen al menos un ángulo de igual medida para demostrar que son congruentes.



Mediante una isometría haremos coincidir los vértices A con A' y B con B', igual que en el caso anterior, trazando el segmento CC', formamos dos triángulos isósceles, a saber son, $\Delta CC'A$ y $CC'B$. Por lo tanto los ángulos $\angle CC'A$ mide lo mismo que el ángulo $\angle C'CA$ y por la misma razón los ángulos $\angle C'CB$ y $\angle CC'B$ miden lo mismo. Por lo tanto los ángulos $\angle ACB$ y $\angle A'C'B'$ miden lo mismo, por lo tanto los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, son congruentes.

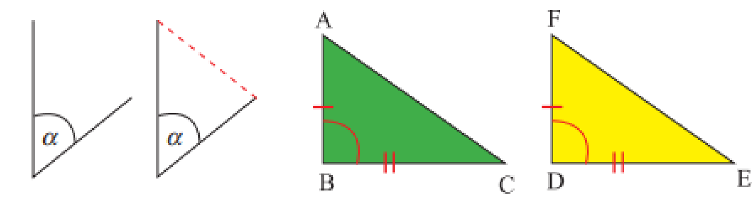
Matemática 1º Medio, Texto del Estudiante (pág. 165)

Posterior a la definición del criterio de congruencia Lado – Lado – Lado, se introducen los criterios Lado – Ángulo – Lado y Ángulo – Lado – Ángulo, sin realizar sus demostraciones, comentando que un estudiante interesado debiera averiguarlas. Aquella acción es bastante positiva para alimentar la curiosidad de los estudiantes a ir más allá de lo expuesto, sumado a los registros pictóricos que ayudan a comprender los criterios de mejor manera. Además, con una definición escrita y representaciones simbólicas y geométricas que ayudan a comprender la definición.

Teorema (Criterio LAL)

Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes congruentes y el ángulo que forman los lados congruentes mide lo mismo, entonces los triángulos son congruentes.

Este criterio se conoce como "**lado-ángulo-lado**" y lo que postula es que si tú tienes dos palitos y los unes por uno de sus extremos, y los abres o lo cierras de manera de formar un ángulo dado, entonces existe una sola forma de cerrar el triángulo. Es decir, la distancia entre los extremos no unidos, está totalmente determinada.



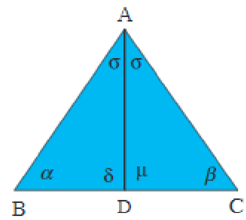
Si $\overline{AB} \cong \overline{FD}$, $\overline{BC} \cong \overline{DE}$ y los ángulos $\angle ABC$ y $\angle FDE$ miden lo mismo, entonces los triángulos ΔABC y ΔFDE son congruentes.

Matemática 1º Medio, Texto del Estudiante (pág. 166)

Luego se repite la instancia de ejercitación para practicar lo aprendido. En ellos, el estudiante debe utilizar lo aprendido identificando la congruencia entre ciertos triángulos dados, fundamentando en base a qué criterio lo son. Otras preguntas van enfocadas al descubrimiento de ciertas propiedades que cumplen ciertas figuras, como el identificar cuántos ejes de simetría tienen los triángulos escaleno, isósceles y equilátero o si las diagonales de un rombo se dimidian. Aquellas actividades son beneficiosas pues sirven al estudiante para desprender o comprobar diferentes propiedades mediante la utilización de los criterios de congruencia.

Para finalizar, el texto muestra algunas aplicaciones de los criterios de congruencia en la geometría. Uno de los ejemplos que se muestra gira en torno a que, en un triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo opuesto a la base es transversal de gravedad y altura.

Como $\overline{AD}$ es bisectriz, se tiene que el ángulo $\angle BAD$ mide lo mismo que el ángulo $\angle DAC$. Entonces por el criterio LAL, se tiene que los triángulos BDA y CAD son congruentes. Por lo tanto $\overline{BD} \cong \overline{DC}$, luego D es punto medio de $\overline{BC}$. Es decir, $\overline{AD}$ es transversal de gravedad. También por congruencia, podemos afirmar que δ y μ miden lo mismo y como son suplementarios, se tiene que miden 90º cada uno de ellos, por lo tanto $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, es decir $\overline{AD}$ es altura del triángulo.



Matemática 1º Medio, Texto del Estudiante (pág. 169)

Como se comentó anteriormente, el incluir aplicaciones de este tipo favorece el descubrimiento y la constatación de propiedades ya conocidas, pero hay que cuidar el lenguaje y las orientaciones frente a este tipo de situaciones, pues es posible notar que el texto comienza a ir mucho más rápido en sus explicaciones, lo que puede provocar la aparición de obstáculos didácticos desencadenando en algunos estudiantes la falta de comprensión de la aplicación. También hay ausencia de simbología esencial y existe un abuso del lenguaje, respecto a la frase “el ángulo ∡BAD” o “los triángulos BDA y CAD son congruentes”, lo cual puede mermar en la construcción de lenguaje matemático de los estudiantes.

1.3 Objetivos

Objetivo General

- Caracterizar las acciones utilizadas por los estudiantes al argumentar en torno al contenido de criterios de congruencia de triángulos.

Objetivos Específicos

- Realizar un diagnóstico para determinar en qué nivel del Modelo de Van Hiele se encuentran los estudiantes.

- Elaborar un diseño didáctico en torno al contenido de criterios de congruencia de triángulos.

- Aplicar el diseño didáctico a estudiantes de primero medio.

- Analizar las respuestas de los estudiantes en base a la secuencia de clases implementada.

Capítulo II
OBJETO MATEMÁTICO

En este capítulo se presentará el objeto matemático en estudio, es decir, la congruencia y los criterios de congruencia de triángulos. En primera instancia, se presentarán algunas ideas de su epistemología, realizando un análisis histórico. Posteriormente, se presentará el estatus actual de los criterios de congruencia de triángulos, los cuales serán útiles para la construcción del diseño de clases.

2.1 Ideas de la epistemología del objeto matemático

Para Sánchez (2012), la obra “Los Elementos de Euclides”, llevada a cabo por Euclides en el año 300 a.C, es quizá el libro más exitoso de la matemática en la historia, pues fue un pilar fundamental para el desarrollo del área de la geometría y de la matemática en general al presentar un compendio de ésta que predominó por siglos, siendo junto a La Biblia y Don Quijote de la Mancha uno de los libros más estudiados de todos los tiempos.

Aquella obra es desarrollada en 13 libros, profundizando en temas como la geometría, la aritmética y el álgebra. Cada libro presenta una serie de definiciones y teoremas con el objetivo de darle una estructura a la obra, sin embargo, el primer tomo presenta, además, 5 postulados y 5 nociones comunes.

De acuerdo con Euclides (1991), las nociones comunes son:

1. Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí.
2. Y si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales
3. Y si de dos cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.
4. Y las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.

5. Y el todo es mayor que la parte.

Aquí es posible apreciar las primeras aproximaciones al concepto de congruencia en relación con lo que Euclides refiere como cosas iguales, lo que queda expresado directamente en la cuarta noción, respecto de establecer la igualdad entre dos cosas cuando estas coinciden. Acerca de esto, Giovannini comenta que "(…) en estos primeros libros todas las figuras planas son estudiadas apelando a una noción no definida de congruencia, que intenta expresar que dos figuras (segmentos, ángulos, áreas) poseen el mismo "tamaño"" (Giovannini, 2015, pág. 23). Ya en la proposición 4 del mismo libro, emerge una de las primeras aproximaciones de lo que hoy conocemos como el criterio de congruencia Lado – Ángulo – Lado:

"Si dos triángulos tienen dos lados respectivos iguales, y tienen los ángulos comprendidos iguales, tendrán también las respectivas bases iguales, y un triángulo será igual al otro, y los ángulos restantes, a saber, los subtendidos por lados iguales, serán también iguales respectivamente" (Euclides, 1991, pág. 206).

Nuevamente, Euclides no alude al concepto de congruencia, sin embargo, mediante aquella proposición establece la primera aproximación al criterio antes mencionado, el cual fundamenta de manera intuitiva:

"Porque sobrepuesto el triángulo ABC al DEF, y colocado el punto A sobre el D, y la reda AB sobre la DE, caerá también el punto B sobre el E, por ser la línea AB igual a la DE y por consiguiente caerá del mismo modo la reda AC sobre la DF, pues el ángulo BAC es igual al EDF por cuya razón el punto C caerá sobre el F, siendo la reda AC igual a la DF" (Euclides, 1991, pág. 206). Es menester comentar que Euclides usa el concepto de base para referirse al tercer lado cuando ya han sido mencionados los otros dos.

Más adelante, en la proposición 8, se aprecia una nueva aproximación, pero esta vez, hacia lo que hoy conocemos como el criterio de congruencia Lado – Lado – Lado:

“Si dos triángulos tienen los dos lados del uno respectivamente iguales a los dos lados del otro, y las dos bases iguales; tendrán también iguales los ángulos comprehendidos por los lados.” (Euclides, 1991, pág. 212). Nuevamente, el fundamento de aquella proposición es similar a la anterior; si se hacen corresponder los vértices de ambos triángulos, estos coincidirán, por ende, serán iguales.

En base a lo comentado por Sánchez (2015), la estructura usada por Euclides corresponde a un sistema axiomático, es decir, se define el objeto a estudiar, se fijan principios básicos conocidos como axiomas y a partir de ellos se deducen las proposiciones de la teoría axiomatizada. Aquello fue de tal importancia que sirvió como base de la geometría en aquella época y perduró por más de 2000 años.

Sin embargo, según Morales, “Los Elementos de Euclides en la actualidad no resolverían satisfactoriamente el problema de demostrar en geometría, porque el número de definiciones, axiomas, postulados que sirven como base para una demostración rigurosa de todos y cada uno de los teoremas que aparecen en los Elementos es insuficiente y algunas demostraciones presentan suposiciones tácitas” (Morales & Velásquez, 2007, pág. 43). Por ello, durante fines del siglo XIX surgió la necesidad de elaborar un nuevo sistema axiomático para dar solución a las debilidades planteadas por Euclides. Aquel trabajo fue llevado a cabo por el matemático David Hilbert en su obra “Fundamentos de la geometría”, en la cual analiza la axiomatización realizada por Euclides dando lugar a un nuevo tratamiento de la Geometría Euclidiana.

Así, Hilbert (1991) menciona cinco grupos de axiomas en los cuales se sustenta esta geometría:

- Axiomas de Enlace

- Axiomas de Orden
- Axiomas de Paralelismo
- Axiomas de Congruencia
- Axiomas de Continuidad

De este modo, Hilbert comenta que “Los segmentos están entre sí en ciertas relaciones, para cuyas descripciones sirven las palabras congruente o igualdad” (Hilbert, 1991, pág. 13), estableciendo posteriormente cinco axiomas de congruencia. Uno de ellos establece lo siguiente:

“Si dados dos triángulos ABC y A’B’C’ se satisfacen las congruencias AB ≅ A’B’, AC ≅ A’C’ y ∡BAC ≅ ∡B’A’C’, entonces las congruencias:

$$\measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C' \text{ y } \measuredangle ACB \cong \measuredangle A'C'B'$$

Se satisfacen también.” (Hilbert, 1996, pág. 16)

Así, en base a este axioma, Hilbert desarrollaría las demostraciones de los teoremas de congruencia de triángulos.

2.2 Objeto Matemático

Tras el surgimiento de la nueva axiomatización de la geometría propuesta por Hilbert, muchos geómetras tuvieron la oportunidad de elaborar sus obras propias influenciados por este nuevo tratamiento. En vista de ello, para abordar el estatus actual de los criterios de congruencia de triángulos, nos enfocaremos en el trabajo realizado por Edwin Hemmerling.

Acorde con Hemmerling (2009), el estatus actual de los criterios de congruencia de triángulos es el siguiente:

Postulado número 17 (el postulado L.A.L.). Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo que forman en uno son, respectivamente, congruentes a los dos lados y el ángulo que forman en el otro.

Este postulado establece que, en la figura 4.9, si $\overline{AB} \cong \overline{ED}$≅, $\overline{AC} \cong \overline{EF}$ y ∡A ≅ ∡E, entonces ΔABC ≅ ΔDEF

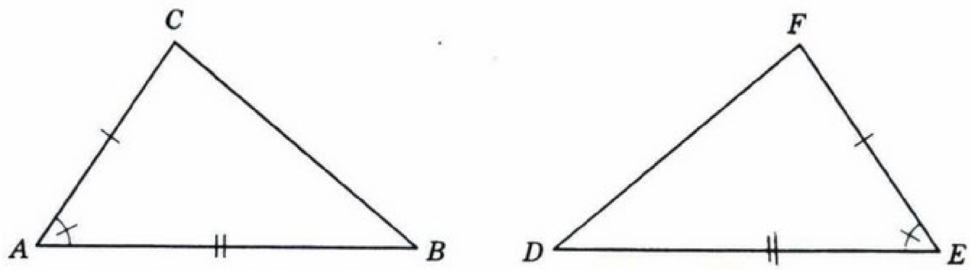
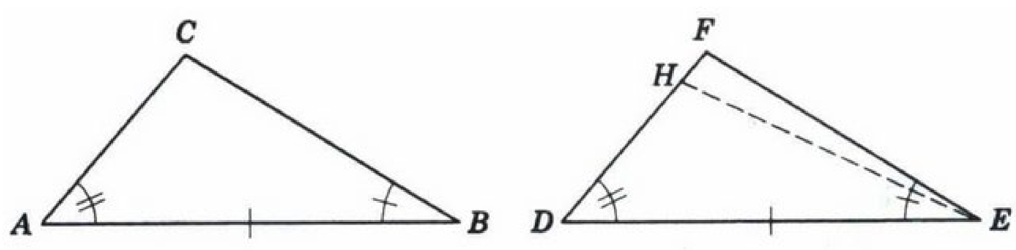


Figura 4.9.

Extraído de “Geometría Elemental” (Hemmerling, 2009, pág. 129)

Teorema 4.14

4.25. Si dos triángulos tienen dos ángulos y el lado incluido de uno congruentes a los dos ángulos y el lado incluido correspondientes del otro, los triángulos son congruentes.



Teorema 4.14.

Extraído de “Geometría Elemental” (Hemmerling, 2009, pág. 136)

Hipótesis: ΔABC y ΔDEF con ∡A ≅ ∡D, ∡B ≅ ∡E, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

Conclusión: ΔABC ≅ ΔDEF

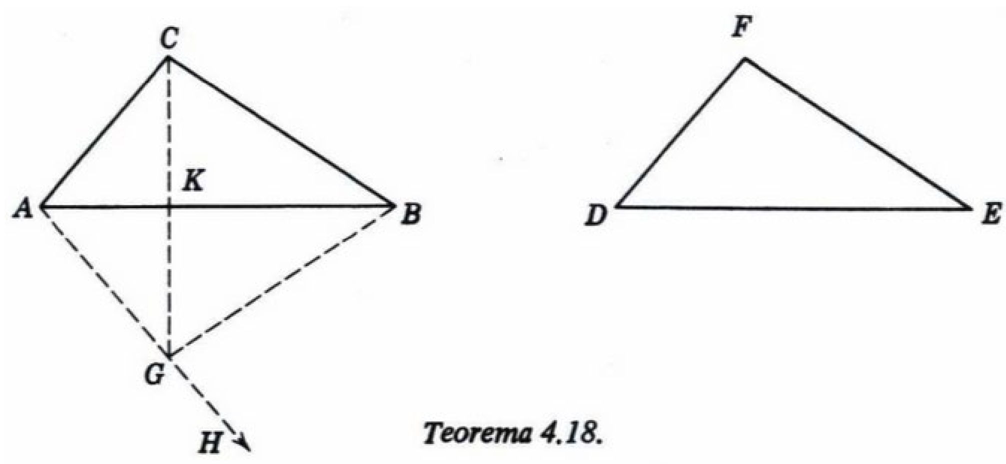
Demostración:

Proposiciones	Razones
1. $\underline{AB} \cong \underline{DE}$, ∡A ≅ ∡D	1. Hipótesis
2. Sobre $\overrightarrow{DF}$ existe un punto H tal que m ($\underline{DH}$) = m ($\underline{AC}$)	2. Postulado de la situación de los puntos
3. Trazar $\underline{HE}$	3. Dos puntos determinan una recta.
4. ΔABC ≅ ΔDEH	4. L.A.L.
5. ∡DEH ≅ ∡B	5. Los ángulos correspondientes de los triángulos congruentes son mutuamente congruentes.
6. ∡B ≅ ∡E	6. Hipótesis.
7. ∡DEH ≅ ∡E	7. La congruencia de los triángulos es transitiva.
8. $\underline{EH} \cong \underline{EF}$ son el mismo rayo.	8. Postulado de la construcción de los ángulos.
9. H = F	9. Dos rectas se intersectan cuando más en un punto.
10. ΔABC ≅ ΔDEF	10. Reemplazando H de la proposición 4 por F (de la proposición 9)

Se observará que al trazar la figura para la demostración del teorema 4.14, el punto H se muestra entre D y F. El punto podría trazarse con igual propiedad, con F entre H y D. Esto no alteraría la validez de la demostración. La abreviatura para la proposición de este teorema es A.LA.

Teorema 4.18

4.35. Si los lados de un triángulo son congruentes a los del otro, los triángulos son congruentes entre sí.



Extraído de “Geometría Elemental” (Hemmerling, 2009, pág. 149)

Hipótesis: ΔABC y ΔDEF con $\underline{AB} \cong \underline{DE}$, $\underline{BC} \cong \underline{EF}$, $\underline{AC} \cong \underline{DF}$

Conclusión: ΔABC ≅ ΔDEF.

Demostración:

Proposiciones	Razones
1. $\underline{AB} \cong \underline{DE}$	1. Hipótesis.
2.- Existe un rayo $\overrightarrow{AH}$ tal que ∡BAH ≅ ∡EDF, y tal que C y G están en lados opuestos de $\underline{AB}$.	2. Postulado de la construcción de los ángulos.
3.- Existe un punto G sobre $\overrightarrow{AH}$ tal que $\underline{AG} \cong \underline{DF}$	3. Postulado de la situación de los puntos
4. Trazar el segmento $\underline{BG}$.	4. Postulado 2.
5. ΔABG ≅ ΔDEF.	5. L.A.L.

6. $\underline{AC} \cong \underline{DF}$.	6. Hipótesis.
7. $\underline{AG} \cong \underline{AC}$	7. Teorema 3.4.
8. $\underline{BG} \cong \underline{EF}$	8. Las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.
9. $\underline{BC} \cong \underline{EF}$	9. Hipótesis.
10. $\underline{BG} \cong \underline{BC}$	10. Teorema 3.4.
11. Trazar el segmento CG	11. Postulado 2.
12. ∡ACK ≅ ∡AGK.	12. Teorema 4.16.
13. ∡BCK ≅ ∡BGK.	13. Teorema 4.16.
14. ∡ACB ≅ ∡AGB.	14. Teorema de la adición de los ángulos.
15. ∡AGB ≅ ∡DFE.	15. Razón 8.
16. ∡ACB ≅ ∡DFE	16. La congruencia de los ángulos es transitiva.
17. ΔABC ≅ ΔDEF	17. L.A.L.

Si bien estas demostraciones no deben ser abordadas en el aula debido a su alto nivel de abstracción, es esencial realizar un análisis exhaustivo de ellas, pues pueden dictar pautas sobre cómo presentar el tópico de una manera visual y constructiva, mediante el uso de regla y compás o de software educativo, para así evitar caer en errores y obstáculos que pueden entorpecer la enseñanza aprendizaje del tópico en cuestión.

Capítulo III
MARCO DE REFERENCIA

Dado que esta investigación esta realizada en torno al tópico de criterios de congruencia de triángulos, enmarcado en el eje de geometría, trabajaremos con el Modelo de Van Hiele, el cual es un modelo para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría que explica cómo se desarrolla el razonamiento geométrico organizándolo en una serie de niveles. Así, se ubica al estudiante en un nivel determinado y a medida que este vaya progresando en su aprendizaje, avanza a un nivel superior.

De acuerdo con Gamboa y Vargas (2003), los niveles son los siguientes:

- Nivel 1: Reconocimiento o Visualización

El estudiante reconoce las figuras como un todo, no pudiendo identificar sus partes ni tampoco sus propiedades. Relaciona las figuras con elementos de su entorno sin usar un lenguaje matemático y geométrico para referirse a ellas.

- Nivel 2: Análisis

El estudiante puede reconocer y analizar las partes y las propiedades de distintas figuras, sin embargo, no es capaz de hacer relaciones entre las propiedades de familias de figuras. Establece propiedades a través de la manipulación y la experimentación, pero no puede elaborar definiciones.

- Nivel 3: Deducción informal u orden

El estudiante reconoce y comprende las propiedades de las figuras, estableciendo relaciones entre familias de ellas. Identifica las condiciones que deben cumplir, por lo cual es capaz de elaborar definiciones, sin embargo, no posee un razonamiento geométrico formal, no pudiendo entender las demostraciones y el sistema axiomático de las matemáticas.

- Nivel 4: Deducción formal

El estudiante es capaz de entender demostraciones en su totalidad, entendiendo el sistema axiomático de las matemáticas. Puede deducir propiedades de otras, reconociendo cómo es posible llegar al mismo resultado en base a procesos distintos, no obstante, no es capaz de dimensionar la necesidad del rigor en los razonamientos.

- Nivel 5: Rigor

En este nivel el estudiante comprende la consistencia de los axiomas de los fundamentos de la geometría, reconociendo la necesidad del rigor en sus sistemas deductivos. Dado el alto grado de abstracción de este nivel, solo estudiantes universitarios logran desarrollarlo.

Para avanzar de un nivel a otro, acorde con Gamboa y Vargas (2003), el Modelo de Van Hiele propone cinco fases de aprendizaje, las cuales deben orientar al docente a realizar actividades ideales para que el estudiante sea capaz de pasar de un nivel a otro. Las fases de aprendizaje son las siguientes:

- Fase 1: Información

En esta fase el docente debe identificar los conocimientos previos de los estudiantes para saber en qué nivel de razonamiento geométrico se encuentran, junto con introducirlos al nuevo tema de estudio.

- Fase 2: Orientación dirigida

En esta fase el docente debe guiar a los estudiantes de manera prolija, pues debe seleccionar las actividades y ejemplos adecuados para que el estudiante comprenda las bases del nuevo conocimiento. Esto es esencial, pues constituye el centro del aprendizaje, ya que va a lograr que el estudiante sea capaz de transitar de un nivel a otro.

- Fase 3: Explicitación

En esta fase los estudiantes deben discutir y comunicar lo aprendido, tanto con el docente como con sus pares. No se produce aprendizaje de contenidos, sino que el afianzar lo visto con anterioridad, por lo cual se debe perfeccionar el vocabulario y el lenguaje matemático ya aprendido del nivel.

- Fase 4: Orientación Libre

En esta fase se debe consolidar el aprendizaje llevado a cabo en las fases anteriores, de manera que el docente debe proponer ejercicios más complejos, evitando prestar ayuda a los estudiantes para resolver los problemas.

- Fase 5: Integración

En esta última fase los estudiantes deben completar el aprendizaje realizado, integrando los conocimientos que acaban de adquirir a los que tenían anteriormente. El docente debe promover la realización de resúmenes para organizar mejor el contenido, junto con propiciar actividades que den cuenta solo de reforzar lo ya visto, sin originar conocimientos nuevos.

Dado que el objetivo de nuestra investigación es saber qué acciones utilizan los estudiantes al argumentar, el Modelo de Van Hiele nos ayudará a llevar a cabo nuestros objetivos. En primera instancia y mediante la información que recogeremos de ellos respecto a los conocimientos que tienen y como argumentan respecto al tópico de la congruencia de triángulos, los clasificaremos en uno de los niveles de Van Hiele. Luego de ello realizaremos una secuencia didáctica con el objetivo de que los estudiantes puedan transitar de un nivel a otro con ayuda de las características de cada una de las fases, contribuyendo en la toma de conocimiento de los estudiantes respecto del contenido de criterios de congruencia de triángulos.

Finalmente, se realizará una evaluación con el objetivo de ubicar a los estudiantes en un nivel del modelo, junto con analizar las estrategias argumentativas que llevaron a cabo y contrastar los resultados y la información con la recabada durante el inicio de la secuencia didáctica.

Capítulo IV
ENFOQUE METODOLÓGICO

Dado que la presente investigación es de tipo cualitativa, pues está orientada a saber de qué manera argumentan los estudiantes respecto de una secuencia de enseñanza didáctica de criterios de congruencia de triángulos, se deben utilizar metodologías que sirvan de orientación y guía para la implementación de la secuencia de enseñanza aprendizaje y los análisis que se puedan llevar a cabo. Así, se utilizarán los principios de la Ingeniería Didáctica (ID) y la Metodología de Estudio de Clases (MEC).

4.1 Elementos de la Ingeniería Didáctica

La ingeniería didáctica tiene su origen en la didáctica de la matemática francesa durante la década de los 80 y se utiliza como una metodología de investigación y como productor de proyectos de enseñanza aprendizaje, la cual para objeto de esta investigación contribuirá en la realización de una secuencia de clases de criterios de congruencia de triángulos para los cursos de 1º Medio A y 1º C de la escuela Premilitar Capitán Ignacio Carrera Pinto.

Esta investigación está situada en un nivel de micro ingeniería didáctica. Al respecto, De Faria comenta que “Las investigaciones a este nivel son las que tienen por objeto el estudio de un determinado tema. Ellas son locales y toman en cuenta principalmente la complejidad de los fenómenos en el aula.” (De Faría, 2006, pág. 3).

En base a De Faría (2006), la ingeniería didáctica consta de cuatro fases:

- Primera Fase: Análisis preliminares

Para llevar a cabo una secuencia didáctica en base a la Ingeniería didáctica, en primera instancia se debe indagar respecto del objeto matemático de manera epistemológica, didáctica y curricular. Para este trabajo, se realizó un análisis de la epistemología respecto de la congruencia, junto con análisis didácticos respecto del contenido de criterios de congruencia de triángulos y su evolución en los textos de estudio de los últimos años, todo aquello en función de los objetivos de esta investigación.

- Segunda Fase: Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas

En esta fase se comenzó a trabajar en el diseño de la secuencia de enseñanza aprendizaje, realizando así un análisis a priori sobre las diversas situaciones claves que consideramos importantes durante las clases, teniendo en cuenta el tipo de respuesta que podrían realizar, los diferentes obstáculos que podrían surgir, los errores que podrían cometer y la manera en cómo podríamos usarlos como oportunidades de aprendizaje y las estrategias que podrían llevar a cabo para abordar ciertas situaciones.

- Tercera Fase: Experimentación

En esta fase se llevó a cabo la implementación de la secuencia de enseñanza aprendizaje en una modalidad virtual en base a las decisiones y cuestionamientos realizados en el análisis a priori, lo que nos proporcionó información para más tarde poder reflexionar y ahondar en el diseño de nuestra secuencia de clases.

- Cuarta Fase: Análisis a posteriori y evaluación

En esta última fase se extraen conclusiones respecto de la investigación realizada, ya que "se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación, es decir, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en el aula o fuera de ella" (De Faría, 2006, pág. 5). Aquí contrastaremos los análisis a priori y a posteriori y examinaremos los resultados provenientes de las producciones que los estudiantes han realizado a lo largo de la secuencia, con el objetivo de dar respuesta a nuestra pregunta de investigación.

4.2 Estudio de Clases

Junto con la ingeniería didáctica, también se utilizó la metodología del Estudio de Clases, que consiste en "un proceso mediante el cual los profesores trabajan en común para mejorar progresivamente sus métodos pedagógicos, examinándose y criticándose mutuamente las técnicas de enseñanza." (Mena, 2006, pág. 1).

Para ello, el mismo autor nos comenta que "Consta de tres aspectos bien definidos, que se realizan de manera reiterada, de manera de mejorar progresivamente su diseño y ejecución: un grupo de profesores prepara una clase (o conjunto de clases), luego uno de ellos la enseña públicamente –asisten no sólo quienes la prepararon– y finalmente se hace una sesión de revisión y crítica." (Mena, 2006, pág. 2).

Tomando aquellos aspectos, durante nuestra secuencia didáctica realizaremos una clase la cual será grabada. En ella se presenta un problema que será objeto de discusión por parte de los estudiantes y lo cual nos va a permitir ahondar en qué tipo de estrategias utilizan para llegar a la solución de este. Posteriormente y acorde con lo comentado acerca de la Metodología de Estudio de Clases, se expondrá el registro de la implementación llevada a cabo con nuestra profesora y nuestros compañeros en una sesión del curso de Seminario de Título, con el objetivo de discutir y reflexionar respecto de las acciones realizadas y el problema en particular, de modo de obtener retroalimentaciones que nos sirvan para nuestra investigación.

CAPÍTULO V
SECUENCIA DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE

Para poder llevar a cabo la investigación detallada durante los capítulos anteriores, es obligatorio transcurrir por un proceso de reflexión para la elaboración y diseño de clases, junto con las respectivas actividades y problemas en cada una de ellas. Así, este capítulo está orientado a detallar la secuencia de enseñanza aprendizaje presentando las planificaciones realizadas junto con los objetivos de las sesiones de clase, indicando los tiempos de las fases de inicio, desarrollo y cierre junto con lo realizado en cada una de ellas, los análisis de las actividades y problemas claves, entre otros.

5.1 Descripción de la secuencia enseñanza aprendizaje.

La secuencia de aprendizaje fue pensada para el nivel de enseñanza de primero medio, específicamente para los cursos primero medio A y primero medio C de la escuela premilitar capitán Ignacio Carrera Pinto, cuyos estudiantes tienen entre 13 y 16 años. Además, para elaborar la secuencia de clases se tuvo en cuenta la metodología de trabajo del colegio, la cual era sólo virtual, utilizando la plataforma de videollamadas Meet para realizar las clases.

En base a ello, la secuencia se llevó a cabo en cinco clases de una hora pedagógica, junto con la realización de una evaluación intermedia entre la cuarta y la quinta sesión. El tópico por estudiar son los Criterios de Congruencia de Triángulos, que de acuerdo con lo analizado en el capítulo 1, se encuentran en el nivel de séptimo básico.

Objetivo de la secuencia: Comprender los criterios de congruencia de triángulos, aplicándolos en la resolución de ejercicios y problemas.

Clase 1: En esta clase se realizó una pequeña evaluación diagnóstica en base a las problemáticas que se presentan en la misma, con el objetivo de conocer el nivel en general de los estudiantes del curso, acorde con la primera fase del Modelo de Van Hiele, en la cual “se procede a tomar contacto con el nuevo tema objeto de estudio. El profesor debe identificar los conocimientos previos que puedan tener sus alumnos sobre este nuevo campo de trabajo y su nivel de razonamiento en cuanto a este” (Vargas & Gamboa, 2013, pág. 84). Junto con ello, se van consolidando los conocimientos previos que los estudiantes requerirán para poder enfrentarse al tópico en cuestión, pues “Los alumnos deben recibir información para conocer el campo de estudio que van a iniciar, los tipos de problemas que van a resolver, los métodos y materiales que utilizarán, etc” (Vargas & Gamboa, 2013, pág. 84), para así, hacia el final de la clase, institucionalizar la congruencia de triángulos.

Clase 2: En la clase dos se comenzó a trabajar el concepto principal de la secuencia de clases, es decir la idea de que, para establecer congruencia entre dos triángulos, no es necesario conocer los tres ángulos y los tres lados de cada una de las figuras. Específicamente, en esta segunda clase se inicia con la premisa de que basta conocer sólo cinco elementos y no los seis, acercando el conocimiento a los estudiantes a través de actividades con el objetivo que sean ellos mismos los que descubran este nuevo aprendizaje, trabajando por lo tanto en la fase dos de la orientación dirigida, pues “Se guía a los alumnos mediante actividades y problemas (dados por el profesor o planteados por los mismos estudiantes), con el fin de que estos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos de la red de conocimientos por formar” (Vargas & Gamboa, 2013, pág. 84). Posterior a ello, se realizarán actividades y ejercicios en base a la disminución de elementos realizada, que le permitirán al estudiante tener una mejor comprensión del tópico en cuestión al entender el por qué se puede establecer la congruencia con menos elementos de los iniciales.

Clase 3: En la tercera sesión se continuó trabajando la idea de la clase anterior enfocada a la disminución de elementos, sin embargo, en esta ocasión se hará un nuevo descenso, mostrando por medio de una pequeña demostración, que basta solo con conocer cuatro elementos de dos triángulos para establecer congruencia la congruencia entre ellos. Posteriormente, se dará paso a la construcción del primer criterio de congruencia de triángulos, el cual es el criterio Lado - Ángulo - Lado, introducido por medio de una demostración visual utilizando el software Geogebra, para posteriormente realizar una serie de actividades poniendo en práctica lo aprendido.

Clase 4: Durante esta sesión se retomó nuevamente el trabajo asociado a la segunda fase de orientación dirigida, pues se ejercitará respecto de lo aprendido durante las clases anteriores, poniendo énfasis en el criterio Lado - Ángulo - Lado. ya que será necesario para poder trabajar los criterios de congruencia principales. Posterior a ello, se realizará la introducción del segundo criterio de congruencia Ángulo - Lado - Ángulo, realizando nuevamente una demostración por medio del software Geogebra. Luego de ello y con los primeros dos criterios ya estudiados, se trabajó la tercera fase del marco teórico, ya que “Los alumnos deben intentar expresar en palabras o por escrito los resultados que han obtenido, intercambiar sus experiencias y discutir sobre ellas con el profesor y los demás estudiantes, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio” (Vargas & Gamboa, 2013, pág. 85). De esta manera, se busca afianzar el aprendizaje respecto a los criterios estudiados, para lo cual, junto con ejercitar, se introducirá una situación clave hacia el final de la sesión, aproximándonos levemente a la fase cuatro en la cual “Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos.” (Vargas & Araya, 2013, pág. 85)

Clase 5: Esta última sesión de la secuencia de enseñanza aprendizaje se llevó a cabo utilizando la Metodología de Estudio de Clases, a la cual se aludirá específicamente en el próximo capítulo. Así, en primera instancia se realizará una introducción al criterio Lado - Lado - Lado ya visto en la evaluación realizada, para posteriormente realizar ejercicios que involucren el uso de los criterios ya estudiados. Luego, el desarrollo de la clase estará enfocado en el trabajo con aplicaciones de los criterios de congruencia, presentando una situación problema más compleja a las anteriores. En este punto no se introducirán aprendizajes nuevos, sino que se busca consolidar lo ya visto pues "Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos." (Vargas & Gamboa, 2013, pág. 85). Así, la aplicación de los criterios de congruencia servirá como una situación problema más compleja que las estudiadas anteriormente, para así continuar consolidando los aprendizajes adquiridos y las habilidades que han desarrollado durante todas las clases.

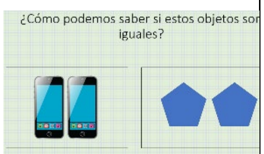
Finalmente, para el cierre de la secuencia se trabajó la fase cinco del modelo, en la cual "Los estudiantes establecen una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y de la red de relaciones que están terminando de formar, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente" (Vargas & Gamboa, 2013, pág. 86). Así, en el cierre de la clase se realizó una síntesis de todo lo aprendido, para lo cual se presentará una tabla que busca esquematizar y resumir la información clave de la secuencia, es decir, en los criterios de congruencia de triángulos.

5.2 Planes de clase.

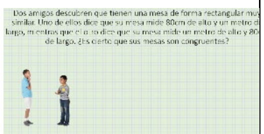
Plan de clase 1: Esta clase busca principalmente hacer una lectura de los conocimientos previos de los estudiantes y realizar el primer acercamiento al contenido. Como se especificó anteriormente, se estará trabajando la primera fase del modelo de Van Hiele.

<table>
<tr><th colspan="5">PLAN DE CLASE 1</th></tr>
<tr><td>Eje Temático</td><td>Geometría</td><td>Unidad o Tema</td><td>Criterios de congruencia de triángulos</td><td>Sesión Nº: 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo General de la Unidad:</td><td colspan="2">Comprender los criterios de congruencia de triángulos, aplicándolos en la resolución de ejercicios y problemas.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje:</td><td colspan="2">Evidenciar, en base a actividades, que nociones básicas poseen los estudiantes respecto del contenido a tratar, clasificándolos en un nivel del Modelo de Van Hiele.
Comprender el concepto de congruencia, extendiéndolo a la congruencia de segmentos y de figuras.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Habilidades</td><td colspan="2">C: Utilizar sus propias palabras, gráficos y símbolos matemáticos para presentar sus ideas o soluciones
D: Describir relaciones y situaciones matemáticas de manera verbal y usando símbolos.</td><td></td></tr>
</table>

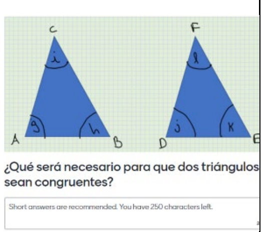
Actitudes		**B:** Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato		
Momentos de la clase	**Actividades de Aprendizaje**	**Intervención Docente**	**Recursos de Aprendizaje**	**Tiempo Estimado**

Inicio	Se presenta una imagen con dos objetos cotidianos junto con la pregunta: ¿Cómo podemos saber si estos objetos son iguales?  . Se presenta luego el siguiente problema: “Dos amigos descubren que tienen una mesa de forma rectangular muy similar. Uno de ellos dice que su mesa mide 80cm de alto y un metro de largo, mientras que el otro dice que su mesa mide un metro de alto y	En este punto, el profesor recibirá todas las respuestas de los y las estudiantes respecto a la pregunta planteada. El siguiente problema busca servir de diagnóstico sobre el orden al hablar de congruencia.	• Computador/Celular • Meet • Cuaderno	**10 minutos**

<table>
<tr>
<td></td>
<td>80cm de largo. ¿Es cierto que sus mesas son congruentes?”

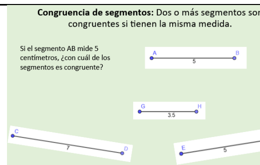


Luego se les preguntará: ¿Qué será necesario para que dos triángulos sean congruentes?

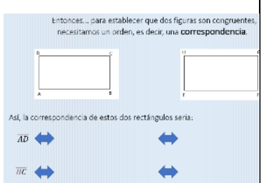
Para ello, se anotará la pregunta en la página www.mentimeter.com, de manera que cada estudiante pueda dar respuesta a ella


</td>
<td>

El docente puede guiar la situación y las dificultades que haya con el uso de la plataforma, siempre cuidando de tener el registro más extenso posible de las respuestas y los argumentos que realicen.</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

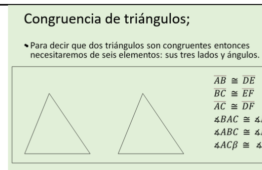
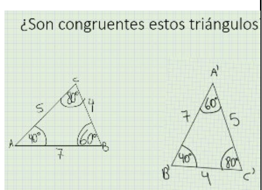
<table>
<tr>
<td>Desarrollo</td>
<td>

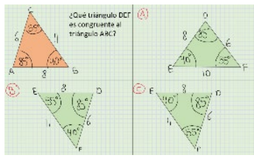
.



.</td>
<td>Posteriormente, se introduce la definición de congruencia de segmentos y se hace una breve actividad para identificar dos segmentos congruentes según sus medidas.

Más adelante se les solicita establecer la correspondencia entre dos figuras dadas, llegando en última instancia a establecerlas en un par de triángulos en los cuales solo se dieron los ángulos</td>
<td></td>
<td>30 minutos</td>
</tr>
</table>

	 	Posteriormente, se establece la definición de congruencia de triángulos en base a lo estudiado respecto del concepto de congruencia.		
	¿Son congruentes estos triángulos?  	Después de una discusión y formalización de la definición se pasará a practicar lo visto con una actividad donde deben identificar si dos triángulos cumplen lo necesario para decir que son congruentes.		

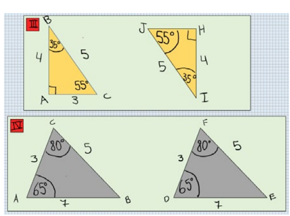
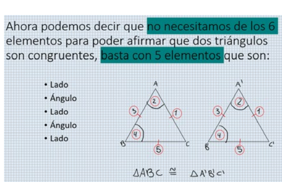
Cierre	. 	Para finalizar la clase y dado un triángulo, se les solicitará que de tres triángulos argumenten cual es el congruente al triángulo dado En esta instancia solo se busca que practiquen lo definido anteriormente como congruencia de triángulos. Esta actividad de cierre será para que los y las estudiantes puedan poner en práctica lo aprendido durante la		**5 minutos**

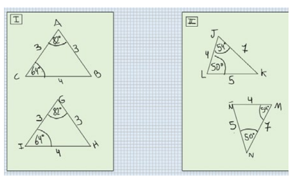
		clase y a su vez poder analizar y enmendar los distintos errores que vayan presentando.		

Clase 2: En la clase dos se comienza ya con la idea central de la secuencia sobre los criterios. Como se comentó previamente se trabajará en esta instancia la fase dos del modelo para ir descubriendo el contenido.

PLAN DE CLASE 2				
Eje Temático	Geometría	**Unidad o Tema**	Criterios de congruencia de triángulos	**Sesión Nº:** 2
Objetivo General de la Unidad:		- Comprender los criterios de congruencia de triángulos, aplicándolos en la resolución de ejercicios y problemas.		
Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje:		- Establecer la congruencia entre dos triángulos utilizando ángulos y lados conocidos.		
Habilidades		**D:** Describir relaciones y situaciones matemáticas de manera verbal y usando símbolos.		
Actitudes		**D:** Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales		
Momentos de la clase	**Actividades de Aprendizaje**	**Intervención Docente**	**Recursos de Aprendizaje**	**Tiempo Estimado**

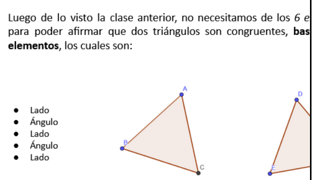
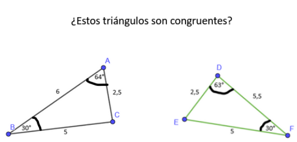
Inicio	Se les preguntará ¿Qué elementos son necesarios para que dos triángulos sean congruentes?	Así, el profesor comienza recibiendo las participaciones de los estudiantes en una especie de lluvia de ideas, formalizando los 6 elementos de un triángulo que nos ayudan a establecer la congruencia.	- Computador/Celular - Meet - Cuaderno	**5 minutos**
Desarrollo	¿Dos triángulos que son congruentes tienen la misma área? ¿Será cierto el caso contrario?	El desarrollo comienza con una pregunta la cual busca aclarar la relación de congruencia y área, lo cual se comprobará con un ejemplo. Luego de calcular en ambos		**30 minutos**

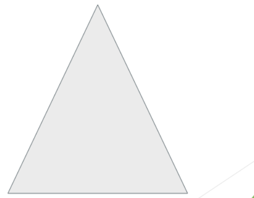
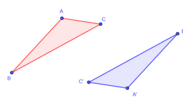
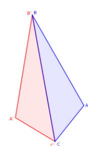
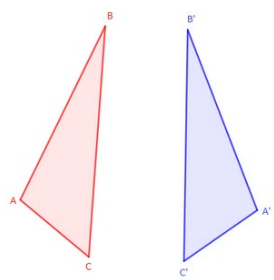
	.	casos las áreas de los triángulos y compararlas, se les preguntará qué pueden concluir. Luego, se revisará el caso contrario, viendo un ejemplo el cual ayudará a llegar a la conclusión de que este caso no es verdadero, es decir que dos triángulos con la misma área no implican que sean congruentes.		
	¿Las siguientes parejas de triángulos son congruentes?  .	Posteriormente, se comenzará a practicar el identificar dos triángulos congruentes en base a sus seis elementos.		
	 	En el último de los ejercicios anteriores, se entrega una pareja de triángulos que solo se sabe		

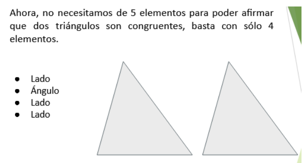
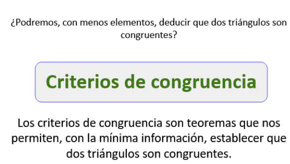
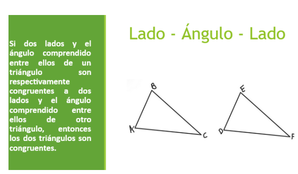
Cierre	¿Son congruentes los siguientes pares de triángulos?, justifique. 	cinco elementos de ella, es decir con un ángulo faltante. Al igual que con la práctica anterior, para el cierre se presentarán ejercicios los cuales buscan consolidar la idea de que ya no son necesarios seis elementos, sino que cinco para saber cuándo dos triángulos son congruentes.		**10 minutos.**

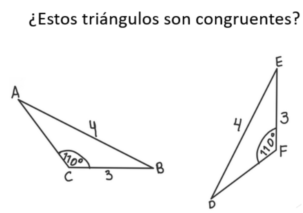
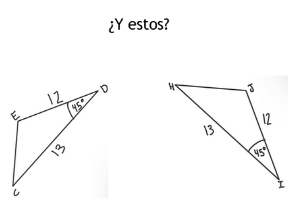
Clase 3: En esta clase se continúa con la idea de la clase anterior, es decir, la disminución de elementos para conjeturar que dos triángulos son congruentes.

<table>
<tr><th colspan="5">PLAN DE CLASE 3</th></tr>
<tr><td>Eje Temático</td><td>Geometría</td><td>Unidad o Tema</td><td>Criterios de congruencia de triángulos</td><td>Sesión Nº: 3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo General de la Unidad:</td><td colspan="2">- Comprender los criterios de congruencia de triángulos, aplicándolos en la resolución de ejercicios y problemas.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje:</td><td colspan="2">- Comprender mediante demostraciones visuales que es posible establecer la congruencia de triángulos con menos de 5 elementos conocidos</td><td>.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Habilidades</td><td colspan="2">D: Describir relaciones y situaciones matemáticas de manera verbal y usando símbolos.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Actitudes</td><td colspan="2">B: Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato
D: Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales</td><td></td></tr>
<tr><td>Momentos de la clase</td><td>Actividades de Aprendizaje</td><td>Intervención Docente</td><td>Recursos de Aprendizaje</td><td>Tiempo Estimado</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Inicio</td>
<td>¿Cuántos y cuáles elementos son necesarios para establecer congruencia entre dos triángulos?
</td>
<td>El profesor guiará la lluvia de ideas para concluir cuáles eran los elementos.</td>
<td>- Computador/Celular
- Meet
- Cuaderno</td>
<td>5 minutos</td>
</tr>
<tr>
<td>Desarrollo</td>
<td>¿Estos triángulos son congruentes?, ¿por qué? buscando ver la habilidad argumentativa para justificar que los triángulos no son congruentes.
</td>
<td>El desarrollo comenzará con la misma práctica que terminó la clase anterior: ejercitar para consolidar lo visto.</td>
<td></td>
<td>25 minutos</td>
</tr>
</table>

	¿Que características tiene un triángulo isósceles?  **En vez de 5 elementos, ¿Se podrá utilizar solo 4 para establecer la congruencia entre dos triángulos?** Pensemos entonces en dos triángulos, los cuales tienen tres lados y un ángulo respectivamente congruente.  Luego, los ubicaremos de manera que sean adyacentes. Después, vamos a trazar el segmento que va desde el vértice A' hacia el vértice A.   	Luego, se procederá a la actividad central de la clase, pero antes de eso se recordarán las propiedades de un triángulo isósceles Así, se dará paso a la actividad principal la cual es una demostración formal pero explicada en base a su representación gráfica. Esta demostración buscará verificar la idea de que no es necesario cinco elementos, sino que ahora cuatro. Aquí también será importante la transposición didáctica del profesor, ya que la demostración		

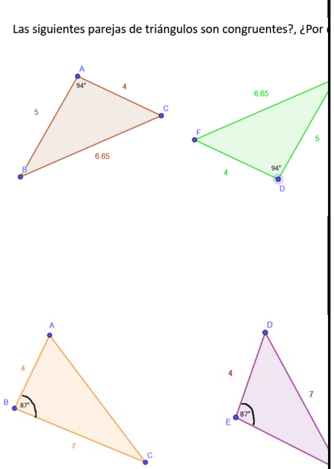
Cierre	   	de esto es un momento crítico principalmente porque aumenta la dificultad. Se procederá entonces a formalizar y practicar la nueva idea, es decir que ya no es necesario contar con cinco elementos, sino que 4 bastaran. El cierre de la clase tendrá en esencia la tarea de realizar el primer acercamiento a los criterios de congruencia. Es por esto por lo que se les preguntará a los estudiantes si piensan que en vez de cuatro		**15 minutos**

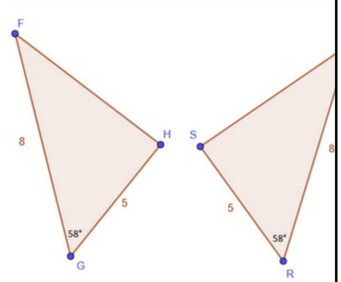
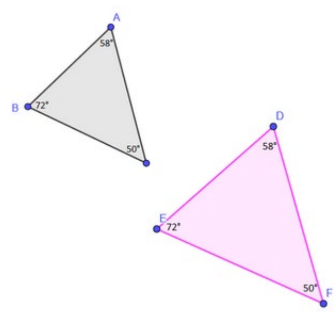
	¿Estos triángulos son congruentes?   	elementos se puedan necesitar menos. Luego de una discusión se presentará que la mínima información que se puede utilizar para afirmar que dos triángulos son congruentes son tres elementos, pero no cualquiera sino tres específicos. Se presentará entonces el primer criterio: Lado – Ángulo – Lado, y su restricción. El profesor debe aclarar y ser enfático en las restricciones del uso del criterio. Por último, al igual que en todos los		

		momentos en que se comienza a utilizar menos elementos, se realizará una pequeña práctica para consolidar la nueva forma de afirmar congruencia Aquí, profesor debería interferir lo menos posible y dar espacio al desarrollo individual, para luego compartir resultados.		

Clase 4: En esta sesión, se comenzará a trabajar fase tres, incitando a la reflexión y discusión con la problematización que trae la planificación en el cierre.

PLAN DE CLASE 4					
Eje Temático	Geometría	**Unidad o Tema**	Criterios de congruencia de triángulos		**Sesión Nº:** 4
Objetivo General de la unidad:		- Comprender los criterios de congruencia de triángulos, aplicándolos en la resolución de ejercicios y problemas.			
Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje:		- Comprender y aplicar el criterio de congruencia Ángulo – Lado - Ángulo - Aplicar criterios de congruencia de triángulos en la resolución de ejercicios y problemas.			
Habilidades		**C:** Utilizar sus propias palabras, gráficos y símbolos matemáticos para presentar sus ideas o soluciones **D:** Describir relaciones y situaciones matemáticas de manera verbal y usando símbolos. **G:** Evaluar la argumentación de otros dando razones			
Actitudes:		**B:** Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades,			

		incluso cuando no se consigue un resultado inmediato **D:** Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales		
Momentos de la clase	**Actividades de Aprendizaje**	**Intervención Docente**	**Recursos de Aprendizaje**	**Tiempo Estimado**
Inicio	¿Las siguientes parejas de triángulos son congruentes?, ¿Por qué?  	Se inicia la clase saludando a los estudiantes y se recuerda lo visto durante los últimos minutos de la clase anterior respecto al criterio Lado – Ángulo Lado. Posteriormente, se realizan algunas actividades que involucren la puesta en práctica de este criterio.	- Computador/ Celular - Cuaderno	**10 minutos**

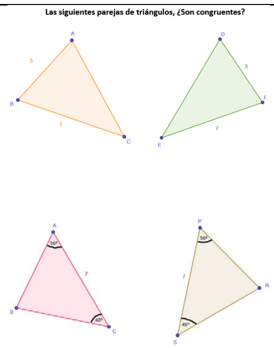
Desarrollo	¿Las siguientes parejas de triángulos son congruentes?, Si es así, ¿Por qué criterio lo son?  	Se introduce al criterio Ángulo – Lado – Ángulo mediante una construcción llevada a cabo en Geogebra, para posteriormente realizar algunos ejercicios que involucran el uso de los dos criterios aprendidos con anterioridad.		**25 minutos**

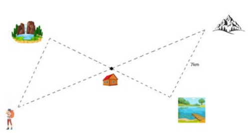
Cierre	Si en el siguiente rectángulo se traza una de sus diagonales, ¿los triángulos que se forman son congruentes?, ¿Por qué?  En resumen .... Los criterios de congruencia nos permite concluir, con la mínima informació posible, si dos triángulos son congruentes - Lado - Ángulo - Lado - Ángulo - Lado - Ángulo - (?)	Se finaliza la clase realizando un problema respecto de la división de un rectángulo. Así, se enuncia la interrogante para después orientar a la resolución del ejercicio. Para finalizar, se enuncian los dos criterios aprendidos vistos con anterioridad, comentando que en la clase siguiente se estudiará el último.		**10 minutos**

Clase 5: En la quinta y última clase se trabajará fuertemente en la cuarta fase del modelo principalmente en la situación problema del desarrollo. Además, en el cierre se trabaja la fase 5 en la tabla resumen que se ofrece. La situación problema será trabajada en base a la Metodología del Estudio de Clases.

PLAN DE CLASE 5				
Eje Temático	Geometría	**Unidad o Tema**	Criterios de congruencia de triángulos	**Sesión Nº:** 5

<table>
<tr><td colspan="2">Objetivo General de la Unidad:</td><td colspan="2">- Comprender los criterios de congruencia de triángulos, aplicándolos en la resolución de ejercicios y problemas.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje:</td><td colspan="2">- Comprender el criterio de congruencia Lado – Lado - Lado
- Aplicar los criterios de congruencia en la resolución de problemas.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Habilidades</td><td colspan="2">C: Utilizar sus propias palabras, gráficos y símbolos matemáticos para presentar sus ideas o soluciones
D: Describir relaciones y situaciones matemáticas de manera verbal y usando símbolos.
G: Evaluar la argumentación de otros dando razones</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Actitudes</td><td colspan="2">B: Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato
D: Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales</td><td></td></tr>
<tr><th>Momentos de la clase</th><th>Actividades de Aprendizaje</th><th>Intervención Docente</th><th>Recursos de Aprendizaje</th><th>Tiempo Estimado</th></tr>
<tr><td>Inicio</td><td>¿Son congruentes los triángulos?, ¿Por qué?
¿Esto nos permite establecer un nuevo criterio?</td><td>Se inicia la clase rescatando imágenes de una de las actividades de la evaluación de la semana anterior. A partir de ello se discute si los triángulos que se dibujaron</td><td>- Computador/Celular
- Meet
- Cuaderno</td><td>10 minutos</td></tr>
</table>

Desarrollo	 Sandra es una joven que ha decidido ir de excursión a un parque. Al llegar, se ha encontrado con un mapa que está en muy mal estado y el cual solo muestra la distancia que hay desde la laguna hasta la montaña. Además, en el mapa aparece una casa en donde habitan los guardaparques, la cual se ubica exactamente a la mitad del camino entre la cascada y	son congruentes y el por qué, de ello, para luego introducir el último criterio Lado – Lado – Lado y realizar algunos ejercicios. Posteriormente, se les pedirá que lean un problema durante algunos minutos y que, junto con ello, puedan comentar las ideas y nociones que se les ocurren para abordar el problema. A pesar de la modalidad virtual, se espera que el profesor pueda intervenir lo menos posible durante este momento, dado que está enmarcado en la fase 4 del Modelo de Van Hiele respecto de la orientación libre. En caso de que los estudiantes no tengan estrategias para poder resolver el problema, el profesor los orientará		**30 minutos**

	la laguna, y a la mitad del camino entre Sandra y la montaña. Dado que aquel día hace mucho calor y se encuentra un poco cargada, Sandra decide ir únicamente hacia la cascada, solo si esta se encuentra a no más de 8 kilómetros desde su posición.  ¿Podrá Sandra cumplir su cometido?, ¿cómo podrías ayudarla a encontrar aquella distancia? Se muestra una tabla que	siempre cuidando de mantenerse lo más al límite posible y de no cometer enunciar la respuesta el mismo.		

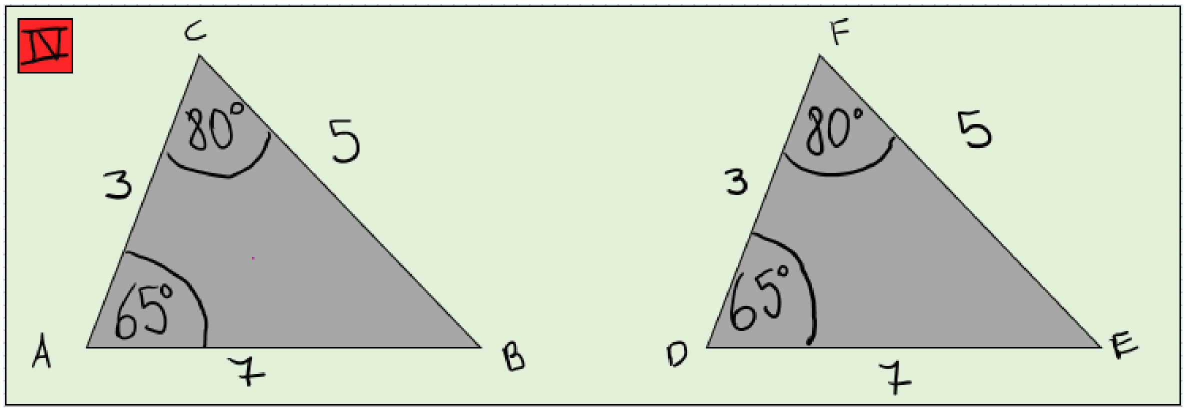
Cierre	esquematiza los criterios de congruencia estudiados.	Luego de la resolución del problema, el profesor mostrará una tabla en donde aparecen los criterios de congruencia estudiados junto con la definición de cada uno de ellos y un ejemplo en particular. Junto con ello y dado que es la última clase, el profesor se despedirá de los estudiantes y les agradecerá a ellos y a la profesora por su presencia durante las sesiones virtuales.		**5 minutos**

5.3 Análisis a priori de situaciones de aprendizaje.

En este apartado, se comentará acerca del análisis a priori de las situaciones claves durante la secuencia de enseñanza aprendizaje, con el fin de poder comparar nuestras expectativas iniciales con los resultados.

Primera situación clave: Clase 2

En la clase dos se presentó una de las ideas principales de la implementación, es decir, el hecho de que no siempre es necesario conocer los seis elementos de dos triángulos para poder establecer la congruencia entre ellos, para después comentar que basta solo con cinco elementos. Para desarrollar esta idea, se realizó una primera situación clave, preparando una secuencia de ejercicios donde el último los hace enfrentarse a la primera disminución de elementos.



1. ¿Qué conceptos o propiedades matemáticas estarán presentes en la actividad?

En un comienzo el concepto principal será la congruencia en general, pero se llegará hasta la idea de que no es necesario conocer los seis elementos de los triángulos para establecer congruencia entre ellos, sino que basta con conocer sólo cinco de ellos para concluir aquella información.

2. ¿Qué conocimientos adquiridos debe poner en juego el alumno para realizar el problema?

Será fundamental para esta actividad que recuerden propiedades de los triángulos, específicamente la suma de los ángulos interiores, junto con nociones básicas de operaciones aritméticas, como el planteo de ecuaciones de primer grado y operatoria en los números reales.

3. ¿Cuáles serían las posibles estrategias de resolución de los estudiantes?

Las estrategias principales que se espera que utilicen son dos. En primera instancia, que establezcan la correspondencia entre los elementos, es decir, entre los ángulos y los lados de ambos triángulos, de modo que el ángulo que falta lo asuman como una incógnita, para así utilizar la propiedad de la suma de los ángulos interiores en un triángulo con el objetivo de encontrar aquel ángulo faltante. Otra estrategia que pueden realizar es la medición de los ángulos y los lados de ambos triángulos, pues, dado que entienden que dos figuras son congruentes cuando tienen la misma forma y el mismo tamaño, el utilizar herramientas como la regla y el transportador para verificar aquella igualdad puede llevarlos a establecer la congruencia entre las figuras.

4. ¿Cuáles serían las posibles dificultades?

La principal dificultad reside en que los estudiantes no recuerden la propiedad antes mencionada, junto con poseer déficits de conocimiento respecto de lo que significa la congruencia entre dos triángulos, teniendo dificultades para establecer posibles correspondencias y relaciones entre los ángulos y los lados de ambos triángulos.

5. ¿Cuáles serían los posibles errores en la resolución de la actividad?

Uno de los errores fundamentales está orientado a que omitan aquel dato y establezcan sin ningún argumento la congruencia entre los triángulos mencionados. Otro posible error es que no puedan identificar la congruencia entre los triángulos estableciendo de manera errónea la correspondencia entre sus partes, relacionando lados y ángulos con sus homólogos los cuales no poseen las mismas medidas. También se podrían producir errores de tipo aritmético, pues al utilizar la propiedad de la suma de ángulos interiores de un triángulo, podrían establecer la igualdad $80^\circ + 65^\circ + x = 180^\circ$, concluyendo que $x = 180^\circ - 80^\circ - 65^\circ$, en donde $x = 45^\circ$, estableciendo un cálculo erróneo.

6. ¿Qué actitudes espera frente a la situación problema?

Se espera una actitud de interés lo que se traduce en una buena participación, ya que está dentro de todas sus capacidades el poder solucionar el problema y en base a la secuencia realizada tienen los elementos y los conocimientos para realizarlo, siendo a su vez una actividad que invita a la reflexión y al desafío.

Segunda situación clave: Clase 4

En la clase 4, correspondiente a la revisión de los criterios Lado - Ángulo - Lado y Ángulo - Lado - Ángulo, se plantea el siguiente problema:

Si en el siguiente rectángulo se traza una de sus diagonales, ¿los triángulos que se forman son congruentes?, ¿Por qué?

1. ¿Qué conceptos o propiedades matemáticas estarán presentes en la actividad?

En la actividad estarán presentes los conceptos de congruencia de triángulos y la puesta en práctica del criterio Lado - Ángulo - Lado.

2. ¿Qué conocimientos adquiridos debe poner en juego el alumno para realizar el problema?

El estudiante debe poner en juego el criterio Lado - Ángulo - Lado o el criterio Ángulo - Lado - Ángulo, junto con propiedades respecto de la medida de los lados y los ángulos interiores de un rectángulo.

3. ¿Cuáles serían las posibles estrategias de resolución de los estudiantes?

Una de las estrategias de resolución de la actividad está orientada a que los estudiantes tracen cualesquiera de las diagonales y en base a la forma y tamaño junto con medir los lados y los ángulos, concluyan que los triángulos son congruentes.

Otra estrategia de resolución se basa en el uso del criterio Lado - Ángulo - Lado. Así, luego de trazar la diagonal respectiva, pueden establecer relaciones entre las medidas de los lados opuestos, determinando que son congruentes por propiedad del rectángulo. Luego, pueden identificar la medida de los ángulos del rectángulo, dando cuenta que todos son ángulos rectos. Finalmente, establecerán la congruencia entre los dos triángulos por el criterio Lado - Ángulo - Lado, al tener el conocimiento de los lados del rectángulo y el ángulo comprendido entre ellos.

Una última estrategia se basa en el uso del criterio Ángulo - Lado - Ángulo, pues los estudiantes podrían identificar que las diagonales de un rectángulo dividen a sus ángulos en dos ángulos de igual medida. Así, tendrían la información de uno de los ángulos en ambos triángulos, junto con el ángulo recto y el lado comprendido entre ellos dos, por lo cual podrían establecer que los triángulos son congruentes por el criterio Ángulo - Lado - Ángulo.

4. ¿Cuáles serían las posibles dificultades?

Las posibles dificultades están orientadas a que no tengan conocimiento de las características de un rectángulo, no pudiendo establecer la relación entre las medidas de sus lados opuestos y la medida de los ángulos.

5. ¿Cuáles serían los posibles errores en la resolución de la actividad?

Un primer error puede ser el pensar que los dos triángulos son congruentes porque tienen igual forma y tamaño, lo cual, a pesar de que es cierto, no involucra el uso de los criterios de congruencia que se han estudiado.

Otro error está enfocado a que no establezcan la congruencia correcta al momento de determinar las medidas de los lados y de los ángulos del rectángulo, errando al anotar de manera adecuada la correspondencia.

6. ¿Qué actitudes espera frente a la situación problema?

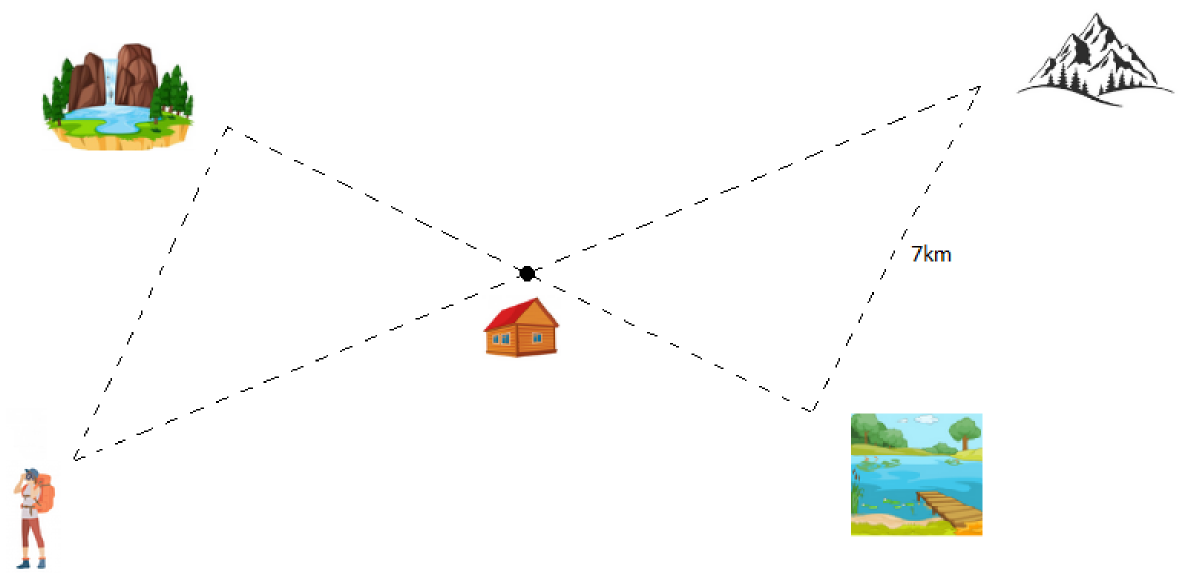
Esperamos una actitud positiva y una buena motivación, pues, a pesar de que no ha habido tanta participación a lo largo de la secuencia de clases, consideramos que es un desafío sencillo que puede llamar la atención de los estudiantes.

Tercera situación clave: Clase 5 (Estudio de Clases)

La última situación clave registrada durante la secuencia de clases se da en el marco de la clase de resolución de problemas, abordada y trabajada desde la perspectiva del estudio de clases. Allí, se presentará el siguiente problema:

Sandra es una joven que ha decidido ir de excursión a un parque. Al llegar, se ha encontrado con un mapa que está en muy mal estado y el cual solo muestra la distancia que hay desde la laguna hasta la montaña. Además, en el mapa aparece una casa en donde habitan los guardaparques, la cual se ubica exactamente a la mitad del camino entre la cascada y la laguna, y a la mitad del camino entre Sandra y la montaña.

Dado que aquel día hace mucho calor y se encuentra un poco cargada, Sandra decide ir únicamente hacia la cascada, solo si esta se encuentra a no más de 8 kilómetros desde su posición.



¿Podrá Sandra cumplir su cometido?, ¿cómo podrías ayudarla a encontrar aquella distancia?

1. ¿Qué conceptos o propiedades matemáticas estarán presentes en la actividad?

En la actividad, estarán presentes el concepto de congruencia de triángulos, la propiedad de ángulos opuestos por el vértice, el concepto de congruencia de segmentos y la noción de punto medio de un segmento.

2. ¿Qué conocimientos adquiridos debe poner en juego el alumno para realizar el problema?

El estudiante debe poner en juego la relación que hay entre los elementos de dos triángulos que son congruentes, junto con el criterio de congruencia Lado – Ángulo – Lado, la propiedad de ángulos opuestos por el vértice y la definición de punto medio de un segmento.

3. ¿Cuáles serían las posibles estrategias de resolución de los estudiantes?

Una de las posibles estrategias de solución es que, en base al dato de la casa ubicada a la mitad de dos de los caminos, den cuenta de que la distancia de Sandra a la casa es la misma que de la casa a la montaña, ya que se encuentra en la mitad y por ende divide a aquel segmento en dos segmentos de igual medida. Posteriormente, podrían establecer que dos pares de segmentos los cuales serán marcados durante la clase son congruentes, y con conocimientos respecto del ángulo opuesto por el vértice podrían decir que los ángulos que se forman y que también serán señalados son congruentes. Luego de establecer la congruencia entre aquellos tres elementos, pueden concluir que los triángulos que se forman son congruentes, y estableciendo la correspondencia, llegar a que la distancia resultante mide 7km pues su correspondiente del otro triángulo también mide aquello.

4. ¿Cuáles serían las posibles dificultades?

Una de las dificultades que pueden tener, es que, al no conocer las medidas de las distancias, no puedan establecer relaciones entre las medidas de ellas con el dato de la casa ubicada en la mitad de dos caminos. En vista de ello, no podrían resolver el ejercicio. Otra dificultad puede ser que una vez establecidos que los triángulos son congruentes, no puedan dilucidar que la distancia que estamos buscando es correspondiente con la distancia que está en el mapa debido, y que por esta también es de 7 kilómetros.

5. ¿Cuáles serían los posibles errores en la resolución de la actividad?

Uno de los errores que pueden cometer es el hecho de que establezcan la congruencia de los triángulos sin la información suficiente. Por ejemplo, que la establezcan antes de realizar el ejercicio o a partir de la obtención de las medidas de las distancias divididas por la casa.

6. ¿Qué actitudes espera frente a la situación problema?

A pesar de que durante la secuencia de clases la participación ha sido bastante baja, se espera que los estudiantes tengan una actitud positiva, de curiosidad y de interés, con el objetivo de que puedan comentar sus ideas y opiniones para poder llegar a una solución en conjunto.

CAPÍTULO VI

ESTUDIO DE CLASES

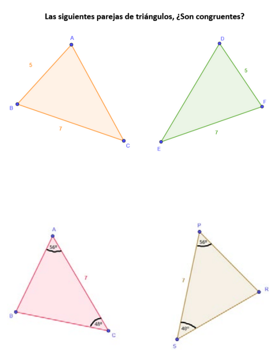
En este capítulo se abordará lo referente a la clase realizada en base a la metodología del Estudio de Clases, la cual nos permite reflexionar con un grupo de docentes en base a una clase basada en resolución de problemas. En primera instancia se realizará una descripción de la clase diseñada respecto del contenido y los problemas abordados, presentando el plan de clases de esta. Luego se ahondará en lo acontecido y experimentado durante la implementación de aquella clase, abordando la cantidad de estudiantes que participaron, las interrogantes que plantearon, las dificultades que surgieron y las respuestas de los alumnos, entre otras cosas. Posteriormente se comentará acerca de la sesión de revisión en donde se discutió en torno a la clase implementada para finalmente exponer algunas reflexiones respecto de lo realizado considerando las observaciones realizadas por los docentes que participaron en la discusión de la clase.

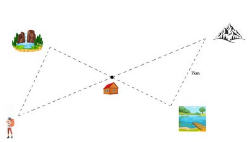
6.1 Descripción de la clase diseñada

El estudio de clases se llevó a cabo en la última clase de la secuencia de enseñanza aprendizaje, es decir, en la clase 5. Aquella clase tuvo lugar luego de haber estudiado el concepto de congruencia y dos de los tres criterios de congruencia de triángulos, estudiando el último de manera efímera durante aquella clase. En vista de ello, la clase se centró en poder aplicar los elementos ya estudiados con el objetivo de dar solución tanto a un momento de tensión como a un problema contextualizado en una situación cotidiana, con el objetivo de desarrollar la habilidad de argumentar. Además, se trabajó la fase de orientación libre del Modelo de Van Hiele en donde “Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos (Gamboa & Araya, 2013, pág 85), pues ya habiendo estudiado todo el contenido que respecta al objeto matemático se optó por realizar actividades y problemas más complejos de modo que el estudiante progrese en su nivel de razonamiento geométrico.

6.2 Plan de clases

PLAN DE CLASE 5				
Eje Temático	Geometría	**Unidad o Tema**	Criterios de congruencia de triángulos	**Sesión Nº:** 5
Objetivo General de la Unidad:		- Comprender los criterios de congruencia de triángulos, aplicándolos en la resolución de ejercicios y problemas.		
Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje:		- Comprender el criterio de congruencia Lado – Lado - Lado - Aplicar los criterios de congruencia en la resolución de problemas.		
Habilidades		**C:** Utilizar sus propias palabras, gráficos y símbolos matemáticos para presentar sus ideas o soluciones **D:** Describir relaciones y situaciones matemáticas de manera verbal y usando símbolos. **G:** Evaluar la argumentación de otros dando razones		
Actitudes		**B:** Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato **D:** Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales		

Momentos de la clase	Actividades de Aprendizaje	Intervención Docente	Recursos de Aprendizaje	Tiempo Estimado
Inicio	¿Son congruentes los triángulos?, ¿Por qué? ¿Esto nos permite establecer un nuevo criterio? 	Se inicia la clase rescatando imágenes de una de las actividades de la evaluación de la semana anterior. A partir de ello se discute si los triángulos que se dibujaron son congruentes y el por qué, de ello, para luego introducir el último criterio Lado – Lado – Lado y realizar algunos ejercicios.	- Computador/Celular - Meet - Cuaderno	**10 minutos**
Desarrollo	Sandra es una joven que ha decidido ir de excursión a un parque. Al llegar, se ha encontrado con un mapa que está en muy mal estado y el cual solo muestra la distancia que hay desde la	Posteriormente, se les pedirá que lean un problema durante algunos minutos y que, junto con ello, puedan comentar las ideas y nociones que se les ocurren para abordar el problema. A pesar de la modalidad virtual, se espera que el profesor pueda intervenir lo menos posible durante este momento, dado que está		**30 minutos**

	laguna hasta la montaña. Además, en el mapa aparece una casa en donde habitan los guardaparques, la cual se ubica exactamente a la mitad del camino entre la cascada y la laguna, y a la mitad del camino entre Sandra y la montaña. Dado que aquel día hace mucho calor y se encuentra un poco cargada, Sandra decide ir únicamente hacia la cascada, solo si esta se encuentra a no más de 8 kilómetros desde su posición.  ¿Podrá Sandra cumplir su cometido?, ¿cómo podrías ayudarla a	enmarcado en la fase 4 del Modelo de Van Hiele respecto de la orientación libre. En caso de que los estudiantes no tengan estrategias para poder resolver el problema, el profesor los orientará siempre cuidando de mantenerse lo más al límite posible y de no enunciar las respuestas el mismo.		

	encontrar aquella distancia?			
Cierre	Se muestra una tabla que esquematiza los criterios de congruencia estudiados.	Luego de la resolución del problema, el profesor mostrará una tabla en donde aparecen los criterios de congruencia estudiados junto con la definición de cada uno de ellos y un ejemplo en particular. Junto con ello y dado que es la última clase, el profesor se despedirá de los estudiantes y les agradecerá a ellos y a la profesora por su presencia durante las sesiones virtuales.		**5 minutos**

6.3 Experimentación de la clase

La clase fue realizada para dos cursos de primero medio en el colegio Escuela Premilitar Capitán Ignacio Carrera Pinto bajo modalidad virtual, con una asistencia de aproximadamente 19 estudiantes.

Durante el inicio de la clase se discutió una de las actividades realizada en la evaluación. En ella, los estudiantes debían ubicar tres lápices en una hoja de papel de manera de formar un triángulo para luego marcar los vértices de este y trazar los segmentos correspondientes. Posteriormente, debían repetir el procedimiento, pero esta vez asignándole a los lápices un orden distinto al anterior, para así enviar fotos de las producciones e identificar si los triángulos son congruentes. Frente a esta actividad, un estudiante argumentó que los triángulos eran congruentes por que la medida de los lados y de los ángulos eran iguales, así el docente consideró su respuesta y añadió que otra posible manera de identificar si los triángulos son congruentes es recortándolos y verificando que coincidan. Luego de ello otro estudiante manifestó que era posible establecer el criterio de congruencia Lado – Lado – Lado, por lo que el profesor lo introdujo en base a la actividad realizada. En estas actividades de recordatorio no hubo dificultades ni errores por parte de los estudiantes que participaron.

En la primera actividad de la clase, tres estudiantes afirman que los triángulos son congruentes, argumentando que es porque tienen las mismas medidas de sus lados, porque al dar vuelta los triángulos son congruentes o utilizan el criterio lado – ángulo – lado. En vista de ello, se pudo apreciar que los estudiantes tuvieron dificultades para verificar si los dos triángulos son congruentes pues sus argumentaciones eran de manera intuitiva, sin hacer el uso de los criterios de congruencia o utilizándolos de manera errada. También surgieron errores al intentar utilizar criterios incorrectos pues no se conocía la cantidad suficiente de elementos como para justificar la congruencia por ellos. Por el contrario, en el ejercicio siguiente una estudiante logró establecer la congruencia entre los triángulos por el criterio adecuado, sin embargo, tuvo un error al mencionar la correspondencia adecuada, lo que fue corregido por el docente mediante una orientación.

En la instancia problematizadora de la clase, la participación de los estudiantes fue baja, la cual se hizo patente solo al final del problema, por lo que el docente inicialmente registró los datos más relevantes del ejercicio para luego desprender información con ellos. Uno de los momentos de intervención de los estudiantes sucedió en instancias en las cuales debían afirmar que dos segmentos son congruentes dada la igualdad entre sus medidas, de lo cual se infiere que no poseían problemas respecto de la noción congruencia de segmentos. Una de las dificultades se presentó en el momento en que los estudiantes debían afirmar si los triángulos eran congruentes conocidas las congruencias entre dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, frente a lo cual no hubo respuesta alguna, concluyendo que poseen problemas para argumentar la congruencia entre dos triángulos mediante la utilización de los criterios de congruencia. Otra de las dificultades presentadas fue el hecho de que no pudieran encontrar la medida del lado a calcular luego de establecer la congruencia entre los triángulos, pasando por alto el hecho de que, si dos triángulos son congruentes, sus partes correspondientes también lo son y en consecuencia miden lo mismo. Debido a las complejidades del contexto virtual, no hubo claridad respecto de si la baja participación fue producto de la dificultad del problema o se debió a otros factores.

Por último, para el cierre de la clase se presentó un cuadro resumen que consta de los tres criterios de congruencia ya estudiados junto con sus respectivas definiciones y una ilustración de cada uno de ellos.

6.4 Discusión de la clase

La implementación de la clase fue grabada y posteriormente expuesta frente al grupo curso y la docente con el objetivo de que realizaran apreciaciones y retroalimentaciones respecto de esta, tanto en la manera en cómo es presentado el tópico y los problemas como en las intervenciones y orientaciones del docente frente a las interrogantes y acciones de los estudiantes.

Los focos relevantes de la discusión estuvieron orientados mayormente al poco tiempo destinado a la reflexión respecto del problema, junto con apreciaciones interesantes respecto del primer momento de tensión y el cómo se ve afectada una secuencia por la poca participación en la virtualidad.

En primera instancia, un estudiante del grupo curso hizo alusión a la primera actividad pues la consideró bastante desafiante debido a que provocó un momento de tensión en los estudiantes el hecho de que tuvieran que aseverar la congruencia entre dos triángulos. Este momento de tensión estuvo dado debido a que se conocían únicamente las medidas de dos lados en ambos triángulos, por lo tanto, los estudiantes debían guiarse solo por aquellos datos para dar cuenta si los triángulos eran o no congruentes, lo que suponía un desafío pues el hecho de que no hubiera suficientes elementos debía llevarlos a argumentar el por qué no eran congruentes, intentando distanciarse de la idea intuitiva en base a su forma y su tamaño.

Por otra parte, los estudiantes del grupo curso comentaron que se le dedicó muy poco tiempo a la reflexión del problema lo cual produjo que este no se tratara de manera adecuada, desfavoreciendo la participación de los estudiantes y en consecuencia la resolución de la actividad. Algunos comentaron que esta acción podría haber sido mejorada realizando preguntas específicas a los estudiantes o a un grupo de ellos, lo que fue objeto de debate durante la sesión pues otros manifestaron que no era una actitud adecuada al forzar a ciertos estudiantes a participar sin que ellos realmente quisieran hacerlo.

Por su parte, la docente del grupo curso ahondó en la reflexión respecto de cómo la virtualidad merma en la realización de actividades donde los estudiantes deben involucrarse para poder construir los distintos contenidos, planteando la interrogante respecto de si la participación hubiese sido la misma en el caso de que la actividad se hubiese llevado a cabo en modalidad presencial, pues las consecuencias de una baja participación impactan en cómo los estudiantes se apropian del contenido, ya que frente a la poca interacción en clases el docente se ve obligado a entregar las respuestas de las actividades, produciendo un efecto topaze, es decir, cuando “el profesor (…) ve las dificultades que tiene un grupo para llegar a la resolución de un problema, por lo cual se ve en la necesidad de indicar cuál es el procedimiento que deben seguir. Con ello no permite la construcción de conocimiento por parte de los estudiantes” (Chavarria, 2006, pág. 3)

6.5 Reflexión sobre el proceso de Estudio de Clases y aprendizajes profesionales.

El profesor es un profesional de la educación que debe estar permanentemente mejorando sus estrategias de enseñanza, pues acorde con el MBE (2008), para lograr que todos los estudiantes aprendan debe estar en constante reflexión y reformulación de su práctica. Para lograr aquello debe ser capaz de identificar las problemáticas que ocurran durante su ejercicio docente, ahondando sobre ellas para así poder perfeccionar su modo de enseñar, proponiendo día a día actividades más innovadoras y desafiantes, aprovechando al máximo los tiempos, identificando, eliminando y evitando efectos y obstáculos, entre otras cosas.

Para ello, es esencial que esta mejora permanente no solo sea de manera solitaria, sino que también colaborativa, pues “El trabajo colaborativo es un proceso de construcción social en el que cada individuo aprende más de lo que aprendería por sí solo, debido a la interactividad con otros miembros de su grupo.” (Molina & López, 2019, pág. 3). Así, el poder construir instancias de reflexión con los demás colegas en base al trabajo con metodologías como el Estudio de Clases es una forma sumamente enriquecedora de poder alcanzar esa mejora progresiva para así aportar de manera positiva a todos los estudiantes, pues el analizar nuestras prácticas pedagógicas con ayuda de otros puede ayudarnos a vislumbrar ciertos elementos que podríamos no ser capaz de apreciar por nuestra cuenta.

Otro de los elementos a profundizar luego de la implementación y el cual fue retomado en la discusión de la clase fue en como la nula participación de los estudiantes mermó en el desarrollo de la actividad. Realizar un análisis de aquello es indispensable pues según Ordorika (2020) desde que la pandemia de COVID – 19 ha atacado a nuestro planeta, gran parte de las actividades de la cotidianeidad se ha visto severamente afectada. Uno de los ámbitos que más se ha visto afectados por esto es el ámbito educativo, en el cual muchos profesores “reportan frecuentes clases con pantallas en negro y micrófonos apagados, en las que el profesor predica como en el desierto. Esas clases son una metáfora de la complejidad actual de educar y también de las dimensiones que está tomando la distancia social.” (Rosas, 2020, pág. 2). En vista de ello y lo comentado por los docentes en formación, es pertinente dar cuenta de las complejidades existentes al realizar clases de manera virtual, pues la carencia de diálogo mermado a su vez por el poco conocimiento de lo que realmente están entendiendo y haciendo los estudiantes al no poder observarlos siquiera virtualmente dado que poseen su cámara y micrófono apagados, dificulta de sobremanera el desarrollo de las clases, más aún cuando se trata de resolución de problemas, pues no se es capaz de producir un trabajo colaborativo. En base a la discusión con los docentes en formación y una indagación posterior, rescatamos profundamente el hecho de haber aprendido cómo las dinámicas virtuales actuales influyen en el desarrollo de las clases, siendo lo sucedido durante la clase realizada, en la cual el docente tuvo que realizar la resolución del problema debido a la nula participación de los estudiantes. Junto con ello, comprendemos también que estas situaciones propician la aparición de diferentes efectos como el Efecto Topaze (Chavarria, 2006), los cuales es necesario evitar a toda costa. Finalmente, ahondamos en lo importante que significa la distribución adecuada de los tiempos durante la realización de una actividad, pues en nuestra clase no se le dedicó el tiempo suficiente a la resolución del problema, lo que también afectó en el desarrollo de este, por lo cual en base a los comentarios realizados consideramos aquel aspecto como algo esencial y que en nuestras futuras prácticas pedagógicas planeamos tener en cuenta para el mejor desarrollo de las actividades. El haber profundizado en las reflexiones realizadas no hubiese sido posible sin la ayuda de los docentes y la catedrática, pues la metodología del Estudio de Clases nos ayudó a observar más allá de las conclusiones extraídas.

CAPÍTULO VII

ANÁLISIS DE RESULTADOS

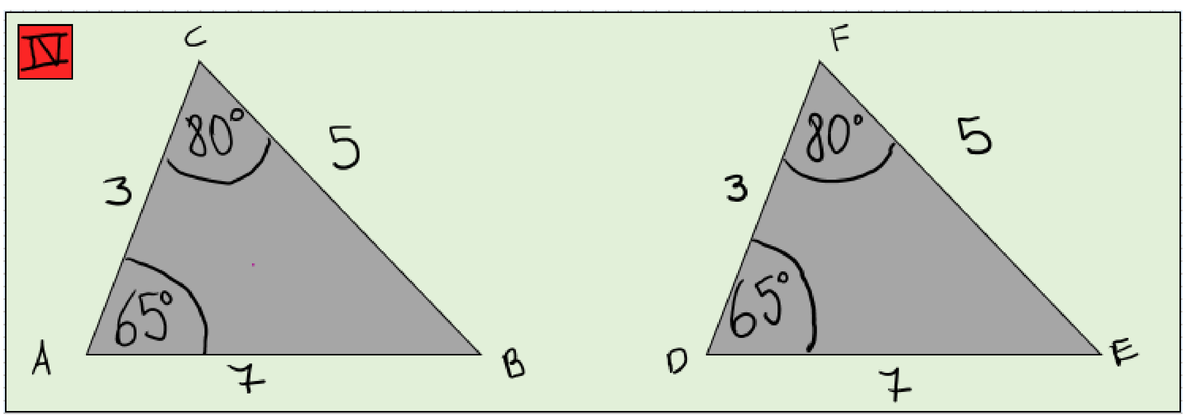
Durante la implementación de la secuencia de enseñanza aprendizaje, hubo momentos en que los estudiantes se vieron enfrentados a ciertos ejercicios y problemas, catalogados como situaciones claves. En este capítulo se ahondará en las producciones y respuestas de ellos durante estas situaciones por medio de los análisis a posteriori, para posteriormente confrontar este con el análisis a priori realizado en el capítulo V.

7.1 Análisis a posteriori de las situaciones de enseñanza y aprendizaje claves

Clase 2

- Primera situación clave: Descenso en la cantidad de elementos para conjeturar la congruencia entre dos triángulos.

En esta situación, ya comentada en el capítulo 5, se tiene por objetivo que los estudiantes descubran y reflexionen si es posible, con solo tres lados y dos ángulos, establecer que dos triángulos son congruentes.



En base a ello, nos realizamos algunas interrogantes con el objetivo de orientarnos para reflexionar sobre lo ocurrido.

1. ¿La situación clave cumplió el objetivo para el que fue propuesta?

Consideramos que la situación clave no cumplió su objetivo como debería, pues el docente tuvo que intervenir bastante dado que los estudiantes no encontraban el camino adecuado para resolver la situación, lo que hizo que el objetivo de esta no fuese comprendido por los estudiantes.

2. ¿Qué errores se evidenciaron en los estudiantes?

Durante el desarrollo de la actividad, se observaron dos errores por parte de los estudiantes. Por un lado, al realizar la pregunta indicada, una estudiante afirmó que los triángulos si eran congruentes, sin embargo, cuando se le pidió que argumentara aquello, no hubo respuesta. A la par también hubo un par de estudiantes que afirmaron que no se podía establecer la congruencia. Estos dos errores se aprovecharon para identificar el problema y comenzar a darle solución, es decir, orientar a los estudiantes a dar cuenta de qué elemento nos faltaba y cómo podíamos encontrarlo.

El otro error que los estudiantes presentaron fue de tipo aritmético, pues en una primera instancia luego de recordar la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, se dieron respuestas erróneas respecto de la medida de aquel ángulo faltante. Una estudiante comentó que el ángulo tenía un valor de 325º, esto pues posiblemente realizó la suma de los ángulos ya conocidos para encontrar el faltante, es decir, la operación 60º + 85º + 180º. Aquel error no fue aprovechado de manera correcta, pues el docente continuó ahondando en la explicación del ejercicio y no se detuvo a analizar la respuesta dada por la estudiante.

3. ¿Qué estrategias plantearon los estudiantes frente a la situación clave?

Consideramos que los estudiantes tuvieron algunas ideas o nociones básicas de cómo proceder respecto del ejercicio, pues si bien intentaron encontrar la medida del ángulo faltante antes que el profesor orientará la resolución de la situación, no fueron claros con las argumentaciones de sus aseveraciones, por lo que no se pudo comprobar de manera concreta si efectuaron alguna estrategia en particular.

4. ¿Qué actitud presentaron los estudiantes frente a la situación clave?

Si bien hubo participación por parte de los estudiantes, se esperaba que tomaran una actitud de mayor interés a aceptar el desafío de la situación, ya que no hubo mucho ímpetu por abordar esta, remitiéndose únicamente a las orientaciones y respuestas que pudiese proveer el profesor respecto de ella.

5. Respecto a lo sucedido en clases, ¿cómo se sintió?, ¿por qué?

Si bien se esperaba una mayor participación en torno a la situación, nos sentimos conformes pues creemos que existió el interés por parte de los estudiantes de resolver la actividad. Por otro lado, se pudo observar que, dado que los estudiantes entendían que iban a ser necesarios cinco elementos y no seis, el sentido de nuestra secuencia didáctica comenzaba a tomar forma.

Clase 4

- Segunda situación clave: División de un rectángulo

La actividad abordada, ocurrida y descrita en el capítulo 5, fue una de las primeras aplicaciones de los criterios de congruencia de triángulos, la cual tenía como objetivo el desarrollo del criterio Lado - Ángulo - Lado y Ángulo - Lado - Ángulo.

1. ¿La situación clave cumplió el objetivo para el que fue propuesta?

En esta situación se dio el primer acercamiento a una aplicación de los criterios de congruencia. El objetivo de aplicar lo aprendido en una situación más compleja fue logrado, ya que los estudiantes fueron reuniendo la información necesaria para poder conjeturar finalmente la congruencia dentro del problema. Si bien al comienzo fue necesaria la guía del profesor, en el momento más importante del problema, es decir, la identificación y justificación de la congruencia, el grupo de estudiantes que participó en la actividad pudo encontrar la solución, argumentando correctamente.

2. ¿Qué errores se evidenciaron en los estudiantes?

Los errores que se evidenciaron fueron netamente respecto del lenguaje matemático, pues uno de los estudiantes se refería al ∡ADC como el "∡AD", lo cual fue corregido por el docente comentándole que estaba aludiendo a un lado. Otro error sucedió al momento de establecer la correspondencia entre dos triángulos con el objetivo de generar la congruencia, frente a lo cual algunos estudiantes comentaban que el triángulo ADC era congruente con el triángulo ABC.

3. ¿Qué estrategias plantearon los estudiantes frente a la situación clave?

Durante el desarrollo de la situación clave uno de los estudiantes afirmó que los triángulos son congruentes pues el rectángulo tiene la misma distancia entre lados y el mismo ángulo. A pesar de aquel comentario, el estudiante que participó pudo verbalizar correctamente su idea con la orientación del profesor, concluyendo que los lados paralelos tienen igual medida y en conclusión son congruentes, por lo que se comenzó a reunir información para resolver el problema. Posteriormente, los estudiantes identificaron los ∡ADC y ∡ABC como ángulos rectos, deduciendo que también son congruentes, para así establecer la congruencia entre los dos triángulos en base al criterio Lado - Ángulo - Lado.

4. ¿Qué actitud presentaron los estudiantes frente a la situación clave?

Las actitudes de los estudiantes fueron positivas dentro de esta situación. Desde un comienzo fueron respondiendo a las preguntas guías del profesor y participando en todo momento. Además, se evidenció una motivación de parte de ellos de querer resolver el problema.

5. Respecto a lo sucedido en clases, ¿cómo se sintió?, ¿por qué?

Dado que en la situación hubo bastante interés y participación por parte de los estudiantes, el sentimiento respecto de lo sucedido es grato. Además, luego de realizado el ejercicio se les preguntó a los estudiantes para que sirve lo estudiado, en donde las respuestas que se dieron iban orientadas a las construcciones, comentando que esto puede ser usado por los arquitectos. Aquello fue significativo pues hubo una idea de vincular lo aprendido con lo ocurrido en la cotidianeidad, lo cual permitió encontrarle sentido a la actividad realizada.

Clase 5

- Tercera situación clave: Estudio de Clases

Esta última situación clave se realizó en base a la metodología de estudio de clases, la cual fue abordada en el capítulo 6.

1. ¿La situación clave cumplió el objetivo para el que fue propuesta?

La situación clave no cumplió por completo el objetivo. Esto debido a que los estudiantes no fueron partícipes de ella, por lo cual no se desarrolló el problema, produciendo que el docente tuviera que abordarlo y resolverlo casi en su totalidad.

2. ¿Qué errores se evidenciaron en los estudiantes?

No se evidenciaron errores pues al haber una baja participación, el docente no logró dilucidar si los estudiantes manejaban deficiencias en sus estrategias y maneras de proceder. En vista de ello se podría deducir que tuvieron dificultades para la realización de la actividad, pues frente a la pregunta reiterada respecto de información nos proporciona que la casa esté a la mitad de los caminos, hubo constante silencio, lo que indica que no tenían cómo utilizar aquel dato.

3. ¿Los alumnos plantearon diversas estrategias o soluciones para la situación que usted planteó?

Los estudiantes no plantearon estrategias para la situación, salvo en el momento en que el docente comenzó a dar algunas pistas sobre ella respecto de la casa ubicada en la mitad de los caminos, en donde pudieron llegar a establecer que las medidas de los caminos denotados por $\underline{AC}$ y $\underline{EC}$ son iguales.

4. Las actitudes de los estudiantes ante la situación clave, ¿fueron las esperadas.

Las actitudes de los estudiantes frente a la actividad fueron bastante pausadas, pues no participaban, por lo cual se infería que estaban poco interesados y poco motivados con el problema.

5. Respecto a lo sucedido en clases ¿cómo se sintió?, ¿por qué?

Nos sentimos un poco decepcionados frente a la situación pues pensamos que la participación y el interés podrían haber sido bastante mayores.

7.2 Confrontación de los análisis a priori y posteriori

Luego de los análisis a posteriori realizados durante el apartado anterior, surge la interrogante respecto de si lo sucedido coincide de alguna manera con lo expuesto durante el capítulo 5, en donde se realizaron análisis a priori descriptivos y predictivos de cada situación clave. En vista de ello, se contrastarán los análisis obtenidos para llegar a alguna conclusión al respecto de nuestras ideas previas a las situaciones claves y lo que finalmente sucedió en cada una de ellas.

- **Primera situación clave: Descenso en la cantidad de elementos para conjeturar la congruencia entre dos triángulos.**

Al confrontar el análisis a priori con el análisis a posteriori, da cuenta de varios aspectos en los que se puede mejorar la clase. Ejemplo de esto fue la participación, ya que se pensaba que sería mucho más activa, provocando más interés de los estudiantes ante el ejercicio. Por otro lado, los errores que se evidenciaron y que fueron previstos en el análisis a priori, se lograron aprovechar de manera correcta, es decir, que establecieran la congruencia sin argumentar el porqué de ella omitiendo que faltaba un elemento, o que directamente establecieran que no hay congruencia, los cuales se utilizaron para comenzar a abordar el ejercicio.

En general, la situación estuvo bien pensada, pues más bien la ejecución de esta fue donde hubo ciertos fallos, ya que hizo falta una mayor interacción con los estudiantes para motivarlos a participar. Sumado a ello, se debió haber reflexionado respecto al error aritmético que no fue aprovechado, es decir, el hecho de que una estudiante realizara la operación $180^{\circ} + 65^{\circ} + 80^{\circ}$ para encontrar la medida del ángulo faltante, pues luego del análisis a posteriori, se llegó a la conclusión de que aquello pudo haber sido utilizado para evidenciar un error algebraico respecto de la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, de modo de corregirlo y seguir en la búsqueda de la respuesta al problema sorteando los obstáculos que pueden aparecer.

Es por lo anterior que las mejoras apuntan a la preparación del docente a la hora de proceder con la actividad de manera de aprovechar los errores, pues el profesor podría haber realizado a la estudiante la interrogante ¿cómo fue que llegó a ese resultado?, para así corregirlo. También, es pertinente utilizar de manera más efectiva el tiempo con el objetivo de mejorar la participación, pues por un lado cuando los estudiantes no responden a las preguntas planteadas por el profesor, se les podría otorgar más tiempo para pensar y, por otro lado, ello sirve para que el profesor tenga la oportunidad de hacer preguntas más específicas, que sean más fácil de responder para los estudiantes y que puedan direccionarlos de mejor manera hacia la solución.

Por último, cada vez que se realiza una actividad de esta índole es fundamental saber que los estudiantes poseen todos los conocimientos para llevarla a cabo, esto dado que los estudiantes no recordaban o no manifestaron recordar la propiedad de suma de ángulos interiores del triángulo, elemento que fue asumido en el análisis a priori y que impactó de sobremanera en las estrategias que ellos deberían haber tomado para resolver el ejercicio, pues si bien también podían medir los lados y los ángulos de las figuras o concluir de manera visual que eran congruentes, lo esencial de la situación es que utilizaran la propiedad descrita para encontrar el ángulo faltante.

- **Segunda situación clave: División de un rectángulo**

La segunda situación problema fue uno de los puntos de partida para poner en práctica los criterios de congruencia estudiados, por lo cual se consideró que una de las maneras más efectivas de producir ese acercamiento fue utilizando una figura clave, conocida y trabajada con regularidad en geometría como lo es el rectángulo.

En vista de ello, se preveía que podría haber errores como el que quisieran afirmar la congruencia de los triángulos sin tener ninguna argumentación, lo cual no fue problema ya que desde un comienzo fueron cuidadosos y buscaron la información y los elementos necesarios para poder entonces conjeturar sobre la congruencia antes de apresurarse a afirmar aquello. Los errores que hubo no fueron de carácter cognitivo, sino que fueron producto de malentendidos de contenidos anteriores, tal y como lo fue el que se refirieran al "∡AD" cuando debió haber sido al ∡ADC, que se lograron aprovechar para corregir y seguir con resolución del problema.

Otro error se produjo cuando tenían que establecer la congruencia, realizando mal la correspondencia. Aquello fue previsto durante el análisis a priori, por lo cual el docente orientó a los estudiantes para que pudiesen nombrar la correspondencia de manera adecuada haciendo énfasis en la manera en que se deben nombrar los triángulos, pues al enunciar que ΔADC ≅ ΔCBA, se desprende que $\underline{AD} \cong \underline{CB}$y otras relaciones, lo cual sirve para corroborar si lo que se está estableciendo es correcto.

Las estrategias que realizaron los estudiantes no fueron muy distintas a las previstas. Particularmente, era bastante más probable que establecieran la congruencia por el criterio Lado - Ángulo - Lado, pues se podían desprender con mayor facilidad los elementos que llevaban a el uso de aquel criterio. En cambio, para utilizar el criterio Ángulo - Lado - Ángulo, debían tener en cuenta que, en un rectángulo, la diagonal dimidia a los ángulos de este, lo cual es posible apreciar de manera visual, pero argumentar el porqué de ello o el recordar aquella propiedad puede ser más complejo.

No se presentaron dificultades durante el desarrollo de la situación, por lo cual no hubo manera de contrastar aquellas con lo expuesto en el análisis a priori.

Por último, se pudo apreciar una muy buena actitud reflejada en la participación, elemento que teníamos previsto en el análisis a priori pues no era un problema demasiado complejo y, dado que involucra una figura conocida, el establecer ciertas relaciones no era complejo. Es interesante destacar que luego de resuelto el problema y en base a una interrogante realizada por el docente, tuvieron nociones próximas a la utilidad que puede tener el tópico en cuestión en la cotidianeidad, lo cual nos pareció bastante interesante y sin lugar a dudas es algo que debemos rescatar.

En general, la situación se desarrolló muy similar a lo previsto. Se puede evidenciar que el problema elegido está bien situado en la secuencia de clases, ya que los estudiantes tenían los conocimientos necesarios para poder responder a este. Es por esto que, pensando en una siguiente planificación y realización de la secuencia, se podría dar aún más enfoque a este problema, dándole una contextualización para llamar aún más el interés de los estudiantes y que vayan interiorizando las distintas aplicaciones que podría tener en la vida cotidiana este nuevo aprendizaje.

Tercera situación clave: Clase 5 (Estudio de Clases)

La última situación clave que tratamos en la secuencia de enseñanza aprendizaje se realizó en base a la Metodología de Estudio de Clases, por lo cual la actividad fue registrada y puesta en discusión con un grupo de docentes en formación, tal como se expresó en el capítulo VI. Esta fue realizada después de haber estudiado todo el contenido, siendo un problema en donde debían no solo aplicar los criterios de congruencia, sino que ahondar en elementos claves que les permitieran poco a poco llegar a la solución.

En base a lo ya comentado en aquel capítulo, si bien es menester contrastar las estrategias y errores, es significativo comentar que la participación de los estudiantes y su actitud respecto al problema dista mucho de lo comentado en el análisis a priori, pues esta fue casi nula. Producto de ello, las acciones a considerar que se desprenden del análisis, las cuales están supeditadas a la participación, se ven severamente afectadas.

En primera instancia respecto a los errores esperados, no se pudo evidenciar ninguno de los previstos, lo cual se explica debido a la casi nula participación. Esto da muestra de que la elección de la dificultad del problema no fue la correcta o de que los estudiantes en aquel día no tenían intenciones de participar.

En similitud con lo anterior, no aplicaron las estrategias que se previeron en el análisis a priori. Sin embargo, se puede deducir que tuvieron dificultades como las previstas, pues no supieron interpretar de manera adecuada la información que proporciona que la casa de los Guardaparques se ubique en la mitad de dos caminos.

Así, luego de confrontar los análisis y realizar el estudio de clases, una de las mejoras es dar más espacio a los estudiantes a comentar el problema, dar más oportunidad a que puedan participar y dar sus opiniones antes que el docente sea quien da la respuesta. Es por esto que, en una nueva planificación de esta secuencia, se tiene que establecer más tiempo para realizar la situación clave, para que así el profesor tenga la oportunidad de poder realizar lo anteriormente mencionado con sus estudiantes.

Además, para lograr el interés y curiosidad que se esperaba en el análisis a priori, se debería de mejorar la contextualización del problema, ya que la utilizada finalmente no los hizo sumergirse en el trasfondo matemático y la aplicación de los criterios, sino que más bien se enfocaron en entender cuestiones logísticas de esta contextualización, como los comentado por un estudiante respecto cuál sería el camino más corto para llegar de un punto a otro, siendo que esto no tenía relevancia en la resolución. En vista de ello, la contextualización tendría que ser más simple, sin tanta información que pueda distraer a los estudiantes del objetivo principal.

Otro factor para tomar en cuenta es el posicionamiento del problema en la secuencia, pues si bien se llevó a cabo en la última clase, quedó en evidencia que los estudiantes no estaban preparados para este. En un punto de la resolución, se aprecia que hay un contenido fundamental que los estudiantes si habían visto pero no recordaban, que era sobre las propiedades de los ángulos entre rectas, particularmente los ángulos opuestos por el vértice. Es por esto que, para una próxima implementación del problema, se debería posicionar en una secuencia más larga donde los estudiantes hubieran tenido la posibilidad de enfrentarse a aplicaciones de los criterios un poco más simples. Además, es esencial recordar los contenidos claves antes de abordar un problema, dado que en este caso los estudiantes no recordaban la propiedad de ángulos opuestos por el vértice, por lo que no pudieron abordar en plenitud la situación.

En síntesis, no negamos la inclusión de las aplicaciones al final de la secuencia, sino que más bien hay que realizar una mejor elección de ellas. Para poder utilizar el ya ofrecido en la planificación, es menester que su aplicación se lleve a cabo en una secuencia más extensa y con más tiempo para poder llegar a aquel nivel de dificultad, además de repensar en el contexto del problema para así llamar la atención de los estudiantes.

7.3 Confrontación diagnóstico inicial y diagnóstico final

Para poder hacer un buen análisis de los resultados de la secuencia, utilizaremos el referente teórico con el objetivo de comparar en qué nivel se encontraba el curso en un comienzo y si se logró avanzar hacia un nivel mayor. Por ello, fue necesario realizar una evaluación diagnóstica en el inicio y en el final de la secuencia de enseñanza aprendizaje.

7.3.1 Diagnóstico inicial.

Dado que la presente investigación está enmarcada en el marco teórico del Modelo de Van Hiele, este instrumento tiene como objetivo identificar en qué nivel de razonamiento geométrico se encuentran los estudiantes respecto a la habilidad de argumentar en relación con el concepto de congruencia y los criterios de congruencia de triángulos.

En base a los acotados tiempos dispuestos para la secuencia, las recomendaciones de la profesora en base a la poca participación de los cursos en la modalidad virtual sumado a la necesidad de aprovechar la muestra de la mejor manera posible para cumplir con la investigación, no hubo la posibilidad de realizar un diagnóstico extenso. En vista de ello y privilegiando la sintonía en el primer encuentro con los estudiantes, se optó por realizar una serie de interrogantes durante la primera clase que dieran cuenta de cómo argumentan frente a ciertas nociones básicas del tópico a trabajar, junto con la elaboración de una pregunta en la plataforma www.mentimeter.com.

Cabe destacar que, a pesar de que se intentaron realizar interrogantes para obtener la información más fidedigna posible en sincronía, en vista de los inestables cambios de los últimos años en el contenido a revisar producto del estallido social y el contexto pandémico, según lo recabado por los estudiantes y su profesora, nunca habían visto el tópico respecto de congruencia de triángulos, lo cual también nos proporcionó antecedentes a tener en cuenta para concluir estableciendo el nivel en que se encuentran luego de las actividades realizadas.

La actividad con la que se inició la clase tenía por objetivo dar cuenta de que manera argumentan los estudiantes cuando se les presentan dos figuras y se les realiza la interrogante acerca de si son “iguales” (Figura 1).

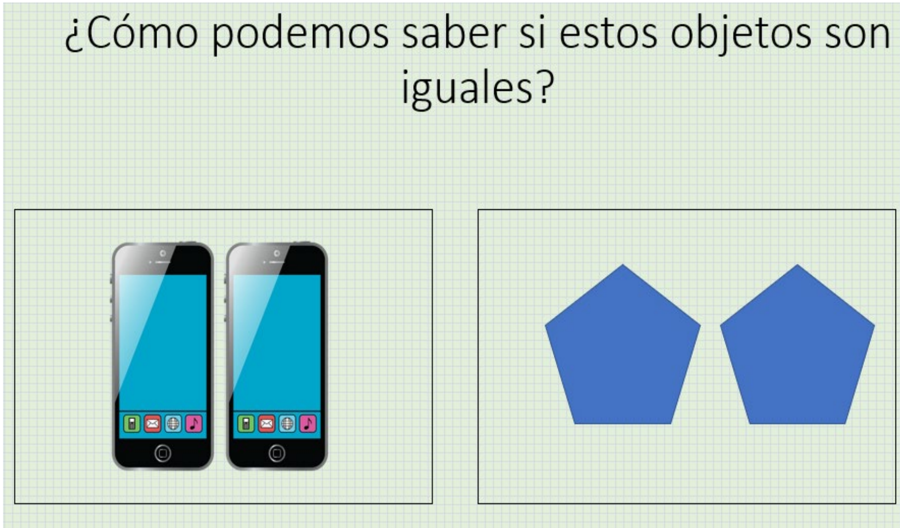


Figura 1

En la siguiente interrogante planteada, se les preguntó a los estudiantes respecto de la igualdad de las mesas, pero ahora en torno a la palabra congruencia. (Figura 2)

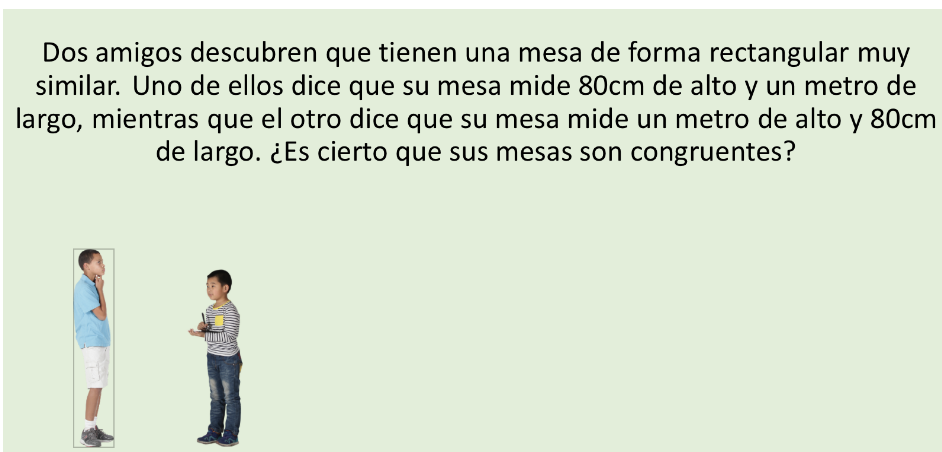


Figura 2

Como última actividad importante en el diagnóstico, se les preguntó: ¿Qué será necesario para que dos triángulos sean congruentes? (Figura 3)

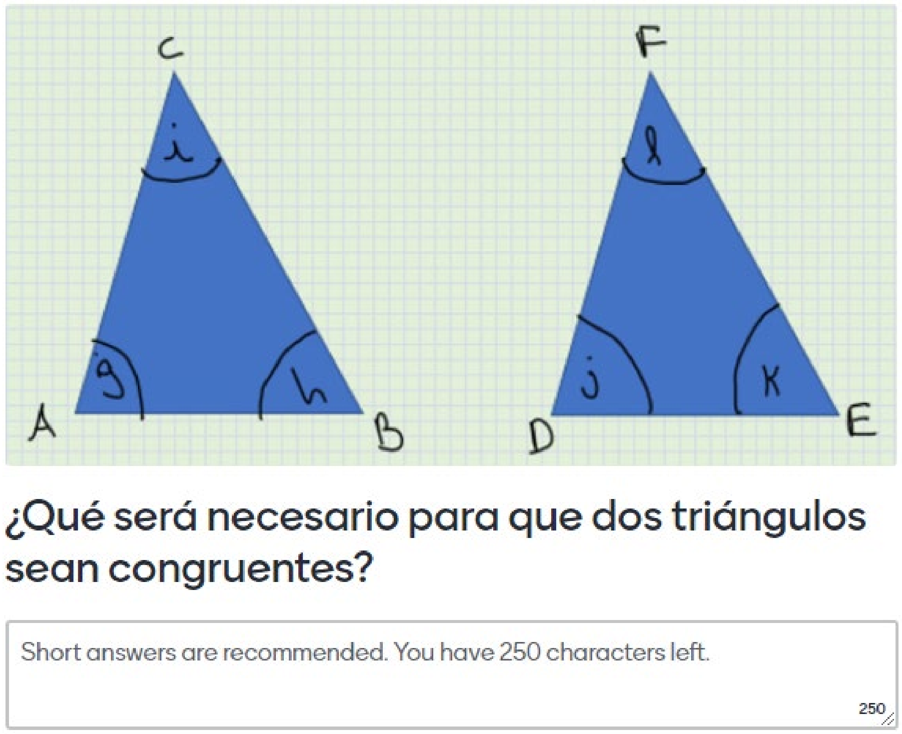


Figura 3

7.3.2 Resultados diagnóstico inicial

Durante la primera clase de carácter diagnóstico e introductorio al concepto de congruencia de triángulos, estuvieron presentes 19 estudiantes.

Respecto de la primera interrogante, de todos los estudiantes que se encontraban conectados, solo cinco emitieron su respuesta frente a la actividad planteada. Cuando se preguntó: ¿Cómo podemos saber si estos objetos son iguales?, un estudiante respondió -por la forma- y luego al afirmar que no eran iguales comenta -el tamaño es diferente-, aludiendo al teléfono. Otros tres, argumentaron que se puede establecer la igualdad en base a la forma y el tamaño de los objetos, indicando que son iguales cuando tienen el mismo tamaño y la misma forma. Un último estudiante comentó que dos objetos son iguales “cuando calzan” entre sí.

Los estudiantes que responden adecuadamente a esta pregunta poseen características de un nivel uno del modelo de Van Hiele, pues "(...) las descripciones son principalmente visuales y las compara con elementos familiares de su entorno" (Gamboa & Vargas, 2003, pág 82). Los estudiantes que contestaron aludieron con seguridad específicamente al referirse al teléfono, no así cuando se trató del pentágono, además lo vemos también en su justificación basada en una comparación totalmente visual.

En la segunda pregunta respecto de si las mesas tienen igual forma y tamaño, un estudiante responde positivamente, mientras otros dos responden de manera negativa. Al solicitarles que argumenten su premisa, solo una estudiante lo hace comentando que no son congruentes pues -porque una mide un metro de alto mientras que la otra 80cm de alto-. Luego, uno de los estudiantes que había afirmado la congruencia, acota que -solo se parecen en las medidas- dando a entender que ya no cree que son similares en forma y tamaño.

A diferencia del primer ejercicio, en las dos acotaciones se logra evidenciar que los estudiantes justifican aludiendo a las partes de la figura y a compararlas correspondientemente. En base a ello, clasificamos una de estas dos respuestas en un nivel de razonamiento dos de Van Hiele, ya que "El individuo puede ya reconocer y analizar las partes y propiedades particulares de las figuras geométricas y las reconoce a través de ellas" (Gamboa & Vargas, 2003, pág. 84). Sobre el estudiante que cambió su opinión y el otro el cual no argumentó su respuesta, se clasificaron en un nivel 1 del modelo, pues no hay rasgos que permitan evidenciar que distinguen las partes y propiedades de las figuras.

Para la tercera pregunta, desarrollada en la herramienta online Menti, se registraron solo cinco respuestas, las cuales son expuestas a continuación (Imagen 1 e Imagen 2):

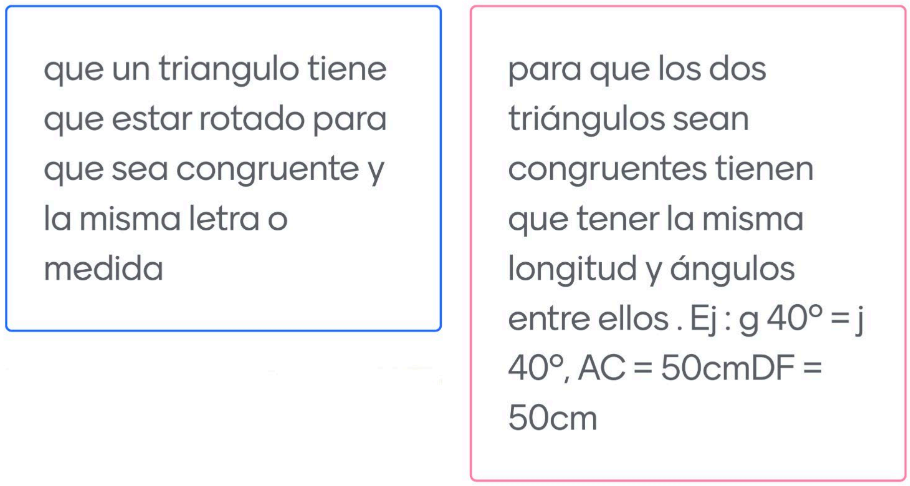


Imagen 1

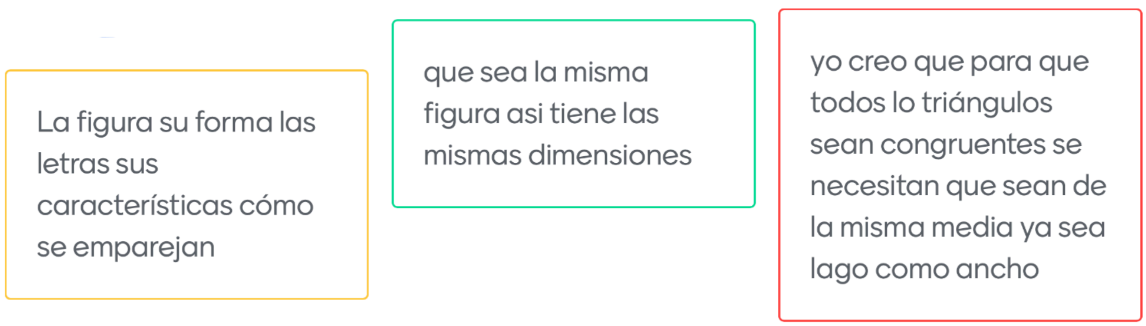


Imagen 2

Del total de respuestas, en cuatro de ellas los estudiantes aluden a elementos como la forma, la rotación o las medidas, sin embargo, las argumentaciones que realizan son erradas, por lo cual esto nos da pautas para deducir que las respuestas se ajustan a un nivel uno del Modelo de Van Hiele ya que, acorde con Gamboa & Vargas (2003), las descripciones son visuales, no reconocen ni explican propiedades y no poseen un lenguaje matemático desarrollado para referirse a las partes del triángulo.

Por último, una de las respuestas antes mencionadas refiere a que, si dos triángulos son congruentes, deben tener la misma longitud, es decir, las mismas medidas de sus lados y además los mismos ángulos entre ellos. Aquella respuesta la categorizamos en un nivel 2 pues “El individuo puede ya reconocer y analizar las partes y propiedades particulares de las figuras geométricas y las reconoce a través de ellas” (Gamboa & Vargas, 2003, pág. 84), es decir, el estudiante que respondió reconoce que para que dos triángulos sean congruentes deben tener ciertos elementos que midan lo mismo y que estén relacionados, más allá de que tengan la misma forma y el mismo tamaño, lo cual intenta fundamentar con un ejemplo de difícil comprensión. A pesar de que la respuesta sobresale por sobre las demás, no es lo suficientemente completa como para alcanzar un nivel 3 en el cual el estudiante “Establece las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir las figuras geométricas, por lo que las definiciones adquieren significado.” (Gamboa & Vargas, 2003, pág. 84), pues, si un estudiante lograse alcanzar aquel nivel con esta interrogante, podría definir la congruencia de triángulos y afirmar mediante argumentos que dos triángulos congruentes deben tener los ángulos correspondientes congruentes y los lados correspondientes congruentes.

En vista de la nula participación de los demás estudiantes que se encontraban conectados a la sesión y dado que no se pueden extraer conclusiones ni categorizarlos según un nivel del Modelo de Van Hiele, solo se consideraron los estudiantes quienes comentaron con anterioridad para elaborar una tabla con información.

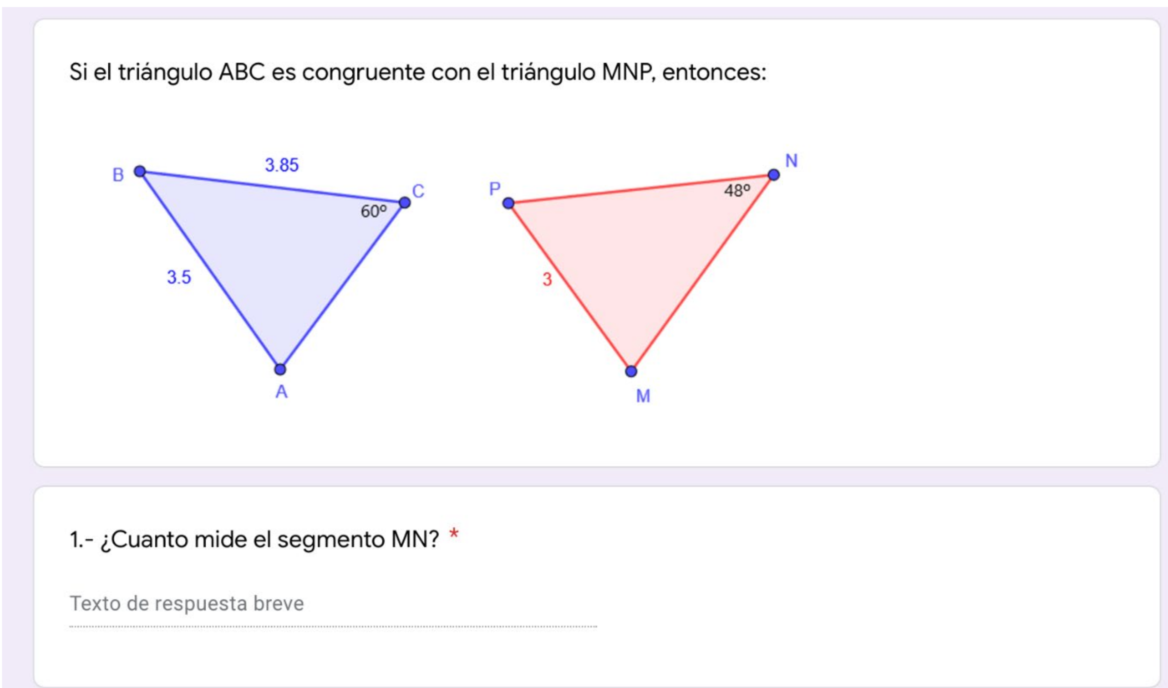
Preguntas	No responden	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
1	14	5	-	-
2	16	2	1	
3	14	4	1	0

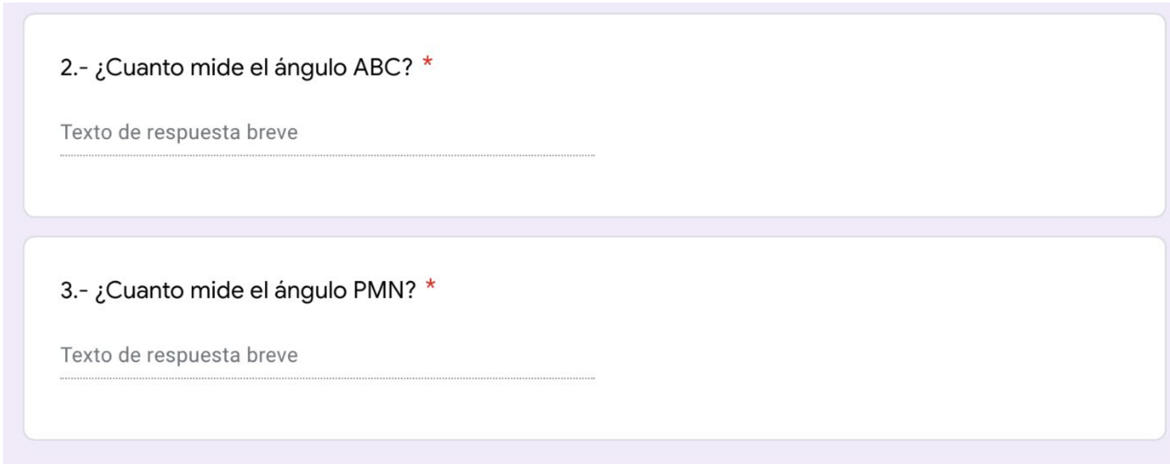
En vista de los resultados obtenidos, la secuencia de aprendizaje estuvo orientada a que los estudiantes pudieran progresar en su nivel de razonamiento geométrico, desde un primer nivel hacia uno superior.

7.3.3 Diagnóstico Final

El diagnóstico final tiene por objetivo verificar en qué nivel se encuentran los estudiantes luego de haber aplicado la secuencia de enseñanza aprendizaje. Debido al contexto virtual, este se realizó ocupando la herramienta Formularios de Google (Imagen 3, Imagen 4, Imagen 5)

Ítem 1 (Imagen 3)





2.- ¿Cuanto mide el ángulo ABC? *

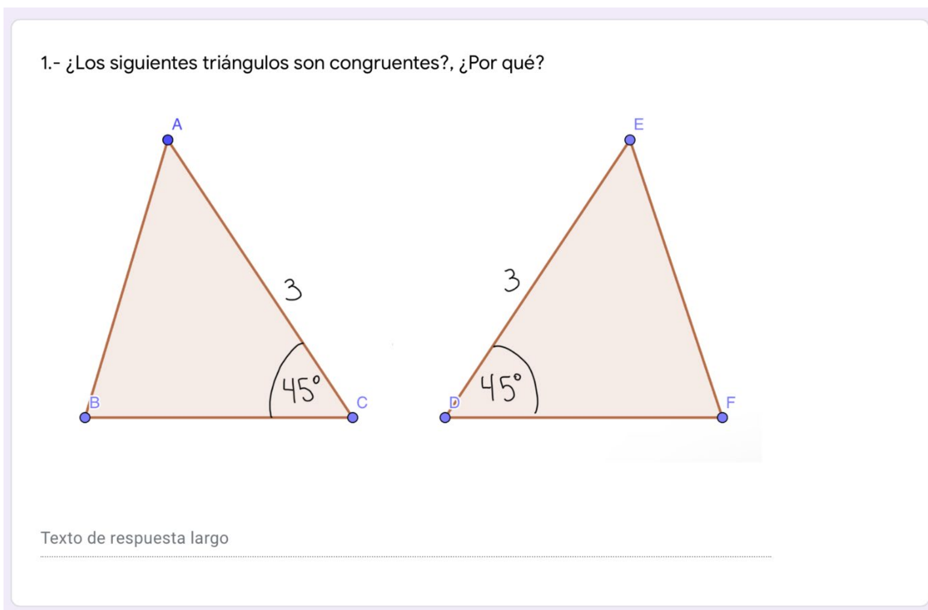
Texto de respuesta breve

3.- ¿Cuanto mide el ángulo PMN? *

Texto de respuesta breve

Imagen 3

Ítem 2 (Imagen 4, Imagen 5)



1.- ¿Los siguientes triángulos son congruentes?, ¿Por qué?

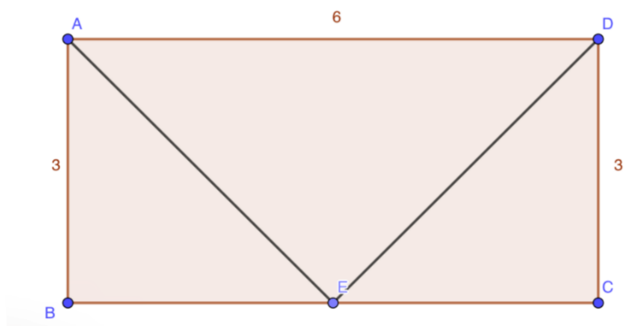
Texto de respuesta largo

Imagen 4

2.- Si un familiar te dice que dibujó dos triángulos de igual tamaño y forma, ¿Cuantas y cuales medidas revisarías para saber que es verdad? *

Texto de respuesta largo

3.- Si en el rectángulo ABCD el punto E es punto medio del segmento BC, ¿Los triángulos ABE y DCE son congruentes?, ¿Por qué? *



Texto de respuesta largo

Imagen 5

7.3.4 Resultados diagnóstico final

Respecto del primer ítem, los estudiantes que solo son capaces de responder de manera correcta a las primeras dos preguntas son categorizados en un nivel dos de Van Hiele, puesto que comprenden las propiedades particulares de la congruencia y pueden establecer que las partes de estas figuras son de igual medida (Imagen 6 - Imagen 9).

1.- ¿Cuanto mide el segmento MN? *

3.5

Imagen 6

1.- ¿Cuanto mide el segmento MN? *

El segmento MN mide 3.5

Imagen 7

2.- ¿Cuanto mide el ángulo ABC? *

48º

Imagen 8

2.- ¿Cuanto mide el ángulo ABC? *

El angulo ABC mide 48

Imagen 9

Otros estudiantes son categorizados en un nivel 1 debido a que sus respuestas no son correctas (Imagen 10 - Imagen 13):

1.- ¿Cuanto mide el segmento MN? *

9 centímetro

Imagen 10

1.- ¿Cuanto mide el segmento MN? *

Uno medi 2.85

Imagen 11

2.- ¿Cuanto mide el ángulo ABC? *

60grados

Imagen 12

2.- ¿Cuanto mide el ángulo ABC? *

72

Imagen 13

Por otro lado, los estudiantes que respondan correctamente en la tercera pregunta nos darán indicios de un nivel tres de razonamiento (Imagen 14, Imagen 15), esto es ya que “(...) reconoce cómo unas propiedades se derivan de otras, construye interrelaciones en las figuras y entre familias de ellas” (Gamboa & Vargas, 2003, pág. 83). Aquello se fundamenta pues, con los datos que se tienen en las figuras, el estudiante tendrá que ir más allá ya que para obtener la medida del ∡PMN, debe utilizar la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, pues ya conoce las medidas de los otros ángulos.

3.- ¿Cuanto mide el ángulo PMN? *

60º

Imagen 14

3.- ¿Cuanto mide el ángulo PMN? *

El ángulo P= 60°, M= 72° ,N= 48°

Imagen 15

De 7 estudiantes que participaron del diagnóstico final, en el primer ítem, 3 lograron responder correctamente a la primera pregunta, 3 respondieron de manera correcta a la segunda y solo un estudiante contestó adecuadamente la tercera pregunta.

El ítem 2 consta de tres preguntas. En la primera de ellas, se presenta una pareja de triángulos que tienen un ángulo y un lado congruentes, cuya interrogante apunta a que argumenten si los triángulos son o no congruentes. En las respuestas, un estudiante respondió solo -Lado, Ángulo, Lado- por lo cual no se puede inferir mucho de su nivel, sin embargo, dado que se infiere que utilizó un criterio cualquiera sin justificación, se categorizó en nivel uno (Imagen 16, Imagen 17). Además, otros cinco estudiantes respondieron a la pregunta afirmando la congruencia en base a que los triángulos poseen igual medida, la cual no justificaron por medio de ningún criterio, por lo que fueron clasificados en nivel 1 al realizar una argumentación acorde con Gamboa y Vargas (2003), de carácter visual e intuitiva.

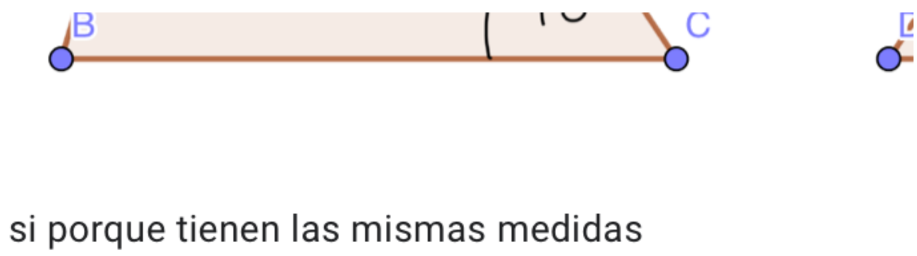


Imagen 16

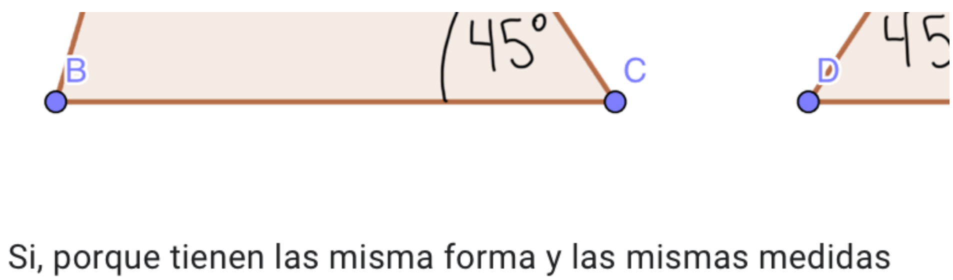


Imagen 17

Por último, solo una estudiante respondió que hacían falta más elementos (Imagen 18). Debido a ello, a esta estudiante se le categoriza en nivel 3 ya que “Establece las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir las figuras geométricas, por lo que las definiciones adquieren significado.” (Gamboa & Vargas, 2003, pág. 83).

Ha simple vista si, pero hace falta la medida de un angulo o lado para tener el criterio

Imagen 18

En la segunda pregunta, se les da un contexto por medio del cual se ven obligados a verificar si un triángulo copiado es congruente al original. Aquella interrogante está orientada a que argumenten en qué elementos como mínimo deben poner énfasis para verificar que aquellos triángulos son congruentes. La gran mayoría de los estudiantes respondió a la interrogante de modo de verificar que tuviesen las mismas medidas y en consecuencia la misma forma (Imagen 19, Imagen 20), lo que denota un nivel en donde pueden “reconocer y analizar las partes y propiedades particulares de las figuras geométricas y las reconoce a través de ellas” (Gamboa & Vargas, 2003, pág. 82), es decir, un nivel dos de razonamiento.

2.- Si un familiar te dice que dibujó dos triángulos de igual tamaño y forma, ¿Cuantas y cuales medidas revisarías para saber que es verdad? *

Revisando sus lados y su ángulo y también su forma

Imagen 19

2.- Si un familiar te dice que dibujó dos triángulos de igual tamaño y forma, ¿Cuantas y cuales medidas revisarías para saber que es verdad? *

Con respecto a las medidas sería importante saber primero si los triángulos tienen sus lados de igual medida.Luego debo verificar que sus ángulos sean iguales y que tengan el mismo tamaño.Para formar un triángulo de 180°,es decir deber ser iguales.

Imagen 20

Por otro lado, los dos estudiantes faltantes completaron el objetivo principal de la secuencia de aprendizaje, ya que respondieron utilizando criterios de congruencia, es decir, dedujeron con sus conocimientos que no era necesario revisar los seis elementos, sino que bastaba con 3 de ellos. Sin embargo, no realizaron ningún tipo de argumentación, por lo cual se decidió ubicarlos en un primer nivel debido a que no existen elementos para comprobar que haya sido una respuesta no memorística (Imagen 21, Imagen 22).

2.- Si un familiar te dice que dibujó dos triángulos de igual tamaño y forma, ¿Cuantas y cuales medidas revisarías para saber que es verdad? *

3 lados

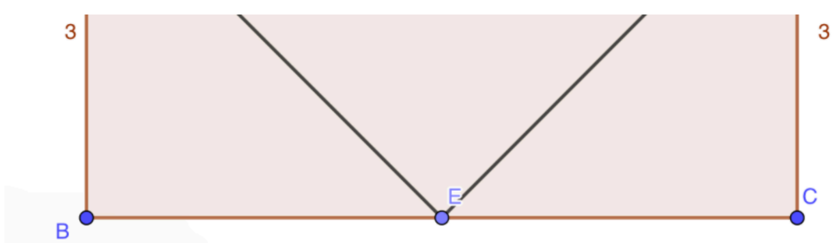
Imagen 21

2.- Si un familiar te dice que dibujó dos triángulos de igual tamaño y forma, ¿Cuantas y cuales medidas revisarías para saber que es verdad? *

Lado Ángulo lado

Imagen 22

En la última pregunta del ítem respectivo, la justificación a la solución del problema es esencial. En base a las respuestas, dos estudiantes no justifican o no logran explicar bien sus ideas y tampoco identifican o utilizan la información referente al punto medio, por lo tanto, son categorizados en un nivel uno (Imagen 23, Imagen 24).



Porqué medien lo mismo por los lados ángulos

Imagen 23

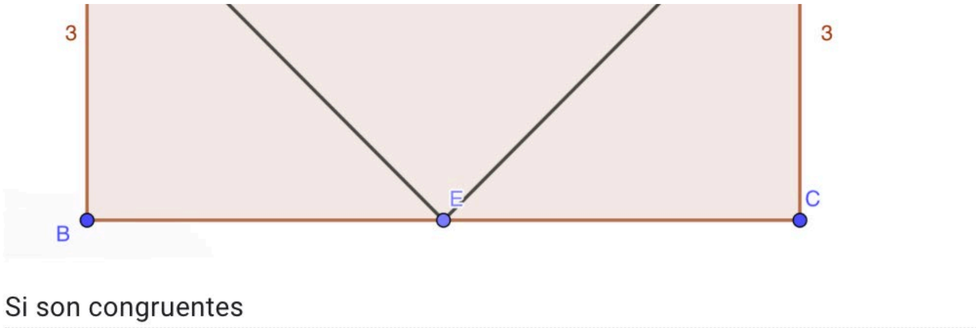


Imagen 24

Por otro lado, el resto de los estudiantes identifica propiedades, pero no las relaciona entre ellas, por lo que son categorizados en un nivel dos (Imagen 25, Imagen 26). Ningún estudiante logra dar su justificación integrando la propiedad de punto medio con los criterios de congruencia.

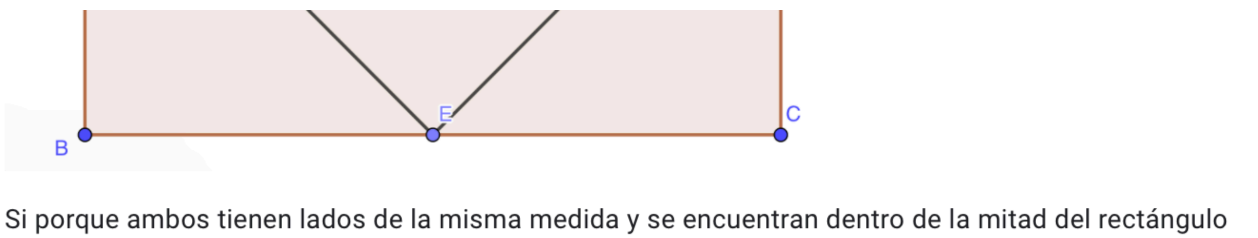


Imagen 25

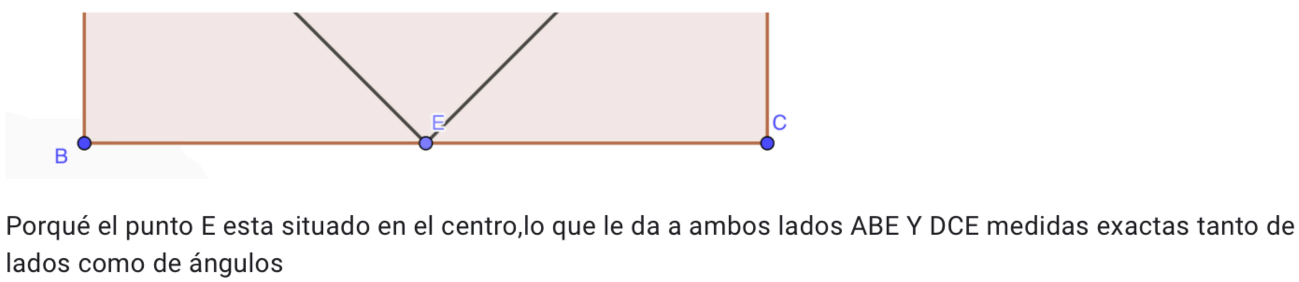


Imagen 26

Finalmente, la categorización por nivel de razonamiento en los distintos problemas del diagnóstico final queda de la siguiente manera:

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Ítem 1	3	3	1
Ítem 2, pregunta 1	6	0	1
Ítem 2, pregunta 2	2	5	0
Ítem 2, pregunta 3	2	5	0

7.3.5 Conclusiones del contraste de los análisis

Luego de los análisis recabados por el diagnóstico final, concluimos que si bien la secuencia de enseñanza aprendizaje estuvo orientada a que los estudiantes progresaran en su nivel de razonamiento geométrico según el Modelo de Van Hiele, no hubo avances significativos en los niveles de razonamiento de los estudiantes.

Uno de los factores que mermaron en la propuesta fue la baja participación de los estudiantes durante el desarrollo de las sesiones de clases, lo cual se hizo patente desde el diagnóstico inicial, pasando por las situaciones claves, hasta el diagnóstico final. La participación para construir las redes de contenidos a estudiar es fundamental, pues “es precisamente en estas interrelaciones en donde la comunicación como proceso de interacción social, y el lenguaje juegan un papel fundamental dentro de la clase de matemáticas, como ejes articuladores entre la compresión y la argumentación; esto es, la comunicación actúa como mediadora, ya que para poder argumentar sobre algún hecho debe comprenderse muy bien, discutirse y entablar consensos para llegar a conclusiones y así construir nuevos saberes.” (Espinosa & Bohórquez, 2013, pág. 105). Además de lo comentado, el hecho de que una baja cantidad de estudiantes haya resuelto los diagnósticos realizados, deja fuera una gran cantidad de alumnos de los cuales se desconoce totalmente cómo fue su progreso en función de la secuencia implementada.

Otro factor que mermó durante el desarrollo de la investigación fue la modificación de la cantidad de clases predestinadas. Si bien en un inicio se tenía previsto la realización de la secuencia en seis clases de una hora pedagógica cada una, en base a situaciones externas se tuvo que acortar la secuencia a cinco clases, lo cual impactó en el cumplimiento de los objetivos de la secuencia y en el trabajo realizado en base a las fases del marco teórico y en el diseño de la actividad llevada a cabo con la Metodología de Estudio de Clases, influyendo en el aprendizaje de los estudiantes.

Aún con las desventajas nombradas, es menester realizar conclusiones a partir de los objetivos planteados con la evidencia que se logró recabar a lo largo de la investigación, particularmente respecto de las acciones que realizaron los estudiantes para argumentar.

En base al diagnóstico realizado durante la primera sesión, se concluye que los estudiantes son capaces de establecer relaciones de igualdad y congruencia entre las figuras única y exclusivamente de manera visual, acorde con lo planteado por Gamboa y Vargas (2003) en el primer nivel del Modelo de Van Hiele. En base a ello, con la secuencia de clases se tenía previsto que pudieran distanciarse de esa manera intuitiva y, junto con avanzar de nivel, argumentar mediante los razonamientos estudiados.

Así, en base a las respuestas se pudo caracterizar tres tipos de acciones distintas para argumentar.

La primera corresponde a una manera intuitiva de argumentar, propia del nivel uno, pues “No es capaz de reconocer o explicar las propiedades determinantes de las figuras, las descripciones son principalmente visuales y las compara con elementos familiares de su entorno” (Gamboa & Vargas, 2003, pág. 82). Las características de los estudiantes que ahondan en este tipo de acciones para argumentar se basan en establecer la congruencia entre figuras de manera visual, haciendo énfasis en la forma y el tamaño (Imagen 17)

Otras acciones realizadas por los estudiantes guardan relación con lo planteado en el segundo nivel por Gamboa y Vargas (2003), en el cual pueden reconocer propiedades particulares de figuras, pero no pueden establecer relaciones o clasificaciones entre ellas. Ejemplo de ello es lo relativo a la imagen 20, en donde el estudiante establece que se debe conocer las medidas de los tres lados y ángulos para verificar si los triángulos son congruentes, pero no es capaz de establecer una relación más allá, por ejemplo, pensando en que los criterios de congruencia de triángulos nos permiten, con la mínima información, aseverar que dos triángulos son congruentes.

Una última caracterización sobre las acciones que realizan para argumentar la establecemos en base a estudiantes que logran el nivel 3, que acorde con Gamboa y Vargas (2003) establecen condiciones necesarias y suficientes que cumplen las figuras geométricas. Así, un estudiante en aquel nivel habría dado cuenta de la cantidad mínima de elementos necesaria para poder verificar en la pregunta 2 del ítem 2, que los triángulos son congruentes, argumentando aquello. Ejemplo de producciones de estudiantes que lograron ese nivel se ven reflejadas en la Imagen 15, en donde el estudiante fue capaz de establecer, por medio de propiedades de congruencia y de la suma de los ángulos internos de un triángulo, la medida de los tres elementos pedidos.

Finalmente, a pesar de las argumentaciones realizadas y la progresión que se pudo observar en varios estudiantes, una mayoría continúa con problemas para argumentar y comunicar, habiendo varias producciones en donde existe poca coherencia en lo que escriben.

CONCLUSIONES

Por años, el área de la matemática ha adolecido de diferentes tratamientos que no hacen más que entorpecer el desarrollo de habilidades en quienes la aprenden, es decir, los estudiantes. Aquello, junto con los problemas que aqueja el sistema educativo de Chile, producen que la enseñanza de esta área sea enfocada más a la memorización de fórmulas y algoritmos que a la construcción de pensamiento y de razonamiento matemático.

Por si no fuera poco, la pandemia del Covid-19 que ha dejado millones de muertos a lo largo del mundo, ha cambiado la forma de vivir y de interactuar de todos los seres humanos, a tal punto de que, si nos detenemos a mirar al pasado, probablemente nos envuelva una sensación nostálgica y amarga.

Este cambio que ha producido el nuevo modo de vivir ha impactado fuertemente en todas las esferas del ser humano, y la educación no está exenta de ello, más aún, es una de las aristas que más ha sufrido las consecuencias de este repentino cambio. Lejos de los encuentros en donde se producía diálogo, interrelacionándose entre quienes cohabitan por unas horas en una institución educativa, todo ha quedado reducido a una escueta interacción a través de un monitor, lo cual ha empeorado de sobremanera las problemáticas ocurridas en torno a la educación.

La experiencia vivida por nosotros como futuros docentes durante este proyecto de investigación no ha estado exenta de problemáticas asociadas a lo comentado, pues esta investigación, desarrollada bajo una modalidad completamente virtual, se vio severamente afectada por la baja participación del grupo curso, comprimida por la poca cantidad de sesiones que se nos otorgó para desarrollar la investigación y restringida por la nula interacción entre pares, lo cual hubiese aportado potentemente a la habilidad de argumentar y a la construcción del tópico estudiado durante esta secuencia de aprendizaje.

Sin embargo, lejos de decepcionarnos por aquello, nos sentimos desafiados, pues, con todos los saberes recogidos durante esta investigación, podremos ir realizando los cambios que tanto anhelamos.

Aprendimos a utilizar un marco teórico como lo fue el Modelo de Van Hiele que nos orientó y nos dictó pautas sobre cómo proceder para elaborar la secuencia de enseñanza aprendizaje, trabajando en torno a las fases y niveles los cuales resultaron ser sumamente orientadores para la generación de razonamiento geométrico. Junto con ello, aprendimos lo importante que es realizar un diagnóstico antes de introducir una unidad educativa, pues es deber de todo educador tener en cuenta los conocimientos previos que sus estudiantes poseen.

Aprendimos y evidenciamos la importancia de la historia y la epistemología de un objeto matemático, pues hacer aquella revisión respecto de la evolución de un objeto con el paso del tiempo y de cómo ha sido su tratamiento para llegar a ser lo que es hoy, nos permite recoger y recabar elementos que podemos incorporar a nuestras secuencias didácticas, evitando posibles errores y obstáculos que alguna vez tuvieron grandes matemáticos y que hoy por hoy, también cometen nuestros estudiantes.

Aprendimos también a trabajar con diferentes metodologías que nos permitieron enriquecer nuestro proceso de elaboración de clases, por un lado utilizando la Metodología de Estudio de Clases, pudiendo discutir y reflexionar con nuestros propios colegas acerca de nuestras situaciones claves logrando evidenciar elementos que no podríamos haber sido capaces de observar por nuestra cuenta, y por otro lado, utilizando elementos de la micro - ingeniería didáctica que nos ayudaron a realizar análisis más exhaustivos y profundos en torno a la secuencia de enseñanza aprendizaje, los cuales nos servirán para el desarrollo de nuestra profesión docente. En vista de todo ello, esperamos que esta investigación pueda servir de ayuda a todos quienes quieran contribuir al desafío que significa educar hoy en día, pues es imperioso armarse de todos los elementos posibles para emprender esa batalla.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrate, R.; Delgado, G. & Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación (Online)*. Vol. 39, N°1. Recuperado el 22 de octubre de 2007 en http://www.rieoei.org/deloslectores/1290Abrate.pdf
- Castiblanco, A.; Urquina, H.; Camargo, L. & Acosta, M. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional, Enlace Editores Ltda.
- Barrantes, M. y Blanco, L. J. (2005). *Análisis de las concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría.* Números, 62. 33 - 44
- Barrantes, M. y Blanco, L. (2004). *Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestros sobre la geometría escolar.* Enseñanza de las Ciencias, 22(2), 241-250
- Barrantes, M., López, M. y Fernández, M. Á. (2015). *Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto.* PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 9(2), 107-127.
- Crespo, C. (2005). La importancia de la argumentación matemática en el aula. *Premisa*, *24*, 23-29.
- Jiménes, A.; Miryam, L. (2013). Comunicación y argumentación en clase de matemática. Educación y ciencia -num.16. Pag. 101-106.
- Iturra, F.; Manosalva, C.; Ramirez, M.; Romero, D (2019). *Texto del Estudiante Matemática 7º Básico*. Santiago, Chile: SM
- Elgueta, J.; Muños, G. & Santis, M. (2014). *Matemática 1.º Medio Texto del estudiante.* Santiago, Chile: SM.
- Ortiz, A.; Reyes, C.; Valenzuela, M. & Chandía E. (2012). *Matemática 1˚Medio Texto para el Estudiante*. Santiago, Chile: McGRAW-HILL
- Fresno, C.; Torres C. & Ávila, J. (2020). *1.º Medio Matemática Texto del estudiante.* Santiago, Chile: Santillana.

- Vanegas, J. C. (2019). Propuesta para el proceso de enseñanza - aprendizaje de las relaciones de semejanza y congruencia de triángulos. [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia] https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/75880
- Vargas, G. V., & Araya, R. G. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, *27*(1), 74-94.
- Sánchez, C. H. (2012). La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32), 71-92.
- Giovannini, E. N. (2015). "Una mancha en el sol de Euclides": Hilbert y la teoría euclídea de las proporciones. *Tópicos*, (30), 19-39.
- Morales, M. A., & Velázquez, S. (2007). Algunas inconsistencias en el sistema axiomático deductivo de los elementos de Euclides y sus implicaciones en el aprendizaje de la geometría.
- Hemmerling, E. M. (2009). *Geometría elemental*. México: Limusa.
- de Euclides, E. (1991). Traducido por María Luisa Puertas Castaños. *Madrid, Gredos*.
- Hilbert, D. (1991). *Fundamentos de la geometría* (No. 5). Editorial CSIC-CSIC Press.
- Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. *Cuadernos*, *2*, 1-10.
- Molina, C. A., & López, F. S. (2019). Trabajo colaborativo docente: nuevas perspectivas para el desarrollo docente. *Psicologia Escolar e Educacional*, *23*.
- Rosas, M. F. E. (2020). ¿Hay alguien ahí? Interacciones pedagógicas con cámaras apagadas en tiempos de pandemia. *Revista Pedagogía Universitaria y Didáctica del Derecho*, *7*(2), 1-8.
- Ordorika, I (2020). «Pandemia y educación superior». Revista de la educación superior, 49 (194): 1-8. Disponible en bit.ly/3pv3Lh6
- De Faria E. (2006). *Ingeniería Didáctica*. Cuaderno de investigación y formación en educación matemática.

- Mena, A. (2006). *El Estudio de Clases Japonés: en perspectiva (pp. 1-7).* Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.
- Espinosa, A. J., & Bohórquez, L. M. P. (2013). Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. *Educación y ciencia*, (16)