



Universidad
Alberto Hurtado

Geometría: Sectores y segmentos circulares

Karen Ahumada Krumm¹

Resumen

El presente artículo aborda el proceso de planificación y reflexión de la implementación de una unidad didáctica en un primer año medio de un colegio municipal científico humanista de la comuna de Las Condes. Las fuentes y referencias teóricas utilizadas se ciñen, principalmente, por parte del aspecto didáctico, en la teoría de registros de representación semiótica de Raymond Duval. Y, por parte del aspecto pedagógico, en los aportes de Vygotski, específicamente en sus concepciones de: “zonas de desarrollo: real, próximo y potencial”, cuyas ideas nacen de un proceso contextualizado y sociocultural. En lo concerniente a aspectos curriculares, la unidad se sitúa en el eje de Geometría y, más específicamente, en el tema de los sectores y segmentos circulares, de acuerdo con el programa sugerido por el Currículum Nacional. La elaboración de este artículo tiene como fin dar cuenta de todas las etapas necesarias del proceso que conlleva la enseñanza de una unidad didáctica, contemplando el proceso previo traducido en la planificación y diseño, la implementación y la reflexión posterior de la unidad didáctica. Con el desarrollo de la unidad, se busca que los estudiantes sean capaces de trabajar en al menos dos registros diferentes de representación semiótica para lograr en los estudiantes un aprendizaje real y significativo, que atienda a la divergencia de las características de los educandos y sus formas de aprendizaje. Finalmente, este documento presenta los resultados obtenidos de esta implementación y, junto a ellos, una reflexión que explique de alguna forma la causa de tales resultados y, que abra camino a un plan de mejora.

PALABRAS CLAVE: aprendizaje, enseñanza, registro semiótico, objeto matemático.

INTRODUCCIÓN

Según La Real Academia Española (2019), la matemática puede definirse como: “Ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones” (s. p). Lo anterior sostiene tácitamente que a partir del desarrollo del pensamiento lógico es posible estudiar los modos en que operan y se relacionan entidades abstractas entre sí, por medio de la aplicación de sus propiedades. Algunos ejemplos son los números y conjuntos numéricos, figuras y cuerpos geométricos, íconos, y símbolos; entre otros.

Hoy en día las matemáticas se usan en todo el mundo como una herramienta esencial en muchos campos, entre los que se encuentran las ciencias naturales, la ingeniería, la medicina y las ciencias sociales e incluso disciplinas que, aparentemente, no están vinculadas con ella, como la música (por ejemplo, en cuestiones de resonancia armónica). En consecuencia, al aprendizaje de la matemática se le asocia una gran y transversal relevancia. Entre otros motivos puede mencionarse el desarrollo del pensamiento analítico, servir de instrumento reflexivo, potenciar la capacidad de razonamiento lógico para encontrar soluciones a problemas reales, servir de puente interdisciplinar, describir elementos y sistemas observables de la realidad, desarrollar nuevos algoritmos que contribuyan a ciencias asociadas a la ingeniería, medicina, física, química, economía, entre otras; y más concernientemente al tópico del presente artículo: la base de los fundamentos de los estudiantes y así garantizar la confianza y conciencia en sus expectativas y resultados para accionar en la cotidianeidad.

Karen Ahumada Krumm, Ingeniera Comercial, Universidad Diego Portales y estudiante de Pedagogía para Profesionales, Universidad Alberto Hurtado. Taller de Titulación y Práctica Profesional de la especialidad de Matemática guiado por profesor didacta Hugo Lorca, 2019. Conducente al título de Profesora de Educación Media en Matemática y Licenciada en Educación.

El eje de matemática sobre el cual trata este artículo es el de la geometría, esperando que los estudiantes logren orientarse adecuadamente en el espacio, comprender, estimar y calcular apropiadamente formas y distancias relacionadas con las figuras geométricas más elementales que permitirán la continuación del pensamiento lógico en su aprendizaje. Precisamente, en este artículo, se abordará el cálculo de segmentos y sectores del círculo y de la circunferencia. En efecto, Gamboa y Ballesteros (2010) establecen que para el aprendizaje de la geometría se requiere el desarrollo de habilidades visuales y argumentativas, especialmente, si se quiere alcanzar un aprendizaje donde las experiencias perceptivas permitan anclar la teoría, de manera tal que lo aprendido, tome y construya sentido, y que por último, este sea corroborado y potenciado por las habilidades visuales que añadan precisión en las conclusiones de los estudiantes.

Diagnóstico Institucional

La presente información tiene como fuente principal el Proyecto Educativo del establecimiento educacional en cuestión, seguido por los informes oficiales y nacionales de resultados SIMCE de los últimos períodos hasta la fecha, y algunas declaraciones del personal directivo de la institución educativa en la que se llevó a cabo la implementación de la unidad didáctica.

El establecimiento educacional, que concierne al presente artículo académico, corresponde a un colegio municipal de la ciudad Santiago de Chile, comuna de Las Condes, creado en el año 1999. Desde sus orígenes, forma parte de la Corporación de Educación y Salud de Las Condes, encontrándose emplazado en esta misma comuna. Esta institución laica, de jornada escolar completa y diurna, recibe estudiantes hombres y mujeres.

Entre los aspectos culturales más relevantes de este centro educativo, destaca: corresponder a un colegio auto-declarado y formalmente reconocido a nivel nacional como una institución educacional inclusiva y de excelencia académica. La primera de estas cualidades se fundamenta en la admisión de estudiantes con necesidades educativas diferentes de tipos transitorias y/o permanentes; lo cual corresponde a un 13,3% del volumen total y actual de estudiantes. Conjuntamente a lo anterior, el colegio se encarga de recibir estudiantes con movilidad reducida y de elaborar planes especiales para deportistas de alto rendimiento, entre otras adecuaciones. La excelencia académica, a su vez, se fundamenta principalmente en los resultados SIMCE y PSU de sus estudiantes desde sus primeros años hasta la actualidad, los cuales siempre han sido por sobre la media e incluso en el último período observado, han detentado el lugar de líderes en comparación a otros colegios de la comuna. Con el fin de poder alcanzar estos estándares, el centro educativo dispone de duplicidad docente para las asignaturas de matemática, lenguaje y ciencias, presente en todos los niveles y triplicidad en cursos clave para la preparación del SIMCE y la PSU. (Agencia de Calidad de la Educación (2019) Documentos en anexo 1.

Es importante destacar que el colegio está en vías de obtener el sello matemático dentro de las escuelas de la corporación mientras que, paralelamente, orienta la forma de operar y enseñar de forma transversal hacia el trabajo colaborativo, con el fin de que en el mediano plazo, se logre alcanzar el reconocimiento del anhelado sello matemático. El sello matemático consiste en una certificación al establecimiento educacional que da prueba de que el planteamiento, enseñanza y estudio de la matemática es transversal a la enseñanza, y que las prácticas pedagógicas están en general centradas en el desarrollo del pensamiento lógico. Esta certificación es proporcionada por CEI (*Center of Educational Innovation*) de Estados Unidos una vez que evalúa in situ al establecimiento educacional por un comité proveniente de Nueva York, basado en una extensa rúbrica que incorpora en su lista, entre otros elementos, las prácticas docentes, las prácticas de los estudiantes, la disposición espacial del aula, disponibilidad de recursos didácticos, tecnológicos, etc., trabajo colaborativo en el quehacer pedagógico y el ambiente de trabajo para los estudiantes. Mencionar, además, que dentro de

la corporación, cada centro educativo busca una certificación y especialización de CEI en un área diferente: deportes, inglés y ciencias.

Este establecimiento tiene como misión educar y formar estudiantes, que independientemente de la situación social y/o económica que posean, perciban oportunidades reales de ascenso económico y social para su futuro laboral, junto con una formación valórica basada en la fe cristiana y con bases en la vida democrática. En cuanto a su visión, este centro educativo declara su intención de alcanzar un nivel de excelencia superior en sus estudiantes tanto académica como integralmente, proponiéndose generar variadas experiencias e intervenciones pedagógicas, salidas culturales, trabajos sociales en recesos de vacaciones, concursos literarios, participación en programas nacionales de robótica y de ciencias, posicionándose como uno de los colegios más prestigiosos del país, sin desmedro de su naturaleza de establecimiento municipal.

Los niveles escolares que comprende son desde Pre-Kínder hasta IVº Medio, presentando dos cursos por nivel escolar: A y B. Los cursos son mixtos y se constituyen por un número de estudiantes que varía entre 35 y 42 estudiantes. Actualmente, el colegio cuenta con un total de alrededor de 1.000 estudiantes.

Entre los proyectos más relevantes del colegio que conciernen a la disciplina de Matemática está la planeación actual de las primeras Olimpiadas Matemáticas a nivel interno, con la expectativa de que, posteriormente, el establecimiento en cuestión sea la sede para las Olimpiadas Matemáticas de todos los colegios pertenecientes a la corporación.

En cuanto a los recursos físicos con los que cuenta el establecimiento, destaca la disponibilidad de vías de acceso para silla de ruedas y ascensor, recursos pensados para aquellos estudiantes con dificultades para su desplazamiento, lo cual representa uno de los fundamentos de porqué el colegio se proclama como inclusivo. En el mismo sentido, también cobra relevancia la participación activa de educadoras diferenciales en el desarrollo de las clases, planificación y evaluación de matemática, lenguaje y ciencias. Paralelamente, el establecimiento cuenta con gimnasio, biblioteca, patio techado, laboratorio de ciencias, sala de computación, auditorio, comedor para estudiantes y comedor para funcionarios, sala de Artes Visuales y sala de Música. En cuanto a sus recursos pedagógicos y tecnológicos, dispone de juegos didácticos para distintas disciplinas y niveles escolares: cuerpos geométricos básicos de plástico transparente, calculadoras, tablets, implementos para realizar experimentos sugeridos por el programa escolar proporcionado por el Ministerio de Educación, televisores plasma en cada sala de clases, proyector, WIFI, entre otros. Todos estos materiales son recursos que permiten el trabajo tanto individual como grupal, debido a que su disponibilidad no es un problema para el quehacer docente.

El curso en el que se llevó a cabo la implementación didáctica fue un Iº Medio, conformado por 42 estudiantes, 17 mujeres y 25 hombres. La sala de clase de este curso es un tanto pequeña para la cantidad de estudiantes, especialmente considerando que, por mandato de coordinación, los alumnos deben disponer sus mesas y asientos formando grupos de 4/5 estudiantes, promoviendo así el trabajo colaborativo. Este espacio cuenta, como todas las salas de clase, con su televisor de pantalla plana, proyector y red de internet inalámbrica.

Por su parte, el clima de aula es regular y heterogéneo, pues responde a las variadas personalidades, preferencias, niveles cognitivos, aptitudes, actitudes de respeto hacia los profesores entre otras relevantes, disposición hacia el aprendizaje, motivación en general y también hacia la asignatura de matemática, estilos de aprendizaje, etc. Este último rasgo, fue evaluado por el equipo profesional PIE del colegio cuando los estudiantes estaban por ser promovidos a enseñanza media. Esta información fue relevante al momento de considerar los elementos tomados en cuenta en la planificación de las clases, pues en la medida de que los

estilos kinésicos y grupales estén presentes, se aseguraba estar en sintonía con la aprehensión de conocimientos más efectiva de los estudiantes.

Siguiendo con la descripción conductual de los aprendientes, destacan entre los problemas conductuales: la falta de respeto a los profesores en general, basados en comunicarse con un volumen innecesariamente alto de voz, tono golpeado en momentos de frustración, poca tolerancia a situaciones fuera del propio control, falta de reconocimiento de responsabilidad sobre hechos y sus consecuencias, lenguaje inadecuado dentro del aula en periodo de clases y dificultades para seguir instrucciones básicas y directas. Por su parte, las faltas disciplinarias que destacan en el curso pueden explicarse por: 1) La falta de educación o formación con que cuentan los estudiantes desde su hogar; 2) La acumulación de faltas en que han incurrido los estudiantes en el colegio a lo largo de los años, sin existir un mecanismo de reparación/corrección de la conducta que sea de la misma ponderación a la falta; 3) Una vez que los estudiantes han sido promovidos a la enseñanza media, continúa la ausencia de mecanismos de reparación/corrección de la conducta de nivel moderado, grave y gravísimo, a pesar de que estas sean notificadas a la profesora jefe, inspectores, apoderados en reuniones de curso e individuales y registradas en el libro de clases. La realidad que el último punto genera, a nivel colectivo, en los estudiantes se traduce en que está permitido comportarse con un lenguaje inapropiado, con acciones inadecuadas, agresividad entre sus pares y para con los profesores. La conducta del curso ha obligado al establecimiento a tomar medidas especiales para poder controlar la situación de este grupo de estudiantes.

Las clases, por lo general, son estructuradas de la siguiente forma: 1.- Inicio de clase: Se espera silencio para saludar y se intenciona que los estudiantes se pongan de pie en señal de orden y respeto (dictado por normativa del colegio), se da la bienvenida a los estudiantes y se les pide tomar asiento. Se registra en la pizarra la fecha y el objetivo de la clase. Se recogen conocimientos previos y se introduce el tema a tratar en el módulo. 2.- Desarrollo de la clase: Profesor recurre a ejemplos y contraejemplos intencionadamente que evoquen al contenido, los estudiantes recuerdan los conocimientos anteriores para responder y solucionar la situación problemática que el profesor les ha planteado. El profesor hace saber el acierto o desacierto de las conclusiones de los estudiantes y de sus razonamientos para llegar al resultado. Luego, el profesor plantea un problema que no alcanza a ser solucionado con los conocimientos que disponen los estudiantes hasta ese momento. Entonces, el profesor en ese momento recurre a ejemplos y contraejemplos donde los estudiantes puedan aterrizar y semejanzas y, de manera colaborativa entre alumnos y profesor, se formaliza el contenido y los estudiantes adquieren el material pedagógico para trabajar por sí mismos. 3.- El profesor da por finalizada la actividad resumiendo, a partir de los aportes de los estudiantes, los contenidos aprendidos durante la clase y las características fundamentales de este. Se despide de los estudiantes.

Lo anterior se consideró en la planificación de clases, tomando también en cuenta los modelos pedagógico y didáctico seleccionados. Por mandato de la directiva académica, generalmente, la profesora escribe en la pizarra y solo de manera ocasional dicta los contenidos. Mientras que, en caso de requerir del análisis de gráficos, de representaciones geométricas u otro similar, se suele recurrir a la utilización de diapositivas. Esto corresponde a un estilo conductista de enseñanza lo que podría ocasionar roces para implementar un estilo de enseñanza, ligado más bien a la exploración, tendiente a generar el requerido quiebre cognitivo para el aprendizaje significativo. Lo anterior se contrasta fuertemente con el estilo de aprendizaje colaborativo que el colegio propone incorporar y supuso una decisión pedagógica importante al momento de implementar la unidad didáctica.

Las evaluaciones que se llevan a cabo son diversas, las que van desde pruebas escritas (de selección múltiple y de desarrollo) hasta la elaboración de tutoriales en grupo, actividades colaborativas, talleres escritos en pareja, controles individuales de 10 minutos, cálculo mental,

etc. Sin embargo, para la evaluación final de la unidad (la calificación al libro de clases) el equipo UTP impone una determinada forma de evaluación, la cual consiste en una prueba formal, escrita e individual donde exista al menos veinticinco preguntas de selección múltiple (en enseñanza media) más un ítem de desarrollo, donde se midan las habilidades de conocer, comprender y aplicar. La explicación que el equipo UTP ha brindado para justificar esta medida anteriormente descrita radica en que los estudiantes estarán acostumbrados a rendir las pruebas estandarizadas a nivel nacional, lo cual es un foco importante para el colegio.

Desde un punto de vista didáctico, la profesora centra sus enseñanzas en el desarrollo de la flexibilidad de pensamiento matemático, lo cual se traduce, principalmente, en recurrir a diferentes registros (correspondiente a la Teoría de Registros semióticos de Duval) y, además, durante toda etapa del proceso de aprendizaje-enseñanza, por justificar la operatoria o la respuesta, según corresponda. Se destaca la manera en que la profesora aborda el concepto del error como siempre oportunidad de enseñanza y nunca como causa de castigo o burla hacia el estudiante equivocado. Esta cualidad del error es constantemente reiterada a los estudiantes para así motivar la participación activa de los estudiantes.

A partir de todo lo detallado, se tomaron las siguientes decisiones pedagógicas para implementar la unidad didáctica: Abordar un estilo de enseñanza en que los estudiantes, a partir de las experiencias que la profesora propone, generen un quiebre cognitivo y evidencien la necesidad de aprender el nuevo contenido para poder dar respuesta a las nuevas situaciones problemáticas. Esto va de la mano con el desarrollo de una clase que incorpora el trabajo colaborativo que el colegio aprueba y promueve. Sin perjuicio de lo anterior, es importante también recordar las formas conductistas de enseñanza a las que los estudiantes están acostumbrados a aprender y a relacionar. En la última parte de esta reflexión es donde radica el principal desafío pedagógico: romper con un modelo conductista de enseñanza sin abandonarlo totalmente. Una vez aprendido el contenido los estudiantes pueden recurrir a él. Mas al momento de enseñanza, el profesor intencionará la exploración para la adquisición del nuevo conocimiento. Paralelamente, representa un desafío igualmente urgente incurrir en la utilización del juego o actividades que requieran la experiencia sensorial o enactiva por parte de los estudiantes en la sala de clases, para el desarrollo de la motivación de los estudiantes, junto con potenciar habilidades dormidas en la rutina de la clásica dinámica del aula de clases (González, Molina y Sánchez, 2014). Todo lo señalado se fundamenta en el apartado siguiente, el Marco teórico.

Marco teórico

Posicionamiento pedagógico

El aspecto pedagógico se fundamenta en los aportes de Vygotski, refiriéndose principalmente a las “zonas de desarrollo: real, próximo y potencial” de cada estudiante, basado en un proceso contextualizado y sociocultural. La generalizada homogeneidad de los estudiantes del curso sobre el cual se lleva a cabo este artículo como, por ejemplo: el capital cultural adquirido en el colegio, las mismas experiencias pedagógicas y sociales (mismas clases, mismos textos escolares, mismo entorno, mismos profesores, mismos desafíos pedagógicos etc.) debido a ser compañeros de curso en su mayoría incluso desde educación pre-básica, permiten fundamentar esta elección. A propósito de estas ideas, Piaget (1937), autor que sentó las bases para los aportes de Vygotski en el constructivismo, expresó en uno de sus escritos:

el conocimiento del mundo exterior comienza por una utilización inmediata de las cosas (...) la inteligencia no comienza así ni del conocimiento del yo ni de las cosas en cuanto tales sino de su interacción y, orientándose

simultáneamente hacia los dos polos de esta interacción, la inteligencia organiza el mundo, organizándose a sí misma. (p. 27)

El fragmento anterior deja ver la manera en que el conocimiento recién aprehendido es el resultado de un proceso en que el aprendiente, a través de la interacción con el medio y en contacto con la experiencia, permite que la inteligencia reforme, dé significado y organice el nuevo saber. A su vez, el “rol de la interacción social y la cultura”, elementos que confirman la importancia de la calidad y constancia del contexto cultural y social de los aprendientes y cómo las relaciones interpersonales que sostienen entre ellos y con su profesora facilitan un aprendizaje óptimo; pues lo más importante, de acuerdo al autor, radica en los signos y símbolos presentes en la interacción social en el contexto sociocultural (Coll, Palacios y Marchesi, 1990).

En consecuencia es fundamental para hilar el desarrollo de la clase y la forma en que los objetivos de aprendizaje y contenidos son abordados para la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes.

Modelo pedagógico constructivista: diseño de la clase

Según las investigaciones de Luque y Cubero (1990), el aprendizaje según Vygotski radica principalmente alrededor de la interacción social en el contexto sociocultural de los aprendientes. Los estudiantes no se ven, *a priori*, limitados por su etapa etaria en relación con los potenciales aprendizajes que puedan alcanzar, sino más bien, como se especificó anteriormente, en las experiencias que hayan vivido y en su interacción con el contenido, entorno y sociedad. El autor establece, por consiguiente, que los niveles culturales y dominios que el profesor posea será el límite superior sobre el cual el estudiante podrá impregnarse del aprendizaje. De esta manera, la visión de Vygotski envuelve diversos factores a considerar que interactúan en el proceso de aprendizaje donde lo contextual y lo social son cruciales para comprenderlo. En sintonía con estas ideas y bajo la mirada de Vygotski, los signos y símbolos son relevantes en el proceso de aprendizaje, pues mediante ellos es que será posible la decodificación del nuevo contenido y, por lo tanto, la adquisición de este, asignándole un significado específico y personal, construido a partir de los conocimientos, experiencias y asimilación de los signos y símbolos que el aprendiente, a nivel particular e individual, sostiene en ese preciso momento y espacio determinado, a saber, el contexto.

Para Luque y Cubero (1990), Vygotski basa la lógica de la aprehensión de nuevos conocimientos con las zonas de desarrollo, existiendo tres niveles, cada uno superior al anterior: (1) la zona de desarrollo real; (2) la zona de desarrollo próximo y (3) la zona de desarrollo potencial. La primera se refiere a los conocimientos, experiencias y capital cultural actuales que posee en el presente el aprendiente, es decir, todo lo que conoce, todo lo que ha vivido y todo con lo que ha tenido experiencia física, social, psicológico y cultural. La segunda zona se relaciona a un nivel de conocimiento y dominio del contenido inmediatamente superior a lo que ya conoce o sabe. Esta zona de desarrollo, en particular, es muy relevante pues es en ella donde los estudiantes pueden aprender un nuevo conocimiento, uno que esté en coherencia y consecuencia a sus propios conocimientos previos y que, en consecuencia, puedan aprehenderlo con sentido y de manera significativa. Por último, la zona de desarrollo potencial es aquella etapa donde los estudiantes podrían llegar a desarrollarse en un futuro a mediano plazo, pero no inmediato. Llevando esto al aula, sería equivalente en este caso de hablar de los contenidos que abordarán en niveles escolares superiores.

Orientación pedagógica conductista: Aplicación y evaluación del contenido

De acuerdo con los aportes de Arancibia, Herrera y Strasser (2008), las investigaciones sobre las teorías conductuales en el aprendizaje se encuentran desde la década de los veinte, y su cúspide se relaciona con los aportes e ideas de Skinner. Según esta autora, el aprendizaje bajo este enfoque conductual está basado en la efectividad o ineffectividad de aplicar estímulos

positivos y/o negativos a quien aprende, con el fin de observar (palpar, evidenciar) resultados frente a una situación o experimento determinados. Al respecto, la psicología está encargada de producir, controlar y explicar la conducta, excluyendo los estados o eventos mentales de las personas sometidas a tales situaciones o experimentos. De la misma forma, Skinner considera que, también en escuelas, es conveniente recurrir a estos estímulos para lograr la efectividad de respuesta esperada en procesos de aprendizaje. Paralelamente, también aprueba y promueve un tratamiento homogéneo a los estudiantes y espera que mediante la asignación de estímulos de tipo recompensa/castigo, se produzca y exhiba el resultado conveniente, lo que en palabras de Freire (1994) se denomina "Educación bancaria", en la que los estudiantes se transforman en "recipientes" en los que es depositado el saber mediante la instrucción del profesor hacia la memorización mecánica de los contenidos. Por consiguiente, se da a entender que este enfoque del aprendizaje no considera en su proceso factores sociales, culturales, ni experiencias o conocimientos previos contextuales que hayan vivido individual o colectivamente los aprendientes, sino que más bien se reduce a medir los resultados objetivos o conductas observables como consecuencia de una instrucción homogénea.

Es relevante señalar que esta visión de aprendizaje resulta ser la más antigua en la historia occidental y, actualmente, está obsoleta en la psicología desde hace décadas atrás.

Por último, destacan las principales críticas emergentes al conductismo en la década de los 90' (Arancibia, 2008):

- Aportar soluciones superficiales a problemas complejos de los aprendientes.
- Ignorar el comportamiento y procesos mentales humanos.
- Tratamiento a aprendientes (humanos) de la misma manera en que se trata a animales en experimentos (psicología de ratas).

Hacia la fundamentación de la propuesta didáctica

Tomando en cuenta los aportes del diagnóstico del colegio y la cultura escolar observada y descrita a nivel institucional y también al interior del I ° Medio, es que se rescatan elementos de las visiones de aprendizaje constructivista y conductual para planificar la unidad didáctica que se implementó.

Por una parte, de la visión constructivista se rescata la manera en que son considerados los conocimientos del contenido que los estudiantes ya dominan o, en otras palabras, las nociones previas. También se consideran las experiencias contextuales que han vivido con respecto a situaciones o elementos de su cotidianidad que puedan servir de puente psicológico para la exploración a nuevas situaciones problemáticas en la clase de matemática que requieran de nuevos y más complejos contenidos. Al respecto, los alumnos y alumnas han desarrollado en el presente año y en otros periodos escolares las habilidades necesarias para trabajar en grupo mediante el aprendizaje colaborativo, forma de trabajo promovido por el colegio. También destaca la experiencia contextual por parte de los estudiantes en el desarrollo de las habilidades de comunicar verbalmente y argumentar, trabajadas frecuentemente en clases, especialmente en las asignaturas de Inglés, Lenguaje y Comunicación, y Comprensión de la Sociedad. Esto último fundamentado en los objetivos transversales de aprendizaje establecidos en las Bases Curriculares (2015) y validado con los profesores actuales que imparten las mencionadas disciplinas. Todo lo anterior va en sintonía a la zona de desarrollo próximo y el contexto social y cultural para generar el aprendizaje en los estudiantes.

Por otra parte, se toman en cuenta algunas cualidades de la visión conductual de aprendizaje que reduce el aprender a los resultados esperados y una homogenización de la enseñanza.

La homogenización de la enseñanza se aprecia como conveniente desde el punto de vista que permite eficientizar tiempos y objetividad en el proceso de enseñanza y simultáneamente

permite que el objeto matemático sea adquirido y comprendido bajo los mismos registros entre todos los aprendientes, lo que conduce a facilitar la evaluación en preguntas cerradas (requeridas por el establecimiento), de manera que todos los estudiantes mantienen las mismas oportunidades de responder correctamente en la medida de que todos los estudiantes recibieron en clase una enseñanza homogenizada: mismos tipos de representaciones, mismas analogías, mismas problemáticas y ejercicios, entre otros.

Como se mencionó, la unidad didáctica se implementó con 42 estudiantes y a su término, todos ellos rindieron una misma prueba (los estudiantes que requieren adecuación con justificativo psiquiátrico/neurológico/médico tuvieron un instrumento de evaluación diferenciado, adaptado a sus capacidades cognitivas actuales).

Es por estos factores mencionados que en la etapa de la unidad didáctica ligada a la presentación de la unidad y formalización del contenido, se recurrió a un estilo de aprendizaje constructivista, que motive a los estudiantes a pensar, relacionar con lo ya conocido y encontrar significado en los nuevos conocimientos, de manera de que éstos sean aprehendidos como una extensión de lo que ya han conocido. También, como hemos revisado, la experiencia e interacción social y con el contexto son cruciales para almacenar significativamente nuevos conocimientos, razón por la cual los estudiantes se vieron enfrentados a actividades individuales o grupales que representaban el trabajo colaborativo que promueve el establecimiento, trabajando con material concreto o pictórico. Mientras que una vez asimilado y formalizado el contenido nuevo, los estudiantes puedan aplicar de manera objetiva los conocimientos, ya sea mediante un material pedagógico como una guía, como también responder el instrumento de evaluación consistente principalmente en preguntas de selección múltiple que el colegio exige. El presente párrafo, en resumen, fundamenta la propuesta didáctica, considerando la realidad de los estudiantes, del colegio, su cultura y procesos mentales. Paralelamente, los estilos de aprendizaje considerados en las clases implementadas fueron, principalmente, los kinésico y grupal, pues son los que más atendieron y coincidieron con las formas de aprender de los estudiantes.

Posicionamiento didáctico

El modelo teórico de registros semióticos

Dentro del posicionamiento didáctico, la primera luz que aparece en esta teoría radica en el objeto matemático y su significado: Un objeto matemático se define como la representación de una cualidad y tiene como fin, o función, organizar o interpretar un contexto. De esta manera, el origen y propósito de un objeto matemático radica en ser funcional. Nace en el momento en que se separa la funcionalidad del contexto y la situación particular que se está abordando y se manifiesta cuando este queda configurado por aspectos de representación y significado. Pecharromán (2014).

Es aquí donde se evidencia la importancia de la correcta utilización de signos y símbolos, pues, serán éstos los responsables en que el objeto matemático en cuestión sea representado apropiadamente bajo diferentes registros y por lo tanto contribuirán importantemente al aprendizaje de los estudiantes. "... la representación permite la expresión y uso del objeto. El significado atiende a la interpretación del objeto."(Pecharromán, p. 112). De esta manera, los signos, símbolos y los registros se desarrollan a partir de la funcionalidad que representa el objeto y permiten su expresión.

Luego, un objeto matemático necesita ser interpretado y su significado nacerá a partir de las interpretaciones que se le sea posible asociar, basándose en la funcionalidad del objeto. La funcionalidad se deja ver mediante el uso del objeto en un contexto y una situación determinada.

La fundamentación del aspecto didáctico del marco curricular radica esencialmente en la importancia de los signos y símbolos, anteriormente mencionados: los registros de representación semiótica. A grosso modo, se entienden como una forma o representación de lenguaje que tiene como fin dilucidar la dinámica de las actividades cognitivas humanas durante el aprendizaje, siendo su enfoque la semiótica cognitiva, lo que constituye el corazón de la matemática, porque la comprensión de los signos será posible en la medida en que se transformen apropiadamente las representaciones semióticas (Duval, 1995). En este sentido, resulta imprescindible lograr una coordinación entre registros, dado que las diversas representaciones de los objetos matemáticos y la forma en que estos comuniquen y evidencien la forma específica en que interactúan los objetos permitirá a los estudiantes asimilar realmente el contenido matemático y responder con seguridad al ejercicio o situación problemática que se les presente, comprendiendo así la esencia del problema y cómo funciona lo que se les pide aplicar.

Los aportes de Godino (2002) posibilitan visualizar la manera en que los símbolos (significantes) remiten o están en lugar de las entidades conceptuales (significados) en el trabajo matemático. En este punto, la comprensión de su semántica y la relación con los contextos y situaciones de los cuales provienen resultan fundamentales para crear un aprendizaje común y en sintonía entre los estudiantes, la enseñanza del profesor y la escuela.

Por los puntos anteriores, es que se consideró incluir en la planificación de la unidad didáctica actividades que incluyan la participación de todos los estudiantes. Tales actividades se orientaron hacia la comprensión de los objetos matemáticos y la interacción que poseen entre sí, y se enfocaron, principalmente, en esta asimilación para que en todas las clases se apliquen los contenidos matemáticos mediante un procedimiento algebraico y/o numérico, pero que esté arraigado y fundamentado en la mente de los estudiantes.

Los aportes de Duval (1995) especifican los tipos de registros de representación semiótica que fueron incluidos en la planificación e implementación de la unidad didáctica que se establecen a continuación:

- Lenguaje común (oral y escrito)
- Concreto
- Pictórico
- Algebraico (o simbólico)

Estos tipos de registros de representación semiótica están en sintonía con las Orientaciones Didácticas Matemáticas (Ministerio de Educación de Chile, 2015.), las que con el fin de promover en los estudiantes una comprensión orientada hacia un pensamiento simbólico, ha llevado a la práctica docente a situarse en metodologías que permitan a los estudiantes dar solución a problemas en distintos niveles de abstracción. Lo anterior responde esencialmente al modelo "COPI SI" (concreto-pictórico-simbólico) que permite transitar a los estudiantes entre los diferentes niveles y tipos de representación. Se espera que la manipulación de material concreto y su posterior representación pictórica (dibujos y esquemas simples) permita a los estudiantes desarrollar imágenes mentales que, con el tiempo y la práctica, vuelva prescindible estos recursos para representar los objetos matemáticos y los estudiantes no requieran otra representación más que la simbólica para comprender la situación problemática/ejercicio y cómo resolverlo.

Es relevante mencionar que no existe un orden rígido para trabajar estos tipos de representaciones de registros semióticos. Por el contrario, la profesora a cargo de la planificación e implementación didáctica ha intencionado trabajar la representación verbal, pictórica y algebraica en todo momento (y añadiendo la representación con material concreto

en una actividad) para atender de la mejor manera posible a la diversidad de estudiantes del curso y simultáneamente, permitiéndoles transitar desde el primer momento entre los diferentes tipos de registros promoviendo la flexibilidad de pensamiento matemático e interiorización de los contenidos matemáticos y su interacción.

Así, una vez que el tránsito entre representación pictórica, concreta, en lenguaje común y simbólica sea fluida entre los estudiantes, el foco de las clases se centró en llevar a la práctica los procedimientos matemáticos necesarios para responder a ejercicios y situaciones problemáticas, con la certeza de comprender los planteamientos.

Teoría de conceptualización de los registros semióticos: hacia el socio-constructivismo

Duval (1993) menciona que la semiótica y la noética son conceptos que se alimentan y necesitan mutuamente para hacer posible la elaboración y la decodificación de los registros semióticos, razón por la cual es pertinente definir estos conceptos antes de ahondar en esta teoría:

- Semiótica: como la adquisición de una representación realizada por signos.
- Noética: como la adquisición conceptual de un objeto.

Como puede evidenciarse, estas consideraciones muestran la interdependencia estrecha entre noética y semiótica, por lo que no solo no existe noética sin semiótica, sino que la semiótica se adopta como característica necesaria para garantizar el primer paso hacia la noética y permiten entonces preguntarnos acerca de la definición de concepto.

En la idea de “concepto” muchos factores se interrelacionan, participarían diferentes partes: el institucional (saber) y la parte personal (cualquiera que tenga acceso a tal saber), lo que se traduce en que un concepto es encontrado continua y dinámicamente en un vaivén de construcción sin fin. En esta se halla la parte más problemática, rica, y compleja de su significado (Anexo 2). Al respecto, las ideas de D’Amore (2004) esclarecen que más allá de la mutua alimentación para definir estos conceptos, el aprendiente debe necesariamente involucrar un proceso con características internas y sociales que se organiza entre los diferentes registros de representación semiótica en que simbolice para decodificar el nuevo conocimiento.

Bajo esta lógica, el conocimiento pasa a ser la intervención y el uso de los signos. Así, el aprendizaje de los estudiantes es fruto de una interacción entre los miembros del micro-sociedad de la cual el aprendiente forma parte: él, sus compañeros, y profesores, y el saber más profundo y técnico que el profesor domina. De esta manera, aprender resulta ser un proceso de construcción sujeto a la necesidad de “socializar”, lo cual sintoniza con la elección pedagógica descrita en el apartado anterior del Marco teórico. En el Anexo 3 se encuentra un esquema que representa visualmente la interacción recién descrita.

Posicionamiento disciplinar

Como resultado de un análisis comparativo entre el texto escolar proporcionado por el Ministerio de Educación de Chile para el nivel escolar observado y un texto formal de la disciplina, es posible concluir lo siguiente: el texto formal de la disciplina trata el contenido desde una fundamentación algebraica, recurriendo a demostraciones formales para determinar los hallazgos geométricos planteados; sin embargo, no acude a la evidencia geométrica para alcanzar tales respuestas (Lehmann, 2005).

El planteamiento del contenido matemático en el texto formal disciplinar es de naturaleza disímil a lo que puede observarse en el texto escolar, pues la contextualización del contenido aparentemente es fundamental al inicio de cada tema o contenido curricular. Además, recurre a diversas actividades relacionadas con hechos observables en la cotidianidad. Por último, la operatoria para poder llegar a los hallazgos buscados, son producto de la utilización de

fórmulas, que, en ocasiones son reflexionadas y cuestionadas, aunque también en otros casos, como este, son enseñadas bajo la fórmula de educación bancaria, sin preguntas ni cuestionamientos. (Alvarado y Vásquez, 2016).

En paralelo, se define, de acuerdo con los aportes de Gamboa y Ballesteros (2010), los conceptos imprescindibles para el aprendizaje de la geometría: las habilidades visuales y argumentativas. Como se señaló, el aprendizaje de este eje de la matemática implica el desarrollo de habilidades visuales y de argumentación. De hecho, es necesario construir una fuerte y estrecha interacción entre estos dos componentes para lograr el aprendizaje significativo de los estudiantes, de manera que el discurso teórico quede y permanezca anclado a experiencias sensoriales o enactivas que contribuyan a construir su sentido. A su vez, las habilidades visuales deben servir de guía a la teoría, para generar en los estudiantes precisión y potencia en su comprensión. Estos autores, además, mencionan que el centro del aprendizaje de la geometría radica principalmente en tres aspectos:

- Los procesos de visualización: soporte de la actividad cognitiva en geometría donde el estudiante “evoluciona” en su percepción de los objetos.
- Los procesos de justificación propios de la actividad geométrica.
- El papel de las construcciones geométricas en la asimilación y el desarrollo del conocimiento geométrico.

De acuerdo a esto, para que el aprendizaje de la geometría sea efectivo, es crucial que el grupo docente considere en sus enseñanzas un equilibrio entre la asociación de habilidades de visualización y argumentación, pues ambas habilidades son fundamentales dentro del proceso formativo del individuo y así éste logre aprender de manera lógica en sus procesos mentales.

Descripción y planificación de la unidad didáctica

La planificación de la unidad didáctica contempla quince horas pedagógicas distribuidas en 8 clases, realizadas durante dos semanas.

El eje curricular abordado fue el de Geometría de acuerdo con el programa de estudio de primer año medio, actualización año 2009 vigente. Específicamente, el tema fue “Sectores y segmentos circulares”.

A grandes rasgos, pueden resumirse los lineamientos pedagógicos, didácticos y disciplinares de manera progresiva, tal como se muestra la Tabla 1 a continuación:

Tabla 1. Resumen de planificación de Unidad Didáctica

Recoger conocimientos previos (Zona de desarrollo real)		
Recordar, diferenciar y ejemplificar círculo y circunferencia.	Recordar ecuaciones de área y perímetro del círculo. Vincular área y perímetro con representaciones pictóricas.	Aplicar colaborativamente fórmulas de área y perímetro del círculo en situaciones problemáticas y ejercicios básicos.
Sector circular		
Conocer, describir sector circular.	Reconocer sector circular como “parte de un círculo”	Los estudiantes resuelven individualmente o en parejas guía 1: “Sector circular”
Segmento circular		

Conocer segmento circular y definirlo a partir de los elementos del círculo.	Reconocer segmento circular como parte de un sector circular.	Los estudiantes resuelven individualmente o en parejas guía 2: "Segmento circular"
Regiones del círculo		
Conocer y registrar pictóricamente las regiones del círculo: sector, segmento, corona y trapecio circulares.	Representar pictóricamente las partes del círculo involucradas para calcular área y perímetro del círculo.	Representar algebraicamente las partes del círculo involucradas y la relación entre ellas para calcular área y perímetro de cada región.
Actividad con material concreto de las Regiones del círculo (Zona de desarrollo próximo)		
Indicación de instrucciones de la actividad, formación de estudiantes en parejas y recepción de materiales para la construcción de las regiones circulares.	Estudiantes construyen con material concreto las regiones del círculo, identificando cada una con su nombre.	Socializan los conocimientos o partes del círculo involucrados para registrar en lenguaje común el cálculo del área o perímetro de cada región circular.
Aplicación de área y perímetro de las Regiones del círculo		
Profesora guía consenso de los conocimientos/partes del círculo para calcular el área y perímetro de cada región del círculo.	Profesora registra algebraicamente los cálculos a partir de los aportes de estudiantes, solicitando la argumentación de ellos.	Estudiantes, de manera individual, resuelven guía 3: "Trapecio y corona circular".
Evaluación de aprendizajes		
Los estudiantes resuelven en parejas y con apoyo de guías anteriores el instrumento de evaluación escrito en un tiempo estipulado de máximo 80 minutos.		
Retroalimentación de la unidad e instrumento de evaluación		
Profesora pregunta a estudiantes qué les pareció el instrumento de evaluación.	Profesora revisa pregunta por pregunta el instrumento de evaluación y espera colaboraciones de estudiantes para construir en conjunto la respuesta.	Profesora y estudiantes socializan acerca de la implementación de la unidad didáctica y los aprendizajes adquiridos.

La planificación completa de la unidad didáctica se encuentra en anexo 4.

Las clases fueron diseñadas de manera tal que, en la primera parte de la implementación de la unidad didáctica, los estudiantes contarán con la oportunidad de recordar los conceptos previos concernientes a la unidad "sectores y segmentos circulares", los cuales se traducen básicamente en identificar círculo y circunferencia y diferenciar uno de otro. Al mismo tiempo, los alumnos debían practicar brevemente la aplicación de fórmulas de área y perímetro del círculo, ya antes vistas según el plan de estudio del currículum nacional y la confirmación de las profesoras que impartieron la asignatura de Matemática el año anterior al mismo grupo de estudiantes. Todo esto se vincula directamente con el establecimiento *insitu* de la zona de desarrollo real que en ese momento dominaban los estudiantes.

Posteriormente, las clases siguieron un desarrollo en que una por una se conocieron las regiones del círculo y de forma colaborativa tal como promueve el colegio: los estudiantes

exploraron (como establecen los aportes de Vygotski) la manera en que puede calcularse el área y perímetro de cada región circular. Como actividad relevante, correspondiente al 50% de la nota de la unidad didáctica, ellos construyeron con material concreto las regiones del círculo, compartieron en parejas y registraron, en lenguaje común escrito, la información requerida para los cálculos en cada caso.

Una vez que la actividad finalizó, los estudiantes se dispusieron a poner en práctica los conocimientos adquiridos hasta el momento, recurriendo de manera individual a los cálculos para resolver problemas y ejercicios matemáticos del área y perímetro de las cuatro regiones circulares (Zona de desarrollo próximo).

Luego, los estudiantes fueron evaluados con un instrumento de evaluación formal y escrito para, finalmente, en la última clase de la unidad didáctica, retroalimentar y socializar la implementación de la unidad y los aprendizajes alcanzados por parte de ellos.

Las orientaciones y objetivos de las clases de la unidad didáctica fueron:

- Introductoria.
- Expositivas/de exploración colaborativas de los estudiantes en la solución de situaciones didácticas y ejercicios, con partes prácticas incluyendo la manipulación de material concreto, orientado a la construcción del contenido matemático.
- Aplicación con partes guiadas y con partes de desarrollo independientes.

Los principales recursos pedagógicos y didácticos utilizados en la unidad didáctica fueron:

- Material concreto
- Lenguaje común en modo oral y escrito
- Representación algebraica
- Representación pictórica
- Guías que evocan estos tipos de registros (anexos 5, 6, y 7)

En coherencia con el diagnóstico del curso, se incluyó material concreto y en todo momento la utilización de registros de representación: lenguaje común (oral y escrito), pictórico, concreto, y algebraico.

Resultados de aprendizaje

En la actividad con material concreto todos los estudiantes obtuvieron nota máxima: 7,0, dado que trabajaron comprometida y responsablemente en clases, solicitando ayuda en los casos que lo necesitaban, lo que evidenció un interés por aprender. Además, el resultado final, en todos los casos, correspondió a un trabajo completo, comprensible y lógico.

En cuanto a las calificaciones obtenidas de los estudiantes a partir del instrumento de evaluación formal y escrito, la nota máxima alcanzada fue un 6,7. A pesar de que ningún estudiante alcanzó la nota máxima 7,0, muchos estudiantes calificaron con nota superior a 5,5. Por el otro lado, hubo 4 estudiantes con nota Insuficiente (inferior a 4,0) con otros instrumentos con altas calificaciones también (nota superior a 6,0) y dos instrumentos con nota inferior a 4,0 (ver en Anexo 9 instrumento de evaluación calificado con la mejor nota del curso). De forma paralela, los resultados de aprendizaje traducidos en los indicadores de logro fueron:

Aprendizajes esperados más descendidos	Indicador de logro	Evaluación a nivel global		
		Logrado	Medianamente logrado	No logrado
Calcular longitud de arco de una circunferencia.	Relacionan longitud de arco como parte del perímetro de una circunferencia.		X	
Calcular área/perímetro de un sector/segmento circular a partir de una representación pictórica	Relacionan representación pictórica con simbólica para aplicar fórmulas de área/perímetro de sector/segmento circular.		X	
Aplicar fórmula de área/perímetro de sectores/segmentos circulares respectivamente a partir de ángulos centrales y medida del radio.	Resuelven problemas de geometría y de la vida diaria que involucran el área y el perímetro de sectores circulares.		x	

Reflexión de la implementación de la unidad didáctica y plan de mejora

Antes de iniciar la reflexión de la implementación de la unidad didáctica, es relevante mencionar que su inicio y desarrollo se vieron afectadas por la contingencia social a nivel nacional que ha vivido el país a partir del día viernes 18 de octubre del presente año (2019). El inicio de la implementación de la unidad didáctica estaba programado para ser desarrollado el lunes inmediatamente siguiente, el 21 de octubre. Sin embargo, la fecha tuvo que posponerse debido a la suspensión de clases en el colegio y baja asistencia de los estudiantes. Esto provocó que la implementación se viera interrumpida y afectada, incluyendo el instrumento de evaluación final de la unidad, pasando de ser una prueba escrita individual de 25 preguntas de selección múltiple y un ítem de desarrollo (tal como establece y exige el colegio) a un instrumento escrito en parejas y con material de apoyo. Esta decisión fue tomada por la profesora y al mismo tiempo por parte de la dirección UTP a modo de sugerencia, con el fin de bajar los niveles de estrés de los estudiantes, considerando la situación que enfrentaba en ese momento el país.

En este contexto, la unidad didáctica comenzó a implementarse una semana después de lo planificado inicialmente, finalizando el martes 19 de noviembre, con la retroalimentación del instrumento de evaluación y los comentarios y socialización por parte de los aprendices y de la profesora.

Para comenzar, la inclusión de una actividad con material concreto en la presente unidad didáctica fue un acierto, dado que motivó en gran medida a los estudiantes, especialmente, a aquellos que manifiestan que no les gusta en general la asignatura y que no suelen trabajar ni participar frecuentemente en clases. La actividad alcanzó cabalmente los objetivos propuestos, los cuales radicaban básicamente en que ellos reflexionaran acerca de la construcción de las

regiones del círculo para luego comprender y plantear los cálculos, con el fin de determinar área y perímetro de cada una de las regiones, comunicando, argumentando y registrando sus proposiciones. Esto refleja la intención de la profesora en no recurrir a la memorización, sino que, por el contrario, a que el estudiantado pensara, reflexionara y construyera proposiciones mediante la interacción social entre pares, como se fundamentó en el marco teórico.

Cabe mencionar que la implementación de esta actividad tomó dos horas pedagógicas más de lo contemplado, sin embargo, la profesora no tuvo problemas para acceder a proveer más tiempo para la construcción del trabajo pues observó que la demora se debió a la comunicación, argumentación y trabajo en equipo de los estudiantes, además de las inasistencias de algunos estudiantes.

No obstante, hubo un vacío por parte de los estudiantes, ya que no pudieron vincular completamente lo aprendido y reflexionado en la actividad con material concreto, con el siguiente nivel planificado en la progresión de aprendizaje: la aplicación individual. Lo anterior fue evidenciado en las actitudes de los estudiantes al preguntar a la profesora de qué forma podían ellos calcular lo solicitado (área o perímetro de un sector circular) en la guía. A pesar de que la profesora señaló los datos proporcionados en la guía para ayudar a los alumnos a conectar las ideas y recordar lo aprendido, en su mayoría, los estudiantes no lograron hilar inmediatamente esta información con los procedimientos que anteriormente en la actividad con material concreto ellos mismos habían detallado.

Más precisamente, en la clase en que los estudiantes debían desarrollar individualmente la guía 3: Trapecio y corona circular, la docente evidenció estas dificultades por parte de los estudiantes, a diferencia de lo observado en el monitoreo de la clase de manipulación de material concreto. La profesora se vio obligada a intervenir más de lo planificado, modelando en la pizarra el cómo plantear los cálculos pertinentes para responder los ejercicios o situaciones problemáticas o bien identificar qué se está preguntando, recurriendo a representaciones pictóricas para que los estudiantes conectaran con los esquemas ya revisados. Aun así, los estudiantes, en general, se mostraron mucho más motivados que de costumbre en clases para responder los desafíos y actividades impartidos por la profesora.

Durante la evaluación de la unidad no se observaron mayores complicaciones. Sin embargo, al revisar los instrumentos de evaluación, se constató que aquellos estudiantes cuyas notas bordeaban la nota máxima 7,0, habían caído en el error de identificar el sector circular pertinente; pues; los estudiantes no habían seguido el sentido (anti-horario). Si bien la profesora en la misma clase en que se llevó a cabo la evaluación les recordó a los alumnos esta dificultad e incluso realizó un ejemplo en la pizarra, ella no lo abordó en clases anteriores.

En suma, con los insumos provenientes de la evaluación diagnóstica, se tomaron decisiones para el ritmo de las primeras clases de la unidad. Gracias a las evaluaciones formativas se logró monitorear los aprendizajes clase a clase. Las evaluaciones formativas se tradujeron en el nivel de participación de los estudiantes en las clases, pro-actividad y preocupación de los estudiantes en dilucidar dudas, la concentración en las actividades y actitudes evidenciadas.

Finalmente, con la prueba final de la unidad se evaluaron los aprendizajes de los estudiantes y la enseñanza de la docente, con el fin de identificar aquellos aspectos positivos que contribuyeron al aprendizaje, junto con aquellos elementos y prácticas por mejorar, pensando en el futuro de la práctica docente.

Como plan de mejora se incluye:

En la implementación de la actividad con material concreto, en un principio se había dado la instrucción de que los estudiantes explicaran con sus palabras (lenguaje común) el procedimiento necesario para calcular el área o el perímetro de cada sector circular y registrarlo en la cartulina. Lo anterior había sido considerado especialmente para que los

estudiantes tuvieran la libertad de escoger la explicación del procedimiento con el cual se sintieran más cómodos y así generar una herramienta que contribuyera al desarrollo de su motivación en la participación activa de la actividad. Sin embargo, dentro del plan de mejora, se considera exigir que los estudiantes expliquen ambos procedimientos, es decir, tanto área como perímetro de cada región circular. Lo anterior se basa en la evidencia de que los estudiantes no fueron capaces de aplicar estos nuevos conocimientos en la ejecución de ejercicios y problemas en las guías. Al respecto, se interpreta que los estudiantes de cierta forma descansaron en la explicación de solo una ecuación y no ahondaron en la lógica detrás para determinar área y perímetro de todos los sectores circulares.

Posterior a la actividad con material concreto, es importante desarrollar una instancia en clase donde los estudiantes comuniquen y argumenten con sus palabras el cálculo de área/perímetro de una región del círculo a partir de sus ecuaciones. En casos como este, en que el número de estudiantes es superior a las posibles explicaciones y para que estas no se repitan, la profesora podría recurrir a interrogaciones a las parejas, donde les den un caso de representación pictórica y la dupla tuviera que comunicar y argumentar la manera en que debieran calcular el área o perímetro según instrucciones previas. De esta manera, sería posible fortalecer las concepciones y aprendizajes de la unidad hasta el momento y flexibilizar aún más el conocimiento matemático recién adquirido. También, haría posible reforzar el aprendizaje, especialmente, de aquellos estudiantes que poseen un estilo de aprendizaje auditivo (60% del grupo curso).

Básicamente y a nivel global, los estudiantes demostraron por medio de su desempeño en el instrumento de evaluación que tuvieron ciertas dificultades para pasar fluidamente de un tipo de registro a otro (simbólico a pictórico y viceversa), para luego construir la ecuación pertinente para responder a la pregunta correspondiente. Conjuntamente, algunos alumnos tuvieron problemas para interpretar información representada pictóricamente y relacionar elementos del círculo como parte del perímetro, área, etc. Por lo tanto, dentro del plan de mejora se propone centrar más clases en desarrollar las habilidades de interpretar información proporcionada ya sea en un registro simbólico, pictórico o concreto y desarrollar también la capacidad de representar bajo más de un registro una misma información relacionada a los segmentos y/o sectores circulares, especialmente, en aquellos casos que atiendan a casos de la vida cotidiana. Conjuntamente, disponer de más clases para desarrollar aún más la parte práctica donde los estudiantes por medio de la utilización de material concreto puedan construir a partir de los elementos del círculo, el perímetro y el área.

Igualmente es relevante revisar con mayor detenimiento todos los contenidos presentes en los instrumentos de evaluación, pues incluso si la pregunta en cuestión requiere colateralmente conocimientos que debieran estar ya dominados, el instrumento de evaluación no debe perder el foco, es decir, medir y evaluar los objetivos de aprendizaje previamente estipulados y que vayan en sintonía con los ejercicios, situaciones problemáticas y actividades abordados anteriormente en clases.

CONCLUSIONES GENERALES

Gracias a la construcción del presente artículo académico acerca de la planificación, diseño e implementación de la unidad didáctica en cuestión, sumado a las reflexiones de la implementación y los resultados que de ella provinieron, es interesante identificar la manera en que la lógica asignada por diferentes autores, incluso en diferentes momentos de la historia, parecen coincidir en la importancia que toman la manipulación y registro de símbolos y signos para ejecutar adecuadamente el proceso de enseñanza hacia los estudiantes y lograr en ellos una comprensión acertada del contenido curricular. Particularmente, este aspecto resulta ser una arista tremendamente relevante a la hora de tomar decisiones pedagógicas y,

por lo tanto, será consciente o inconscientemente considerado a la hora de planificar e implementar la unidad didáctica del eje estipulado anteriormente.

Es así, como gracias al desarrollo de este caso de estudio y pensando en la implementación de una nueva unidad didáctica de la asignatura de matemática en el futuro accionar docente, se comienza a trazar más conscientemente la intención de abordar el contenido, acudiendo a aquellas etapas de aprendizaje que contribuirán a la aprehensión coherente de los contenidos académicos por parte de los estudiantes. Entre las etapas de aprendizaje se destacan: la contextualización social y cultural entre el contenido disciplinar, el saber de la profesora que imparte la unidad didáctica, las experiencias y conocimientos previos de los estudiantes, las instancias exploratorias de los alumnos y alumnas para establecer los planteamientos formales de la unidad que genera el tan anhelado quiebre cognitivo, el trabajo colaborativo de los aprendientes, el espacio y tiempo para el desarrollo del pensamiento reflexivo y, no menos importante, la atención en todo momento a los diferentes estilos de aprendizaje de los estudiantes y las necesidades, inquietudes e intereses que ellos manifiesten o expresen. Resultando, de esta forma, ser siempre pertinente a la hora de enseñar, la utilización de diferentes tipos de registro de representación semiótica que no solo contribuya a la adquisición de nuevas ideas y conocimientos en los estudiantes, sino que también los motive a aprender de diferentes formas, considerando sus características personales, individuales e irrepetibles.

Finalmente, parece ser crucial empoderar a las y los docentes a ejercer el rol social que se les ha otorgado, consistente en servir a la sociedad mucho más que como un mediador entre el conocimiento y escolares, sino que, por el contrario, servir entre otras cosas, como una herramienta humana que oriente a los aprendientes a explorar, pensar y reflexionar, dar significado a la realidad y las lógicas detrás de cómo funcionan los sistemas a su alrededor; para que el día de mañana egresen del colegio como ciudadanos reflexivos, cuestionadores, versátiles, proactivos y competentes a las necesidades y cualidades del mundo que les rodea. Para reproducir información existe maquinaria y sistemas computacionales entre otros artefactos, pero el mundo necesita personas reflexivas que cuestionen los sistemas actuales transversales en los que vivimos y que nos rigen, pues serán estos agentes quienes contribuirán a un mejor futuro para todos nosotros.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alvarado, L. y Vásquez, C. (2016). *Matemática. Guía didáctica del docente. Tomo 1*. Santiago de Chile: Editorial Santillana -Ministerio de Educación.
- Arancibia C., Paulina Herrera P. y Katherine Strasser S. (2008). *Manual de psicología educacional*. Sexta edición. Santiago de Chile: Ediciones Universidad Católica de Chile.
- Coll, C., Palacios, J. y Marchesi, A. (2005). *Desarrollo Psicológico y Educación. Tomo 2. Psicología de la Educación Escolar*. Madrid: Alianza.
- Cubero, R y Luque, A. (1990). *Desarrollo, educación y educación escolar: la teoría sociocultural del desarrollo y del aprendizaje. Vol. 2. Psicología de la educación escolar*. Ciudad: Bogotá. Editorial UD.
- D'Amore, B (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista científica*, 11, 151-163.
- Duval, R. (1995). *Semiosis y Pensamiento Humano: Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

- Freire, P. (1994). *Cartas a quien pretende enseñar*. México D.F.: Siglo XXI editores.
- Gamboa, R. y Ballesteros E; (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, 14(2), 125-142.
- Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática., Vol. 22, nº 2.3, pp.237-284. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- González Peralta, A.G., Molina Zavaleta, J.G. y Sánchez Aguilar, M. (2014). La matemática nunca deja de ser un juego: investigaciones sobre los efectos del uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática*, 26(3), 109-133.
- Lehmann. C. (2005). *Geometría Analítica*. México D.F.: Editorial Limusa.
- Ministerio de Educación de Chile (2015). *Bases Curriculares*. Santiago de Chile: Mineduc.
- Ministerio de Educación de Chile (2015). *Orientaciones Didácticas Matemáticas*. Santiago de Chile: Mineduc. Recuperado de <https://bit.ly/2KQv83b>.
- Pecharromás, C. (2014). El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica., *Revista Educación Matemática*. 26(2), 112-131.

Anexos

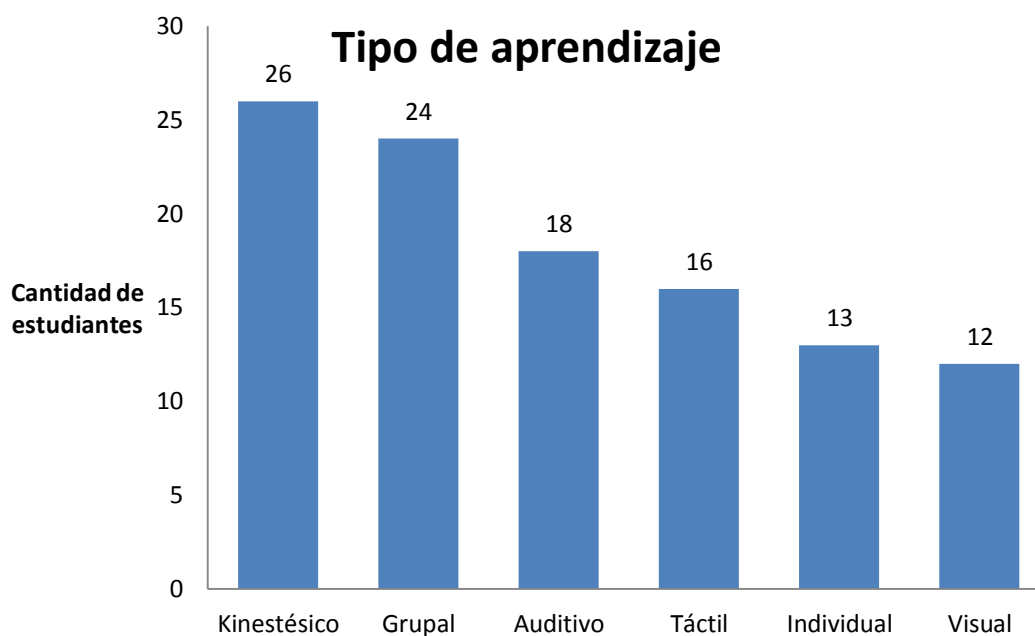
Anexo 1: “Tablas de resultados académicos e indicadores de desarrollo personal y social”

Por Matemática	Resultados académicos SIMCE			
	Curso	Año 2016	Año 2017	Año 2018
	4to Básico	-	291	302
	6to Básico	-	287	297
	II Medio	286	293	325

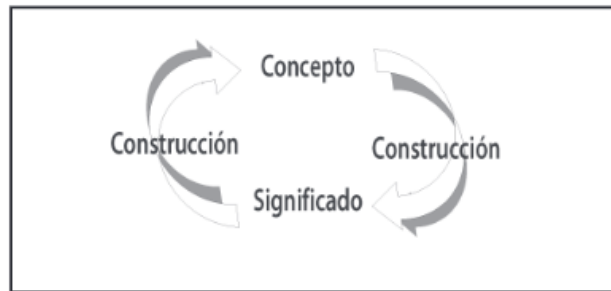
II ° Medio	Indicador de Desarrollo Personal y Social (IDPS)	Año		
		2016	2017	2018
	Autoestima académica y motivador escolar	75	75	77
	Clima de convivencia escolar	76	76	77
	Participación y formación ciudadana	76	77	78
	Hábitos de vida saludable	72	71	71

Matemática	Resultados académicos PSU		
	Año 2016	Año 2017	Año 2018
	569	560	604

Anexo 2: “Tabla de tipo de aprendizajes de los estudiantes del I ° medio A”



Anexo 3: "Interacción y construcción recíproca entre concepto y significado"



D' Amore (2004)



Universidad
Alberto Hurtado

Anexo 4: "Planificación de la unidad didáctica"

Colegio: San Francisco del Alba HC

Dirección: Camino el Alba #9280, Las Condes.

Profesora: Karen Ahumada

Nivel: 1° medio

Tiempo Estimado:

Inicio Intervención:

Fin Intervención:

UNIDAD	Eje geometría: Sectores y segmentos circulares			
OFT	OAA	OA 6: Desarrollar la fórmula de los valores del área y del perímetro de sectores y segmentos circulares, respectivamente, a partir de ángulos centrales de 60°, 90°, 120° y 180°, por medio de representaciones concretas.		
	OAD	Trabajar en equipo de manera responsable y proactiva, ayudando a otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de problemas.		
Fecha	Objetivo de Aprendizaje	Contenidos	Actividades	Evaluación
CLASE 1 (2 HRS)	<p>Aplicar las fórmulas de área y perímetro del círculo para calcular y representar pictóricamente sectores circulares.</p> <p>A partir de la medida del ángulo del centro,</p>	<p>Área y perímetro del círculo</p> <p>Ángulo del centro de la circunferencia y sus sectores circulares</p>	<p>Una vez que los estudiantes estén en silencio, de pie y en su puesto (protocolo del establecimiento), la profesora da la bienvenida a los estudiantes, les pide tomar asiento. La profesora comunica el inicio de una nueva unidad, en el eje de geometría y comienza indicando que en ella se estudiarán los sectores y segmentos circulares, mencionando la presencia de estos elementos en la vida real y cotidiana; y que su constitución resulta ser una herramienta para resolver problemas, y que por lo mismo, tienen una gran aplicabilidad en la vida cotidiana y en variados contextos transversales. La profesora hace las siguientes preguntas a los estudiantes:</p> <p>Parte I: Recoger conocimientos previos del círculo y circunferencia.</p> <p>1.- ¿Cuál es la diferencia entre el círculo y la circunferencia? (Los conocimientos previos de los estudiantes son registrados en la pizarra. Una vez que se disponen de al menos tres ideas de cada concepto, se pide a los estudiantes aclarar las concepciones de círculo y circunferencia en caso de confusión. Profesora corrige y aclara concepciones erróneas si los estudiantes concluyen equivocadamente.)</p> <p>2.- ¿Qué ejemplos podemos encontrar día a día del círculo? (Recoger al menos 3 ejemplos y escribirlos)</p>	<p>Evaluación formativa por observación directa en las actividades grupales y/o individuales, y a través de la participación de las y los estudiantes en las preguntas realizadas por la profesora.</p>

	<p>calcular la cantidad de sectores circulares, y viceversa.</p>	<p>en la pizarra).</p> <p>3.- ¿Qué ejemplos podemos encontrar día a día de la circunferencia? (Recoger al menos 3 ejemplos y escribirlos en la pizarra).</p> <p>4.- Dadas las áreas de área y perímetro del círculo, ¿Cuánto es el perímetro de un círculo de diámetro igual 4 cm? Si un estudiante responde de inmediato, profesora le pregunta el procedimiento utilizado para llegar al resultado. Luego, le pregunta a los compañeros si están o no de acuerdo con él/ella y porqué. Profesora corrobora conclusiones o corrigen según corresponda.</p> <p>5.- ¿Cuánto es la medida del radio de un círculo de área igual a 25π? Si un estudiante responde de inmediato, profesora le pregunta el procedimiento utilizado para llegar al resultado. Luego, le pregunta a los compañeros si están o no de acuerdo con él/ella y porqué. Profesora corrobora conclusiones o corrigen según corresponda.</p> <p>Parte II: Presentación de situación problemática para la resolución de problema de manera colaborativa recurriendo a la medida angular interna de la circunferencia, y cantidad de segmentos circulares a partir de la aplicación (vista anteriormente en clases y controles) de fracción: “parte de”: Aplicar “fracción de” para calcular la totalidad o parcialidad de área y perímetro del círculo y ángulo del centro de la circunferencia, respectivamente:</p> <p>Profesora, en la pizarra, escribe y verbaliza la fórmula de área de círculo, generando una ecuación. En la que explicita las partes de la ecuación que conforman, en conjunto la totalidad del área del círculo. Luego la profesora, plantea una situación en la que no se conoce la totalidad del área, pero sí una parte, y solicita a los estudiantes llegar al resultado mediante la pregunta: ¿Es posible con los datos que se disponen, poder llegar al área total del círculo? La profesora apoya a los estudiantes en caso de que éstos no puedan hilar la conexión con la ecuación revisada anteriormente. Una vez que los estudiantes llegan a la solución, profesora plantea otra situación en que se proporciona el área total del círculo, sin embargo, se quiere conocer “una parte de” ésta. Posteriormente, la profesora, pregunta de qué forma es posible poder calcular “la parte de” un total, en otras palabras, por medio de qué operación o qué recurso es posible calcular solo una parte de un todo. (Esperando que los estudiantes participen en la clase y aporten con “utilizando la fracción” o “dividiendo”. En caso de que los estudiantes no conecten la idea con el uso de “fracción de” la profesora recurrirá al siguiente ejemplo: Si tengo 9 dulces, y tengo 3 amigos. ¿Cuántos debo darle a cada uno para que cada amigo reciba la misma cantidad de dulces? Cuando los estudiantes respondan: “3 dulces”. La profesora pregunta cómo llegaron a esa conclusión, es decir, recurriendo a qué operación. Una vez que los estudiantes</p>	<p>Indicadores de evaluación:</p> <p>Aplican fórmulas de área y perímetro de círculo.</p> <p>Reconocen el ángulo central de una circunferencia.</p> <p>Calculan porcentajes identificando la parte total y la parte parcial correspondiente al porcentaje.</p>
--	--	--	--

		<p>respondan: “dividiendo” o “utilizando la fracción”, la profesora solicitará a los estudiantes recurrir a la misma lógica para poder responder la pregunta del área del círculo. Profesora entrega una guía breve donde se solicita calcular el área y perímetro del círculo y sector circular de circunferencia.</p> <p>Profesora plantea la siguiente situación (representación pictórica grande, de manera que los estudiantes puedan formar el procedimiento colaborativamente): una pizza (circular), al respecto se plantea que hay 5 amigos invitados a comer. Entonces, ¿Cómo podemos saber el ángulo del centro de cada trozo de pizza si se quiere que cada invitado más el anfitrión coman la misma cantidad de pizza? Profesora pregunta: ¿Qué conocimientos necesitamos para solucionar la situación anterior? (medida interior de una circunferencia) (Cantidad de trozos (sectores circulares) en que se dividirá la pizza)).</p> <p>Profesora permite a estudiantes resolver de manera autónoma y colaborativa la respuesta. Profesora corrobora o corrige respuesta final de los estudiantes, señalando los procedimientos erróneos si correspondieran.</p> <p>Profesora replantea problema: ¿Cuántos trozos (sectores circulares) de pizza iguales (de igual medida angular) resultan si contando a invitados y anfitrión, son 10 personas? Al escuchar la respuesta de un estudiante voluntario, profesora le pide a otro estudiante voluntario que diga si está de acuerdo con su compañero, en caso de decir que sí, pedirle que explique cómo llegó a la misma conclusión. Si piensa distinto, que también explique su conclusión. De ser el segundo escenario, pedirle al conjunto de estudiantes que digan y expliquen quién está en correcto y quién no y porqué. ¿y si fueran 4 personas? ¿Y cuántas personas serían invitadas si resultaron trozos (segmentos circulares) iguales (con ángulo del centro 120°)?</p> <p>Profesora espera respuesta, pide que estudiante voluntario explique respuesta. Si está equivocado se le solicita a algún compañero que explique si está o no de acuerdo con él y porqué. Profesora corrige en caso de ser necesario. Profesora entrega guía 1 de sector circular. Monitorea la resolución individual o en parejas de la guía. Luego de 15 min (aprox) comienza a liderar la resolución colaborativa de las preguntas de la guía. Preguntando al azar a estudiantes que respondan, evaluando la adquisición del nuevo aprendizaje de los estudiantes.</p> <p>Parte III: Cierre</p>	
--	--	---	--

			Profesora solicita a estudiantes ejemplos de círculos y circunferencias donde se identifique parte de círculo y circunferencia. Luego profesora dibuja un círculo y marca un sector circular, y pregunta: Si les preguntara cómo se llama esta región circular, ¿qué me dirían?(Sector circular)... Si me preguntaran por cuánto mide la superficie de este sector circular... ¿Qué es lo que necesito calcular?... (área del sector circular) Entonces, ¿Qué información necesitaría para responder?	
CLASE 2 (1 HR)	A partir de las fórmulas de área y perímetro de círculo, calcular área y perímetro de sector circular	Área y perímetro de sector circular	<p>Una vez que los estudiantes estén en silencio, de pie y en su puesto (protocolo del establecimiento), la profesora da la bienvenida a los estudiantes, les pide tomar asiento.</p> <p>Parte I: Recordar el nombre de la región del círculo que corresponde a sector circular. La profesora lo registra pictóricamente en la pizarra. Luego le pregunta a los estudiantes cuáles eran las características de esa región circular, recoge aportes y los registra en la pizarra. Profesora muestra una representación pictórica de un sector circular donde éste tiene una medida angular de 45°. También se indica que el área del círculo es 75 cm^2, y que se establece que $\pi=3$. Luego, la profesora pregunta cómo podríamos calcular el área y el perímetro del sector circular. Primero plantea: ¿Cuáles son los datos que nos brindan? (Profesora registra en la pizarra que $75 \text{ cm}^2 = \text{área del círculo}$). Luego pregunta de qué forma podríamos llegar a calcular entonces el perímetro y el área del sector circular?, ¿Qué es lo más inmediato calcular?¿Por qué? (el área del sector circular, porque ya me dan el área del círculo completo). Luego la profesora de que valide esa respuesta, le pregunta a sus estudiantes que ahora, sabiendo que la medida angular es 45° del sector circular, cómo podrían calcular el área. Si estudiantes no relacionan, profesora de manera paralela pregunta. Si el área de un círculo fuera 100 cm^2 y el sector circular tuviera una medida angular de 180°, cómo quedaría representado pictóricamente? (la mitad del círculo). Entonces, ¿Cuánto mediría su área? (50 cm^2, ya que es la mitad). Profesora valida la respuesta y ahora pregunta cómo supieron que era la mitad. Luego de que estudiantes revelan que ese resultado nace de relacionar la medida angular del sector circular con respecto a la medida angular interior de un círculo completo, ahora profesora vuelve a preguntar. Entonces, devolviéndonos al problema inicial. ¿Cómo podríamos calcular el área de este sector circular? Estudiantes establecen que necesitan determinar la parte que corresponde del sector circular con respecto al círculo completo. Finalmente, la profesora pregunta: ¿Y podríamos saber cuánto es el perímetro del sector circular?... ¿Cuánto sería el perímetro total del círculo?... ¿Cómo calculo el perímetro? Profesora registra algebraicamente y en lenguaje común todos los aportes de los estudiantes. Deja la pregunta abierta.</p> <p>Parte II: Resolver guía 1: Área y perímetro del círculo y del sector circular. Estudiantes de manera individual resuelven guía 1. Monitoreo. Profesora resuelve dudas de estudiantes</p>	<p>Evaluación formativa por observación directa en las actividades grupales y/o individuales, y a través de la participación de las y los estudiantes en las preguntas realizadas por la profesora.</p> <p>Indicadores de evaluación: Relacionan “fracción de” con “parte de” para el cálculo del área, perímetro del círculo y sector circular de la circunferencia. Aplican la división de la totalidad del</p>

			<p>de manera individual/grupal dependiendo de si la pregunta se repite. Luego de unos 15 min aprox, profesora pregunta a viva voz si hay dudas de alguna pregunta de la guía para resolverla adelante todos juntos. Si no es así, se dan unos minutos más para el término de la resolución de la guía.</p> <p>Parte III: Cierre. Profesora vuelve a pregunta abierta y pregunta. Entonces, ¿Cuál es el punto de partida para poder calcular el perímetro del sector circular? Profesora permite que los estudiantes lideren el camino para llegar al resultado y solo interviene en caso de que ningún aporte de los estudiantes los acerque al resultado final.</p>	<p>área y perímetro del círculo, para calcular una parte del área y perímetro del círculo; y viceversa. A partir de la parte de una circunferencia, los estudiantes calcular la medida total de la circunferencia a partir de “fracción de” y viceversa.</p>
<p>CLASE 3 (2)</p>	<p>Aplicar área y perímetro de segmento circular</p>		<p>Una vez que los estudiantes estén en silencio, de pie y en su puesto (protocolo del establecimiento), la profesora da la bienvenida a los estudiantes, les pide tomar asiento.</p> <p>Parte I: Recordar el nombre de la región del círculo que corresponde a segmento circular. La profesora lo registra pictóricamente en la pizarra. Luego le pregunta a los estudiantes cuáles eran las características de esa región circular, recoge aportes y los registra en la pizarra. Profesora muestra una representación pictórica de un segmento circular formado por un sector circular donde éste tiene una medida angular de 45° y una cuerda de 5 cm. También se indica que el área del círculo es 75 cm^2, y que se establece que $\pi=3$. Luego, la profesora pregunta cómo podríamos calcular el área y el perímetro del sector circular. La profesora primero plantea: ¿Cuáles son los datos que nos brindan? (Profesora registra en la pizarra que $75 \text{ cm}^2 = \text{área del círculo}$). Luego pregunta de qué forma podríamos llegar a calcular entonces el perímetro y el área del sector circular?, ¿Qué es lo más inmediato calcular? ¿Por qué? (el área del sector circular, porque ya me dan el área del círculo completo). Luego la profesora de que valide esa respuesta, le pregunta a sus estudiantes que ahora, sabiendo que la medida angular es 45° del sector circular, cómo podrían calcular el área. Si estudiantes no relacionan, profesora de manera paralela pregunta. Si el área de un círculo fuera 100 cm^2 y el sector circular tuviera una medida angular de 180°, cómo quedaría representado pictóricamente? (la mitad del círculo). Entonces, ¿Cuánto</p>	<p>Evaluación formativa por observación directa en las actividades grupales y/o individuales, y a través de la participación de las y los estudiantes en las preguntas realizadas por la profesora.</p> <p>Indicadores de evaluación:</p>

			<p>mediría su área? (50 cm^2, ya que es la mitad). Profesora valida la respuesta y ahora pregunta cómo supieron que era la mitad. Luego de que estudiantes revelan que ese resultado nace de relacionar la medida angular del sector circular con respecto a la medida angular interior de un círculo completo, ahora profesora vuelve a preguntar. Entonces, devolviéndonos al problema inicial. ¿Cómo podríamos calcular el área de este sector circular? Estudiantes establecen que necesitan determinar la parte que corresponde del sector circular con respecto al círculo completo. Finalmente, la profesora pregunta: ¿Y podríamos saber cuánto es el perímetro del sector circular?... ¿Cuánto sería el perímetro total del círculo?... ¿Cómo calculo el perímetro? Profesora registra algebraicamente y en lenguaje común todos los aportes de los estudiantes. Deja la pregunta abierta.</p>	<p>Relacionar la construcción de la corona circular con 2 círculos concéntricos. Relacionar la construcción del trapecio circular a partir de una corona circular o también a partir de un sector circular. Aplicar fórmula de área y perímetro del círculo para calcular área y perímetro de corona circular y trapecio circular. Representar pictórica y algebraicamente igualdades para plantear el cálculo de área/perímetro de corona/trapezio circular a partir de la información entregada en el enunciado del problema/ejercicio.</p>
--	--	--	--	---

CLASE 4 (3 HRS)	Construir por medio de material concreto los diferentes tipos de regiones del círculo para la comprensión y reflexión de los procedimientos necesarios para su formación.	Regiones del círculo	<p>Parte I: Reconocer pictóricamente regiones del círculo. Una vez que los estudiantes estén en silencio, de pie y en su puesto (protocolo del establecimiento), la profesora da la bienvenida a los estudiantes, les pide tomar asiento. Profesora explica que existen diferentes formas extraer parte de un círculo. Luego, da a conocer y registra pictóricamente las clases de regiones del círculo, señalando el nombre de cada una. La profesora entrega una hoja con el nombre y registro pictórico de cada región del círculo para que los estudiantes peguen en su cuaderno. Profesora solicita a los estudiantes al menos 2 ejemplos de cada región del círculo que puedan encontrar en la vida cotidiana. Profesora los registra en la pizarra. Profesora lleva cartulina, tijeras, pegamento, plumones y/o lápices scripto, block de $\frac{1}{4}$, lana y regla.</p> <p>Parte II: Actividad en duplas/individual: Construir a través de material concreto cada región del círculo. Profesora solicita a los estudiantes que en 45 minutos, de manera individual o en parejas, construya(n) cada sector circular, de manera que el círculo tenga un diámetro igual a 20 cms. Luego, solicita pegar cada región del círculo al lado izquierdo del block, señalando al lado derecho de cada región del círculo, los pasos en que tuvo (vieron) que realizar para construirlo. Profesora muestra un ejemplo en la pizarra. Paralelamente, profesora, registra en la pizarra las ecuaciones previamente revisadas en clase de área, perímetro de círculo y sector circular. La profesora permite a los estudiantes trabajar en parejas o en grupo si así lo prefieren y monitorea el trabajo de sus estudiantes. También solicitando a aquellos estudiantes que se muestran distraídos, que se enfoquen en trabajar en la actividad dispuesta en la clase.</p> <p>Parte III: Profesora solicita a 4 estudiantes que presente una región circular cada uno y explique a sus compañeros los pasos para construirlo. Al final de cada presentación, preguntar a los estudiantes si lo hicieron con un procedimiento distinto. Una vez que todos los estudiantes que han participado están de acuerdo unos con otros, la profesora registra las respuestas y estrategias que los estudiantes utilizaron para formar las diferentes regiones del círculo. Posteriormente, la profesora le pregunta a otros 4 estudiantes, de qué manera piensan ellos, que sería posible modelar lo que han respondido anteriormente sus compañeros. Profesora guía a los estudiantes en caso de que éstos no conecten la situación problemática actual con las ecuaciones revisadas anteriormente mediante la siguiente pregunta: "Antes, ¿Cómo calculábamos el ángulo del centro de un sector circular de una circunferencia si se querían 4 sectores iguales? Una vez que los estudiantes hacen la conexión, la profesora registra los avances en el modelamiento y solicita a otros estudiantes que se sumen a participar para dar</p>	<p>Evaluación formativa y sumativa (1/2 de una nota al libro). Construyen de manera individual y con material concreto los sectores circulares.</p> <p>Indicadores de evaluación: Analizan alternativas y la información disponible, toman y ponen en marcha decisiones fundamentales para la construcción pictórica solicitada. Relacionan sectores del círculo con elementos de la vida cotidiana.</p>
----------------------------	--	-----------------------------	--	--

			<p>solución a la situación problemática. Finalmente, una vez que están todos los estudiantes de acuerdo, profesora da la instrucción a los estudiantes de sacar el cuaderno y registrar las ecuaciones pertinentes para el cálculo de las regiones del círculo.</p>	
<p>CLASE 5 07/09 (2 HRS)</p>	<p>Reflexionar la construcción del cálculo de área y perímetro de las regiones del círculo</p>	<p>Regiones del círculo</p>	<p>Inicio: Recordar los tipos de regiones del círculo. La profesora, luego de dar la bienvenida a los estudiantes y solicitarles que tomen asiento. La profesora le pide a 4 diferentes estudiantes que registre cada uno 1 región circular y luego les pide que tomen asiento. La profesora pide a los estudiantes la opinión con respecto a las representaciones pictóricas de sus compañeros y les pregunta si tienen algún reparo al respecto. En caso de que sea así, profesora precisa la representación pictórica de manera que refleje de mejor manera las características de cada región circular. Posteriormente, la profesora le solicita a los estudiantes que recuerden el nombre de los tipos de regiones del círculo, para luego registrarlos en la pizarra. La profesora se dispone a devolver los trabajos a medio hacer para que los estudiantes finalicen la actividad.</p> <p>Desarrollo: Estudiantes avanzan y terminan actividad pictórica. Estudiantes, de manera autónoma, terminan la representación pictórica de cada región circular y la explicación de cómo calcular el área o perímetro de cada una. La profesora monitorea activamente el trabajo de sus estudiantes, resolviendo dudas de planteamiento en casos necesarios, con el apoyo de los sectores hechos con cartulina. Profesora solicita a sus estudiantes los trabajos para guardarlos, y solicita también asear la sala para comenzar la última parte de la actividad.</p> <p>Cierre: Compartir reflexiones de la construcción de área y perímetro de las regiones circulares. Profesora toma un trabajo al azar y busca una explicación creada por una pareja de estudiantes cualquiera sobre el cálculo de área o perímetro de una región específica. Luego, la profesora le pregunta a sus estudiantes si están de acuerdo o no con tal reflexión y si aportarían algo más. Una vez que todos estén de acuerdo, la profesora les pide colaborar para registrar algebraicamente estas construcciones reflexivas. Profesora hace el mismo proceso con área y perímetro de las cuatro regiones circulares.</p>	<p>Evaluación formativa y sumativa por observación directa en las actividades grupales y/o individuales, y a través de la participación de las y los estudiantes en las preguntas realizadas por la profesora.</p> <p>Indicadores de evaluación: Relacionan “fracción de” con “parte de” para el cálculo del área, perímetro del círculo y sector circular de la circunferencia. Trabajar activamente en clases y de manera</p>

				<p>autónoma para la actividad.</p> <p>Comunicar y argumentar reflexiones acerca del cálculo de área y perímetro de regiones circulares.</p>
CLASE 6 (2 HR)	Calcular área y perímetro de corona y trapecio circular	Regiones del círculo	<p>Una vez que los estudiantes estén en silencio, de pie y en su puesto (protocolo del establecimiento), la profesora da la bienvenida a los estudiantes, les pide tomar asiento. La profesora pregunta: La profesora</p> <p>Parte I: Recoger conocimientos previos acerca de ideas de significado de área y perímetro del círculo 1.- ¿Cuáles son las regiones del círculo? Luego de que los estudiantes contesten, La profesora plantea que esta clase se centrará en las regiones: corona circular y segmento circular. La profesora solicita a los estudiantes dos ejemplos década una de estas regiones y las registra en la pizarra. Luego, la profesora pregunta: Estudiantes, ¿Qué miden el área y el perímetro?, ¿Qué palabras en un problema podrían hacer referencia al área o al perímetro de una figura? ¿Podrían dar un ejemplo? La profesora registra en la pizarra todos los aportes de la profesora. Ella intenta que diversos estudiantes participen en la clase, y valida la respuestas correctas. Las respuestas incompletas o con reparos de los estudiantes, muestra no total convencimiento con lenguaje para-verbal y/o indica que “es inexacto, más o menos”, etc. Y pide otro estudiante que complemente lo que dice el/la compañero(a) o bien, le pregunta por qué el planteamiento anterior no está completamente correcto. Quienes responden y no se acercan al resultado o lógica detrás del resultado, la profesora directamente indica que no es correcto y le pregunta por qué piensa eso. Que trate de explicarlo para que ella (la profesora) tenga las herramientas de mostrarle al/ a la estudiante su error. Luego, la profesora le pide a un estudiante que en un dibujo en la pizarra de una corona circular y de un trapecio circular, marque con un plumón de diferente color el área de la región; y en otro dibujo, el área. En caso de que los estudiantes estén en lo correcto o no, la profesora le pide que por favor tome asiento, agradece su participación y el pregunta al resto de los compañeros si está bien o mal lo que plantea el/la compañero(a). Les solicita fundamentar.</p> <p>Parte II: Cálculo de área y perímetro de la corona circular y del trapecio circular. La profesora entrega la guía 3 de corona y trapecio circular y comunica que el primer ítem será</p>	<p>Evaluación formativa por observación directa en las actividades grupales y/o individuales, y a través de la participación de las y los estudiantes en las preguntas realizadas por la profesora.</p> <p>Indicadores de evaluación: Los estudiantes calculan la medida angular del centro de cada sector circular a partir del conocimiento de cuántos sectores circulares (de la</p>

			<p>realizado de manera colaborativamente y a viva voz y el resto de la guía, se espera que lo resuelva individualmente. (Ejercicio pendiente de entregar junto a guía para el viernes 08/11/19). La profesora le pregunta a los estudiantes que registremos los datos relevantes. Profesora los transcribe en la pizarra. Luego le pide a algún estudiante que relea la pregunta del problema. La profesora hace una pausa y pregunta a sus estudiantes... ¿Qué quiere decir la pregunta? ¿Qué es lo que me están preguntando?. Una vez que los estudiantes traducen y aterrizan el lenguaje común en lenguaje matemático, la profesora recurre a preguntar a sus estudiantes las fórmulas de área y perímetro del círculo. Luego, la profesora va preguntando, etapa por etapa, los pasos para resolver el problema, delegando el liderazgo en la resolución de la situación problemática. Una vez que hayan llegado al resultado, la profesora le pide a otro estudiante que vuelva a leer la pregunta del problema y que indique si el cálculo sacado responde tal pregunta. Posteriormente, la profesora pregunta a sus estudiantes si quedó alguna duda en el procedimiento y respuesta del problema. Si la respuesta es que sí, la profesora reitera la explicación, de lo contrario, les dice a sus estudiantes que continúen con la resolución de la guía. La profesora realiza un monitoreo activo. Si existe una pregunta que se repita mucho, la responde a viva voz, recurriendo a la participación de los estudiantes en el proceso de dar respuesta.</p> <p>Parte III: Cierre La profesora borra toda la pizarra. La profesora le pide a los estudiantes que imaginen que tienen un hermano que no sabe nada del tema, y que le pide que le explique todo visto en clases de corona y trapecio circular. ¿Qué le dirían? La profesora registra en pizarra todos los aportes de los estudiantes.</p>	<p>misma medida angular del centro) se generan a partir de la misma circunferencia, y viceversa. Los estudiantes relacionan “fracción de” con “parte de” para calcular la medida angular de cada sector circular, o, la cantidad de sectores circulares con la misma medida angular tomando en cuenta que la medida angular interior de la circunferencia corresponde a 360°.</p>
CLASE 7 (2 HRS)	Medir y Evaluar aprendizajes de la unidad: Sectores y segmentos circulares	Sectores y segmentos circulares	<p>Inicio: Una vez que los estudiantes estén en silencio, de pie y en su puesto (protocolo del establecimiento), la profesora da la bienvenida a los estudiantes, les pide tomar asiento. La profesora les pide tomar asiento y ubicarse en parejas. Luego, divide la pizarra en 4 columnas, registra el nombre de las regiones del círculo revisadas anteriormente y elabora una representación pictórica en cada caso. Además les pregunta a los estudiantes cuáles eran las fórmulas de área y perímetro del círculo, registrándolas algebraicamente en la pizarra. Posteriormente, La profesora entrega una guía (impresa solo por un lado de la hoja) por parejas y les indica que tienen hasta el final de la hora de clases para terminar. Profesora monitorea y solo resuelve dudas de planteamiento. También va avisando cuando queda 1 hora, media hora, 15 min y 5 min.</p>	<p>Evaluación sumativa (1/2 de nota al libro)</p> <p>Indicadores de evaluación: Los estudiantes</p>

			<p>Cierre: Profesora retira las guías revisando que hayan registrado el nombre y curso. Profesora se despide de los estudiantes.</p>	<p>diferencian círculo de circunferencia a partir en representaciones pictóricas y en situaciones problemáticas. Los estudiantes aplican las fórmulas de área y perímetro del círculo. Los estudiantes reconocen las regiones del círculo. Los estudiantes calculan el área/perímetro de las regiones del círculo conociendo el área/ perímetro/ radio/diámetro del círculo total y del círculo concéntrico. Los estudiantes calculan la medida angular del centro de cada sector circular a partir del conocimiento de</p>
--	--	--	--	---

				cuántos sectores circulares (de la misma medida angular del centro) se generan de la misma circunferencia, y viceversa.
CLASE 8 (1 HR)	Retroalimentar las preguntas y respuestas del instrumento de evaluación: Sectores y segmentos circulares	Sectores y segmentos circulares	<p>Inicio: Conocer la percepción subjetiva y personal de los estudiantes con respecto al instrumento de evaluación. Profesora espera que estudiantes se coloquen de pie y en silencio para saludar, una vez que aquello se lleve a cabo, da la bienvenida a los estudiantes y les pide que tomen asiento (de acuerdo a los protocolos del colegio). Profesora les pregunta a los estudiantes qué les pareció la prueba. Luego de escuchar diversas opiniones, la profesora les solicita a los estudiantes que fundamenten su sentir.</p> <p>Desarrollo: Retroalimentación de la prueba Los estudiantes, de manera colaborativa, retroalimentan la implementación del instrumento de evaluación de Sectores y segmentos circulares: La profesora permite el espacio para que en cada una de las preguntas los estudiantes voluntarios puedan responder cuál fue la respuesta que ellos creyeron correcta. Luego, se pregunta al resto de sus compañeros y procedieron de la misma manera y si llegaron al mismo resultado. La profesora valida las respuestas correctas cuando los estudiantes llegan a tal conclusión. En situación contraria, la profesora guía la conclusión correcta mediante preguntas orientadoras a los estudiantes de acuerdo a cada pregunta. Por ejemplo: ¿Qué era un sector circular?, ¿Cómo calculaba el área/perímetro del sector circular si ya conocía el área/perímetro de la circunferencia? (y viceversa)... O también: ¿Qué tipo de región del círculo representa la representación pictórica de la pregunta x?... Cuando hicimos la actividad con material concreto, ¿Cómo construimos tal región del círculo?... Entonces, ¿Cómo podríamos calcular el área/perímetro de esa región del círculo conociendo el área/perímetro del círculo total?</p> <p>Cierre: Conclusión de la unidad didáctica. Los estudiantes, guiados por la profesora, generan el cierre de la unidad didáctica. Esto es, registrando</p>	<p>Evaluación formativa por observación directa en las actividades grupales y/o individuales, y a través de la participación de las y los estudiantes en las preguntas realizadas por la profesora.</p> <p>Indicadores de evaluación: Los estudiantes levantan la mano para participar voluntariamente en la resolución de problemas y ejercicios.</p>

			<p>en la pizarra todos los conocimientos que adquirieron en esta unidad, y también todos los conocimientos necesarios para contestar preguntas referentes a los contenidos de esta unidad didáctica, tales como relacionar “parte de” con una fracción de un total; de manera tal que, la profesora registre verbal, escrita y pictóricamente un hilo conductor de todos los conocimientos aprendidos en creciente complejidad.</p>	<p>Los estudiantes relacionan los contenidos de la unidad con las preguntas/situaciones problemáticas del instrumento de evaluación.</p> <p>Los estudiantes relacionan la actividad con material concreto para calcular el área/perímetro de las regiones del círculo y de la medida del ángulo del centro de la circunferencia, según corresponda en la pregunta.</p>
--	--	--	---	--




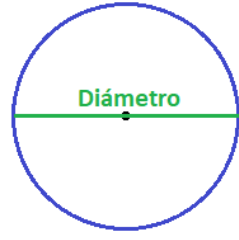
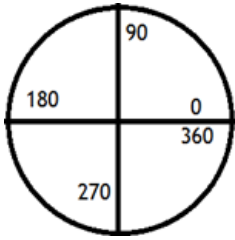
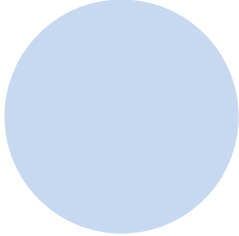
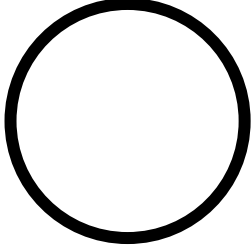
Universidad
Alberto Hurtado

Anexo 5: Guía 1: "Sector circular"

Guía: Área y perímetro del círculo y del Sector circular

Eje: Geometría

Nombre: _____ Curso: I° __ Fecha: _____

 	$A = \pi \times r^2$ $P = 2\pi \times r$ 	 <p>círculo</p>  <p>circunferencia</p>
---	---	---

Calcula las siguientes regiones circulares con la información entregada en cada caso:

- 1) Si el radio de una circunferencia es 3 cm. ¿Cuánto es su área y cuánto es su perímetro?
- 2) Si el área de un círculo es $16\pi^2$. ¿Cuál es su diámetro?
- 3) Si el diámetro de un círculo es 10 cm. ¿Cuánto es su área?
- 4) Si tengo una pizza y la quiero repartir entre 4 personas. ¿Qué medida angular del centro tiene cada trozo de pizza?
- 5) Si mis amigos y yo comimos pizza de manera tal que cada uno solo comió un trozo, y cada trozo tenía una medida angular de 10° . ¿Entonces cuántas personas éramos?

- 6) Si una torta de cumpleaños circular se reparte entre 6 personas. ¿Qué medida angular tiene cada trozo?

Anexo 6: Guía 2: "Segmento circular"

Guía 2: Segmentos y sectores circulares, y regiones del círculo

Eje: Geometría

Nombre: _____ Curso: 1° __ Fecha: _____

Formulario

Área sector circular: $\frac{\alpha}{360} \cdot \pi \cdot r^2$

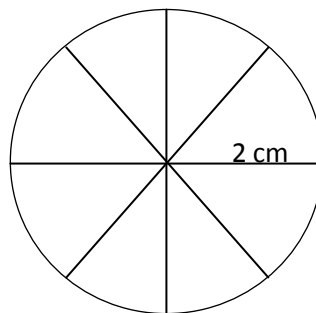
Perímetro sector circular: $2\pi + m(\widehat{AB})$

Área segmento circular: $\text{Área sector circular} - \text{Área del triángulo} = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi \cdot r^2$

Perímetro segmento circular: Longitud del arco + medida de la cuerda = $L(\widehat{AB}) + m(\overline{AB})$

Resuelve los siguientes problemas y ejercicios:

- 1) Si la siguiente ventana circular se forma por vidrios de la misma medida angular.



- 2) ¿Es la ventana un círculo o una circunferencia?, ¿Por qué?

- 3) ¿Cuál es la medida angular de cada vidrio? Explica con palabras y luego desarrolla numéricamente hasta llegar a la respuesta correcta.

Desarrollo

- 4) ¿Cuál es la medida angular de 3 vidrios?

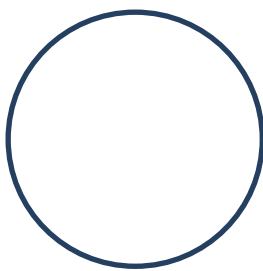
- 5) ¿Cuánto mide el borde de la ventana?

- 6) ¿Cuánto mide la superficie de la ventana?

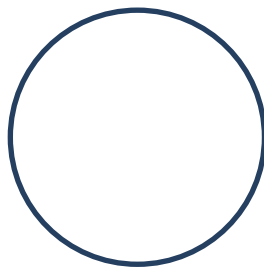
- 7) Si se quiere decorar con una cinta especial el borde cada dos vidrios, ¿Cuánta cinta necesito?

- 8) Da un ejemplo de la vida cotidiana de cada región del círculo vista en clase y dibújalas.

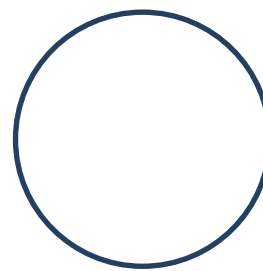
- 9) Construye los ángulos del centro en cada circunferencia de centro O, según las medidas presentadas:



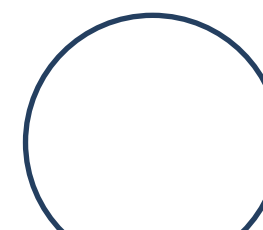
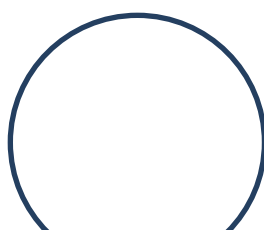
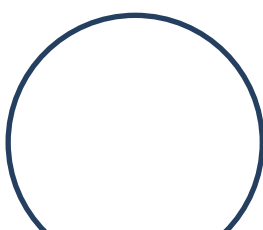
$\alpha = 90^\circ$



$\alpha = 60^\circ$



$\alpha = 270^\circ$



10) Dada una corona circular de perímetro igual a 60 cms. ¿Cuánto es el perímetro de un trapecio circular si se forman 6 trapecios circulares en esa corona?

11) ¿Cuál es la medida angular que subtiende a un tercio del borde?

12) ¿Cuánto mide el área y el perímetro de un segmento circular construido a partir de un triángulo equilátero de lado = 4 cm, con un vértice en el centro del círculo y dos vértices en el borde del círculo? Registra pictóricamente y luego contesta la pregunta.

Anexo 7: Guía 3: "Trapezio y corona circular"

Guía 3: Corona circular y trapezio circular

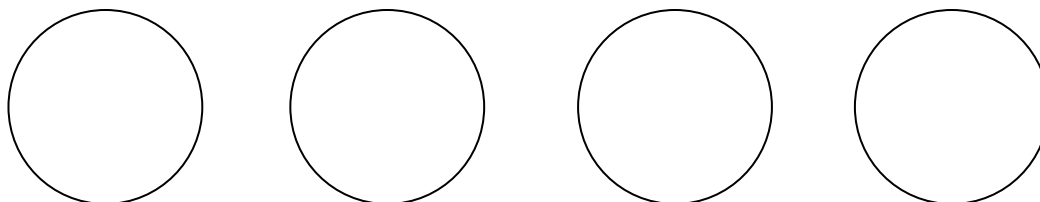
Eje: Geometría y probabilidad

Nombre: _____ Curso: I ° __ Fecha: _____

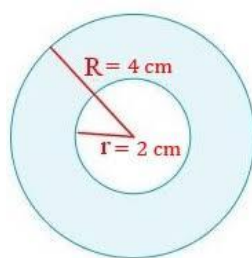
Responde las siguientes preguntas, ejercicios y problemas.

- 1) Explica con tus palabras qué es área y qué es perímetro

- 2) Representa pictóricamente cada región del círculo y escribe su nombre arriba.



Dada la siguiente imagen, contesta las preguntas 2), 3), 4), y 5)



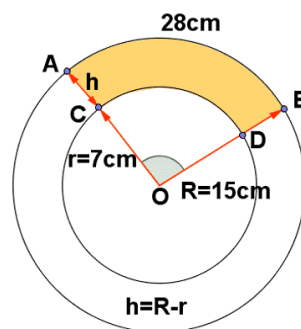
- 3) Calcula el área del círculo grande y del círculo pequeño

- 4) Calcula el perímetro del círculo grande y del círculo pequeño

- 5) Calcula el área y el perímetro de la corona circular
- 6) Calcula el área y el perímetro de una corona circular delimitada por dos circunferencias con radios 2 y 5 metros.
- 7) Una piscina con forma circular y perímetro 30π metros tiene una isla circular con un radio de 2 metros. Calcular la superficie de agua de la piscina.



- 8) Escribe la ecuación necesaria para calcular el perímetro de una corona circular delimitada por las circunferencias con centro en el origen y radios 1cm y 3cm
- 9) Dada la siguiente imagen responde las preguntas 8 y 9



- 10) Calcula el área y perímetro del sector circular comprendido entre A y B

11) Calcula el área y perímetro del sector circular comprendido entre C y D

12) Calcula el área del trapecio circular delimitado entre A, B, C y D

13) Calcula el perímetro del trapecio circular delimitado por A, B, C y D

Pregunta desafío 1

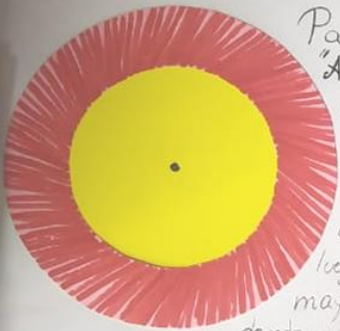
Explica de qué forma puede calcularse el perímetro de un trapecio circular si se conoce la longitud de los radios de los círculos concéntricos y la medida angular del sector circular que genera a dicho trapecio circular. Si quieres, puedes dar un ejemplo para explicar.

Pregunta desafío 2

Explica de qué forma puede calcularse el área de un trapecio circular si se conoce la longitud del radio del círculo mayor, la diferencia entre los radios de los círculos y la cantidad de trapecios circulares de igual medida angular del centro que se generaron dentro del círculo. Si quieres puedes dar un ejemplo para explicar.

REGIONES del círculo

CORONA CIRCULAR

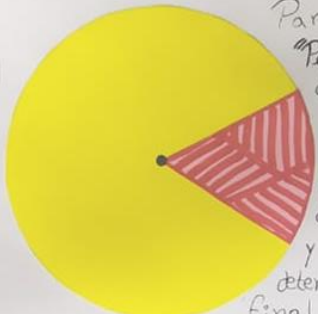


Para determinar el "Área" de la corona circular debo calcular el área del círculo grande y el área del círculo chico, luego resto al área mayor el área menor dando así el resultado.

Formula:

$$\pi \cdot R^2 - r^2 \pi$$

SECTOR CIRCULAR

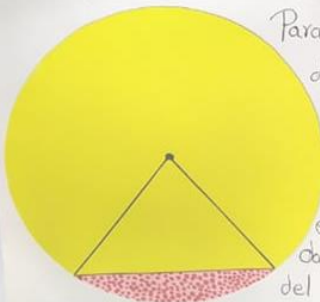


Para calcular el "Perímetro" del sector circular debo saber el valor del r^2 y la longitud de un arco (dato que me dan en el ejercicio) y luego sumarlos para determinar el resultado final.

Formula:

$$2r + \text{longitud arco}$$

SEGMENTO CIRCULAR

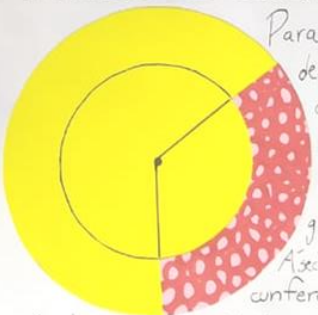


Para sacar el "Área" de un segmento circular primero debo determinar el área del sector circular y luego restar el $A_{\Delta} \left(\frac{b-h}{2} \right)$, dando así el resultado del segmento.

Formula:

$$A_{\text{sector}} - A_{\Delta} = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi \cdot r^2 - \left(\frac{b-h}{2} \right)$$

TRAPECIO CIRCULAR




Para obtener el "Área" del trapecio circular debo calcular el Área sector circular de la circunferencia grande, luego resto el Área sector circular de la circunferencia pequeña, dando así el resultado del trapecio.

Formula:

$$R^2 \pi \cdot \frac{\alpha}{360} - r^2 \pi \frac{\alpha}{360}$$

Anexo 9: Instrumento de evaluación final de la unidad didáctica

Profesoras Karen Ahumada y Elizabeth Valenzuela
Departamento de Matemática



Nota

Guía evaluada en parejas

Tema: Sectores y segmentos circulares

Eje: Geometría

67

48 / 58 puntos

50

Nombres: Canela Andrea Vergara y Martin Iepe Quintanilla

Curso: 1° A Fecha: 14/11

Instrucciones

La presente guía:

- Debe realizarse en las mismas parejas escogidas para hacer la actividad con material concreto de las "regiones del círculo".
- Corresponde a un instrumento de evaluación que, luego de ser calificada, será promediada con la nota de la actividad de las regiones del círculo e irá directamente al libro de clases.
- Debe ser trabajada y terminada en 80 minutos.
- El ítem I no necesita desarrollo.
- El ítem II requiere tener desarrollo para optar a puntaje parcial o completo.

I. Preguntas de selección múltiple (1 punto cada una)
Instrucciones: Encierra en un círculo la alternativa correcta.

1) La siguiente imagen representa:

- I. ~~Un círculo~~
- II. ~~Una esfera~~
- III. Una circunferencia



- a) ~~Solo I~~
- b) Solo III
- c) ~~Solo I y III~~
- d) ~~Solo II y III~~
- e) ~~I, II y III~~

2) Ejemplos de un círculo son:

- I. ~~El dibujo de un ula ula~~
- II. ~~El dibujo de una argolla~~
- III. El dibujo de una ventana circular ✓

- a) ~~Solo I~~
- b) ~~Solo II~~
- c) Solo III
- d) ~~Solo II y III~~
- e) ~~I, II y III~~

3) Las regiones del círculo son:

- I. Sector circular ✓
- II. Segmento triangular
- III. Trapezoide circular
- IV. Corona circular ✓

- a) ~~Solo I y II~~
- b) ~~Solo II y III~~
- c) Solo I y IV
- d) ~~Solo III y IV~~
- e) ~~I, II, III y IV~~

4) Para determinar qué parte representa un sector circular con respecto a un círculo necesito:

- a) Conocer la medida angular del sector circular
- b) El radio del círculo
- c) El área total del círculo
- d) El diámetro del círculo
- e) Todas son correctas



Profesoras Karen Ahumada y Elizabeth Valenzuela
Departamento de Matemática

5) Ejemplos de circunferencia son:

- a) El dibujo de un aro
- b) El dibujo de una pelota
- c) El dibujo de una piscina circular llena de agua
- d) El dibujo de un reloj circular
- e) Ninguna de las anteriores

6) Si quisiera medir el borde de un círculo, lo más útil sería considerar:

- a) Una regla
- b) Una escuadra
- c) Un transportador
- d) Lana
- e) Un compás

7) Para conocer la medida angular de un sector circular necesito saber:

- a) El radio del círculo
- b) La cantidad de sectores circulares de igual medida que tiene el círculo
- c) El perímetro del círculo
- d) El área del círculo
- e) Ninguna de las anteriores

8) El orden que debo seguir para calcular el área de un segmento circular:

1) Restar el área del sector circular con el área del triángulo	2) Calcular el área del círculo	3) Calcular la parte del círculo que representa el sector circular	4) Calcular el área del triángulo inscrito	5) Calcular el área del sector circular
5°	1°	90°	4°	3°

- a) 1-2-3-4-5
- b) 2-3-5-4-1
- c) 4-5-1-3-2
- d) 3-1-4-2-5
- e) 5-2-3-1-4

9) Para calcular el perímetro de un segmento circular debo considerar:

- a) La medida de la cuerda
- b) 2 veces la medida del radio
- c) La longitud del arco
- d) Las alternativas b) y c) son correctas
- e) Las alternativas a) y c) son correctas

Profesoras Karen Ahumada y Elizabeth Valenzuela
Departamento de Matemática

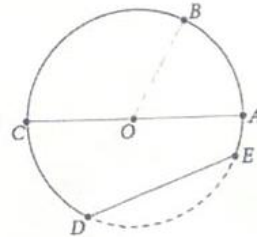
10) $\frac{\alpha}{360} \cdot \pi \cdot r^2$ corresponde a la fórmula para calcular:

- a) Área del sector circular
- b) Área del segmento circular
- c) Área del trapecio circular
- d) Área de corona circular
- e) Área del círculo II.

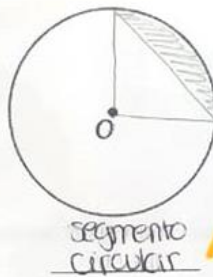
II. Ejercicios y problemas

1) En la siguiente circunferencia de centro O, identifica cada uno de sus elementos, escribiendo su nombre. (4 puntos)

- a. \overline{OA} radio
- b. \overline{DE} cuerda
- c. \overline{DE} arco
- d. \overline{CA} diámetro

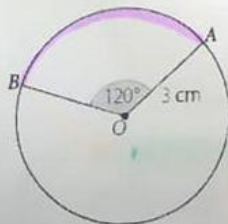


2) Escribe en las líneas el nombre de las regiones del círculo y luego representálas pictóricamente. (8 puntos)



3) Calcula en cada caso la longitud del arco de la circunferencia de centro O, según corresponda. Considera $\pi = 3$. Plantea el desarrollo bajo cada imagen. (6 puntos)

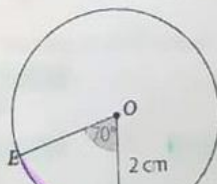
a. $L(\widehat{AB}) = 6 \text{ cm}$



$$\frac{2 \pi r \cdot \alpha}{360}$$

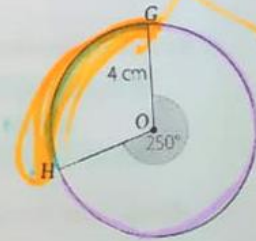
$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 120}{3 \cdot 360} = 6$$

b. $L(\widehat{EF}) = 7/3 = 2,33 \text{ cm}$



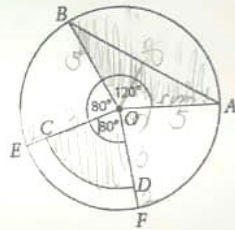
$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 70}{360} = \frac{28}{9} = 3,11$$

c. $L(\widehat{GH}) = 16,66 \text{ cm}$



$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 250}{360} = \frac{200}{9} = 22,22$$

A partir de la información revelada en la siguiente imagen responde las preguntas 4, 5, 6, 7, 8 y 9.
Considera que $\pi = 3$ y que el radio del círculo es 5 cm.



4) ¿Cuál es el perímetro del círculo? (1 punto)

$$P = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$P = 30 \text{ cm}$$

5) ¿Cuánto mide la superficie del círculo? (1 punto)

$$A = \pi \cdot r^2$$

$$3 \cdot 5^2$$

$$A = 75$$

$$A = 75 \text{ cm}^2$$

6) ¿Qué fracción representa el sector AOB del círculo completo? (2 puntos)

$$\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$$

7) Si $L(\overline{CE}) = 2 \text{ cm}$. ¿Cuánto mide el área del sector circular DOC? (2 puntos)

$$\frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360} = \frac{3 \cdot 3^2 \cdot 80}{360} = \frac{3 \cdot 9 \cdot 2}{36} = 6 \text{ cm}^2$$

8) Calcula el perímetro del sector circular AOB (2 puntos)

$$2r + \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$$

$$10 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$10 + \frac{1}{3} \cdot 30$$

$$10 + 10 = 20 \text{ cm}$$

9) ¿Cuánto mide el área del triángulo AOB? (2 puntos)

$$\pi \cdot 8 \cdot 3$$

$$24$$

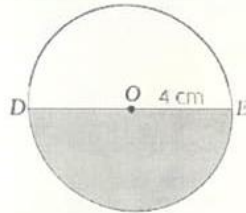
$$3 - \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

Profesoras Karen Ahumada y Elizabeth Valenzuela
Departamento de Matemática

10) Calcula el área de los siguientes sectores y segmentos circulares a la derecha de cada imagen indicando a cuáles de esos tipos de región del círculo corresponden.

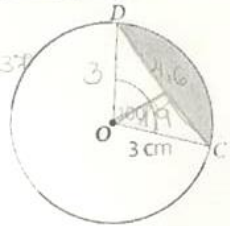
Considera $\pi = 3$ (6 puntos)

a. $A = 24 \text{ cm}^2$ → sector



$$\frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360} = \frac{3 \cdot 4^2 \cdot 180}{360} = \frac{3 \cdot 16 \cdot 1}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

b. $m(\widehat{CD}) = 46^\circ$ → segmento
 $A = 3,13 \text{ cm}^2$



$$\begin{array}{r} 8,74 : 2 = 4,37 \\ 4 \\ \hline 7,40 \\ 4,37 \\ \hline 3,13 \end{array}$$

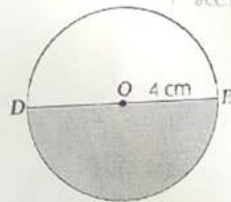
$$\frac{\pi r^2 \alpha}{360} - \left(\frac{b \cdot h}{2} \right) = \frac{3 \cdot 3^2 \cdot 46}{360} - \left(\frac{4,16 \cdot 1,9}{2} \right)$$

$$7,5 - 4,37 = 3,13$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 4,6 \cdot 1,9 \\ 414 \\ 460 \\ \hline 8,74 \\ \hline 2 \end{array}$$

11) Calcula el perímetro de cada sector o segmento circular indicando a cual región del círculo corresponde en cada caso. Considera $\pi = 3$. (6 puntos)

a. $P = 20 \text{ cm}$ → sector
Altura del triángulo COD = 1,9 cm

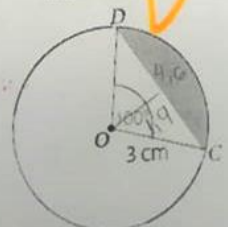


$$2r + \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$$

$$8 + \frac{1}{2} \cdot 24 = 20 \text{ cm}$$

$$\begin{array}{r} 2\pi r \\ 2 \cdot 3 \cdot 4 \\ 24 \end{array}$$

b. $m(\widehat{CD}) = 46^\circ$
 $P = 9,6 \text{ cm}$ → segmento



$$\frac{2\pi \cdot r \cdot \alpha}{360} + 4,16$$

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 46}{360} + 4,16 = 9,6$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 46 \\ 360 \\ 10 \\ 4 \\ \hline 2,1 \end{array}$$