



**UNIVERSIDAD
ALBERTO HURTADO**
LA UNIVERSIDAD JESUITA DE CHILE

**Facultad de Educación
Departamento de Pedagogías Medias y Didácticas Específicas**

**El Teorema de Tales en la Formación Inicial de Profesores de Educación
Media: Tránsito del enfoque sintético al vectorial**

Tesis para optar al grado de Magíster en Didáctica de la Matemática

**Por
Daniel Farías Rojas**

Directora de Tesis: Dra. Carolina Henríquez Rivas

Profesora Informante: Dra. Soledad Montoya González

**Santiago, Chile
2016**

Índice

Introducción	4
Capítulo 1: Una Problemática en Geometría	5
1.1 Situación en Chile: Resultados en Evaluaciones	5
1.2 Trabajos en la enseñanza de la Geometría	11
1.3 Aspectos Históricos/Epistemológicos del Teorema de Tales	13
1.3.1 Época Griega	13
1.3.2 Época Medieval	15
1.3.3 Siglo XVII.	17
1.3.4 Siglo XVIII.	18
1.3.5 Siglo XIX	21
1.3.6 Siglo XX	25
1.4. Síntesis del Capítulo	30
Capítulo II: Marco Teórico	33
2.1 Espacio de Trabajo Matemático	33
2.2 Génesis del ETM	34
2.3 Componentes de los Plano Cognitivo y Epistemológico	35
2.4 Planos Verticales en el ETM	35
2.5 Enfoques Complementarios al ETM	36
2.5.1 Génesis Semiótica y Visualización:	37
2.5.2 Génesis Instrumental	40
2.5.3 Génesis Discursiva y Tipología de Pruebas.....	42
2.6 Tipos de ETM	44
2.7 Paradigma Geométrico	45
2.8 Síntesis del Capítulo	47
Capítulo III: Objetivos y Metodología de Investigación	49
3.1 Objetivos de la Investigación	49
3.2 Metodología de la Investigación	51
3.2 Primer Objetivo Específico de Investigación	54

3.3 Segundo Objetivo Específico de Investigación	56
3.4 Síntesis del Capítulo	58
Capítulo IV: Análisis de Objetivos específicos y diseño de un instrumento	59
4.1 Análisis del Primer Objetivo Específico de Investigación	59
4.2 Análisis del Segundo Objetivo Específico de Investigación.....	69
4.3 Síntesis del Capítulo	74
Capítulo V: Análisis de Resultados de instrumento aplicado y planteamiento de Propuesta de situaciones de Referencia	76
5.1 Análisis de Resultados de instrumento	76
5.2 Análisis de la Versión Sintética del Teorema de Tales.....	76
5.3 Análisis de la Versión Vectorial del Teorema de Tales	80
5.4 Análisis de la Relación del enfoque sintético y el enfoque vectorial en el Teorema de Tales	87
5.5 Síntesis de Resultados obtenidos.....	95
5.6 Síntesis del Capítulo	97
Capítulo VI: Conclusiones de la Investigación	98
6.1 Conclusiones de la Investigación	98
Bibliografía.....	100
Anexos.	105
Anexo 1: Actividad.....	105
Anexo 2: Actividad resuelta por estudiantes	108

Resumen

La presente investigación trata sobre la problemática que presenta la enseñanza del Teorema de Tales en su tránsito desde el enfoque sintético al vectorial en la formación inicial de profesores de educación media, desde la perspectiva de la teoría de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) tal como lo plantea Kuzniak (2011). La que tiene como objetivo, analizar el trabajo que presentan los estudiantes de último año de la carrera de Pedagogía en Matemática al relacionar los enfoques sintético y vectorial con el fin de diseñar una propuesta de trabajo que permita relacionar dichos enfoques.

Introducción

La presente instigación aborda la problemática sobre el tránsito desde el enfoque sintético al vectorial relativo al Teorema de Tales en la formación inicial de profesores.

Para abordar la problemática se proporcionan una serie de antecedentes tanto nacionales como extranjeros sobre la enseñanza y aprendizaje de la Geometría y en específico del Teorema de Tales, además de realizar un trazado histórico del teorema desde su formulación hasta el modo de utilizarlo hoy en día. Una de las principales razones para iniciar esta investigación son los malos resultados respecto a las preguntas del Teorema de Tales en la Prueba de Selección Universitaria (PSU) que según los datos entregados por el DEMRE (DEMRE, 2007 – 2014) el porcentaje de acierto no supera el 20% en las respuestas de los estudiantes

Por otra parte, para sustentar la investigación, se utilizó la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM), desarrollada por Kuzniak (2011) la que se describe en su conjunto.

La investigación tiene el objetivo de analizar la relación en el trabajo relativo al Teorema de Tales desde el enfoque sintético a uno vectorial en estudiantes de último año de Pedagogía en Matemática con el fin de diseñar una propuesta que favorezca dicha relación. Para abordar el objetivo, se diseñaron dos objetivos específicos. El primero de ellos, fue analizar dos dispositivos que fueron los Estándares Orientadores para las carreras de Pedagogía y los programas de la asignatura Geometría de dos Instituciones de Educación Superior los cuales aportaron datos para la formación del segundo objetivo el cual fue diseñar un instrumento en forma de actividad con una serie de preguntas que tienen el propósito de que los estudiantes de último año de la carrera de Pedagogía en Matemática puedan relacionar el enfoque sintético y vectorial en el Teorema de Tales.

Capítulo 1: Una Problemática en Geometría

El capítulo que viene a continuación presenta la problemática investigada relativa a la falta de relación que existe entre los enfoques sintético y vectorial, desde el Teorema de Tales, en las escuelas de Pedagogía en el país. En primer lugar se realiza una revisión de diversos estudios encontrados sobre la enseñanza y aprendizaje de la Geometría y del Teorema de Tales, en distintos niveles tanto en Chile como en el extranjero. Lo anterior da paso a una revisión histórica/epistemológica sobre el Teorema de Tales, y se concluye con una síntesis del capítulo, en la cual se expresan las ideas centrales del capítulo y las preguntas de investigación.

1.1 Situación en Chile: Resultados en Evaluaciones

En este primer apartado se pretende dar a conocer la situación chilena sobre la enseñanza y aprendizaje de la Geometría, mostrando resultados de diversas evaluaciones:

Las distintas iniciativas en educación, tanto públicas como privadas, que se han implementado en el país durante el último tiempo han demostrado que no es suficiente, desde las estrategias ya realizadas, lograr una mejora en lo que respecta al aprendizaje de los estudiantes.

Aun cuando se aplicaron diversas estrategias, tales como el Plan de Apoyo Compartido (PAC), el que tiene como objetivo ayudar a los establecimientos municipales y/o subvencionados con bajo desempeño en la prueba SIMCE, que es impartido por el Ministerio de Desarrollo Social (2013) y a su vez el reforzamiento en Matemática, donde se aumentaron a 320 las horas de dicha asignatura entre los niveles de 5^{to} básico y 2^{do} medio, deja en evidencia la precaria internalización de los aprendizajes matemáticos en el ámbito escolar.

Así lo demuestran pruebas nacionales, como la prueba de medición de la calidad (SIMCE, 2013), que refleja que la gran mayoría de los estudiantes se encuentra en un nivel de aprendizaje elemental e insuficiente. Como ejemplo de aquello, se presenta la gráfica del nivel Octavo básico:

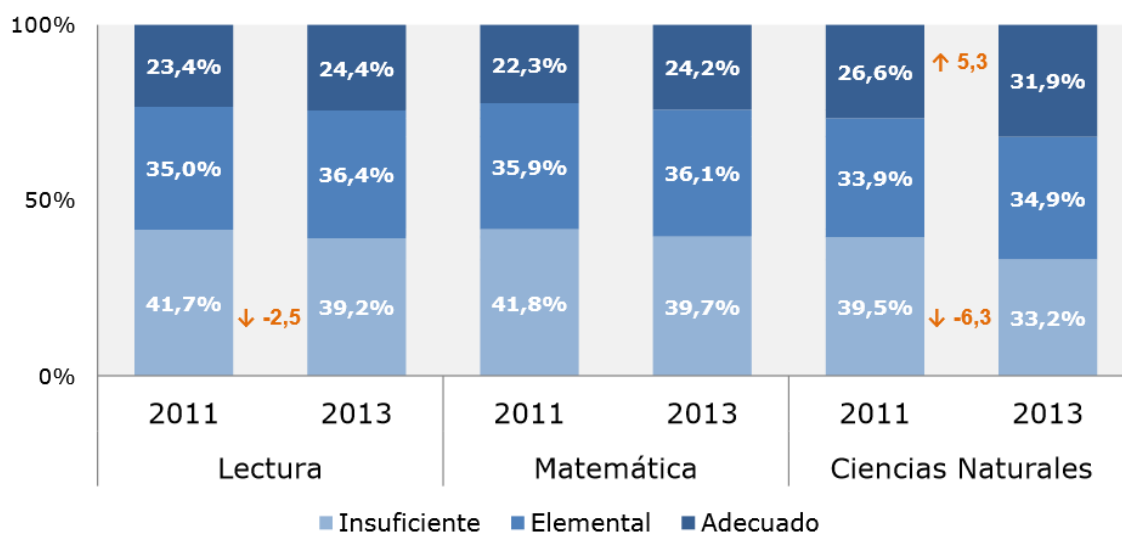


Figura 1: Gráfico de Medición SIMCE 2013

También, investigaciones extranjeras, como el Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS, 2011) señalan que un gran porcentaje de los estudiantes no logra obtener el mínimo de puntaje de la medición en el estudio, por ejemplo en octavo básico es del 43%, así lo muestra el siguiente gráfico:

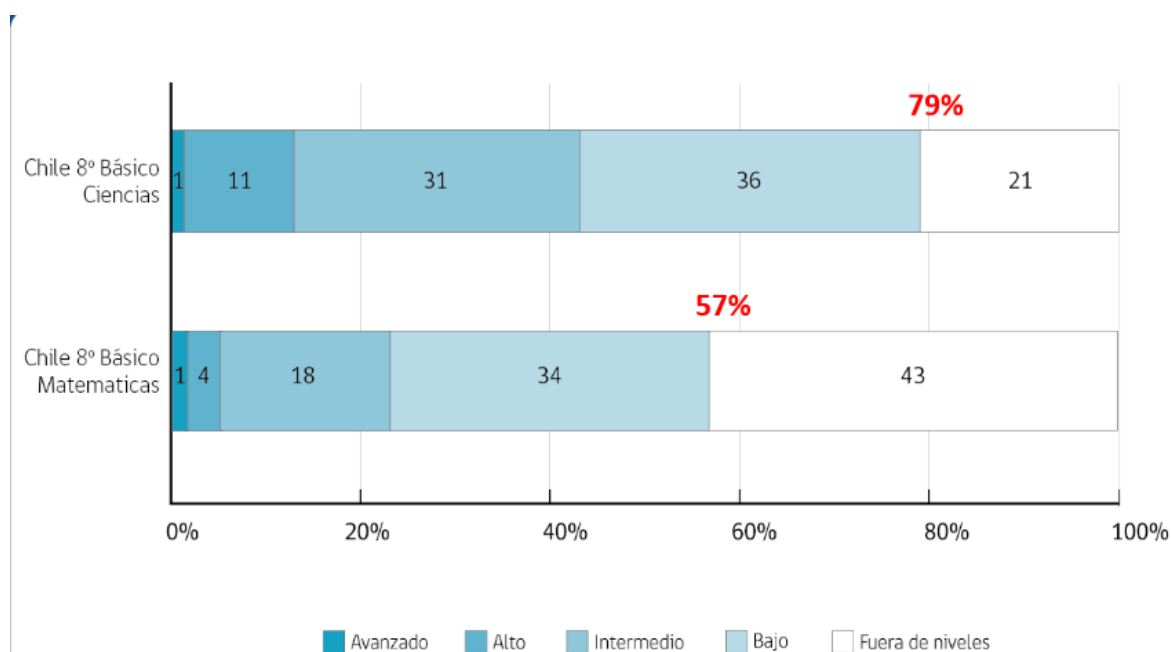


Figura 2: Gráfico de Medición TIMSS 2011

Se reporta además, el Informe del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (Informe PISA, 2012) donde solamente el 1,6 % de la muestra logra un nivel destacado en matemática y un 52% de esta no demuestra tener una base mínima para enfrentar una sociedad moderna, así lo demuestra el siguiente gráfico:

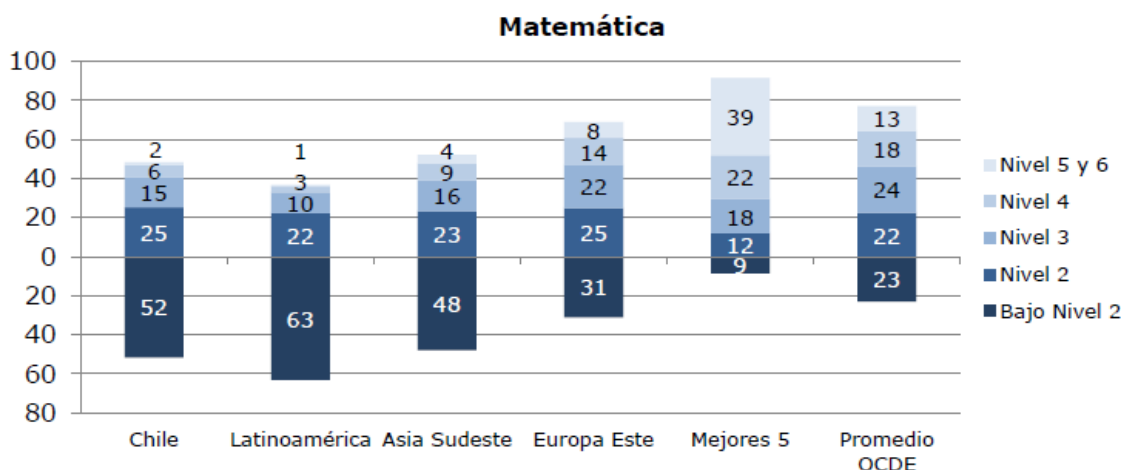


Figura 3: Gráfico medición OCDE sobre informe PISA (2012)

Así, como los estudiantes registran problemas en Matemática, esto también se registra en los profesores. Si se analiza la situación del profesorado de Educación Media en Matemática, los números no distan mucho de los resultados de los estudiantes, ya que la medición de la Prueba INICIA (2012) que mide los conocimientos pedagógicos y disciplinarios de los egresados de las escuelas de pedagogía en el país, indica que el 55% de los futuros profesores de matemática en educación media evaluados, tiene un nivel insuficiente en la prueba de conocimientos disciplinarios.

Así lo demuestra el siguiente gráfico:

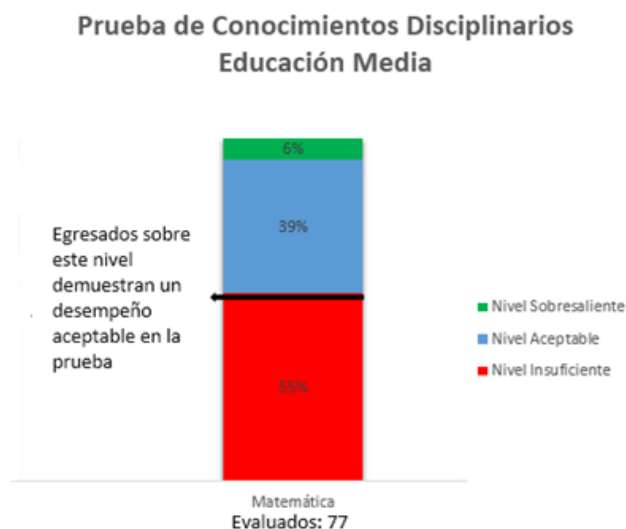


Figura 4: Gráfico de resultados de Prueba de Conocimientos Disciplinarios Prueba INICIA 2012

Además, en un estudio internacional que compara distintas formaciones iniciales de profesores de matemática en el mundo, incluido Chile (Babcock et al., 2010) se concluye algo similar, ya que el conocimiento pedagógico de la disciplina de los futuros profesores de matemática se encuentra lejos de un nivel adecuado. Cabe señalar que dentro de los 16 países que considera el estudio, Chile se encuentra dentro de los últimos lugares.

Por otra parte, el informe McKinsey (2007) que evalúa la forma en que logran los países obtener un buen desempeño educativo, deduce que el conocimiento matemático de un profesor impacta de sobremanera en el rendimiento de los estudiantes pues, si el profesor posee un conocimiento de alto grado, este impactará de manera positiva en el rendimiento de sus estudiantes y a su vez, si un profesor posee un bajo desempeño, este impactará de manera negativa en el rendimiento de los estudiantes.

A su vez, Latorre (2004), sugiere que los buenos profesores marcan una clara diferencia en los aprendizajes que logren sus alumnos, en sus rendimientos, y en definitiva, en el éxito escolar que puedan lograr.

Específicamente en el dominio de Geometría, queda demostrado que la enseñanza y aprendizaje es una de las áreas de la matemática que presenta mayores dificultades, en todo nivel educativo. Así lo demuestran los datos de pruebas nacionales y estudios internacionales (SIMCE – TIMSS – PISA) que incluyen en sus pruebas y/o estudios, preguntas de Geometría las cuales tienen un bajo nivel de acierto.

En la perspectiva del profesorado, un estudio realizado en México, de acuerdo a Cantoral (como se cita en Aravena & Caamaño, 2013), sugiere que el problema de la formación geométrica en los profesores, se debe a que se privilegia un trabajo algebraico, que no tiene ni aplicaciones ni contextos, lo que representa un problema conceptual y metodológico que ha sido difícil de revertir. Esto ha dejado como consecuencia que los estudiantes pierdan capacidades geométricas como la visualización o la modelización (Aravena, Caamaño, Giménez, 2008), por lo tanto, la repercusión de los profesores en el aprendizaje de los estudiantes no está en discusión.

La presente investigación se centra en el Teorema de Tales, que forma parte de los contenidos del área de Geometría de Segundo año Medio (Mineduc, 2011).

Los datos obtenidos en la Prueba de Selección Universitaria (PSU), por medio del Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional (DEMRE), DEMRE, 2007 – 2014, reflejan una de las principales razones por la que se quiere estudiar el Teorema de Tales ya que más del 60% de los estudiantes no responde u omite las preguntas referidas al tema.

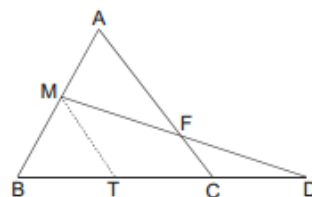
A continuación se presenta un ejercicio que fue parte de la PSU el año 2012:

PREGUNTA 48

En la figura 10, el triángulo ABC es equilátero, los puntos M, F y T pertenecen a él y D es la intersección de las rectas BC y MF. Si $AM = MB = BT = 10$ cm y $CD = 12$ cm, entonces la medida del segmento FC es

- A) $\frac{30}{11}$ cm
- B) 5 cm
- C) $\frac{15}{4}$ cm
- D) 6 cm
- E) $\frac{60}{11}$ cm

fig. 10



PSU 2012, documento n°23

Figura 5: Pregunta de la Prueba de Selección Universitaria (PSU) del año 2012

El ejercicio anterior tuvo un acierto de un 9% y fue omitida por el 69% de los estudiantes, lo que denota que esta fue una pregunta compleja para las personas que rindieron la PSU ese año. Este caso suele suceder de manera reiterada, basta revisar las preguntas publicadas en torno al Teorema de Tales por el DEMRE para percatarse de ello.

Se entiende entonces, que existe un problema en la comprensión e internalización del Teorema de Tales por parte de los estudiantes de educación

secundaria. Así lo demuestran las cifras respecto al nivel de acierto de las preguntas sobre el Teorema de Tales.

Una de las posibles causas de los magros resultados es la forma en que el profesor enseña el Teorema de Tales a sus estudiantes ya que puede no estar entregando las herramientas necesarias y/o suficientes para su comprensión e internalización.

En el trabajo de Cheuquepán y Barbé (2012), se señala que los docentes de Educación Básica en Chile asignan una cantidad inferior de tiempo a Geometría comparado con otras unidades matemáticas por lo que el problema se agrava si se considera que el marco curricular, establecido por MINEDUC, asigna más contenidos mínimos obligatorios a la unidad de Geometría que a otras unidades. Además, se observa que los docentes se centran exclusivamente en el reconocimiento de figuras y cuerpos geométricos, lo que impide a los estudiantes desarrollar habilidades de orden superior. Por otro lado, la situación de las horas asignadas a Geometría en Educación Media es similar a lo que ocurre en Educación Básica, pues la cantidad de tiempo asignado a los contenidos de Geometría es absolutamente menor a temas como Álgebra y Funciones.

Espinoza, Barbé, Mitrovich, Rojas (2007), muestran que los profesores de Educación Básica, debido a su escasa formación matemática y didáctica, presentan serias dificultades para ir más allá de una enseñanza de la Geometría rígida, por lo que tienden a postergarla para finales del año escolar.

Otra de las posibles causas puede ser la forma en que se les enseña geometría a los futuros profesores en las escuelas de pedagogía en educación matemática, las que ejecutan un enfoque formal, estructurado y con parcelación del conocimiento (Aravena et al., 2013)

En el trabajo de Latorre (2004) se menciona que existe una tensión entre los campos de la formación inicial de profesores y el ejercicio profesional pues, profesores que se inician profesionalmente se amparan en imágenes previas, en tanto ellos reproducen el tipo de enseñanza que obtuvieron cuando eran estudiantes en la escuela, lo que trae como consecuencia que los estudiantes no logren comprender e internalizar los conceptos y procesos geométricos que se les pretende enseñar.

Al revisar los programas de estudio de formación docente en dos Universidades del país, queda en evidencia de que existen cursos de Geometría en los que se incluye formación respecto al Teorema de Tales, tanto en su demostración como en aplicación, la que solo es impartida en su forma clásica, es decir la forma euclidiana, dejando de lado versiones como la vectorial, la de homotecia y la proyectiva.

A su vez, se presentan como antecedentes los Estándares Orientadores para Carreras de Pedagogía en Educación Media para Matemática (Mineduc, 2012), específicamente el estándar 12 y el estándar 15.

El estándar 12 refiere a lo siguiente:

14. Promueve el aprendizaje del teorema de Tales sobre trazos proporcionales y el teorema de Euclides en un triángulo rectángulo.

Figura 6: Ítem 14 del Estándar 12 de Geometría, pág. 116

Desde lo anterior no es claro el como debe promoverse dicho aprendizaje, es decir bajo que conceptos de Geometría, si es de la forma euclidiana o vectorial.

El Estándar 15 de Geometría refiere a lo siguiente:

10. Conoce la articulación de los contenidos relacionados con vectores con otros presentados en el currículo escolar.

Figura 7: Ítem 10 del Estándar 15 de Geometría, pág. 121

Desde lo anterior, se entiende que un profesor debe saber articular, por ejemplo, el Teorema de Tales con el concepto de vector. Lo que no queda de manifiesto al revisar los programas de estudio de las carreras de Pedagogía en Matemática.

A continuación, se presentan antecedentes internacionales sobre la enseñanza de la Geometría, específicamente sobre la enseñanza y aprendizaje del Teorema de Tales.

1.2 Trabajos en la enseñanza de la Geometría

En esta sección se presentan trabajos sobre la enseñanza de la Geometría en el extranjero, dentro de los cuales se incluyen dos trabajos sobre la enseñanza y aprendizaje del Teorema de Tales en la educación secundaria.

La situación de los problemas de enseñanza de la Geometría por parte de los profesores no son exclusivos de Chile pues, como señala Corrales (citado en Blanco y Barrantes, 2003) los contenidos de Geometría, en España, siempre se dejan al final del curso por lo que hay escaso tiempo para su enseñanza y aprendizaje.

A su vez, en España, Pérez y Guillén (2009), señalan que los contenidos de Geometría se desplazan hacia las últimas unidades didácticas de su planificación escolar, tanto que se llega a prescindir de ellas en los cursos del nivel medio.

Por lo tanto se necesitan más esfuerzos para fomentar una buena enseñanza de la Geometría que se dé no solo en el currículum que ya está establecido sino que también en las aulas (Alsina, 2007).

Desde lo investigado se evidencia que existen problemas en la enseñanza de la Geometría, los cuales no son una cuestión nueva pues, Revuz (citado en Gascón, 2002) en 1971 ya se planteaba lo siguiente: “¿Existe hoy día la Geometría como una parte relativamente independiente de la Matemática?” (pág. 5). Según Revuz, el objetivo geométrico en la matemática no puede ser solo aplicado para caracterizar teorías, sino que también puede aplicarse apropiadamente a situaciones ya modeladas. Por lo tanto, no se puede considerar a la Geometría como una unidad independiente de la Matemática.

Por otra parte, según Santaló (1980) la enseñanza de la Geometría, en Europa, fue cayendo repetidamente en el error de pensar que los fundamentos de una Ciencia, por el sólo hecho de partir de cero, son la parte más simple y que por ende debe ser el punto de partida para su aprendizaje. Este error ocasionó, que se intentara utilizar el libro “Elementos” de Euclides como un texto para aprender Geometría, el que estaba dirigido para expertos en Matemática. Fueron unos años más tarde, que este error se volvió a cometer con el libro “Fundamentos” de Hilbert. Esto dio paso a que la Geometría solo se enfocara en la fundamentación matemática y no en su aplicación, lo que confundía a los estudiantes.

El error descrito por Santaló vuelve a ocurrir para el año 1960 con las Matemáticas Modernas, en donde se intentó el objetivo imposible de una construcción impecable y rigurosa de la Geometría sin salirse del nivel elemental. Dado que esto resultaba imposible se optó por suprimir la Geometría o trasladarla al Álgebra Lineal.

Uno de los grandes aliados de trasladar la Geometría al Álgebra Lineal fue Choquet (citado en Gascón, 2002) quien consideraba que las axiomáticas de Euclides – Hilbert ocultaban la estructura vectorial del espacio porque están basadas en las nociones de longitud, ángulos y triángulos. En estas axiomáticas se veía el triángulo, pero no el paralelogramo, proceso que lo hubiese llevado a considerar la noción de vector.

Las Matemáticas Modernas fracasaron, pero aún no se logran superar ideas como la de Choquet en la Geometría. Es cosa de analizar que sucede con el Teorema de Tales y la casi nula articulación existente entre los enfoques sintético y vectorial. Al respecto y para graficarlo de mejor manera se presentan los siguientes casos:

En un trabajo presentado en el marco de la ecoled'ete en Nantes, Francia, MRabet (2013) señala que en Túnez, una vez que se enseñó el Teorema de Tales, en un curso de la educación secundaria, con un enfoque sintético y más tarde, en un segundo curso, con un enfoque vectorial, los estudiantes no fueron capaces de relacionar ambos enfoques, debido a que se les enseñó como dominios separados, sin conexión entre ellos y esto se debe a que no existe una transición natural entre ambos enfoques.

Por otro lado Laguerre (2005) realizó una Ingeniería didáctica sobre el aprendizaje del Teorema de Tales en estudiantes de educación secundaria en Francia. Para ello debió revisar e investigar libros de texto de distintos niveles de los estudiantes en donde obtuvo como hallazgo la inexistencia de una secuencia natural entre las distintas versiones del Teorema de Tales, además de no utilizarse, dicho Teorema, para introducir otros conceptos matemáticos, ni soluciones a problemas que tengan una mayor dificultad.

Todo esto ha tenido como consecuencia que los estudiantes presenten dificultades en la comprensión del Teorema de Tales, ya que no logran darle sentido a este debido a que se utiliza, más bien, como una explicación algebraica y no como una explicación geométrica. Lo que provoca que los estudiantes no comprendan el por qué de que el Teorema de Tales pertenezca a los contenidos de Geometría y no a los de Álgebra.

Con estos antecedentes se aprecia que el problema de la articulación entre los distintos enfoques del Teorema de Tales puede derivarse de la falta de transposiciones didácticas.

A continuación, se presentan aspectos históricos/epistemológicos del Teorema de Tales, desde su formulación hasta como se trabaja en la actualidad.

1.3 Aspectos Históricos/Epistemológicos del Teorema de Tales

En esta sección se dan a conocer aspectos históricos/epistemológicos del Teorema de Tales, desde su formulación por Tales de Mileto en la época griega, pasando por las distintas demostraciones que ha tenido el Teorema en la historia, hasta llegar a como se trabaja en la actualidad

1.3.1 Época Griega.

Según CIDE (2009), los primeros antecedentes en la historia sobre el uso de Geometría se encuentran en Egipto, debido a la necesidad práctica de trazar los

límites de tierras a causa de la inundación que provocó el río Nilo y para ejemplificarlo usan las siguientes palabras de Herodoto:

“En esa época el faraón Sesostrio dividió las tierras de Egipto entre sus habitantes. Si el río llegaba a una parte de la porción asignada a un hombre, el rey enviaba a otras personas para examinar y determinar por medio de una medición, la extensión exacta de la pérdida. A partir de esta práctica, creo yo, es como se llegó al conocimiento de la geometría en Egipto en primer lugar, de donde paso más tarde a Grecia” (p. 40).

También se cita a Aristóteles. Él tenía una visión distinta pues, sostenía que el cultivo y desarrollo de la geometría en Egipto se había visto impulsado por una clase sacerdotal ociosa.

No obstante, de cualquiera de las dos formas que se haya originado la Geometría, ninguna era teórica sino que más bien cumplía un rol práctico en la sociedad egipcia.

Es durante la época griega donde aparece Tales de Mileto.

“La opinión antigua es unánime al considerar a Tales como un hombre excepcionalmente inteligente y es considerado como uno de los siete sabios griegos” (Boyer, p.75).

Se le adjudican cinco teoremas geométricos y se dice que logro demostrar que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto. Es por esto que se le reconoce como quien inventó la matemática deductiva.

El Teorema en el que se basa la investigación es uno que enunció él: Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado. Al respecto la historia señala que esto se inventó al querer calcular la altura de las pirámides de Guiza en Egipto, lo solucionó aprovechando la semejanza de triángulos bajo la suposición de que los rayos solares incidentes eran paralelos.

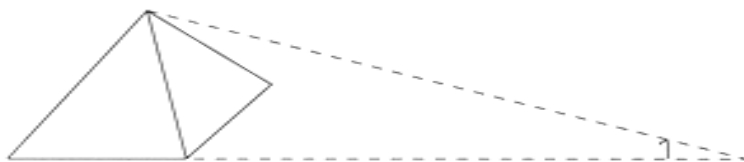


Figura 8: Tales de Mileto usando las pirámides de Guiza para formular su Teorema

Pasaron cerca de 300 años sin que se hiciera una demostración formal hasta la aparición de Euclides que alrededor del año 300 a.c. escribe su obra *Elementos*, el cual es un texto introductorio sobre la matemática de esa época, donde se limita

a una exposición sobre un orden lógico de la matemática elemental. En el libro II de *Elementos*, utiliza un “álgebra geométrica” que no es el álgebra que se conoce hoy en día, ya que actualmente se trabaja con un álgebra simbólica y una trigonometría que ha reemplazado a sus equivalentes griegos.

En el libro VI, en la proposición 2 se encuentra una demostración para el Teorema de Tales el que se enuncia a continuación:

Proposición 2: Si se dibuja una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado que queda del triángulo.

Demostración:

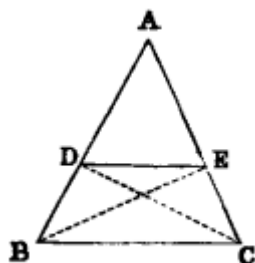


Figura 9: Proposición II, del libro VI de los Elementos de Euclides, pág. 136.

Se puede mostrar la igualdad $\frac{CE}{EA} = \frac{BD}{DA}$. Por la proposición 1 del Libro VI se tiene que $\frac{CE}{EA} = \frac{\text{área } \triangle DCE}{\text{área } \triangle DEA}$ o $\frac{BD}{DA} = \frac{\text{área } \triangle EBD}{\text{área } \triangle EAD}$.

Por otro lado los triángulos $\triangle CDE$ y $\triangle BDE$ tienen la misma base DE y estando comprendida entre las mismas paralelas ($ED \parallel CB$) son equivalentes por la proposición 36 del Libro I. Por lo tanto $\frac{CE}{EA} = \frac{BD}{DA}$.

La influencia de *Elementos* fue decisiva, ya que tras su aparición se adoptó inmediatamente como libro de texto de cabecera en la enseñanza inicial de las matemáticas.

Hubo que esperar muchos años para que hubiese avances con respecto al álgebra geométrica, en donde los árabes tuvieron una gran implicancia.

1.3.2 Época Medieval.

Los árabes hicieron grandes avances en la relación de Geometría con Álgebra, en especial cuando se publicó alrededor del año 800 d.c. el *Álgebra* de Al-

Khuwarizmi que revela en su contenido elementos griegos inconfundibles, pero la primera demostración geométrica que se encuentra tiene poco que ver con la matemática clásica griega. Para resolver la ecuación $x^2 + 10x = 39$, el autor realizó lo siguiente:

Comienza con un cuadrado de lado x , que representa x^2 . A este cuadrado, le suma el equivalente a un rectángulo $10x$ y lo hace sumando cuatro rectángulos, cada uno de una anchura de $\frac{10}{4}$ y longitud x . La zona rayada tiene un área de $x^2 + 4(\frac{10}{4}x)$, que es igual a 39. Ahora completamos el cuadrado sumando los cuatro pequeños cuadrados, cada uno de un área de $\frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{4}$. De aquí que el cuadrado exterior tiene un área de $4 \times \frac{25}{4} + 39 = 25 + 39 = 64$. El lado del cuadrado es por tanto 8.

Pero el lado tiene una longitud de $\frac{5}{2} + x + \frac{5}{2}$, o sea, $x + 5 = 8$, resultando que $x = 3$.

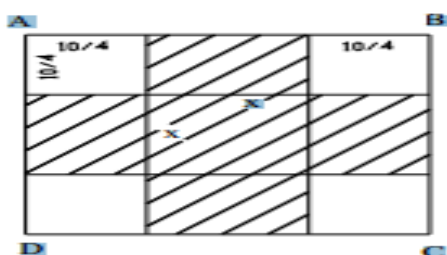


Figura 10: Método para calcular ecuaciones de Al-Khuwarizmi

En 1220, Fibonacci, inspirado por los árabes escribió un libro llamado *Practica Geometria* que está basado en una versión árabe de la división de las figuras de Euclides. Contiene una demostración de las medianas de un triángulo, así como un análogo al teorema de Pitágoras, ambas demostradas usando álgebra. Esta la obra más destacada en su tipo que se puede encontrar en esa época, en occidente.

Se aprecia, por los antecedentes que no hubo grandes avances con respecto al Teorema de Tales durante más de mil años. Esto pudiera deberse a que los planteamientos hechos por Euclides fueron tan sólidos para los matemáticos de esa época que pensaban que no había nada más por descubrir. Este puede ser uno de los motivos del porque en las escuelas y universidades solamente se limitaban a enseñar los *Elementos* de Euclides.

Sin embargo, en esta época se instalaron las bases para usar álgebra en geometría, la cual fue de gran relevancia para el matemático francés René Descartes en el siglo XVII.

1.3.3 Siglo XVII.

En 1637, Descartes publica un texto llamado *La Geometría*, en el que se describe un marco geométrico para las operaciones algebraicas, lo que actualmente se le conoce como geometría analítica. El Libro I del texto, contiene un sistema de instrucciones para resolver ecuaciones cuadráticas de manera geométrica. Después de mostrar cómo se interpretan geoméricamente las operaciones algebraicas, se centra en la aplicación del álgebra a determinados problemas geométricos, como por ejemplo una demostración del Teorema de Tales.

Demostración:

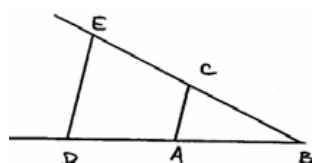


Figura 10: *La Geometría* (1637), pág.1

Sea, por ejemplo, AB la unidad, y que deba multiplicarse BD por BC; no tengo más que unir los puntos A y C, luego trazar DE paralela a CA, y BE es el producto de esta multiplicación.

Como en muchos problemas de *La Geometría*, Descartes aplica el Teorema de Tales (Euclides, VI.4) a la semejanza de triángulos. En este caso, como en el siguiente de la división, la semejanza de los triángulos $\triangle BAC$ y $\triangle BDE$, que determinan $\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{BA}$.

Exactamente 30 años después, Antoine Arnauld quien en 1667 publica *Nuevos Elementos de Geometría*. Este trabajo se basa en los *Elementos* de Euclides y tiene como objetivo dar un nuevo enfoque a la enseñanza de la Geometría en lugar de nuevos teoremas geométricos.

Él era un crítico de la forma en que Euclides demostró el Teorema de Tales por el hecho que para mostrar que las rectas son proporcionales usó el concepto de áreas, lo que es una verdadera distorsión del orden de la naturaleza.

En el Libro X, Arnauld enuncia la siguiente proposición: "Cuando dos líneas son igualmente inclinadas en dos espacios paralelos, ellas son entre sí como las perpendiculares de esos espacios, y su alargamiento de la perpendicular, están en la misma razón".

Demostración:

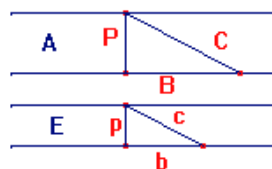


Figura 10: Imagen de la Tesis de Haruna (2000), pág.21

En el espacio A vamos a dividir P en partes iguales, siendo “x” una de las partes que mide a P, hacemos lo mismo para C, sea “y” una de las partes que mide a C y repitiendo el paso en B tenemos que sea “z” una de las partes que divide a B.

Una vez hecho esto, tomamos x para medir p en el espacio E, x esta contenido un cierto número de veces en p. Si hacemos lo mismo para c con y, para z con b. Notamos que las magnitudes son proporcionales. Que P es a p como C es a c o como B es a b, lo que prueba la proposición.

Luego, hubo que esperar hasta mediados del siguiente siglo para seguir viendo avances con respecto al Teorema de Tales y esto fue lo que sucedió con Alexis Clairaut.

1.3.4 Siglo XVIII.

En 1741 Clairaut, publicó *Elementos de la Geometría*, que formaba parte de un plan para mejorar la enseñanza de la Geometría y éste consistía en gozar de las aplicaciones prácticas con resoluciones de problemas, que desarrollaran las ideas intuitivas, logrando un placer por el saber y el descubrir. En la Parte 1 enuncia lo siguiente: Dos triángulos cuyos ángulos son respectivamente iguales tienen sus lados proporcionales.

Demostración:

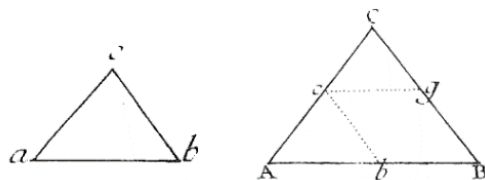


Figura 13: Proposición XXXIX, Elementos de Geometría (1741), pág. 44

Sean dos triángulos Δacb y ΔACB . Admitamos que acb , tiene la posición Acb . Entonces, si se traza $cg \parallel AB$, esta línea $cg = bB = Ab$, y que $gB = cb$. Así como los ángulos $\angle Cgc$ y $\angle Ccg$ serán iguales a los ángulos $\angle cbA$ y $\angle cAb$, el triángulo ΔCcg será igual al ΔcAb .

Así se tendrá que $Cc = Ac$, y $Cg = cb = gB$. De modo que Ac o ac será la mitad de AC ; y cb la mitad de CB .

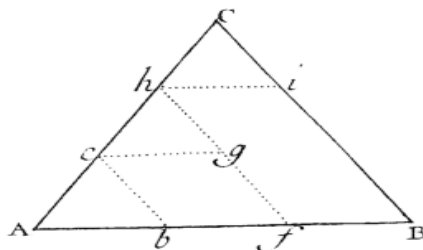


Figura 14: Proposición XXXIX, Elementos de Geometría (1741), pág. 44

Si ab está contenido un número de veces en AB , será igualmente fácil demostrar que ac está contenido el mismo número de veces en AC , y cb en CB . Ya que, si desde los puntos de división b , f de la base AB se trazan bc y fh paralelas a BC , se podrían colocar a lo largo de AC triángulos $\triangle Acb$, $\triangle cgh$, $\triangle hCi$, iguales a los triángulos $\triangle acb$ y $\triangle Acb$.

Y si ab , en lugar de estar contenido exactamente un cierto número de veces en AB , estuviese contenido dos veces y media, por ejemplo, entonces ac también estaría contenido dos veces y media en AC ; y bc , dos veces y media en CB .

Mediante las paralelas bc y fh se han colocado a lo largo de AC los triángulos $\triangle Acb$ y $\triangle cgh$, iguales a $\triangle acb$, faltará colocar entre las paralelas hf y CB un triángulo $\triangle Chi$ cuyos lados serán la mitad de los lados de $\triangle cAb$. Esto es evidente dado que, por la suposición, fB es la mitad de Ab y la base hi del triángulo $\triangle Chi$ es igual a fB , puesto que hf y CB son paralelas. Así, en general, cuando dos triángulos ABC y abc tienen los mismos ángulos, estos triángulos, llamados triángulos semejantes, tienen sus lados proporcionales.

Tuvieron que pasar 50 años para que, en 1794, se publicara *Geometría* de Adrien- Marie Legendre, libro destinado a los estudiantes de bachillerato. Este es un texto que vuelve parcialmente a la demostración y a la rigurosidad de *Elementos* de Euclides, pero de manera más comprensible para los estudiantes de la época. Este texto se convirtió rápidamente en libro de texto de Geometría en casi toda Europa y mantuvo esta posición durante más de cien años.

Por ejemplo, la proposición XV del Libro III, dice lo siguiente: La línea DE , trazada paralelamente a la base de un triángulo, divide a los lados AB y AC en partes iguales, de modo que tenemos $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

Demostración:

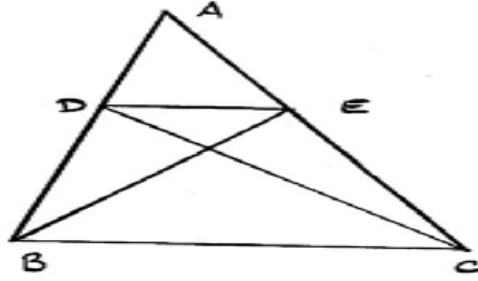


Figura 15: Proposición XV, Geometría (1794), pág. 76

Trácese BE y DC. Los dos triángulos $\triangle BDE$ y $\triangle DEC$ comparten la misma base DE y también la misma altura por estar situados los puntos B y C en una misma recta paralela a la base, luego dichos triángulos son equivalentes. Los triángulos $\triangle ADE$ y $\triangle BDE$, cuyo vértice común es E, tienen una misma altura y están entre sí como sus bases AD y DB, entonces $\frac{\triangle ADE}{\triangle BDE} = \frac{AD}{DB}$.

Los triángulos $\triangle ADE$ y $\triangle DEC$, cuyo vértice común es D, tienen también una misma altura y siguen la razón de sus bases AE: EC, luego $\frac{\triangle ADE}{\triangle DEC} = \frac{AE}{EC}$. Pero el triángulo $\triangle BDE = \triangle DEC$, de eso se deduce que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

No muchos años pasaron para que Lacroix, quien fuera un matemático que sostenía que el Álgebra y la Geometría debían ser tratadas de la manera más separada posible ya que, si los resultados en cada una de ellas sirven para una clarificación mutua correspondería, por ejemplo, a la relación que hay entre el texto de un libro y su traducción a otro idioma.

Lacroix publica, en 1798, su libro *Elementos de Geometría* en el que se encuentra el siguiente enunciado como teorema:

Teorema: Tres paralelas AG, DK y FM son entre sí proporcionales, de modo que forman la siguiente proporción $\frac{AD}{DF} = \frac{GK}{KM}$.

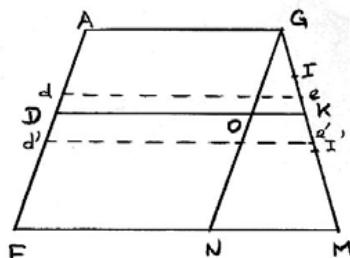


Figura 16: Teorema (154), Elementos de Geometría (1798), pág.33

Demostración: Pueden ocurrir dos cosas, la primera que AD sea conmensurable con AF, es decir, que la razón entre AD y AF pueda expresarse por medios de dos números. Supongamos, por ejemplo, que sabemos que $\frac{AF}{AD} = \frac{47}{25}$, de lo cual se puede inferir que imaginándonos dividida en 47 partes AF, 25 de ellas han de corresponder a AD y las 22 restantes a DF.

Trazando en seguida paralelas a GA por los puntos de las 47 divisiones, resultara la recta GM dividida en 47 partes iguales, de las cuales 25 compondrán a GK y 22 a KM. Entonces tendremos $\frac{AD}{DF} = \frac{25}{22}$, $\frac{GK}{KM} = \frac{25}{22}$ y por lo tanto $\frac{AD}{DF} = \frac{GK}{KM}$, además en vista que $\frac{AF}{AD} = \frac{47}{25}$ y $\frac{GM}{GK} = \frac{47}{25}$, entonces $\frac{AF}{AD} = \frac{GM}{GK}$.

La segunda, si AF y AD fuesen inconmensurables, haremos ver el modo que la razón de la una a la otra no puede ser mayor ni menor a la de GM a GK.

Sea primero que $\frac{AF}{AD} = \frac{GM}{GI}$, siendo $GI < GK$. En todo caso se podrá dividir el lado AF en partes tan pequeñas, que trazando por todos los puntos de división paralelas a FM, haya de pasar una de ellas entre los puntos I y K y tendremos a causa de la conmensurabilidad de AF y Ad, $\frac{AF}{Ad} = \frac{GM}{Ge}$.

Utilizando los mismos antecedentes de las dos últimas, obtendremos la tercera, $\frac{AD}{Ad} = \frac{GI}{Ge}$, lo que es absurdo, pues $AD > Ad$ y $GI < Ge$.

Tampoco es posible que tengamos esta proporción: $\frac{AF}{AD'} = \frac{GM}{GI'}$, siendo $GI' > GK$; porque suponiendo dividida AF, de modo que una de las paralelas d'e' pase entre los puntos K e I', tendremos: $\frac{AF}{Ad'} = \frac{GM}{Ge}$ y deduciendo de estas dos últimas tendremos, $\frac{AD}{Ad} = \frac{GI'}{Ge'}$, resultando igualmente absurdo, pues $AD < Ad$ y $GI' > Ge'$.

De la proporción $\frac{AF}{AD} = \frac{GM}{GK}$, se infiere que $\frac{AF - AD}{AD} = \frac{GM - GK}{GK}$, lo cual equivale a que $\frac{DF}{AD} = \frac{KM}{GK}$ o invirtiendo las razones de esta última proporción tendremos: $\frac{AD}{DF} = \frac{GK}{KM}$.

No se encuentran avances importantes sobre el Teorema de Tales hasta el siguiente siglo con la publicación *Curso Completo de Matemáticas Puras* de Francoeur.

1.3.5 Siglo XIX

En 1819, Louis Francoeur publica su *Curso Completo de Matemática puras*, desde el Teorema 211 señala el siguiente enunciado:

Teorema: Dos líneas AH y ah se cortan en partes proporcionales por tres paralelas Aa, Ea, Hh y $\frac{AE}{EH} = \frac{ae}{eh}$.

Demostración:

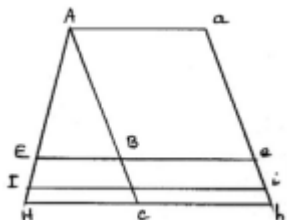


Figura 18: Teorema (211), Curso Completo de Matemáticas Puras, pág.247

1. Si las partes AH y EH son conmensurables, hay una medida común en AH que contenga de forma exacta a AE y EH. Por lo tanto, se reducirá en los casos anteriores.
2. Si AE y EH son inconmensurables, AE se divide en un número arbitrario de partes iguales, siendo uno de ellos el que lleva desde E a H. Sea I el punto de división más cercano a H. AE y EH serán conmensurables y $\frac{EI}{EA} = \frac{ei}{ea}$ y como $EI = EH - HI$, $ei = eh - hi$, entonces $\frac{EH}{EA} - \frac{HI}{EA} = \frac{eh}{ea} - \frac{hi}{ea}$. La distancia HI se puede hacer tan pequeña como queramos, tomando el número de divisiones AE cada vez más grande por lo que los puntos H y h son los límites de I e i. Dado que el segundo término crece indefinidamente, por el principio fundamental (n° 113), por lo tanto $\frac{EH}{EA} = \frac{eh}{ea}$.

Aproximadamente treinta años después, ya en 1851, se publica la obra *Curso de Geometría Elemental* de Guilmin que es un libro para usarse en Instituciones de educación.

Desde el Teorema 137 afirma que “Toda línea paralela a un lado del triángulo divide a los otros dos lados en forma proporcional”.

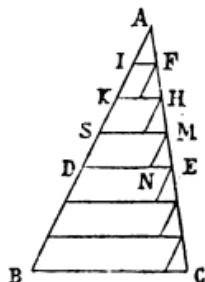


Figura 17: Teorema de líneas paralelas, Curso de Geometría Elemental (1851), pág.77

Aquí utiliza un método usado por Lacroix, supone que la relación entre AD y AB es $\frac{4}{3}$. Luego AD se divide en 4 partes iguales a AI y DB en tres partes, entonces se trazan paralelas en cada punto de división a BC, lo que hace que AE también se divida en 4 partes y EC en tres. En todos los puntos de división F, H, M se trazara una paralela a AB, lo que formara triángulos iguales como $\triangle AIF$ y $\triangle MNE$.

Ya que $MN = DS$ por ser lados opuestos de un paralelogramo y $DS = AI$ por construcción, por lo tanto $MN = AI$ y el ángulo $\angle NME = \angle IAF$, los dos triángulos son iguales, entonces $ME = AF$. Cada parte de AC son iguales a AF y AF es una medida común para las cuatro partes de AE y los tres puntos de EC. Este argumento demuestra el teorema para todos los casos en que hay una medida común, tan pequeña que sea, entre los segmentos AD, DB en el mismo lado de AB, este teorema es igual de cierto en general.

Cuarenta años después, en Italia, Aureliano Faifofer publica en 1890 *Elementos de Geometría para utilizar en Institutos técnicos y escuelas secundarias*, quien a través del teorema 417 enuncia la definición del Teorema de Tales y señala:

Teorema: Los segmentos de una sección transversal de un haz paralelo de una recta, son proporcionales a los segmentos de la otra sección transversal de la misma recta.

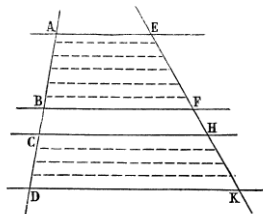


Figura 19: Teorema de Tales, *Elementos de Geometría para utilizar en Institutos técnicos y escuelas secundarias*, pág. 262.

Demostración: Un haz de paralelas AE, BF, CH, ..., y dos que se cruzan a ellas que son AD, EK. Los segmentos de una transversal, como el del paralelo, son proporcionales a los segmentos de la otra, es decir, quedos de uno de los segmentos, son los segmentos entre ellos como la segunda recta entre el mismo paralelo. Probaremos que $AB : CD = EF : HK$.

Se divide CD en un número n arbitrario de partes iguales, con uno de los segmentos se mide AB; sea m el cociente y c el resto. Por lo tanto, para los puntos de división de los segmentos AB, CD se conducirá a las líneas rectas paralelas de las rectas. De tal modo que el segmento HK viene dividido en n

partes iguales y el segmento EF en $(m+1)$ partes, m de estos son iguales entre sí y a la parte de HK y uno, el que corresponde al resto de la otra división y a las partes inferiores de la misma. A partir de lo que sigue que, mediante la medición de EF con una enésima parte de HK, m es el cociente, al igual que la medición AB con una enésima parte de CD.

Un año más tarde Eugene Rouché y Charles de Comberousse, en 1891, publican su *Tratado de Geometría Elemental*, libro que se utilizó en escuelas y Universidades por medio del cual se enuncian y demuestran dos versiones del Teorema de Tales. En el teorema 193 se enuncia:

Teorema: Cuando dos rectas cualquiera AG y A'G' se cortan por una serie de rectas paralelas AA', BB', ..., GG', pueden suceder dos cosas:

1° Si dos segmentos AE y EF de la recta AG son iguales entre sí, los segmentos correspondientes A'E' y E'F' de la recta A'G' son iguales entre sí.

2° Si el segmento EG es igual a la suma de los segmentos AB y CD y E'G' es igual a la suma de A'B' y C'D' entonces estos segmentos corresponden a AB y CD respectivamente.

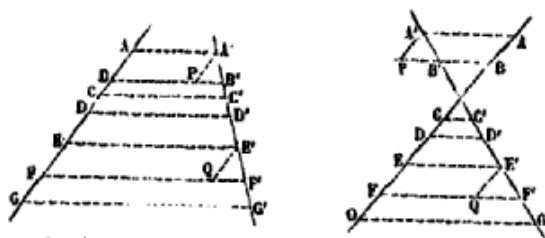


Figura 20: Figuras para las dos proposiciones, Tratado de Geometría Elemental (1891), pág. 122.

1° Realizar A'P y E'Q paralelas a AG; A'P y AB serán iguales como paralelos entre paralelas; E'Q será igual EF por la misma razón $A'P = E'Q$ y por hipótesis $AE = EF$. De todos modos, los ángulos $\angle PA'B'$, $\angle QE'F'$ son iguales y los ángulos $\angle A'PB'$, $\angle E'QF'$ tienen las mismas dimensiones, por lo tanto los triángulos $\triangle PA'B'$, $\triangle QE'F'$ tienen un lado adyacente y dos ángulos iguales, entonces $A'B' = E'F'$.

2° Ya que por definición $EF = AB$ y $GF = CD$ y además $E'F' = A'B'$ y $F'G' = C'D'$; el segmento E'G' es igual a la suma de A'B' y C'D'. La figura puede ofrecer diferentes disposiciones, pero la demostración no cambia.

Por otra parte, el teorema 195 señala lo siguiente:

Teorema: En particular toda paralela DE a la base BC de un triángulo ABC, divide a esos lados en partes proporcionales.

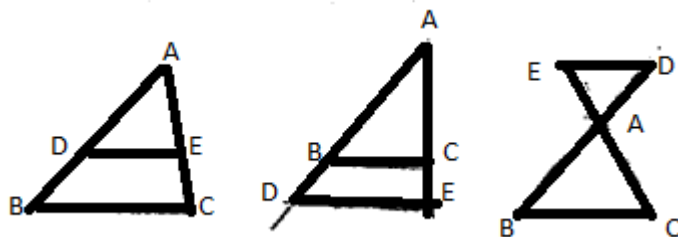


Figura 21: Triángulo ABC, Tratado de Geometría Elemental (1891), pág. 123

En efecto, mediante el diseño de una paralela a BC, según (194), se obtiene que:

$$(1) \quad \frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}, \quad (2) \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \quad (3) \quad \frac{BA}{BD} = \frac{CA}{CE}$$

Cada relación es demostrada directamente; pero debe tenerse en cuenta que en virtud de las regla de la aritmética, cualquiera de ellos interfiere en el otro.

David Hilbert en 1899 publicó *Fundamentos de Geometría*, en donde sustituye los axiomas de Euclides por un sistema formal de 21 axiomas, con el objetivo de evitar debilidades evidenciadas en *Elementos* de Euclides y así darle una fundamentación estrictamente axiomática.

Para seguir con avances con respecto al Teorema de Tales, la investigación debe remontarse al siguiente siglo, en específico al año 1928 con Jaques Hadamard.

1.3.6 Siglo XX

En 1928 Hadamard publica *Lecciones de Geometría Elemental*. Al comienzo del libro, indica que tiene la intención de permanecer en Euclides, con énfasis en los aspectos prácticos e intuitivos de la enseñanza de la geometría. Para él, la geometría es más accesible desde el punto de vista del raciocinio y más concreto que el álgebra. Brinda una particular importancia al estudio de las figuras y las relaciones existentes entre ellas, en donde utiliza dos métodos para tales relaciones.

1. El método tradicional, preferido por Euclides, el que consiste en aplicar el principio de superposición.
2. El método “moderno” que utiliza las transformaciones del plano. Es decir, la simetría ortogonal, la rotación y traslación coexisten con objetos típicos de la geometría (Libro1).

El primer enunciado del Teorema de Tales se encuentra en el capítulo I, esto es desde la matemática tradicional:

Teorema: Dos rectas secantes se cortan en partes proporcionales por cada recta paralela.

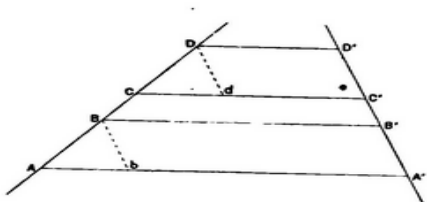


Figura 22: Lecciones de Geometría Elemental(1898), pág. 108.

Sean las secantes ABCD, A'B'C'D' que se intersectan por las paralelas AA', BB', CC', DD'. Los puntos A, B, C, D están en el mismo orden que los puntos A', B', C', D'. Entonces $\frac{CD}{AB} = \frac{C'D'}{A'B'}$. Se distinguen dos casos:

1° Si los segmentos AC, CD son iguales, lo mismo es con A'B', C'D'. Por el punto B sale una paralela Bb a A'B' y por el punto D la paralela Dd a C'D'. Si AB = CD, los dos triángulos $\triangle ABb$ y $\triangle CDd$ son iguales por tener un lado AB = CD adyacente a dos ángulos iguales cada uno correspondiente, por lo que Bb = Dd.

Entonces Bb y Dd son respectivamente iguales a A'B', C'D', y se nota en los paralelogramos BbA'B', DdC'D'.

2° Caso general – Los puntos A, B, C, D son arbitrarios, se demostrará que los valores de $\frac{1}{n}$ cerca de las dos relaciones $\frac{CD}{AB}$ y $\frac{C'D'}{A'B'}$ son iguales, independiente de n.

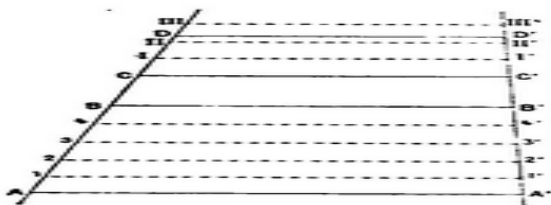


Figura 23: Lecciones de Geometría Elemental(1898), pág.109.

Por ejemplo, para n=5. Se divide AB en cinco partes iguales en los puntos 1, 2, 3, 4 y se supone que la quinta parte de AB está contenida dos veces, pero no tres en CD: son I, II, III los extremos de estos tres segmentos iguales de la quinta parte de AB y sucesivamente las partes de la línea CB a partir de C; de manera que los puntos I y II están entre C y D (sin embargo este último puede coincidir con C), el punto III está más allá del punto D.

Todos estos puntos 1, 2, 3, 4. I, II, III, están llevando las paralelas en la dirección común de AA', BB', CC', DD', hasta el encuentro en 1', 2', 3', 4', I', II', III' en la recta A'B'C'D'.

Se ha dividido la recta A'B' en cinco partes iguales y tres partes desde el punto C' hacia la dirección C'D' (1°). Los puntos I', II' están en el intervalo C'D' y el punto III' está más allá del punto D' (después de la observación hecha antes) el teorema queda demostrado.

Para el método moderno se encuentran dos teoremas:

Teorema: Una paralela DE a la base de un triángulo $\triangle ABC$ corta AB, AC en partes proporcionales

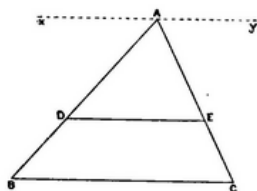


Figura 24: Lecciones de Geometría Elemental (1898), pág.109.

En efecto, si en la parte superior llevamos una paralela xy a DE, el teorema precedente nos probó que las paralelas BC, DE, xy dividen a las secantes AB, AC en partes proporcionales.

En el Capítulo III de Homotecias, tenemos el siguiente teorema:

Teorema: En un sistema de homotecia, la línea que une dos puntos cualquiera en ambos sistemas, son siempre paralelas en las relaciones de similitud, que son en la misma dirección o en dirección contraria dependiendo si la homotecia es directa o inversa.

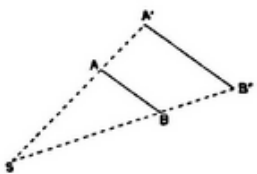


Figura 25: Lecciones de Geometría Elemental (1898), pág.135.

Son, en efecto, A y B dos puntos de la figura principal, A' y B' son las homotecias, S es el centro, k la relación de homotecia.

La proporción $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = k$ muestra que las rectas AB, A'B' son paralelas y la similitud de triángulos SAB, SA'B', ellos están en la misma relación que SA, SA'.

Con Choquet se introducen nuevos conceptos en geometría, los cuales surgen por la algebrarización de esta y lo que marca el abandono de la tradición euclidiana. El objetivo es construir una axiomática completa, llena de axiomas simples que permiten alcanzar las estructuras de espacio vectorial, producto escalar y sus propiedades.

En su libro *La enseñanza de la Geometría* de 1964 enuncia de dos maneras el Teorema de Tales:

- 1) Teorema de Tales: Sea D una línea recta que pasa por O, δ una dirección distinta a la de D y ϕ la proyección sobre D que es paralela a δ .
- 2) Teorema (Forma débil del Teorema de Tales): Si tres paralelas D, D', A se cortan por una transversal en tres puntos x, x', a tal que una media de (x, x') es lo mismo para todas las secantes (es decir, D y D' son simétricos con relación a todo punto de A).

Ya en el nuevo milenio, Dany- Jack Mercier, en el año 2003, publicó distintas formas de demostrar el Teorema de Tales, tanto en el plano como en tres dimensiones. La demostración en tres dimensiones, como estudio no se tiene en consideración, pero resulta interesante mostrar el nivel de utilización y aplicación del Teorema de Tales en la matemática actual.

Teorema de Tales en el Plano:

Teorema: Dados dos triángulos $\triangle OAA'$ y $\triangle OBB'$ tales que $A \in (OB)$ y $A' \in (OB')$. Si (AA') es paralela a (BB') , entonces $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}$

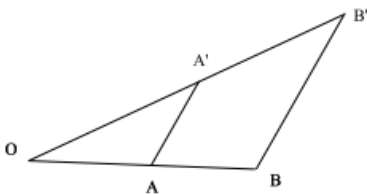


Figura 26: Teorema de Tales en el triángulo, Proyecciones de los planos en el Espacio (2003), pág.1

Demostración: Estas ecuaciones se derivan de los axiomas de espacio afín y de espacio vectorial. En efecto, diremos que (AA') es paralela a (BB') , significa que existe un $k \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{BB'} = k\overrightarrow{AA'}$. Por hipótesis, existen dos reales α, α' tales que $\overrightarrow{OB} = \alpha\overrightarrow{OA}$ y que $\overrightarrow{OB'} = \alpha'\overrightarrow{OA'}$, por lo tanto $\overrightarrow{BB'} = k\overrightarrow{AA'} \rightarrow \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}) \rightarrow \alpha'\overrightarrow{OA'} - \alpha\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OA'} - k\overrightarrow{OA}$. Esto provoca que $\alpha = \alpha' = k$, pues los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OA'}$ son linealmente independientes. Así mismo, $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OA'}$ y $\overrightarrow{BB'} = k\overrightarrow{AA'}$, proporcionando las igualdades anunciadas (por su puesto, medidas algebraicas

sobre líneas paralelas (AA') y (BB') están asociadas con la misma dirección del vector director $\overrightarrow{AA'}$ común a esas dos líneas).

Teorema:

Sean D y D' dos líneas distintas, y A, B, C (resp. A', B', C') tres puntos distintos que pertenecen D (resp. D') junto con $A \neq A', B \neq B', C \neq C'$. Si las líneas (AA') , (BB') y (CC') son paralelas, entonces $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$.

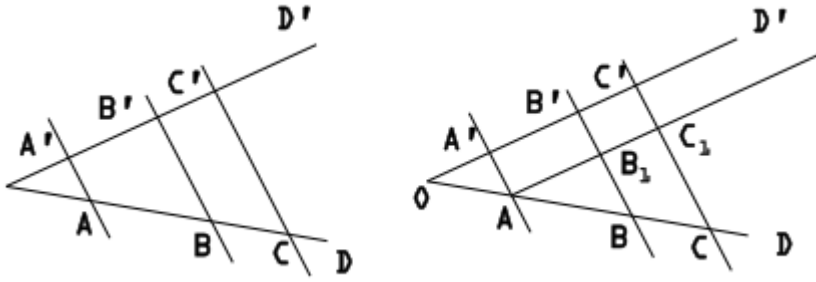


Figura 27: Teorema de Tales, Proyecciones de los planos en el Espacio (2003), pág.2

Demostración: Si D y D' son paralelas, los cuadriláteros $AA'BB'$ y $AA'CC'$ son dos paralelogramos, así $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$. Esto conduce a que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$ tengan cuocientes iguales. Solamente usamos los resultados:

$(AB) \parallel (A'B')$ y $(AA') \parallel (A'B') \rightarrow$ así $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ y así $\overrightarrow{A'A'} = \overrightarrow{BB'}$. Por hipótesis, existen dos reales k y s tales que $\overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'A'} = s \overrightarrow{BB'}$ tal como $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB'})$ es una base, las igualdades $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{A'A'} + \overrightarrow{A'B'} = s \overrightarrow{BB'} + k \overrightarrow{AB}$, conduce a $k = s = 1$ y la conclusión:

Si D y D' se cortan en O , el teorema 1 conduce a $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OB} - \overline{OA}}{\overline{OB'} - \overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$, así mismo, $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ y deducimos así $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$

Proyecciones en el plano:

Teorema 6 – Teorema de Tales

Si p es la proyección de F paralela a G y si se preceden las imágenes de p , para todo real λ , los puntos A, B y C .

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{A'C'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$$

Demostración: C' es una simple consecuencia de la linealidad de π , pues $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{AC'} = \pi(\overrightarrow{AC}) = \lambda \pi(\overrightarrow{AB}) = \lambda \overrightarrow{A'B'}$

Teorema de Tales en 3 dimensiones.

Aquí se da una respuesta definitiva al problema de la generalización del Teorema de Tales en el caso de cualquier proyección, pero el caso especial de proyección de una línea paralela a un plano da la siguiente oportunidad:

Teorema:

Sean tres planos estrictamente paralelos Π_A, Π_B, Π_C . Una línea D (respectivamente D') secciona a los planos en A, B, C (respectivamente A', B', C'). Entonces $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$.

Demostración: La paralela a D' pasa por A seccionando los planos Π_A, Π_B, Π_C en A, B₁, C₁. Las líneas D y (AB₁) son coplanares y podemos aplicar el teorema de Tales en el plano para obtener $\frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1}$. Los cuadriláteros AB₁B'A' y AC₁C'A' son dos paralelogramos (Ver por ejemplo que AB₁B'A' es un paralelogramo: Si denotamos la traslación del vector $\overrightarrow{AB_1}$ y B'' = t(A'), sabemos que la imagen del plano Π_A por t es un plano que pasa por t(A) = B₁ y es paralela a Π_A . Entonces t(Π_A) = Π_B y B'' ∈ Π_B . Como B'' es la línea que pasa por A' y es paralela a (AB₁), i.e. B'' ∈ D' ∩ Π_B , entonces B'' = B' y por lo tanto $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{A'B'}{A'C'}$ es la conclusión.

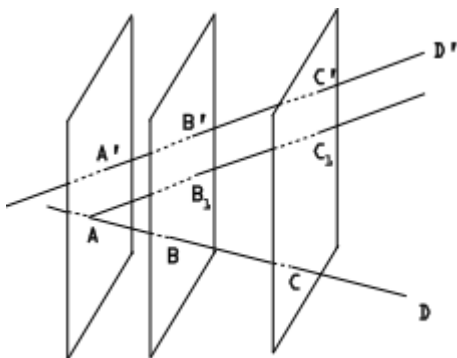


Figura 28: Teorema de Tales en tres dimensiones, Proyecciones de los planos en el Espacio (2003), pág.7

1.4. Síntesis del Capítulo

El capítulo presenta “a grandes rasgos” la situación de la enseñanza y aprendizaje de la Geometría, en específico del Teorema de Tales en Chile, en el cual se exhiben resultados de distintas pruebas tales como SIMCE, PSU, INICIA e informes internacionales como los son TIMSS, PISA, Babcock y McKenzie que concluyen que Chile tiene serios problemas en Geometría en todos los niveles educativos (primario, secundario y superior). Además se muestran estudios que

señalan la importancia del profesor en la comprensión de la Geometría por parte de sus estudiantes tal como lo señalan Cheuquepán y Barbé, Latorre y Aravena y Caamaño.

Por otra parte, se mencionan dos estándares que debería saber y manejar todo profesor pues, son orientadores para las carreras de Pedagogía en Matemática, los cuales, desde los antecedentes mostrados anteriormente no se estarían cumpliendo, sobre todo el que se refiere al estándar 15 el que menciona que se debe relacionar el concepto de vector con otros conceptos matemáticos, como debiese ocurrir con el caso del Teorema de Tales.

Este problema puede afectar la comprensión del Teorema de Tales en los futuros profesores, así lo dice Aravena y Caamaño que dicen que a los futuros profesores se les enseña con parcelación de conocimiento o que definitivamente poseen poca formación matemática (Espinoza, Barbé, Mitrovich y Rojas).

También se exponen estudios internacionales sobre la enseñanza y aprendizaje de la Geometría (Revuz, Santaló y Choquet) y del Teorema de Tales, presentando datos que evidencian que el problema de la enseñanza de la Geometría no es nuevo y que algunos de estos problemas aún no se han superado, como se da en el caso de la relación que debe existir en los distintos dominios de la Geometría, donde se ha visto afectada la enseñanza y aprendizaje del Teorema de Tales, específicamente en la educación secundaria (Laguerre y MRabet) ya que tal como lo menciona Revuz, la Geometría no debe enseñarse en forma aislada sino que debe relacionarse con otros temas matemáticos pues, esto afecta profundamente su comprensión.

Finalmente, se muestran antecedentes históricos/epistemológicos del Teorema de Tales, desde su formulación, con Tales de Mileto, hasta sus distintos usos y demostraciones (desde el sintético al vectorial) en el tiempo, empezando con Euclides hasta llegar al día de hoy con la aplicación del Teorema de Tales en tres dimensiones.

De acuerdo a los antecedentes presentados anteriormente, queda de manifiesto la existencia de un problema en lo que respecta a la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en el país, específicamente en el Teorema de Tales.

Estos problemas en torno al Teorema de Tales pueden provenir del profesorado ya que, según Cheuquepán y Barbé, uno de los motivos es que el tiempo asignado a los contenidos de Geometría es menor cuando se le compara con otros temas matemáticos y esto es, según Aravena y Caamaño, porque a los futuros profesores se les enseña con parcelación de conocimiento. Siguiendo la lógica de la parcelación de conocimiento, es que cuando se revisan los Estándares Orientadores para las carreras de Pedagogía, específicamente el estándar 15, señala que el futuro profesor debe conocer la articulación de los contenidos de vectores con otros presentes en el currículo escolar. Situación que no se aprecia al revisar los programas de Geometría de Universidades del país

para la carrera de Pedagogía en Matemática. Desde lo anterior, se refleja que la problemática que concierne a esta Investigación es **la escasez de recursos didácticos en la que los estudiantes de Pedagogía en Matemática logren relacionar los enfoques sintético y vectorial, desde el Teorema de Tales**. Dicho esto, se hace indispensable que las Instituciones de Educación Superior le entreguen al futuro profesor, herramientas necesarias y suficientes, de manera que estos puedan entender en profundidad el Teorema de Tales entendiendo a su vez que este puede relacionarse con diversos enfoques, tales como el vectorial y el sintético, los cuales se trabajan en esta investigación. Esto con el propósito de que mejoren su enseñanza respecto del Teorema. Relevantes son las palabras de Latorre (2014), quien señala que buenos profesores marcan una clara diferencia en los aprendizajes de los estudiantes.

Por lo expuesto anteriormente, y la necesidad de investigar en esta línea, el Teorema de Tales, es preciso formular las siguientes Preguntas de Investigación:

- ¿Cómo se desarrolla el trabajo matemático, con respecto al Teorema de Tales en escuelas de Pedagogía en Matemática?
- ¿Cómo se aborda el enfoque sintético y el enfoque vectorial en torno al Teorema de Tales en la formación inicial de profesores?
- ¿Cómo favorecer el tránsito desde un enfoque sintético a un enfoque vectorial relativo al Teorema de Tales en la formación inicial de profesores?

Para responder a estas interrogantes, es necesario adecuarse a un Marco Teórico que sustente la investigación. El Marco Teórico a utilizar es la teoría del Espacio de Trabajo Matemático, la cual se desarrolla en el capítulo que se presenta a continuación.

Capítulo II: Marco Teórico.

A continuación se presenta el Marco Teórico de la Investigación, el cual tiene como base la teoría del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011). Lo que se pretende es dar cuenta de los orígenes de la teoría, desde las relaciones entre los Planos Cognitivo y Epistemológico, analizando todos los componentes que se relacionan entre sí, por medio de las génesis, hasta llegar a la última versión la que plantea Planos Verticales en el Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak y Richard, 2014). A su vez, se exponen los tipos de Espacio de Trabajo Matemático y los Paradigmas Geométricos (Kuzniak, 2006) los cuales se activaran dependiendo del problema matemático al que se verá enfrentado una persona.

2.1 Espacio de Trabajo Matemático

La investigación se sustenta en la teoría *Espacio de Trabajo Matemático* (ETM), la que se plantea como una ampliación del Espacio de Trabajo Geométrico (ETG), ya que no solo se utiliza para la geometría sino que para la matemática en general. El ETG se formula desde la reflexión de un geómetra de acuerdo a sus creencias y técnicas al enfrentarse a un problema en Geometría. En cambio, el ETM es la reflexión de una persona al enfrentarse a un problema matemático.

El ETM es un espacio de trabajo que designa un ambiente pensado y organizado para favorecer el trabajo matemático, en un contexto educativo. En este caso, se aplicará a un concepto de Geometría como lo es el Teorema de Tales, en el contexto de la formación inicial de profesores.

Según Kuzniak (2011), el ETM se basa en la relación que hay entre dos planos:

- a) **Plano Cognitivo:** Es relativo al pensamiento de un sujeto que resuelve problemas matemáticos.
- b) **Plano Epistemológico:** Se relaciona con los contenidos matemáticos del ámbito estudiado.

Estos planos se relacionan por medio de Génesis, las que se describen a continuación

2.2 Génesis del ETM

Para describir la relación de estos planos se han de considerar tres tipos de génesis (Kuzniak, 2011). Estas génesis no son independientes y se relacionan con las componentes del espacio de trabajo.

- Génesis Semiótica: Se basa en los registros de representación semióticos que asegura que los objetos tangibles del ETM, tengan nivel de objeto matemático operatorio. Además establece la relación entre síntesis, semántica, función y estructura de los signos utilizados.
- Génesis Instrumental: Permite hacer operatorios los artefactos en el proceso de construcción del trabajo matemático.
- Génesis Discursiva: Otorga un sentido a las propiedades y definiciones matemáticas para ponerlas al servicio del razonamiento matemático y de una validación no exclusivamente icónica, gráfica o instrumental.

En la siguiente figura se muestra como se relacionan los Planos Cognitivos con las distintas Génesis de ETM:

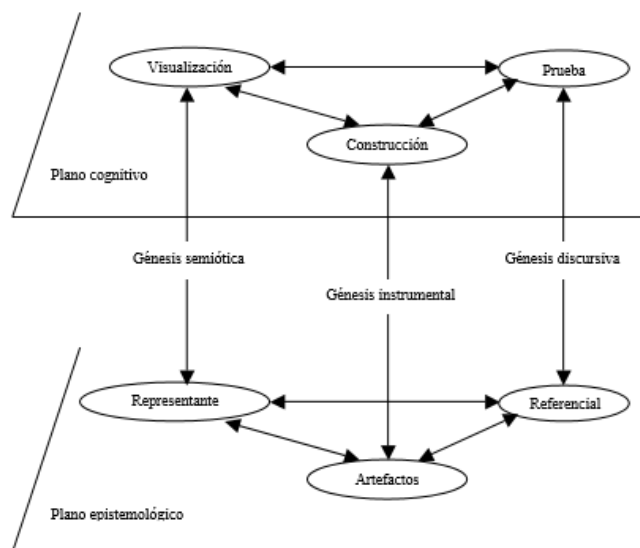


Figura 28: Relaciones entre los Plano Cognitivo y Epistemológico, Espacio de Trabajo Matemático y sus génesis (2011), pág. 16.

A continuación se describen los distintos componentes que forman parte de los Planos Cognitivo y Epistemológico.

2.3 Componentes de los Plano Cognitivo y Epistemológico

- 1) Plano Cognitivo: En él, interactúan tres componentes:
 - a) Visualización: Proceso que tiene que ver con la representación del espacio.
 - b) Construcción: Proceso que tiene que ver con los instrumentos utilizados.
 - c) Prueba: Proceso discursivo que produce argumentaciones y pruebas.
- 2) Plano Epistemológico: En él, interactúan tres componentes:
 - a) Representamen: Conceptualización del individuo del modelo matemático.
 - b) Artefactos: Corresponde a todos los instrumentos materiales y simbólicos que se utilizan.
 - c) Referencial: Conjunto de propiedades y definiciones que se articulan por medio de axiomas.

Una vez que ya se han definido los Planos Cognitivo y Epistemológico y sus componentes, es posible dar paso a la definición de Planos Verticales.

2.4 Planos Verticales en el ETM

Los Planos Verticales se dan por las interacciones que hay entre las distintas génesis del ETM. Estos se pueden relacionar con las diferentes fases del trabajo matemático de un problema.

Se distinguen tres Planos Verticales, los que se definen a continuación:

- Plano del Descubrimiento (Sem – Ins): Por medio de la articulación de la génesis semiótica e instrumental, es posible desarrollar una competencia ligada al descubrimiento de una solución a un problema matemático.
- Plano del Razonamiento (Ins – Dis): Por medio de la articulación de la génesis instrumental y discursiva es posible desarrollar el razonamiento matemático fundado en la justificación de los descubrimientos.

- Plano de la Comunicación (Sem –Dis): Por medio de la articulación de las génesis semiótica e instrumental es posible orientar las comunicaciones matemáticas de los resultados.

El esquema que a continuación se presenta (Figura 32), se indican los planos verticales del ETM, formulado por Kuzniak y Richard (2014), y por Coutat y Richard (2011), como una ampliación y refinamiento del ETM para el desarrollo de los análisis.

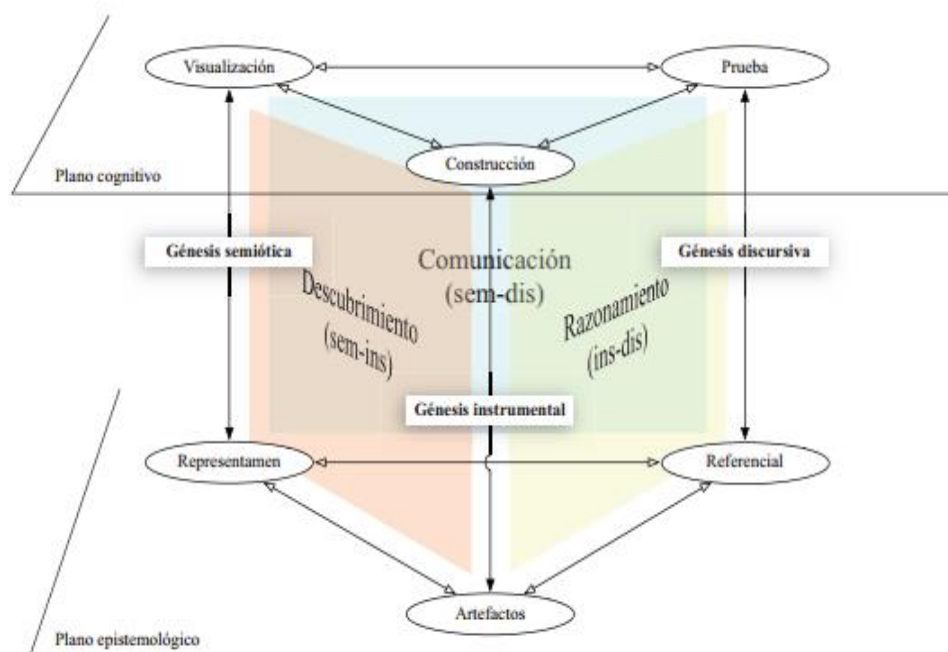


Figura 32: Relaciones entre las Génesis: Planos Verticales en el ETM, Espacio de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas (2014), pág.6

Este modelo debe analizarse de manera dinámica pues, en él se articulan las distintas génesis por medio de Planos Verticales.

En el siguiente apartado se profundiza en la relación que mantiene cada Génesis con sus respectivas componentes del ETM con el objetivo de clarificar el como se relacionan las distintas génesis por medio de los Planos Verticales, lo que se reconoce como Enfoques complementarios al ETM.

2.5 Enfoques Complementarios al ETM

Cabe señalar que estos enfoques complementarios al ETM, son la forma de interacción que tiene los componentes de los Planos Cognitivo y Epistemológico,

bajo las distintas Génesis del ETM. Se comienza con la Génesis semiótica y Visualización:

2.5.1 Génesis Semiótica y Visualización:

En el trabajo de Gutiérrez (2005) se menciona que la principal dificultad al realizar una actividad matemática en la escuela es el como piensan los estudiantes, la forma que tienen para razonar, analizar y transformar la información que obtienen desde el exterior. Para estudiar estas observaciones se usaron los Registros de Representación Semiótica de Duval (1995), entendiendo a estos como representaciones relativas a un sistema particular de signos: las figuras, el lenguaje, la estructura algebraica o los gráficos cartesianos. A su vez, estos pueden ser convertidos en representaciones equivalentes de otro sistema semiótico.

Las representaciones semióticas permiten exteriorizar las representaciones mentales como las imágenes, concepciones sobre un objeto y creencias. Las representaciones mentales y semióticas no pueden oponerse como si se tratara de dominios distintos. No existe comprensión en Matemática sino se distingue el objeto de representación porque un mismo objeto matemático puede darse a través de distintas representaciones.

Dada las distintas representaciones de un objeto matemático, es posible aumentar las capacidades cognitivas del sujeto y, por consecuencia, sus representaciones mentales. Se evidencia, entonces que existe una dependencia entre las representaciones internas y externas, la que Duval manifiesta en la expresión “no hay noesis sin semiosis”.

La noesis hace referencia a la adquisición conceptual de un objeto y la semiosis a la aprehensión o la producción de una representación semiótica



Figura 29: Relación entre la Noesis y la Semiosis, Semiosis y pensamiento humano (2005)

Para que un sistema semiótico pueda convertirse en un registro de representación semiótico, debe permitirse tener actividades cognitivas ligadas a la semiosis (Duval, 1995), las cuales se definen a continuación:

Actividades Cognitivas ligadas a la semiosis: Están basadas en tres grandes rasgos:

- Representación de un objeto en un sistema determinado (formación).
- Transformar las representaciones según las propias reglas del sistema (tratamiento).
- Convertir las representaciones en representaciones de otro registro (conversión).

Desde lo anterior, existen tres actividades cognitivas:

- **Formación:** Es el recurso que permite actualizar la mirada de un objeto. Los signos utilizados pertenecen a un sistema semiótico ya constituido, por lo tanto debe respetar las reglas propias del sistema empleado.
- **Tratamiento:** Transformaciones al interior del mismo registro. Se utilizan reglas propias del registro utilizado, es decir, transforma una representación inicial en otra terminal según las reglas propias del registro utilizado.

- Conversión: Trata de una transformación externa en relación al registro inicial, es decir, implica pasar de un registro a otro. Las reglas de conversión no son las mismas según el sentido en que se efectúa el cambio de registro, esto es porque casi no existen reglas para ello.

Estas actividades se deben relacionarse para así dar paso a las siguientes tareas:

- a) Producción: Moviliza la Formación y el Tratamiento de una representación.
- b) Comprensión: Moviliza la Conversión y la Formación o las tres actividades a la vez.

Para Duval, la Conversión para los estudiantes es un problema, pues según sus propias palabras:

“La Conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la mayoría de los alumnos” (Duval, 1995, p.49).

“La Conversión puede resultar imposible de efectuar o incluso de comprender si no ha habido un aprendizaje previo concerniente a las especificidades de Formación y Tratamiento de la representación, propios de cada uno de los registros presentes” (Duval, 1995, p.51).

Es decir, para Duval no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento matemático sin acudir a la noción de registros de representación y además un objeto matemático que ha sido aprehendido por los estudiantes si puede conocer y trabajar en al menos dos registros de representación semiótica.

Para el caso de la Geometría, la actividad matemática se realiza en dos registros que son la figura y el lenguaje por lo que es necesario que los tratamientos de estos registros se desarrollen en coordinación. La actividad geométrica involucra el proceso de Visualización.

Para Torregosa y Quesada (2007) la visualización es la acción hecha por el sujeto sobre una configuración, en tanto para Duval (1999) la visualización es la capacidad/acción de relacionar distintas representaciones de un mismo objeto matemático dándole sentido. Se puede distinguir una forma de visualización que funciona de manera icónica (imágenes, figuras) y otra no-icónica.

La visualización no-icónica implica deconstruir las formas ya reconocidas visualmente y existen tres formas de deconstrucción:

- Construir una figura (deconstrucción instrumental).

- Descomposición heurística: Se descompone en unidades figurales del mismo número de dimensiones que la figura de partida, como lo que ocurre con un rompecabezas.
- Deconstrucción dimensional: Es el proceso central de la visualización geométrica y necesariamente necesita una articulación con una actividad discursiva.

A continuación se presentan los tipos de operaciones sobre las figuras en el proceso de deconstrucción.

Para Duval (2005), el tipo de operaciones sobre las formas y el como las propiedades geométricas se movilizan, permite distinguir cuatro maneras de ver en la Geometría:

- a) Botánico (botaniste): Es una entrada inmediata. Las operaciones son nombrar y reconocer formas elementales a partir de cualidades visuales del entorno, observar sus similitudes y diferencias. Aquí las propiedades distinguidas son características deseables ya que no hay definiciones matemáticas ni propiedades.
- b) Topógrafo: En esta entrada las tareas están asociadas a medir longitudes, distancias entre dos puntos, ver planos, etc. Las actividades exigen pasar de una escala de magnitud a otra. Las actividades geométricas se organizan para medir, y se utilizan propiedades si se refiere a fórmulas para cálculos.
- c) Constructor: Es una entrada necesaria en Geometría. Las figuras geométricas no se dibujan a mano alzada sino que se construyen usando por ejemplo: regla cuadrada y compás. El instrumento permite verificar las propiedades de la figura, las obtiene mediante experimentación y permite tomar conciencia de que sus características no son solo perceptivas.
- d) Inventor (bricoleur): Las operaciones involucran transformar las formas de descomponer la figura inicial en unidades figurales para reconfigurarlas de otra manera. Estos problemas requieren de una utilización heurística de figuras (por trazos suplementarios como rompecabezas) y también de deconstrucción dimensional.

Otro de los enfoques complementarios del ETM y que se procede a definir es la Génesis Instrumental.

2.5.2 Génesis Instrumental

La génesis instrumental es el proceso en el cual un artefacto se convierte en un instrumento en las manos de un sujeto.

Según Joyce (1996) los artefactos, como objetos materiales, se usan desde tiempos antiguos. Euclides en el libro IV de *Elementos* indica la forma de dibujar con regla y compás algunos polígonos regulares.

Para Rabardel “un artefacto es una cosa que habrá sufrido una transformación de origen humano” (Rabardel, 1995, p.49). No se restringe a cosas materiales, pues también abarca sistemas simbólicos.

Además, para Rabardel (1995) el instrumento al tener una posición intermedia lo convierte en un mediador entre el objeto y el sujeto. La palabra instrumento se usa para nombrar al artefacto en situación, determinado por su uso. En una conexión instrumental a la acción del sujeto, como medio de este.

Para aclarar la funcionalidad del instrumento, así como el paso en el que un artefacto se convierte en un instrumento, Vérillon y Rabardel (1995) presentan el siguiente modelo:

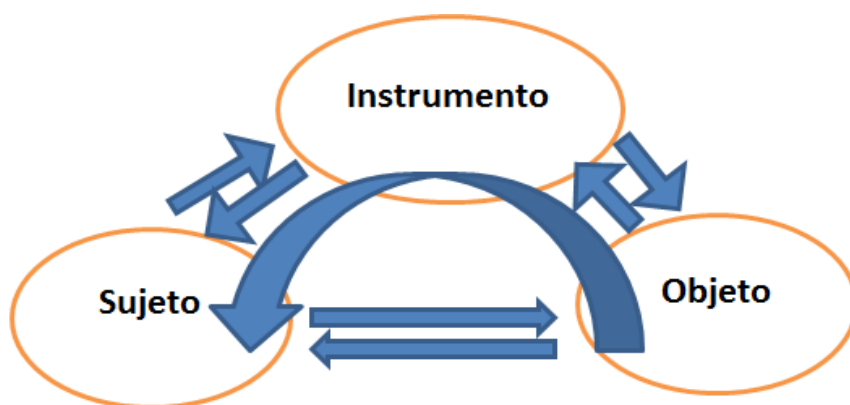


Figura 30: Relaciones entre Sujeto – objeto – instrumento, Vérillon y Rabardel (1995)

Desde lo anterior se reconoce al sujeto como el utilizador y al objeto al que se dirige la acción.

La génesis instrumental engloba dos entes, el primero se refiere a la apropiación del artefacto y sus propiedades (instrumentalización) y el otro se refiere a la construcción de los esquemas de uso (instrumentación). Los que a continuación se definen:

- Instrumentalización: Relativa al artefacto (externo). El individuo está al tanto de sus potencialidades, aprende a manejar e internaliza el uso del artefacto. Es decir un artefacto no varía, pero si puede ser instrumentalizado de varias maneras.

- Instrumentación: Esta dirigida hacia el sujeto, es relativa a la contingencia y al progreso de los esquemas. Es la organización invariante de la conducta de un sujeto para una clase de situaciones dadas (Vergnaud, 1990).

Para Trouche (2004) la instrumentalización viene siendo un reconocimiento de las funciones del artefacto y la instrumentación es una idea, una construcción mental cuando el sujeto usa la tecnología y lo lleva a desarrollar y entender su actividad matemática.

Para graficar de manera más clara se presenta la siguiente figura:



Figura 31: Esquema de la Génesis Instrumental por Henríquez, C. (2013). Didáctica de la Geometría

A modo de conclusión, es relevante mencionar que el proceso de construcción está determinado por los artefactos, ya sean materiales o simbólicos, usados por el geómetra – instrumento – objeto matemático, involucrados en una tarea dada.

Para finalizar se expone el tercer enfoque complementario al ETM, el cual es la Génesis Discursiva y la Tipología de Pruebas.

2.5.3 Génesis Discursiva

Para la demostración de ejercicios matemáticos, existe una diversidad de formas dado que aparece en todos los niveles educativos por medio de varios tipos de argumentaciones. Los matemáticos habituados a la demostración, consideran que esta se trata de un procedimiento natural, pero algo que para ellos es natural no es así para los estudiantes pues, para ellos es algo artificial, complejo y a veces sin sentido.

El conocimiento matemático se respalda en dos modos de comprensión:

Uno corresponde a la intuición (creativo y subjetivo) y otro es reflexivo (analítico y objetivo) y en la enseñanza de la matemática no se debe anular ningún tipo de razonamiento, ya sea inductivo o deductivo.

Para que un discurso se convierta en un razonamiento debe estar orientado hacia una proposición que se quiere justificar, es decir que es la forma de expansión discursiva que está orientada hacia una proposición con el fin de modificar el valor de verdad cuando se cumplen ciertas condiciones. Para lograr aquello, existen distintos tipos de razonamiento.

- Razonamiento Deductivo: Es aquel razonamiento que parte del todo hacia lo particular, es decir que de algo general se deducen conclusiones particulares.
- Razonamiento por el Absurdo: Demuestra la falsedad de una afirmación deduciendo de ella alguna contradicción.
- Razonamiento Inductivo: Se basa en la elaboración de conjeturas e hipótesis partiendo de un conjunto de observaciones que conduce a la generalización de propiedades.

El razonamiento permite en matemática poder demostrar, probar, verificar o argumentar pero, ¿Cuál es la acepción correcta?

No hay definiciones que sean aceptadas en forma unánime ya que existen matices que las diferencian unas de otras. Para Balacheff (2000) el término utilizado es la *explicación*, un discurso que pretende hacer inteligible el carácter de verdad de una proposición o resultado, el cual es una idea primitiva de la que se deriva la *prueba*, la que se compone de explicaciones aceptadas por una comunidad dada en un momento dado, y la *demostración*. Para que una explicación sea prueba, debe ser reconocida por alguien como razón suficiente.

Por otra parte, Duval (1993) señala una distinción entre explicación y argumentación pues, la argumentación pretende mostrar el carácter de verdad de una proposición, mientras que en la explicación el enunciado tiene una intención descriptiva sobre un fenómeno o comportamiento.

La argumentación tiene como intención cambiar la naturaleza o el grado de convencimiento que un sujeto tiene sobre una proposición, de forma que la acepte o rechace. No busca “probar” sino convencer.

Para Crespo, Farfán y Lezama (2010) existen diferentes tipos de argumentación, las que se separan en demostraciones deductivas y no deductivas:

- Argumentación deductiva: Se evidencia a través de las demostraciones matemáticas.

- Argumentación no deductiva: existen distintos tipos de argumentación no deductiva, dentro de las cuales se encuentra:
 - a) Argumentación Abductiva: El término fue introducido por Pierce para designar razonamientos en los que teniendo como premisas una implicación y el consecuente de este, se deduce su antecedente. La obtención de una conclusión en este tipo de argumentación no se realiza a partir de los datos o premisas, sino que involucra una manera de mirar e interpretar las mismas, obteniendo de ellas información importante y relacionándolas con otros hechos que la expliquen.
 - b) Argumentación Inductiva: Conduce a conclusiones más o menos probables, pero que no otorgan la veracidad de la proposición. Este tipo de argumentación es de los más habituales por parte de los estudiantes.
 - c) Argumentación no monotónica: Significa que a medida que se vayan agregando nuevas proposiciones a un razonamiento, estas nunca anulan a las viejas conclusiones, lo que significa que si una proposición es inferida a partir de un conjunto de premisas, por más que se agreguen nuevas premisas, la proposición seguirá siendo inferida.
 - d) Argumentación Visual: Esta se sustenta en la utilización de representaciones visuales, el uso de diagramas y otros elementos que ayuden a visualizar las propiedades a demostrar.

Una vez analizados los diversos enfoques complementarios del ETM y para poder analizar como se activan los distintos planos verticales, es que se requiere conocer los distintos tipos de ETM.

2.6 Tipos de ETM

En los distintos espacios de trabajo matemáticos, se distinguen tres tipos de ETM, los cuales dependen de la reflexión del individuo, una vez que se ha enfrentado a un problema matemático.

- ETM de Referencia: Es el Espacio de Trabajo definido solamente por criterios matemáticos. Se puede considerar como el ETM Institucional de la comunidad matemática. Esto puede ser encontrado en: Tratados, currículum para conocer la vigencia epistemológica de la matemática.
- ETM Idóneo: Este espacio de trabajo se supone una reflexión sobre la organización didáctica de los componentes del ETM de Referencia. Alguien

que usa naturalmente este espacio, a modo de ejemplo, es el profesor. Este puede ser encontrado en: Currículum, textos, clases reales.

- ETM Personal: Es el espacio utilizado por un estudiante, aunque también puede ser usado por un profesor. Cada uno se apropia de él y lo completan con sus conocimientos matemáticos y capacidades cognitivas. Este puede ser encontrado en: Concepciones, conocimientos de la persona.

Entonces, para clarificar lo señalado anteriormente se identifica que desde la utilización del ETM, en un marco escolar, este puede ser descrito de la siguiente forma:

Desde la Institución la matemática se guía por medio de un currículum el cual se entiende como el ETM de Referencia. Esta ciencia es llevada a cabo por el profesor el que pretende alcanzar un ETM Idóneo que permita la comprensión e internalización de los conocimientos vistos en clases, donde el alumnado debe trabajar en su ETM personal.

Kuzniak refiere que la resolución de problemas ocupa un lugar esencial en el trabajo de las matemáticas y también en su enseñanza. Que es a través de los problemas matemáticos que los estudiantes ponen en práctica saberes y técnicas dependientes del Paradigma Geométrico utilizado. Para ello se debe conocer el concepto de paradigma, que se describe a continuación:

2.7 Paradigma Geométrico

El concepto de Paradigma Geométrico está inspirado en la noción de Kuhn (1962) quien indica que es un conjunto de creencias, técnicas y valores que comparte una comunidad científica. Fija la manera correcta de plantear y abordar la resolución de un problema.

En el ámbito de la enseñanza, Paradigma Geométrico, se entiende por la caracterización de los problemas y ejemplos que se enfrenta un estudiante, por medio de los cuales aprenden a reconocer, aislar y distinguir las distintas entidades de la Geometría (Fernández & Montoya, 2013). Esta concepción se basa en tres componentes:

- 1) Cognitiva: Desde el sentido de Gonseth plantea que la intuición, experiencia y el razonamiento deductivo es la base para enfrentar una tarea.
- 2) Filosófica: Desde el sentido de Kuhn, asociado a una concepción de paradigma, en el cual la validación de los conocimientos construidos se relaciona con las verdades y estrategias que se comparten en la comunidad escolar.

3) Epistemológica: Hace referencia a la ubicación del modelo geométrico.

Estos tres componentes permiten identificar los paradigmas geométricos que conviven en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de la Geometría. Se considerará tal como lo expresa Kuzniak (2006), quien presenta tres paradigmas geométricos en donde el propósito es que los estudiantes transiten intencionadamente entre éstos:

- a) Geometría Natural (GI): Refleja la existencia de una relación con la realidad, pues son objetos materiales, trazos sobre un papel o cualquier otro objeto que pueda ser manipulado, que venga hecho o que pueda ser construido; por lo general son dibujos (líneas, círculos). Por ejemplo un rectángulo puede ser un televisor que tiene cuatro ángulos rectos. En este paradigma, el modelo geométrico está vinculado al mundo real, se trabaja de forma local.

La intuición tiene un valor preponderante ya que se asimila como percepción de un objeto. Esto se debe a que el ir y venir entre el objeto y la realidad está permitido como razonamiento de validación.

Los medios de prueba son de tipo material como regla graduada, compás o transportador, como también lo es el plegado de papel o el recorte.

- b) Geometría Axiomática Natural (GII): A diferencia del anterior, ya se habla de figuras geométricas. El razonamiento de validación se fundamenta en un sistema axiomático y la forma de producir conocimiento es a través de teoremas.

Aquí los problemas deben ser explícitos ya que se fundamenta en definiciones y teoremas textuales, no se permite el uso de instrumentos materiales, sólo intelectuales.

Esta geometría se basa en un modelo próximo a la realidad, en donde para validar se recurre a la axiomática, por ejemplo cuando se tiene un problema con dibujo, se acepta que la información provenga de él, pero a la hora de validarlo se necesita de una deducción lógica a través de axiomas.

- c) Geometría Axiomática Formalista (GIII): El razonamiento en este paradigma es exclusivamente a través del sistema formal axiomático de la geometría que se utilice. El uso de instrumentos no está permitido, se habla solamente de instrumentos teóricos, ya que esta geometría no está relacionada con la realidad. Lo que la diferencia del GII es que aquí la axiomática base ya no se relaciona con la realidad, pues tiende a ser completa, no como en GII que es local.

Entonces, si se resume la información anterior sobre los Paradigmas Geométricos se obtiene que:

- Geometría GI: Es técnica y práctica.
- Geometría GII: Es axiomática y modelizante.
- Geometría GIII: Es lógica y formal

Además es relevante mencionar que existe un tránsito de paradigmas entre GI y GII, conocido como GI//gII, que significa que la Geometría GI proporciona una técnica y una base de experimentación para la Geometría GII, la cual generaliza estos procedimientos.

2.8 Síntesis del Capítulo

En el capítulo se presentó la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), el cual es el marco teórico que sustenta la investigación.

En primer lugar, se mostró que el ETM se basa en dos Planos Cognitivo y Epistemológico, con sus respectivas componentes (Visualización – Construcción – Prueba) para el Plano Cognitivo y Representamen – Referencial – Artefactos para el Plano Epistemológico y como se relacionaban estos planos con sus componentes por medio de las génesis semiótica, instrumental y discursiva.

Por otra parte, se desarrolló el funcionamiento de las génesis en la sección de Enfoques complementarios del ETM, en donde se definieron distintos conceptos como la tipología de pruebas (Pragmática e Intelectual), demostración, argumentación (a conocimiento cero, no monotónica, inductiva y abductiva) y razonamiento (silogismo clásico, deductivo, por el absurdo e inductivo) en la génesis discursiva. También se explicó, como un artefacto se transforma en instrumento por medio de dos procesos (instrumentalización e instrumentación) en la génesis instrumental o los tipos de operaciones sobre las figuras (Botánico, Topógrafo, Constructor e Inventor) en la génesis semiótica.

Además se amplió el ETM hacia su última versión, con los Planos Verticales, los que permiten relacionar las distintas génesis del ETM. El Plano (Sem – Ins) es el que relaciona la génesis semiótica e instrumental, mientras que el Plano (Ins-Dis) es el que relaciona la génesis instrumental y discursiva, finalmente el Plano (Sem – Dis) es el que relaciona la génesis semiótica con la discursiva.

También se definieron los distintos tipos de ETM, los que se deben a la reflexión de un sujeto una vez que se ha enfrentado a un problema matemático, y son tres: el ETM de Referencia que se define sólo por criterios matemáticos, el

ETM Idóneo que se debe a la reflexión didáctica de las componentes del ETM de Referencia y el ETM Personal que es el que se completa con los conocimientos y creencias de un sujeto al enfrentarse a un problema matemático.

Por último se definió lo que es un Paradigma Geométrico y los diferentes tipos de Paradigmas que existen (GI, GII, GIII). GI es práctica, se vincula con la realidad y los tipos de prueba son materiales, GII es axiomática, aunque se basa en un modelo de la realidad se justifica con axiomas y los tipos de prueba son sólo intelectuales, en cambio GIII es lógico y formal y no tiene relación con la realidad.

Una vez descrita la Teoría del ETM, la cual sustenta la investigación, se torna necesario plantear objetivos y metodología a utilizar para iniciar investigación, lo cual se realiza en el siguiente capítulo.

.

Capítulo III: Objetivos y Metodología de Investigación.

En el presente capítulo se exhiben los objetivos, tanto principales como específicos, que se plantea la Investigación sustentado bajo la Teoría Espacio de Trabajo Matemático, la cual fue presentada en el Capítulo anterior. El objetivo principal de la Investigación consiste en analizar la relación en el trabajo relativo al Teorema de Tales desde el enfoque sintético a uno vectorial en estudiantes de último año de Pedagogía en Matemática con el fin de diseñar una propuesta que favorezca dicha relación. Para poder alcanzar el objetivo principal se plantean dos objetivos específicos, en donde el primero estudiará el ETM de referencia del estudiante que cursa el último año de Pedagogía en Matemática y el segundo consiste en estudiar el ETM personal del estudiante.

Por otra parte, se desarrolla la Metodología de Investigación que se basa en el Estudio de Casos para abordar los distintos objetivos expuestos en el Capítulo y los criterios de selección de los participantes del estudio.

Luego, se explica la forma de abordar los objetivos presentados. El primer objetivo de la Investigación es estudiar el ETM de Referencia de los estudiantes en los Estándares Orientadores para las carreras de Pedagogía (2012) y Programas de Estudio de las Universidades que imparten la carrera de Pedagogía en Matemática por medio de una grilla de análisis del ETM.

Finalmente, se abordará el segundo objetivo de la Investigación, el cual es diseñar un instrumento con preguntas referidas al Teorema de Tales, en donde se incluyen los enfoques sintético y vectorial con el fin de estudiar el ETM personal del estudiante

3.1 Objetivos de la Investigación

La siguiente sección desarrolla los Objetivos de la Investigación. En primer lugar se define el objetivo principal que guía la Investigación. Luego, se plantean dos objetivos específicos para lograr una mayor trascendencia del propósito de la Investigación.

El Objetivo Principal de la Investigación se formula para dar respuesta a las interrogantes que se plantearon en el Capítulo 1.

➤ **Objetivo Principal:**

Analizar la relación en el trabajo relativo al Teorema de Tales desde el enfoque sintético a uno vectorial en estudiantes de último año de Pedagogía en Matemática con el fin de diseñar una propuesta que favorezca dicha relación.

Para poder lograr este objetivo, se diseñan dos objetivos específicos:

► **Primer Objetivo Específico:**

Estudiar ETM de Referencia de los estudiantes de último año de Pedagogía en Matemática:

Para abordar este objetivo, se analizaron dos dispositivos:

- Estándares Orientadores para carreras en Educación Media (2012).
- Programa de la asignatura de Geometría en dos Universidades del país.

Estos dispositivos indican los aprendizajes esperados que debiese manifestar un estudiante de último año de la carrera de Pedagogía en Matemática. Al respecto, Stake (1998) señala que estudiar los Estándares, Programas de la asignatura Geometría y el estudiante mismo es de suma importancia pues “los casos que son de interés en la educación y en las ciencias sociales los constituyen personas y programas” (pág.15)

El análisis de estos, tiene como fin la recopilación de información relativa al Teorema de Tales y al concepto de vectores. A su vez, representan un aporte significativo en lo que respecta al diseño de la propuesta que se plantea en el objetivo principal.

► **Segundo Objetivo Específico:**

Estudiar ETM Personal de los estudiantes de último año de Pedagogía en Matemática:

Para abordar este objetivo se diseñó un instrumento con situaciones de referencia de ETM relativo al Teorema de Tales, en la que se esperaba que los estudiantes relacionaran el enfoque sintético con uno vectorial. Una vez diseñado dicho instrumento se aplicó como Actividad a un grupo de estudiantes de último año de la carrera de Pedagogía en Matemática. Posteriormente los resultados obtenidos por los estudiantes fueron analizados y es en base a dicho análisis es que se diseña una propuesta de trabajo relativo al Teorema de Tales, en la cual se pretende que exista una relación entre ambos enfoques.

A continuación se presenta la Metodología de Investigación que regirá el estudio.

3.2 Metodología de la Investigación

La Metodología de la Investigación tiene un enfoque cualitativo dado que está orientada a proveer un mayor entendimiento de los significados y experiencias de las personas, además permite aprender por observación y descripción de los participantes, concibiendo formas para registrar los datos que se van refinando conforme avanza la investigación, según (Hernández, Fernández y Baptista, 2006).

Este enfoque se basa en el estudio de casos, porque se espera que abarque la complejidad de un caso particular dado que la particularidad y complejidad de este caso se pueda llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes (Stake, 1998).

Al mismo tiempo, se orienta a aprender de las experiencias y puntos de vista de los individuos y generar teorías en las perspectivas de los participantes (Sandín, 2003).

Es importante mencionar que a través del método cualitativo se puede conocer la complejidad de la problemática del tránsito desde un enfoque sintético a uno vectorial en el Teorema de Tales. La cual responde a los objetivos planteados en la Investigación, los que apuntan a estudiar el ETM de Referencia y el ETM personal de un estudiante de último año de la carrera de Pedagogía en Matemática.

En resumen, el enfoque cualitativo permite contar con una metodología flexible, que no manipula variables, sino que privilegia la generación del conocimiento, en este caso relativo al Teorema de Tales, a través de la inmersión en la realidad de los estudiantes de último año de la carrera de Pedagogía en Matemática

La investigación tendrá un diseño instrumental el cual propone Stake (1998), eso significa que al analizar un caso particular se obtiene una mayor comprensión sobre una temática.

Desde lo anterior, se plantea que el caso particular en esta investigación, hace referencia al Teorema de Tales. Ya que la problemática que se evidencia es la casi nula relación que los estudiantes de último año otorgan al enfoque sintético y vectorial lo que da paso a que el objetivo general sea de suma relevancia dado que será por medio de éste que se diseñará una propuesta con el propósito de proveer a los futuros profesores una nueva forma de entender el Teorema de Tales, esta vez desde un enfoque vectorial.

Cabe señalar que la finalidad del diseño de la propuesta, señalada en el objetivo principal, es que los estudiantes de Pedagogía en Matemática logren enriquecer el conocimiento que tienen respecto al Teorema de Tales para que así, a futuro, logren entregar de mejor manera ese conocimiento a sus estudiantes de nivel secundario.

Descripción del Primer Objetivo Específico

Para estudiar el ETM de Referencia del estudiante se analizaron dos dispositivos:

- 1) Estándares Orientadores para las carreras de Pedagogía en Educación Media: Se analizan los Estándares dirigidos a Geometría y para ello se utiliza una grilla de análisis del ETM, la cual está dividida en tres secciones:
 - a) Nombre Estándar: En esta sección se detalla el número, nombre y definición al cual pertenece el estándar que se quiere analizar.
 - b) Conocimientos y habilidades asociados al Estándar: Se muestran las habilidades y conocimientos en juego, según el Estándar en que se encuentra.
 - c) Planos Verticales del ETM explícitamente involucrados: Se definen los Planos Verticales que se activan en los estudiantes de Pedagogía en Matemática según el Estándar que esté implicado.
- 2) Programas de la Asignatura Geometría: En esta sección se analizan Los Programas de la asignatura Geometría de dos Universidades, Universidad de Chile y Universidad Alberto Hurtado, y para ello se utiliza una grilla de análisis, la cual está dividida en cuatro secciones:
 - a) Unidad Temática: En esta sección se define la Unidad Temática perteneciente a la asignatura de Geometría en la cual se desarrolla el contenido del Teorema de Tales.
 - b) Contenidos: Define el contenido de la Unidad Temática
 - c) Planos Verticales explícitamente involucrados: Se definen los Planos Verticales que se activan en los estudiantes de Pedagogía en Matemática según el Estándar que esté implicado.
 - d) Paradigmas Geométricos: Definen los Paradigmas Geométricos involucrados, cuando un estudiante de Pedagogía en Matemática se

enfrenta a un problema sobre el Teorema de Tales según el contexto de Unidad Temática y su contenido.

Para estudiar el ETM de Referencia de los estudiantes de Pedagogía en Matemática, se escogieron los Estándares Orientadores para las carreras de Pedagogía en Educación Media y los programas de la asignatura de Geometría, pues ambos muestran lo que un estudiante, una vez que ha adquirido los conocimientos y herramientas referentes al área de Geometría en sus escuelas debiese manifestar como conocimientos mínimos esperados.

La relevancia, entonces, de los Estándares radica en que orientan a las escuelas de Pedagogía en el país, en tanto indican las competencias y aprendizajes esperados que un futuro profesor debe tener para desempeñarse de la manera adecuada en su quehacer profesional y los contenidos de la asignatura Geometría porque muestran específicamente los contenidos y la forma en que le enseñaron.

Descripción del Segundo Objetivo Específico

Para estudiar el ETM personal del estudiante de Pedagogía en Matemática se diseñó una actividad como propuesta de situaciones de referencia de ETM en base a la relación que existe entre el enfoque sintético y el vectorial en el Teorema de Tales, con tres preguntas sobre el Teorema de Tales. Una con enfoque sintético, otra con enfoque vectorial y la última con una serie de preguntas que relacionan ambos enfoques. Esta actividad permite conocer las concepciones que tienen los estudiantes sobre el Teorema de Tales, es decir, si saben trabajar y relacionar los enfoques propuestos.

Antes de aplicar esta actividad en los estudiantes de Pedagogía en Matemática, un experto en Geometría, directora de tesis, aprobó dicho instrumento, con el objeto de determinar la validez de las preguntas presentadas y el grado de adecuación al universo investigado.

A continuación se presentan los criterios de selección de los participantes.

Criterios de Selección de los participantes

Mertens (como se cita en Hernández et al., 2006) señala que en el mundo del muestreo cualitativo es usual comenzar con la identificación de ambientes propicios, luego de grupos y finalmente de individuos.

Siguiendo lo propuesto por el autor, para esta Investigación se seleccionaran estudiantes de dos Universidades chilenas, como lo son la Universidad de Chile (UCh) y la Universidad Alberto Hurtado (UAH). El por que se escogieron estas Universidades es porque en ambas Instituciones el investigador tiene mayor acceso a la información, sumado a que ambas se desempeñan bajo distintos roles

ya que, la UCh es una Universidad pública, en tanto la UAH es privada, lo que significa la posible existencia de que la carrera de Pedagogía en Matemática presente distintos enfoques de enseñanza.

Por otra parte, los ramos de geometría que imparten ambas Instituciones difieren en cantidad, lo que queda en evidencia pues la UCh solamente tiene un curso (de geometría) el cual tiene por nombre Geometría, el que es un curso clásico de geometría. Caso contrario ocurre en la UAH la cual tiene más de un curso de geometría, de los cuales para la investigación son interesantes dos de ellos, “Estudios de la Geometría” y “Geometría Analítica II”, en donde el primero es un curso de geometría euclidiana y el segundo es un curso que contiene cónicas, transformaciones lineales y vectores. Los programas de estas Instituciones son interesantes en comparación al de otras Instituciones debido a que, la UCh sigue lineamientos de la Geometría clásica, realizando un recorrido por la geometría euclidiana, de Hilbert o la geometría proyectiva, mientras que los módulos de geometría de la UAH son cursos que mantienen enfoques basados solo en algunos Estándares lo que hace que sean módulos ideales para la investigación pues, contrastan el enfoque clásico con el enfoque más pedagógico de la geometría.

Entonces, se escoge un grupo de cuatro estudiantes por Universidad, todos ellos se encuentran cursando el último año de la carrera de Pedagogía en Matemática, por ende ya han cursado los ramos de Geometría que presentan sus mallas curriculares, es decir, los ocho estudiantes que conforman la muestra, poseen un perfil similar por lo que no deberían presentar mayores inconvenientes en resolver problemas basados en el Teorema de Tales relacionando tanto el enfoque sintético como el vectorial. Ya que el objetivo de la investigación es la riqueza, profundidad y calidad de la información (Hernández et al., 2006), los estudiantes que conforman la muestra presentan un alto rendimiento académico, por lo que se consideran fuentes de información relevante para la investigación.

3.2 Primer Objetivo Específico de Investigación

Para abordar el Primer Objetivo Específico de la Investigación se estudiaron los dispositivos del **ETM de Referencia del estudiante**:

- Estándares y Programas: Se diseñó una grilla para estudiar el ETM. La primera grilla se denominó “Tabla I: Estudio de programa de la asignatura Geometría” y corresponde al estudio del ETM de los Programas de la asignatura Geometría, la segunda grilla se denominó “Tabla II” y corresponde al estudio del ETM de los Estándares Orientadores en Geometría.

Siguiendo el orden declarado anteriormente, lo primero que se estudió fueron los Estándares Orientadores para las carreras de Pedagogía en Educación Media (2012) y los Programas de Geometría de las dos casas de Estudio escogidas que imparten la carrera de Pedagogía en Matemática. Para ello, se usaron las grillas de análisis del ETM de referencia planteadas por Henríquez (2014) las que tuvieron que ser modificadas para poder ser adaptadas a la investigación.

La primera grilla de análisis que se muestra a continuación hace un estudio del ETM de los Programas de Geometría de las Instituciones escogidas que imparten la carrera de Pedagogía en Matemática.

Tabla I: Estudio de Programas de la asignatura Geometría

Unidad Temática	Contenidos	Planos Verticales explícitamente involucrados	Paradigmas Geométricos

Figura 33: Tabla de análisis del ETM para Programas de Geometría

La segunda grilla de análisis que se presenta hace un estudio del ETM de los Estándares Orientadores para las carreras de Pedagogía en Educación Media.

Tabla II: Estudio de Estándares Orientadores en Geometría

N° Estándar	Conocimientos y habilidades asociados a estándar	Planos Verticales del ETM explícitamente involucrados

Figura 34: Tabla de análisis del ETM para Estándares Orientadores

Las Grillas de análisis del ETM utilizadas tanto para los Estándares como para los Programas de Estudio indican el ETM que debe trabajar un estudiante de último año de Pedagogía en Matemática en las dos casas Instituciones que se escogieron para la investigación.

Una vez ya confeccionadas las grillas para la primera parte del primer objetivo de investigación, es necesario confeccionar el instrumento, que contiene problemas sobre el Teorema de Tales, en donde los estudiantes puedan relacionar el enfoque sintético y vectorial respondiendo así al segundo objetivo específico de la investigación, el que se presenta a continuación.

3.3 Segundo Objetivo Específico de Investigación

Para abordar el segundo objetivo de investigación, el cual pretende estudiar el **ETM personal del estudiante**, se diseñó una propuesta de situaciones de referencia del ETM, respecto al Teorema de Tales.

Para analizar el ETM Personal del estudiante sobre el Teorema de Tales se propone una actividad con tres preguntas sobre el Teorema, en donde una de ellas es con enfoque sintético, la otra es con un enfoque vectorial, y en la última pregunta se pide que se relacionen ambas versiones.

Para ello se utilizó un ejercicio probado en la Tesis de Magíster de Haruna (2010), que trata sobre la enseñanza y aprendizaje del Teorema de Tales en la educación secundaria brasileña. Se escoge este ejercicio porque fue utilizado en un test, presentado en la Tesis de Haruna, para verificar las concepciones y los posibles obstáculos que tenían los estudiantes con las distintas versiones del Teorema de Tales (sintética, homotecia, trigonométrica).

El ejercicio se aplicó en la Escuela Técnica Estadual Getúlio Vargas (E. T. E. Getúlio Vargas), localizada en el barrio de Ipiranga, ciudad de Sao Paulo. La elección de esta escuela se debe a la gran diversidad tanto social como culturalmente de los estudiantes que la conforman.

El ejercicio fue planteado de la siguiente manera en la Tesis de Haruna:

ABC es un triángulo tal que $\overline{AB} = 4\text{cm}$, $\overline{AC} = 7\text{cm}$ y $\overline{BC} = 6\text{cm}$. M es un punto del segmento $\overline{AB}$ y se proyecta a N que está en $\overline{AC}$ y que además es paralela a $\overline{BC}$.

- 1) Supongamos que $\overline{BM} = x\text{cm}$. ¿En qué lugar se debe colocar M para que el triángulo BMN sea un triángulo isósceles en M?
- 2) ¿Qué representa la recta BN en el triángulo ABC? Justifique.

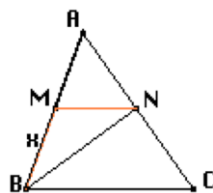


Figura 35: Teorema de Tales: Una aproximación al proceso de enseñanza – aprendizaje, Haruna (2010), pág. 89.

El ejercicio presentado por Haruna, en esta investigación tuvo que ser modificado, con el propósito de seguir el camino trazado por los Objetivos de la

Investigación, los cuales fueron exhibidos anteriormente. Las modificaciones al ejercicio se presentan a continuación:

- a) Se mejoró el enunciado del ejercicio, en cuanto a su lenguaje, con el fin de acercarlo y familiarizarlo a la realidad nacional.
- b) Se eliminó la segunda pregunta, porque se alejaba de los objetivos de la investigación, la cual propone analizar el Teorema de Tales. Esta decisión se debe a que el propósito de la pregunta era analizar los conceptos de la bisectriz de un triángulo, sin embargo, ésta sí puede ser tomada en consideración para una futura investigación sobre el tema.
- c) Se eliminó la figura del ejercicio para dar un sentido de problema.
- d) Se adicionó una pregunta al ejercicio, para que se justificara la técnica de construcción que se utilizó para responder a la primera pregunta. Esto con el sentido de analizar el ETM personal del estudiante.

Una vez realizada las correcciones al ejercicio, se presenta la Actividad con la que se pretende analizar el ETM personal del estudiante.

En lo que sigue, se exhiben las preguntas de la Actividad con las cuales se va analizar el ETM personal del estudiante referido al Teorema de Tales. Son tres preguntas, la primera en una versión sintética, la segunda en una versión vectorial y la última son preguntas para saber si pueden relacionar ambas versiones en el Teorema de Tales.

Actividad

Versión Sintética

Consideremos un ΔABC tal que $AB = 4\text{cm}$, $AC = 7\text{cm}$ y $BC = 6\text{cm}$. Los puntos M y N pertenecen a los segmentos AB y AC respectivamente, de tal modo que se forma un segmento MN que es paralelo al segmento BC .

- a) Supongamos que $BM = x\text{cm}$. ¿En qué lugar se debe colocar M para que el triángulo BMN sea un triángulo isósceles de base $\overline{BN}$?
- b) ¿Cómo justificas el resultado anterior?

A continuación se presenta la versión vectorial

Versión Vectorial

Sea el triángulo ΔABC y sea M un punto del segmento CA y N un punto del segmento BC de tal manera que se forma el segmento MN .

- a) Si los vectores $\overrightarrow{CM}$ y $\overrightarrow{MA}$ son equipolentes y los vectores $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$.
¿Qué relación existe en las longitudes de los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{AB}$?
- b) Probar que los puntos M y N son puntos medios de los segmentos CA y BC respectivamente.

A continuación se presenta la tercera pregunta de la actividad:

Relación entre ambas versiones

Responda a las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuál de las versiones le resultó más adecuada de desarrollar?
- b) ¿La versión sintética (pregunta1) le sirvió para realizar la versión vectorial (pregunta 2)?
- c) ¿Utilizó las mismas propiedades en las dos versiones? Justifique.
- d) ¿Es posible relacionar ambas versiones para un mismo tema como lo es el Teorema de Tales?
- e) ¿Cree posible utilizar estas versiones en la educación media? ¿Por qué? ¿En qué nivel las utilizaría?

3.4 Síntesis del Capítulo

En este capítulo se presentó el objetivo principal de la investigación el cual es analizar la relación en el trabajo relativo al Teorema de Tales desde el enfoque sintético a uno vectorial en estudiantes de último año de Pedagogía en Matemática con el fin de diseñar una propuesta que favorezca dicha relación. Para poder alcanzar este objetivo fue necesario plantear dos objetivos específicos, en donde el primero fue estudiar el ETM de Referencia del estudiante, analizando dos dispositivos como lo son los Estándares Orientadores para carreras de Educación Media y Programas de la asignatura Geometría de dos Instituciones de Educación Superior (Universidad de Chile y Universidad Alberto Hurtado).

El segundo objetivo específico plantea el estudio del ETM personal del estudiante mediante la realización de una actividad a una muestra de cuatro estudiantes por cada casa de estudio, la que pretende estudiar si el estudiante es capaz de relacionar los enfoques sintético y vectorial en el Teorema de Tales.

La investigación se basa en la metodología del estudio de casos con un enfoque cualitativo e instrumental.

Capítulo IV: Análisis de Objetivos específicos y diseño de un instrumento.

En este capítulo se presentan los análisis de los dos objetivos específicos de la Investigación. Se comienza con el análisis de los Estándares Orientadores para las carreras de Pedagogía y de los programas de la asignatura Geometría de las Instituciones de Educación Superior seleccionadas, mediante una grilla de estudio del ETM. También se diseña un instrumento con la información aportada por los análisis descritos anteriormente en el que por medio de una actividad con preguntas se busca que los estudiantes relacionen el enfoque sintético con el vectorial en el Teorema de Tales. De la actividad se le realiza un análisis a priori, con la finalidad de establecer posibles respuestas de los estudiantes.

4.1 Análisis del Primer Objetivo Específico de Investigación

A continuación se realizan los análisis de los dispositivos previamente presentados en los objetivos de investigación, los cuales son los Estándares Orientadores para las carreras de Pedagogía y los programas de la asignatura Geometría de la Universidad de Chile y de la Universidad Alberto Hurtado. El fin de realizar estos análisis es obtener información necesaria sobre el Teorema de Tales y el concepto de vectores, además de los Planos Verticales del ETM activados por la aplicación de los contenidos, lo que en su conjunto aportara al diseño de un instrumento el cual tendrá forma de actividad para que así los estudiantes de último año de la carrera de Pedagogía en Matemática puedan relacionar el enfoque sintético y vectorial en el Teorema de Tales.

Análisis de Estándares Orientadores en Geometría.

Se realiza análisis del Primer Objetivo de Investigación, el que mediante la utilización de una grilla se estudia el ETM en los Estándares Orientadores para las carreras de Pedagogía en la Educación Media.

Estudio de Estándares en Geometría

La Tabla II, que se presenta más adelante, analiza los Estándares en Geometría, los cuales son orientadores para las carreras de Pedagogía en Educación Media.

Dicha Tabla presenta tres columnas que cumplen distintas funciones. La primera es indicar el nombre del estándar, la segunda es explicar los conocimientos y habilidades que este estándar promueve y la tercera columna analiza los Planos Verticales que activaría cada estándar, según los conocimientos asociados a él.

El primer Estándar a analizar es el Estándar 12.

“Estándar 12: Es capaz de conducir el aprendizaje de transformaciones isométricas y homotecias de figuras en el plano.

El futuro profesor o profesora está preparado para planificar, conducir y evaluar procesos de aprendizaje de alumnos y alumnas en temas relativos a transformaciones isométricas y homotecias del plano. Es capaz de conducir el aprendizaje de los estudiantes en la realización de las construcciones geométricas con regla y compás de figuras elementales, justificando y explicando los procedimientos en lenguaje geométrico. Utiliza procesador geométrico para lograr la comprensión de los estudiantes en los temas de transformaciones del plano y construcciones geométricas. Sabe como promover en los estudiantes habilidades de análisis, resolución de problemas y argumentación.” (Estándares Orientadores para las carreras de Pedagogía en educación media, 2012, p.115).

Específicamente, nos fijamos en el punto 14:

“Promueve el aprendizaje del Teorema de Tales sobre trazos proporcionales y el Teorema de Euclides en un triángulo rectángulo.” (Estándares Orientadores para las carreras de Pedagogía en educación media, 2012, p.116).

A continuación, se describe el segundo Estándar a analizar, el cual es el Estándar 15:

“Estándar 15: Es capaz de conducir el aprendizaje de la Geometría del espacio usando vectores y coordenadas.

El futuro profesor o profesora está capacitado para planificar, conducir y evaluar procesos de aprendizaje de alumnos y alumnas, en temas referidos a elementos de geometría cartesiana y vectorial del espacio, tales como ecuaciones vectoriales y cartesianas de planos y rectas, promoviendo el desarrollo de habilidades de visualización, indagación, argumentación y resolución de problemas. Es capaz de demostrar propiedades y resolver problemas que involucran rectas, planos, cuádricas, superficies regladas y de revolución. Conoce como se articulan los conceptos relacionados con vectores con otros contenidos

presentes en el currículo escolar, particularmente en física.”(Estándares Orientadores para las carreras de Pedagogía en educación media, 2012, p.121).

Específicamente, nos fijamos en el punto 10:

“Conoce la articulación de los contenidos relacionados con vectores con otros presentes en el currículo escolar” (Estándares Orientadores para las carreras de Pedagogía en educación media, 2012, p.121).

En lo que viene, se realiza el análisis a los Estándares ya mencionados:

Nombre del Estándar	Conocimientos y habilidades asociados al estándar	Planos Verticales del ETM explícitamente involucrados
Estándar 12: Es capaz de conducir el aprendizaje de transformaciones isométricas y homotecias de figuras en el plano. El futuro profesor o profesora está preparado para planificar, conducir y evaluar procesos de aprendizaje de alumnos y alumnas en temas relativos a transformaciones isométricas y homotecias del plano. Es capaz de conducir el aprendizaje de los estudiantes en la realización de las construcciones geométricas con regla y compás de figuras elementales, justificando y explicando los procedimientos en lenguaje geométrico. Utiliza procesador geométrico para lograr la comprensión de los estudiantes en los temas de transformaciones del	14. Promueve el aprendizaje del Teorema de Tales sobre trazos proporcionales y el teorema de Euclides en un triángulo rectángulo.	Se aprecia que el Estándar 12 privilegia los siguientes Planos Verticales: <u>Plano Sem - Ins:</u> Los futuros profesores relacionarán las distintas visualizaciones del Teorema de Tales con sus propiedades a través de la regla (génesis instrumental) y compás para convertirlo en lenguaje geométrico (Génesis Semiótica). <u>Plano Ins – Dis:</u> Por medio del procesador geométrico, el cual se usará como instrumento para las construcciones del Teorema de Tales, se provee a los estudiantes habilidades de argumentación, en este caso visual, que les permitan visualizar las propiedades a demostrar.

plano y construcciones geométricas. Sabe como promover en los estudiantes habilidades de análisis, resolución de problemas y argumentación.		
Estándar 15: Es capaz de conducir el aprendizaje de la Geometría del espacio usando vectores y coordenadas. El futuro profesor o profesora está capacitado para planificar, conducir y evaluar procesos de aprendizaje de alumnos y alumnas, en temas referidos a elementos de geometría cartesiana y vectorial del espacio, tales como ecuaciones vectoriales y cartesianas de planos y rectas, promoviendo el desarrollo de habilidades de visualización, indagación, argumentación y resolución de problemas. Es capaz de demostrar propiedades y resolver problemas que involucran rectas, planos, cuádricas, superficies regladas y de revolución. Conoce como se articulan los conceptos relacionados con vectores con otros contenidos presentes en el currículo escolar, particularmente en física	10. Conoce la articulación de los contenidos relacionados con vectores con otros presentes en el currículo escolar.	Se percibe que el Estándar 15 privilegia los siguientes Planos Verticales: <u>Plano Ins - Dis:</u> Por medio de la demostración de las distintas propiedades vectoriales, el estudiante resuelve problemas, teniendo como instrumento teórico las propiedades demostradas anteriormente. Para el Teorema de Tales, el estudiante puede relacionar los enfoques sintético y vectorial del Teorema de Tales ya que por medio de la resolución de problemas nota que la aplicación de las propiedades es similar. <u>Plano Sem - Dis:</u> Se promueven habilidades de visualización y argumentación, la cuales se relacionan en que por medio de la visualización de la geometría vectorial el estudiante puede argumentar y demostrar distintas propiedades vectoriales. Para el Teorema de Tales, es por medio de la visualización que tienen el

		estudiante de los enfoques sintético y vectorial del Teorema de Tales en los cuales podrá argumentar propiedades geométricas de ambos enfoques, motivando una relación entre ellos.
--	--	---

Tabla 3: Análisis del ETM para Estándares Orientadores para Carreras de Pedagogía.

Análisis de Programas de la asignatura Geometría

Se realiza análisis de los Programas de la asignatura Geometría correspondientes a la carrera de Pedagogía en Matemática y Física de la Universidad de Chile y la carrera de Pedagogía en Matemática de la Universidad Alberto Hurtado.

Desde el análisis realizado al Programa de la asignatura Geometría de la carrera de Pedagogía en Matemática y Física de la Universidad de Chile (2015) se recabó la siguiente información:

Departamento de Matemáticas
Semestre Otoño 2015
Geometría Contenidos:
1. Nociones básicas sobre sistemas axiomáticos.
2. Geometría Plana. a) La geometría según Euclides. 1) Postulados de Euclides para la geometría del plano. 2) Primeras proposiciones del Libro 1. b) La geometría según Hilbert. 1) Axiomática de Hilbert para la geometría del plano. 2) Algunos teoremas relativos a esta axiomática. c) La semejanza de figuras planas. 1) Sobre semejanza de polígonos, el caso de los triángulos. 2) Segmentos proporcionales en el círculo. 3) Polígonos regulares y el método de isoperímetros para definir π 4) Teoremas de Euclides y Pitágoras.

3. Construcciones euclidianas.
4. Embaldosamiento del plano.
5. Geometría del Espacio. a) Axiomática para la geometría del espacio. b) Poliedros y la característica de Euler. c) Volúmenes. Principio de Cavalieri. d) Poliedros regulares y teorema sobre sólidos platónicos. e) Geometría en la esfera.
6. Otras Geometrías a) Geometría Proyectiva b) Geometría Fractal.

Figura 36: Programa de la asignatura Geometría, Universidad de Chile

Entonces el análisis de la asignatura Geometría indica que:

Estudio de Programas de Geometría

La Tabla I que se presenta a continuación analiza el Programa de la asignatura Geometría de la Universidad de Chile.

La Tabla I tiene cuatro columnas que cumplen distintas funciones. La primera columna es nominativa, pues nombra la Unidad Temática a analizar, la segunda desarrolla los contenidos de la Unidad Temática, la tercera analiza los Planos Verticales activados por los contenidos de la Unidad Temática y la última columna analiza los Paradigmas Geométricos que se activarían según los contenidos de la unidad temática.

La unidad escogida para el análisis es la Unidad II: Geometría Plana, dado que es la rama de la Geometría que estudia las superficies y figuras planas como por ejemplo la del triángulo y dado que, uno de los elementos básicos con los que se suele trabajar son rectas, entonces se deduce, a pesar de que no es evidente en el programa, que el Teorema de Tales es parte de esa unidad ya que contiene los elementos básicos que se requiere para trabajar con él. Por otra parte en la sección c) Semejanzas de figuras planas, en la Unidad II, tiene como contenido a 1) Semejanza de Polígonos, el caso de los triángulos, el cual es el contenido habitual para introducir el concepto del Teorema de Tales en la educación media.

A continuación, se realiza el análisis al Programa de la asignatura Geometría de la Universidad de Chile:

Unidad Temática	Contenidos	Planos Verticales	Paradigmas Geométricos
Unidad II: Geometría Plana.	No queda claro que aparezca en el programa el Teorema de Tales, pero debería aparecer en el contenido de Semejanzas de figuras planas, en la parte 1) Sobre semejanzas de polígonos, el caso de los triángulos porque una de las formas de enseñar el Teorema de Tales es a través de la semejanza de triángulos.	Ya que no existe claridad, respecto al Teorema de Tales en el programa, no es posible afirmar que Planos Verticales se activan, desde la suposición que aparece en el contenido de semejanzas planas, los planos verticales que se activan son: <u>Plano Sem – Dis:</u> A través de los análisis de las figuras de semejanzas de triángulos se derivan argumentaciones sobre propiedades de semejanza de triángulos. <u>Plano Sem – Ins:</u> En la resolución de problemas se relacionan las figuras de los problemas con los instrumentos teóricos (teoremas) los cuales se aplican para resolverlos.	Tal como en la columna de Planos Verticales, no es posible determinar en que Paradigma Geométrico trabajará un estudiante al enfrentarse a un problema ya que no existe claridad de la forma se aborda el Teorema de Tales pero, si apareciera en el contenido de Semejanzas planas, los paradigmas Geométricos en que trabajará un estudiante al afrontar un problema, será GII ya que las argumentaciones se hacen por medio de propiedades.

Tabla 4: Análisis del ETM para Programa de la asignatura Geometría, Universidad de Chile.

Luego, se realizó análisis del Programa de Geometría de la Universidad Alberto Hurtado, en el cual, a diferencia de la Universidad de Chile, se analizaron dos programas de distintas asignaturas de Geometría debido a la relación con los Estándares analizados, de la carrera de Pedagogía en Matemática.

El primer programa a analizar es el de la asignatura de Geometría Analítica II (Universidad Alberto Hurtado, 2014) el que a pesar de no tener como contenido

explícito de el Teorema de Tales, sí tiene el concepto de vector ya que se trabaja específicamente con el *Estándar 15*, el que señala: *Es capaz de conducir el aprendizaje de la Geometría del espacio usando vectores y coordenadas*, el cual se analizó anteriormente, por lo que es relevante de analizar. El programa se describe en lo que sigue, específicamente la tercera unidad que corresponde a la unidad de geometría vectorial en el plano y en el espacio para el estudio de rectas y planos en $\mathbb{R}^3$:

Vectores y sus características.
Vectores en $\mathbb{R}^2$, Operatoria Vectorial.
Ecuación vectorial de la recta en el plano.
El Sistema de coordenadas cartesianas en el espacio. Distancia entre dos puntos. Punto medio de un segmento en el espacio.
Vectores en $\mathbb{R}^3$. Vectores Canónicos. Producto Cruz.
La ecuación vectorial de la recta en $\mathbb{R}^3$.
La ecuación vectorial, simétrica y ecuaciones cartesianas de la recta en $\mathbb{R}^3$.
La ecuación vectorial del plano en $\mathbb{R}^3$.
Posiciones relativas de rectas y planos en $\mathbb{R}^3$.

Figura 37: Unidad de Geometría Vectorial, Programa de Geometría Analítica II, Universidad Alberto Hurtado

A continuación se realiza el análisis de la Unidad de Geometría Vectorial del programa de la asignatura Geometría Analítica II:

Unidad Temática	Contenidos	Planos Verticales	Paradigmas Geométricos
Geometría Vectorial	Vectores en $\mathbb{R}^2$: Operación vectorial. Ecuación de la recta en el plano. El sistema de coordenadas cartesianas en el espacio. Distancia entre dos puntos. Punto medio de un segmento en el espacio.	<u>Plano Sem – Ins:</u> Se activa este plano porque el estudiante al saber la operatoria vectorial y sus propiedades podrá relacionarlos, usando esas propiedades como instrumentos, es decir, al poder visualizar vectores con la construcción de los conceptos de Ecuación de la recta y de distancia entre dos puntos, el estudiante podrá conceptualizar el contenido de vectores en $\mathbb{R}^2$. <u>Plano Ins – Dis:</u> Se activa	El Paradigma Geométrico que se activa al enfrentar los problemas de la unidad es GII ya que el sistema se sustenta en axiomas y el conocimiento se obtiene por medios de Teoremas (instrumento simbólico), ya sea para la operación vectorial, la ecuación de la recta en el plano, la distancia entre dos puntos y el punto medio de un segmento en el espacio.

		porque el estudiante al saber la axiomática operacional vectorial y al relacionarla con el proceso constructivo de la ecuación de la recta en el plano, la distancia entre dos puntos y de punto medio, permite que los conceptos se transformen en artefactos al enfrentarse a un problema, entonces el proceso discursivo será coherente con lo aplicado anteriormente. <u>Plano Sem – Dis:</u> Se activa porque el estudiante al saber la operación vectorial (propiedades y definiciones) y la aplicación (conceptualización del contenido de vectores) podrá argumentar problemas de vectores en la ecuación de la recta y en los sistemas de coordenadas.	
--	--	---	--

Tabla 5: Tabla de análisis del ETM para Programa de la asignatura Geometría Analítica II, Universidad Alberto Hurtado.

El segundo programa a analizar es el de la asignatura de Estudios de las Geometrías, específicamente la Unidad III: Geometría de Proporciones (Universidad Alberto Hurtado, 2014), ya que uno de los Estándares con los cuales se trabaja es el *Estándar 12*, el que señala: *Es capaz de conducir el aprendizaje de transformaciones isométricas y homotecias de figuras en el plano*, el cual se analizó anteriormente por lo que es importante de analizar. Al trabajar con el Estándar 12, desde las transformaciones geométricas, se reconstruye la geometría de proporciones (semejanza) en la cual se analizan demostraciones y propiedades de Teoremas desde la geometría sintética, como por ejemplo el Teorema de Tales.

En lo que sigue se describe la Unidad III del programa de la asignatura Estudios de la Geometría:

Unidad III: Geometría de Proporciones
El Teorema de Tales. Aplicaciones.
Semejanza de triángulos. Criterios.
Semejanza de Polígonos. Teoremas.
Aplicaciones de la Semejanza a la circunferencia.
Aplicaciones de la Semejanza al triángulo rectángulo.
Homotecias. Aplicaciones y teoremas.
De las figuras homotéticas a las semejantes, Homología como transformación producto: composición de Homotecias e Isometrías en el plano.

Figura 38: Unidad de Geometría de Proporciones, Programa de Estudios de la Geometría, Universidad Alberto Hurtado

A continuación se realiza el análisis del programa de la asignatura Estudios de la Geometría:

Unidad Temática	Contenidos	Planos Verticales	Paradigmas Geométricos
Unidad III: Geometría de Proporciones	El Teorema de Tales. Aplicaciones.	<u>Plano Sem – Ins:</u> Se activa porque el estudiante relaciona el Teorema de Tales con sus aplicaciones por lo que podrá relacionar distintas competencias al Teorema según la aplicación estudiada. Proceso de conceptualización del Teorema por medio de la resolución de problemas. <u>Plano Ins – Dis:</u> Se activa porque el estudiante desarrollará el razonamiento matemático respecto al Teorema de Tales ya que, al estudiar sus distintas aplicaciones podrá justificar cada una de ellas ya que conoce la relación que hay entre el Teorema de Tales y sus aplicaciones.	El Paradigma Geométrico que se activa al enfrentar los problemas de la unidad es GII ya que el sistema de validación se sustenta en el sistema axiomático y la forma en que se produce conocimiento es por medio del Teorema de Tales (instrumento simbólico) el cual se utiliza para analizar sus distintas aplicaciones.

		Plano Sem – Dis: Se activa porque el estudiante tiene un discurso matemático claro y coherente respecto al Teorema de Tales, porque analizó tanto el Teorema, sus aplicaciones y la forma en que se relacionan (conceptualización) por lo que obtiene resultados concretos que se materializan en una comunicación clara entre ellos.	
--	--	---	--

Tabla 6: Tabla de análisis del ETM para Programa de la asignatura Estudios de las Geometrías, Universidad Alberto Hurtado

Una vez analizados los Programas de Estudio y los Estándares, ya se cuenta con la información necesaria sobre que conocimientos debiese manejar un estudiante con respecto al Teorema de Tales y al concepto de vectores. La información recabada fue que los estudiantes deben saber trabajar, según los Estándares, con el Teorema de Tales sobre trazos proporcionales, sobre construcciones geométricas con regla y compás, además de manejar contenidos de geometría vectorial. Por otro lado, los Programas de asignatura entregan la siguiente información, pues los estudiantes debiesen saber propiedades de geometría plana, de construcciones euclidianas, además, teniendo conocimientos sobre el teorema de Tales, semejanza de triángulos y homotecias. Por último, deben manejar nociones de geometría vectorial en el plano.

Entonces, resumiendo lo analizado anteriormente, queda en evidencia que los estudiantes manejan contenidos como el Teorema de Tales y de vectores, pero no se aprecia que se relacionen los dos enfoques respecto al Teorema de Tales.

Por lo anterior, es necesario realizar un análisis a priori a la actividad para poder estudiar el ETM personal del estudiante.

4.2 Análisis del Segundo Objetivo Específico de Investigación

A continuación se realiza un análisis a priori del instrumento diseñado en el capítulo anterior para estudiar el ETM personal de los estudiantes de último año de Pedagogía en Matemática con el propósito de evidenciar si estos logran relacionar enfoque sintético y vectorial del Teorema de Tales.

Análisis a priori de la Actividad

La siguiente figura presenta el cuestionario en su totalidad:

Actividad

Nombre: _____

Fecha: _____

La siguiente Actividad corresponde a un Trabajo de Tesis de Magister en Didáctica de la Matemática. La Actividad cuenta con tres preguntas de desarrollo sobre el Teorema de Tales. Responde en forma clara cada pregunta del cuestionario y te pedimos no borrar tu trabajo. Además, puedes usar el instrumento que estimes necesario para trabajar como regla, o compás. Esta información es confidencial y es para fines de investigación.

Parte 1

1) Consideremos un ΔABC tal que $AB=4\text{cm}$, $AC=7\text{cm}$ y $BC=6\text{cm}$. Los puntos M y N pertenecen a los segmentos AB y AC respectivamente, de tal modo que se forma un segmento MN que es paralelo al segmento BC.

a) Supongamos que $BM = x\text{cm}$. ¿En qué lugar se debe colocar M para que el triángulo BMN sea un triángulo isósceles de base $\overline{BN}$?

b) ¿Cómo justificas el resultado anterior?

Parte 2

2) Sea un triángulo ΔABC cualquiera. Sea M un punto del segmento CA y N un punto del segmento BC de tal manera que se forma el segmento MN.

a) Si los vectores $\overrightarrow{CM}$ y $\overrightarrow{MA}$ son equivalentes y los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{AB}$. ¿Qué relación existe en las longitudes de los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{AB}$?

b) Probar que los puntos M y N son puntos medios de los segmentos CA y BC respectivamente

*Vectores equivalentes: Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se dicen EQUIVALENTES si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

Parte 3

3) Responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál de las versiones le resultó más adecuada de desarrollar, según sus años de enseñanza?

b) ¿La versión sintética (preguntas 1) le sirvió para realizar la versión vectorial (pregunta 2)?

c) ¿Utilizó las mismas propiedades en las dos versiones? Justifique.

d) ¿Es posible relacionar ambas versiones para un mismo tema como lo es el Teorema de Tales?

e) ¿Cree posible utilizar estas versiones en la educación media? ¿Por qué? ¿En qué nivel las utilizaría?

Figura 39: Actividad sobre el Teorema de Tales

A su vez, se presentan los análisis a priori de los ejercicios de la Actividad, tanto en lo matemático como desde el punto de vista del ETM.

Versión sintética

Consideremos un ΔABC tal que $AB=4\text{cm}$, $AC=7\text{cm}$ y $BC=6\text{cm}$. Los puntos M y N pertenecen a los segmentos AB y AC respectivamente, de tal modo que se forma un segmento MN que es paralelo al segmento BC.

a) Supongamos que $BM = x\text{cm}$. ¿En qué lugar se debe colocar M para que el triángulo BMN sea un triángulo isósceles de base $\overline{BN}$?

b) ¿Cómo justificas el resultado anterior?

Análisis a Priori Matemático:

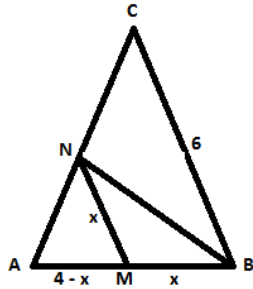


Figura 40: Actividad sobre el Teorema de Tales

Ya que $AB = 4\text{cm}$ y $BM = x\text{cm}$, entonces $MA = (4 - x)\text{cm}$. Además supongamos que el ΔBMN es isósceles, por lo tanto si $BM = x\text{cm}$, entonces $MN = x\text{cm}$.

Finalmente como $MN \parallel BC$, si se usa el Teorema de Tales se obtiene:

$$\frac{MA}{MN} = \frac{AB}{BC}, \text{ es decir que } \frac{4-x}{x} = \frac{4}{6}$$

Desarrollando el ejercicio los estudiantes obtienen que el valor de x es 2.4cm . Por lo tanto, si M se ubica a 2.4cm de B se obtiene que el ΔBMN sea isósceles.

El resultado anterior se justifica por el uso del Teorema de Tales, ya que existen dos rectas secantes en el triángulo, las cuales están cruzadas por dos rectas paralelas, por lo que se tienen trazos proporcionales

Análisis a Priori en el ETM:

La pregunta a) favorece la activación del plano Sem – Ins ya que por medio de la visualización de la figura, usando el Teorema de Tales como un artefacto teórico, se logra deducir el valor del trazo pedido, esto es porque el artefacto se transforma en instrumento, y el estudiante se apropia de él para lograr el resultado. Aquí es donde el trabajo se vuelve numérico /algebraico y no se vuelve a utilizar la figura.

Desde otro punto de vista, también, se podría favorecer una activación del plano Sem – Ins ya que al interpretar los resultados figuralmente tendrá que hacerlo por medio de artefactos materiales ya sea regla cuadrada o compás, es decir interpretará sus resultados en la figura, usando la visualización de esta y apropiándose del artefacto como instrumento ya sea la regla cuadrada o el compás para resolver el problema.

La pregunta b) favorece la activación del plano Ins – Dis ya que al justificar los datos concluidos en la pregunta anterior va a hacerlo por medio del referencial que posee el estudiante. Es decir, que usa los resultados anteriores como artefactos teóricos con el fin de justificar sus resultados en forma discursiva.

El ejercicio en sí, es un tránsito entre los paradigmas GI y GII, es decir GI//gII, ya que se utilizan tanto artefactos materiales (regla, compás) como teóricos (Teorema de Tales) para responder a las preguntas planteadas en el problema.

Al utilizar regla y compás, el estudiante podrá medir trazos, por lo que será capaz de operar sobre la figura de tipo constructor.

Versión Vectorial

Sea el triángulo $\triangle ABC$ y sea M un punto del segmento CA y N un punto del segmento BC de tal manera que se forma el segmento MN.

- Si los vectores $\overrightarrow{CM}$ y $\overrightarrow{MA}$ son equipolentes y los vectores $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$. ¿Qué relación existe en las longitudes de los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{AB}$?
- Probar que los puntos M y N son puntos medios de los segmentos CA y BC respectivamente

Análisis a priori Matemático:

Sea el dibujo de la situación:

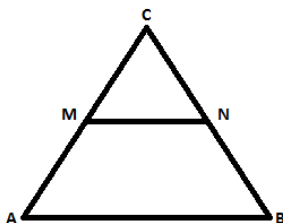


Figura 41: Actividad sobre el Teorema de Tales

Sea el vector $\overrightarrow{CA}$, por relación de Chasles se tiene que:

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA}$$

Además se sabe que los vectores $\overrightarrow{CM}$ y $\overrightarrow{MA}$ son equipolentes, entonces $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MA}$. Por lo tanto $\overrightarrow{CA} = 2 \overrightarrow{MA}$, es decir que $\frac{\overrightarrow{CA}}{2} = \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MA}$.

Por otro lado, si se usa el Teorema de Tales, ya que $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$, se obtiene:

$$\frac{|\overrightarrow{CM}|}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{|\overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{AB}|}, \text{ pero se sabe que } \frac{\overrightarrow{CA}}{2} = \overrightarrow{CM}, \text{ entonces } \frac{\frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{|\overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

Por lo tanto, $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{MN}|$

Luego, la longitud del vector $\overrightarrow{MN}$ es la mitad de la longitud del vector $\overrightarrow{AB}$.

Por otra parte, se sabe que los vectores $\overrightarrow{CM}$ y $\overrightarrow{MA}$ son equipolentes, por lo que el punto M es punto medio del trazo CA, además por teorema de vectores se tiene que si los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{AB}$ son vectores paralelos y que la longitud del vector $\overrightarrow{MN}$ es la mitad de la longitud del vector $\overrightarrow{AB}$, entonces los puntos M y N son puntos medios de los trazos CA y BC.

Análisis a Priori en el ETM:

La pregunta a) favorece la activación del plano Sem – Ins ya que por medio de la visualización de la figura, y usando propiedades de vectores y el Teorema de Tales como artefactos teóricos los cuales se aplican como instrumentos, el estudiante logra deducir el valor de la distancia del vector pedido. Aquí el trabajo se vuelve vectorial -numérico /algebraico.

La pregunta b) favorece el plano Ins – Dis ya que se utilizará el resultado de la pregunta a) como un instrumento teórico para justificar, por medio de un Teorema de vectores que los punto M y N son puntos medios.

El ejercicio favorece un trabajo en GII, ya que a pesar de que usa un dibujo, el estudiante valida la información por medio de teoremas.

Relación entre ambas versiones

Responda a las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuál de las versiones le resultó más adecuada de desarrollar, según sus años de enseñanza?
- b) ¿La versión sintética (pregunta1) le sirvió para realizar la versión vectorial (pregunta 2)?
- c) ¿Utilizó las mismas propiedades en las dos versiones? Justifique.

- d) ¿Es posible relacionar ambas versiones para un mismo tema como lo es el Teorema de Tales?
- e) ¿Cree posible utilizar estas versiones en la educación media? ¿Por qué? ¿En qué nivel las utilizaría?

Análisis a Priori de las preguntas.

- a) R: La versión sintética fue más adecuada de desarrollar debido a que el enunciado y la forma de resolverlo es más habitual, en todos los años de enseñanza.
- b) R: Sí, porque sirvió en que tenía que realizar una conversión del enunciado en una figura con el objetivo de trabajar más claramente, además de saber que tenía que utilizar el Teorema de Tales.
- c) R: Solamente el Teorema de Tales.
- d) R: Totalmente, es posible relacionarlos y es más, debería ser así ya que amplía el conocimiento sobre el Teorema de Tales.
- e) R: Sí, si es posible utilizar estas versiones en la educación media ya que la geometría sintética y el concepto de vector son contenidos del currículum escolar y sobre todo de educación media. El nivel en que utilizaría estas versiones sería para el curso de Tercero Medio ya que es en este nivel en el cual se comienza con el contenido de vectores y además se pide tener como conocimientos previos el Teorema de Tales, por lo que se podrían usar ambas versiones para mostrarles a los estudiantes la relación que existe entre dos contenidos, lo que se traduce en ampliar el conocimiento de ambos.

4.3 Síntesis del Capítulo

En el capítulo se presentaron los análisis preliminares de los dos objetivos específicos de la Investigación. Para el primer objetivo específico se analizaron dos dispositivos, el primero fue Estándares Orientadores para las carreras de Pedagogía, en donde se analizó específicamente el estándar 12 y el 15 que hacen

referencia al Teorema de Tales y vectores. Para poder analizarlos se diseñó una grilla de estudio del ETM, en la cual se analizan los posibles Planos Verticales que se activarían en un estudiante, al momento de enfrentarse a un problema matemático.

Luego se analizaron los Programas de la asignatura Geometría de dos Instituciones de Educación Superior, la Universidad de Chile y la Universidad Alberto Hurtado. Respecto de la malla curricular de la Universidad de Chile en la carrera de Pedagogía en Matemática se analizó el ramo de Geometría, mientras que en la Universidad Alberto Hurtado se analizaron dos ramos de Geometría que llamados: Estudios de la Geometría y Geometría Analítica II. Estos cursos cuentan con geometría sintética (Geometría y Estudios de la Geometría) y geometría vectorial (Geometría Analítica II). Para poder analizarlos se diseñó una grilla de estudio del ETM la que analiza el Plano vertical y el paradigma geométrico que se activa al enfrentarse a un problema geométrico.

A continuación, con la información recabada por los análisis anteriores se diseñó una Actividad para estudiantes de último año de Pedagogía en Matemática, la cual antes de ser aplicada tuvo que ser validada por un experto, profesora guía. La actividad cuenta con tres partes. La primera, tiene una versión sintética del Teorema de Tales, la segunda con una versión vectorial del Teorema. En ambas se realiza un análisis a priori matemático y del ETM. Finalmente se presenta una tercera parte con una serie de cinco preguntas en las que se pretende que los estudiantes puedan relacionar ambas versiones.

Capítulo V: Análisis de Resultados de instrumento aplicado y planteamiento de Propuesta de situaciones de Referencia.

En el presente capítulo se dan a conocer los análisis de los resultados de la actividad realizada por los estudiantes, la que tiene como fin relacionar los enfoques sintético y vectorial en el Teorema de Tales. Además se presentan las conclusiones que permiten proponer a la actividad como una propuesta de situaciones de referencia del ETM relativo al teorema de Tales en la formación inicial de profesores de Educación Media.

5.1 Análisis de Resultados de instrumento

Se realizan análisis de los resultados de la actividad, diseñada en el capítulo III. La actividad fue aplicada a ocho estudiantes, cuatro de la UCh y cuatro de la UAH a los cuales se les mantiene en el anonimato en las por la confidencialidad de la información. Los estudiantes fueron seleccionados por capacidad operativa y por ser estudiantes de alto rendimiento académico, lo cual va acorde a lo planteado por Hernández, Fernández y Baptista (2006) quienes señalan:

La capacidad operativa de recolección y análisis el cual es el número de casos que podemos manejar de manera realista y de acuerdo a los recursos que dispongamos (pág. 561).

El objetivo es la riqueza, profundidad y calidad de la información, no la cantidad ni la estandarización (pág. 566).

El primer análisis a presentar es el de la versión sintética del Teorema de Tales.

5.2 Análisis de la Versión Sintética del Teorema de Tales

A continuación se realiza un análisis de las respuestas de los estudiantes a la versión sintética del teorema de Tales, llamada parte 1 la que presenta el siguiente enunciado:

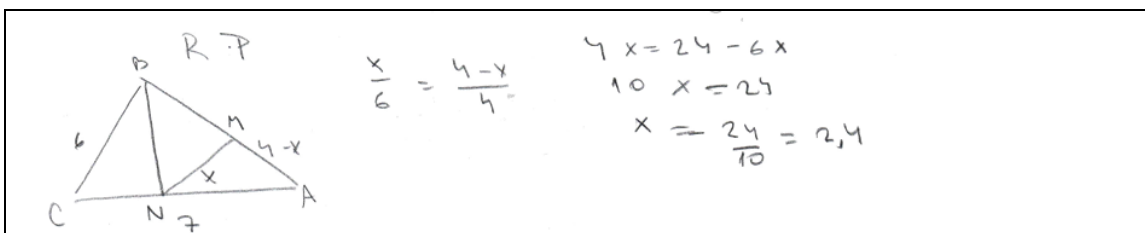
Consideremos un ΔABC tal que $AB = 4\text{cm}$, $AC = 7\text{cm}$ y $BC = 6\text{cm}$. Los puntos M y N pertenecen a los segmentos AB y AC respectivamente, de tal modo que se forma un segmento MN que es paralelo al segmento BC .

El enunciado presenta dos preguntas, a continuación se realiza el análisis a la primera:

- a) Supongamos que $BM = x\text{cm}$. ¿En qué lugar se debe colocar M para que el triángulo BMN sea un triángulo isósceles de base $\overline{BN}$?

La forma de responder de los estudiantes fue similar, concluyendo el resultado esperado según el análisis a priori. Sólo hubo variaciones en el modo en que hicieron el triángulo para desarrollar el ejercicio (ver Anexo 2), tal como se muestra en el cuadro:

	a) $\frac{4-x}{x} = \frac{4}{6}$ $24 - 6x = 4x$ $24 = 10x$ $2,4 = x$ M SE DEBE COLOCAR A 1,6 cm DE A
	Entonces M se debe poner a 2,4 cm de B $\frac{4-x}{x} = \frac{4}{6}$ $6(4-x) = 4x$ $24 - 6x = 4x$ $24 = 4x + 6x$ $24 = 10x$ $2,4 = x$
	$\Rightarrow \frac{x}{(4-x)} = \frac{4}{6}$ $6x = 16 - 4x$ $10x = 16$ $x = 1,6 \rightarrow \text{ubicación de M respecto de A}$

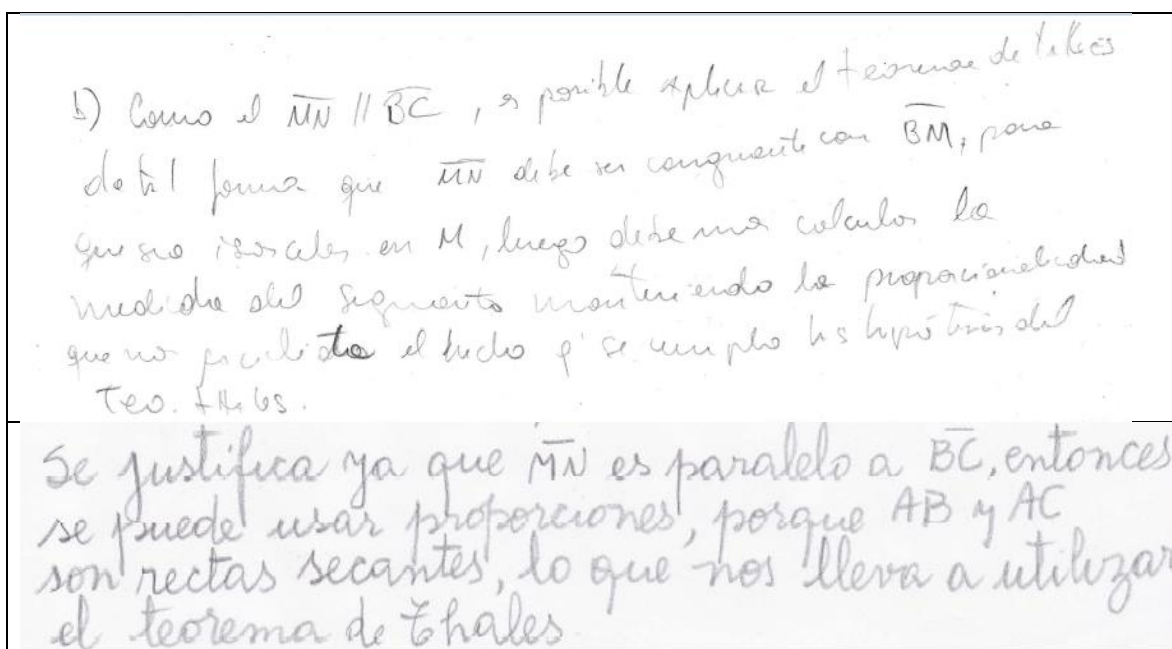


Cuadro 1: Respuestas a la pregunta a) de la parte 1 de RM, EM, CC y RP

El enunciado de la segunda pregunta es:

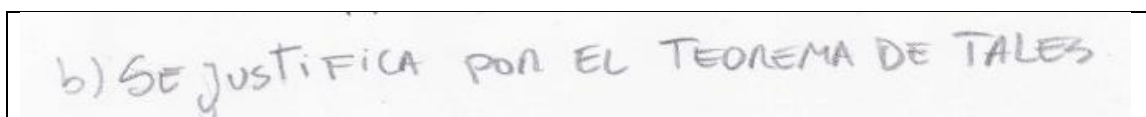
b) ¿Cómo justificas el resultado anterior?

Se presentaron tres maneras distintas de responder a la pregunta. El proceder para justificar el trabajo de la pregunta anterior fue el teorema de Tales, para cinco de los ocho estudiantes, tal como se muestra en el cuadro:



Cuadro 2: Respuesta de CC y EM para justificar su resultado

Cabe señalar que de los cinco estudiantes, cuatro justificaron su respuesta con el uso del Teorema de Tale, tal como se previó en el análisis a priori, mientras que el restante solo responde que se justifica por la utilización del teorema de Tales, sin mayor justificación.



Cuadro 3: Respuesta de RM para pregunta b)

Por otra parte, para uno de los estudiantes, la forma de justificar la pregunta b) es por medio de proporciones en triángulos semejantes.

B) Se justifica por propiedades de trazos proporcionales en triángulos semejantes

Cuadro 4: Respuesta de MR para pregunta b)

Dos estudiantes no responden la pregunta, pero en el desarrollo del ejercicio a), explican que artefactos utilizaron, lo que podría ser tomado en consideración como justificación de sus cálculos.

a) $\triangle AMN \sim ABC$, por proporciones

$$\frac{4-x}{4} = \frac{x}{6}$$

$$6(4-x) = 4x$$

$$24 - 6x = 4x$$

$$24 = 10x \Rightarrow x = 2.4$$

Aplicando Tales

$$\frac{4-x}{x} = \frac{4}{6}$$

$$6(4-x) = 4x$$

$$24 - 6x = 4x$$

$$24 = 4x + 6x$$

$$24 = 10x$$

$$x = \frac{24}{10}$$

Cuadro 5: Respuesta de IC y SA en la pregunta a) en la cual dice que artefacto usaron.

Lo que evidencian las respuestas de las preguntas a) y b) de la parte 1, es que todas tienen el clásico desarrollo desde la geometría sintética, y los estudiantes pueden o no lograr una buena fundamentación de esta.

Si se comparan los resultados obtenidos por los estudiantes con el análisis a priori que se realizó en el capítulo anterior, se recogen los siguientes resultados:

Comparación entre análisis a priori y resultados de los estudiantes en la versión sintética del Teorema de Tales.

La totalidad de los estudiantes realiza el mismo trabajo matemático para realizar el ejercicio a) que se presentó en el análisis a priori, el cual era utilizar el Teorema de Tales. Dos de los estudiantes, en vez de usar el Teorema de Tales emplearon propiedades de proporciones, pero proporciones entre rectas paralelas por lo que recurrieron de igual forma al Teorema de Tales, solo que no explícitamente.

En cuanto a los Planos Verticales activados por los estudiantes al enfrentarse a la pregunta a), coinciden en su conjunto con los análisis a priori realizados anteriormente, ya que se activa el Plano Sem – Ins. Este plano se activa ya que los estudiantes dibujaron la figura de un triángulo, pero luego de dibujarla y sacar conclusiones de medidas de trazos, no volvieron a usar la figura, luego de

representar sus conclusiones en una ecuación. Es decir, los estudiantes recurren a la visualización por medio de la figura del triángulo para deducir elementos, los cuales le permiten usar el Teorema de Tales como artefacto teórico, el cual en su aplicación se transforma en instrumento, ya que se apropiaron de él para resolver el problema, tal como se había previsto en el análisis a priori.

Otro plano que se activa es el Ins – Dis, y ese se activa el enfrentarse a la pregunta b) ya que los estudiantes tuvieron que recurrir a su referencial, para poder justificar sus resultados matemáticos en la pregunta a).

Por último los estudiantes realizan un trabajo geométrico en GII ya que utilizan solamente criterios axiomáticos para poder realizar el ejercicio.

En lo que sigue, se realizará el análisis de las respuestas a la parte 2 de la actividad.

5.3 Análisis de la Versión Vectorial del Teorema de Tales

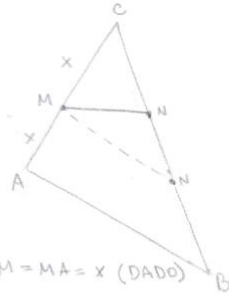
Se realiza un análisis de las respuestas de los estudiantes a la versión vectorial del Teorema de Tales, llamada parte 2 la que tiene el siguiente enunciado:

Sea un triángulo $\triangle ABC$ cualquiera. Sea M un punto del segmento CA y N un punto del segmento BC de tal manera que se forma el segmento MN.

El enunciado presenta dos preguntas, a continuación se realiza el análisis a la primera pregunta, la cual es:

- a) Si los vectores $\overrightarrow{CM}$ y $\overrightarrow{MA}$ son equipolentes y los vectores $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$. ¿Qué relación existe en las longitudes de los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{AB}$?

La respuesta a esta pregunta fue la esperada, dado el análisis a priori realizado anteriormente, en siete de los ocho estudiantes. A continuación se muestran algunas respuestas con buen resultado.



$CM = MA = x$ (DADO)

$\frac{x}{MN} = \frac{2x}{AB}$ (Thales)

a) $|\vec{CM}| = |\vec{AM}| = x$

$\frac{x}{|MN|} = \frac{2x}{|AB|} \Rightarrow |AB| = 2 |MN|$

$\therefore$ El módulo del vector $\vec{AB}$ es el doble del módulo del vector $\vec{MN}$

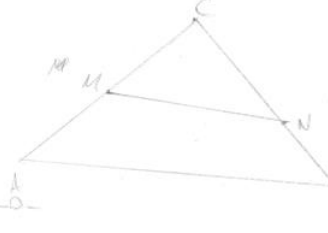
Δ) Como el vector $\vec{MN} \parallel \vec{AB}$

usando nuevamente el teorema de Tales, hipotesis necesaria para el teorema de Tales, (Ocaso particular).

demostrando Suponiendo que el módulo $\|\vec{CM}\| = a \Rightarrow \|\vec{MA}\| = a$

luego, debemos tener: $\frac{a}{\|\vec{MN}\|} = \frac{2a}{\|\vec{AB}\|} \Rightarrow \frac{\|\vec{AB}\|}{\|\vec{MN}\|} = 2$

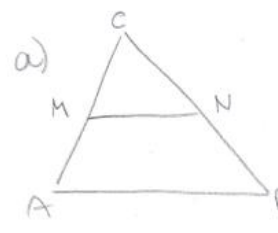
es decir, el vector $\vec{AB}$ tiene el doble de magnitud que el vector $\vec{MN}$.



Cuadro 6: Respuestas a la pregunta a) por SA y CC.

Cinco estudiantes no indicaron que artefacto utilizaron, pero por su desarrollo de su ejercicio se puede deducir que usaron el Teorema de Tales. Se muestran algunos resultados en el cuadro 7.

a)

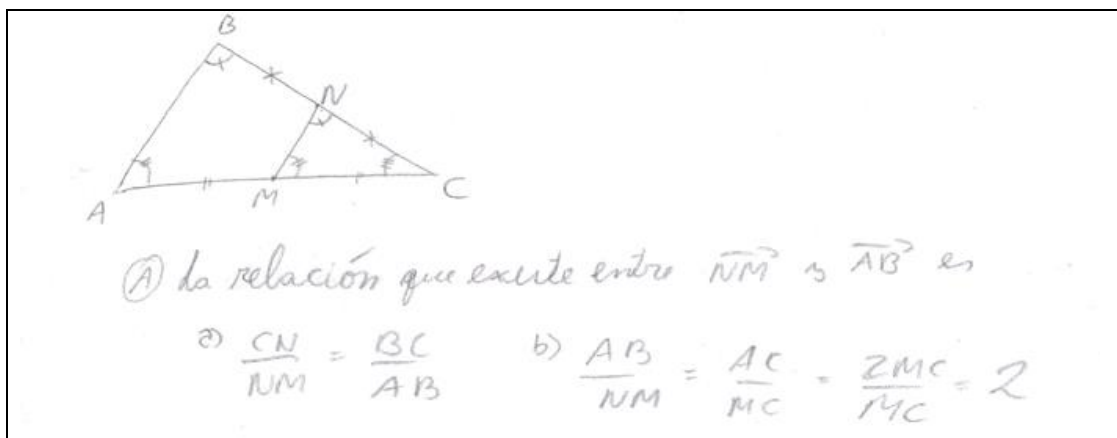


Como $\vec{MN} \parallel \vec{AB}$ se cumple que

$\frac{CM}{MN} = \frac{CA}{AB}$

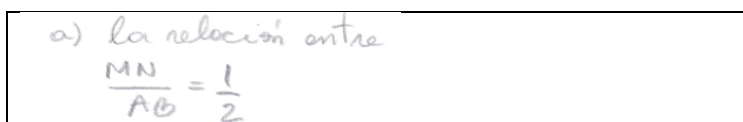
Como $\vec{CM}$ equivalente a $\vec{MA}$ entonces

$\vec{CM} = \vec{MA}$, luego $\frac{CM}{MA} = \frac{2CM}{AB} \Rightarrow AB = 2MA$



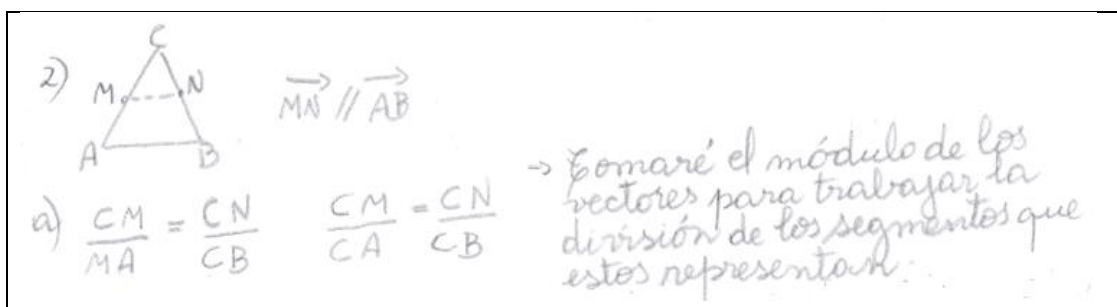
Cuadro 7: Respuestas a la pregunta a) por RP y MR

En base a la misma pregunta, un estudiante obtiene un resultado positivo, pero sin desarrollarlo, esta respuesta se muestra en el cuadro que viene a continuación:



Cuadro 8: Respuesta de DV para la pregunta a)

Finalmente, un estudiante comenta lo que quiere realizar, pero no ejecuta el desarrollo del ejercicio.



Cuadro 9: Respuesta de EM para la pregunta a)

Si se revisan las respuestas de los estudiantes a la pregunta, en general, casi todos los estudiantes llegaron a buen término de los ejercicios, usando el Teorema de Tales.

Si se comparan los resultados obtenidos por los estudiantes con el análisis a priori que se realizó en el capítulo anterior, se recaban los siguientes resultados:

Comparación entre análisis a priori y resultados de los estudiantes en la versión vectorial del Teorema de Tales en la pregunta a)

Solamente dos estudiantes aplican el Teorema de Tales en la forma vectorial, usando la norma de un vector para saber la medida de los vectores, tal como se había presentado en el análisis a priori.

El resto de los estudiantes utiliza vectores para concluir relaciones entre trazos, de esa forma convierten el trabajo vectorial que tenían inicialmente en un trabajo de geometría sintética en el cual aplican el Teorema de Tales o propiedades de proporciones entre triángulos para resolver el ejercicio. Esto indica que los estudiantes que forman parte de la muestra, se encuentran más familiarizados con el trabajo sintético, lo que se puede deber a los años de enseñanza que han tenido en el cual se privilegia el trabajo sintético ante vectorial.

En cuanto al Plano Vertical activado por los estudiantes al enfrentarse a la pregunta a), se encuentra el Plano Sem –Ins, que coincide con el análisis a priori, presentado anteriormente, ya que el estudiante tuvo que recurrir a una figura para deducir propiedades vectoriales y así aplicar propiedades de proporciones entre triángulos o el Teorema de Tales convirtiendo el trabajo en numérico/algebraico. Es decir, recurrieron a la visualización de la figura de un triángulo para poder aplicar propiedades vectoriales para resolver el problema, en algunos casos se apropiaron directamente del Teorema de Tales como instrumento para concluir su respuesta y en otros casos, los estudiantes recurrieron a un cambio de registro pues, pasaron de conceptos de vectores a propiedades de geometría sintética y luego de ese cambio usaron artefactos teóricos para deducir sus resultados.

Por último, los estudiantes trabajan en un paradigma geométrico GII, ya que sólo usan axiomas para resolver el ejercicio, la figura es de referencia pues no se trabaja sobre ella.

A continuación se presenta el análisis de la pregunta b) de la parte 2, la cual indica el siguiente enunciado:

- b) Probar qué los puntos M y N son puntos medios de los segmentos CA y BC respectivamente.

La forma de responder entre los estudiantes a esta pregunta fue diversa. En el cuadro que viene a continuación se presenta una explicación por medio de un instrumento, como lo es el compás.

b) Si tenemos un compás podremos probar fácilmente que cada punto es un punto medio del segmento respectivo haciendo una circunferencia con centro en M o N y verificando que esta circunferencia se intersecta en 2 los vértices del triángulo, pues los segmentos AM y MC son radios.

Por $\angle CAB \cong \angle CMN$ y $\angle CBA \cong \angle CNM$

Cuadro 10: Respuesta de EM para la pregunta b)

MR responde a la pregunta satisfactoriamente usando semejanza de triángulos, lo que se muestra en el siguiente cuadro:

b) Los triángulos MNC es semejante al triángulo ABC (considerando las condiciones enunciadas en la parte a), pues como $MN \parallel AB$ los $\angle MNC$ y $\angle ABC$ son iguales, $\angle BAC \cong \angle NMC$ y $\angle ACB \cong \angle MCN$.

Me punto medio por la relación encontrada en a) y,

$$\frac{AC}{MC} = \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NC} = 2 \quad \text{Entonces } N \text{ punto medio}$$

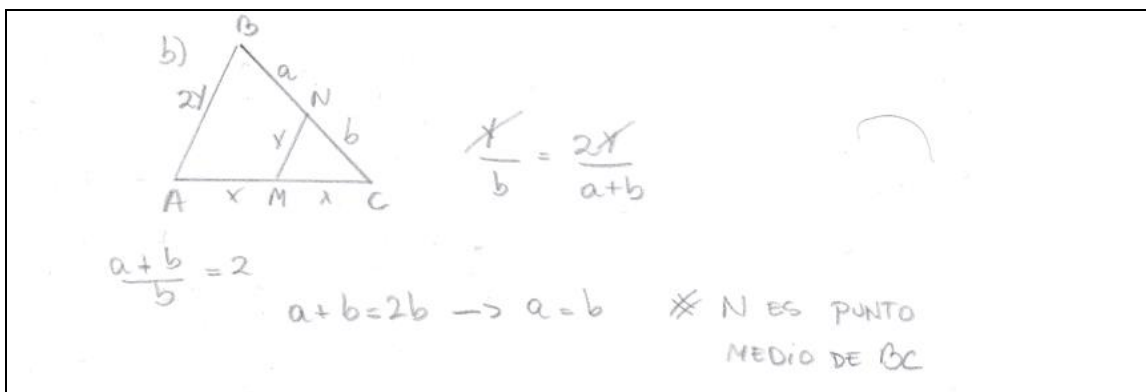
Cuadro 11: Respuesta de MR para la pregunta b)

El estudiante IC, recurre a la mediana de un triángulo para justificar su respuesta:

b). como $MN \parallel AB$ y M pto medio del lado AC tenemos que MN es mediana y por lo tanto N es pto medio del lado CB .

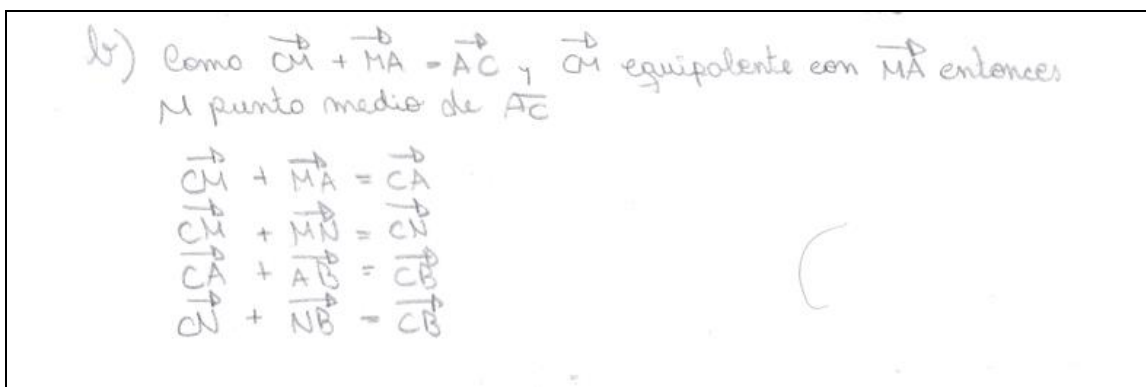
Cuadro 12: Respuesta de IC para la pregunta b)

En cambio, el estudiante RM, al parecer usa el Teorema de Tales, aunque no lo expresa directamente.



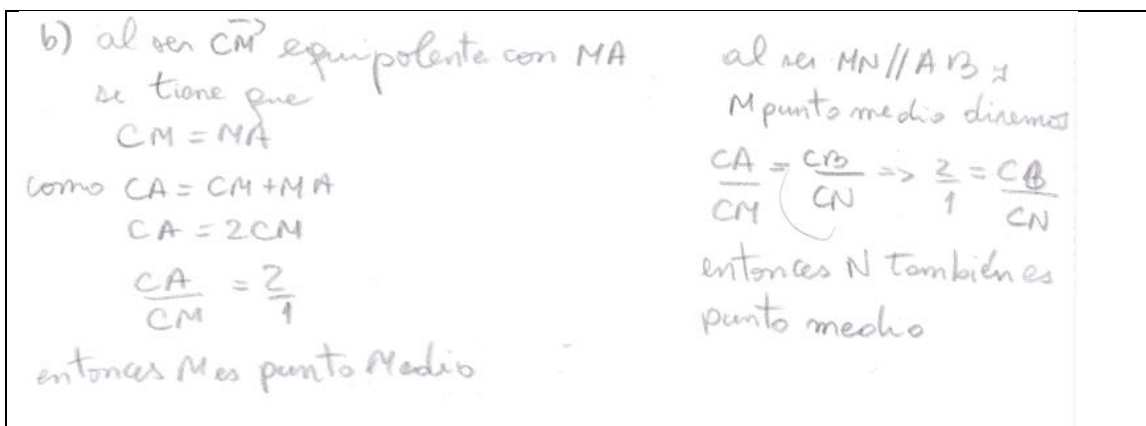
Cuadro 13: Respuesta de RM para la pregunta b)

Hasta el momento, todos los estudiantes han utilizado herramientas de la geometría sintética para responder a la pregunta b). Esto cambia con el estudiante RP, el cual usa vectores, aunque sólo responde la mitad de lo que se le pregunta.



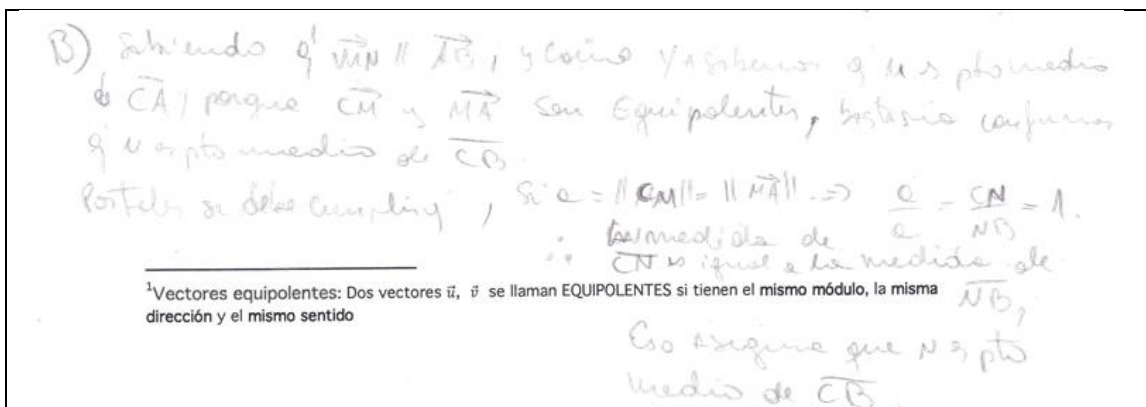
Cuadro 14: Respuesta de RP para la pregunta b)

El estudiante DV, en cambio, usa vectores y aplica propiedades de rectas paralelas para responder a la pregunta en su totalidad, las cuales se muestran en el cuadro:



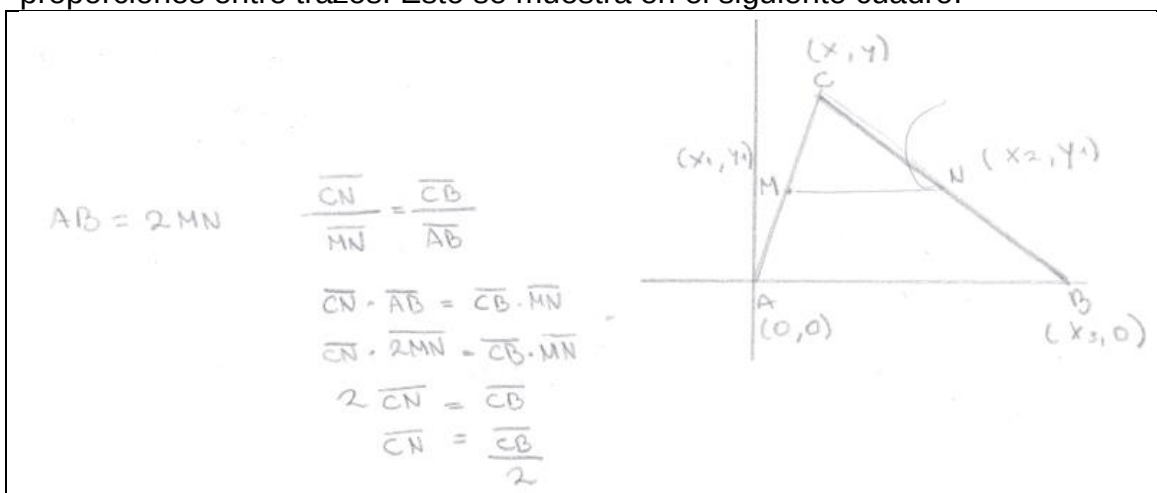
Cuadro 15: Respuesta de DV para la pregunta b)

Por otro lado, el estudiante CC, ocupa sólo vectores para responder a la pregunta.



Cuadro 16: Respuesta de CC para la pregunta b)

Por último, al revisar la respuesta del estudiante SA, se identifica que este convierte los vectores en su expresión analítica, reduciendo el ejercicio a proporciones entre trazos. Esto se muestra en el siguiente cuadro.



Cuadro 17: Respuesta de SA para la pregunta b)

Los estudiantes a pesar de usar distintas estrategias de resolución, casi todos, a excepción el estudiante RM) logran tener éxito al momento de responder positivamente al ejercicio el cual se concluye que los puntos M y N son puntos medios de los trazos CA y BC respectivamente.

Si se comparan los resultados obtenidos por los estudiantes con el análisis a priori que se realizó en el capítulo anterior, se recogen los siguientes resultados:

Comparación entre análisis a priori y resultados de los estudiantes en la versión vectorial del Teorema de Tales en la pregunta b)

Todos los estudiantes coinciden con el análisis a priori respecto a que M es punto medio del trazo AC, dado que utilizan la equipolencia entre los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{AB}$. En cambio, para probar que N es punto medio del trazo BC, los estudiantes recurren a distintas estrategias que se diferencian del análisis a priori, presentado anteriormente, ya que no usan como artefacto, un Teorema de vectores, para responder el ejercicio. Los estudiantes aplican propiedades de geometría sintética como semejanza de triángulos, medianas o el Teorema de Tales, basándose en las respuestas que obtuvieron en la pregunta a), para resolver el ejercicio. Solamente uno de los estudiantes aplicó propiedades de vectores, usando norma para aplicar el Teorema de Tales (estudiante CC, ver Anexo. 2) y otro que aplica como artefacto material el compás (estudiante EM), para probar que N es punto medio del trazo BC.

La mayoría de los estudiantes activa el plano vertical Ins – Dis, ya que tuvieron que recurrir a sus conclusiones en la parte a) para poder justificar sus resultados. De esa forma acuden al resultado obtenido anteriormente como artefacto teórico con el propósito de argumentar sus resultados tal como se había previsto en el análisis a priori. A excepción del estudiante EM que activa el plano Sem – Ins ya que interpreta los resultados figuralmente y lo realiza por medio de artefactos materiales como el compás, es decir, interpreta sus resultados en la figura y es por medio de la visualización de esta que el estudiante se apropia del compás como un instrumento, lo que permite deducir resultados. Esta forma de operar la figura es del tipo constructor.

El trabajo realizado por los estudiantes se encuentra en un paradigma geométrico GII, ya que es axiomático o emplean propiedades para resolver el ejercicio, a excepción del estudiante EM que se encuentra en un paradigma geométrico GI ya que sólo usa artefactos materiales para probar lo que se solicitaba.

A continuación, se realiza el análisis de las respuestas a la parte 3 de la actividad.

5.4 Análisis de la Relación del enfoque sintético y el enfoque vectorial en el Teorema de Tales

Se realiza un análisis de las respuestas de los estudiantes a la versión que relaciona los dos enfoques, sintético y vectorial, del Teorema de Tales, llamada parte 3.

La parte 3 tiene una batería de cinco preguntas, las cuales se analizan por separado.

El enunciado de la pregunta a) es: ¿Cuál de las versiones le resultó más adecuada de desarrollar, según sus años de enseñanza?

Las respuestas a esta pregunta se dividieron en tres grupos que son: Prefieren la parte 1, la parte 2 o no hay mayores diferencias entre ambas.

Hubo cuatro estudiantes que respondieron que les resultó más adecuada la parte 1, tal como se mencionó en el análisis a priori. El estudiante SA prefiere la parte 1 pues, le resulta más familiar, así se muestra en la figura.

Handwritten text in Spanish: "a) la primera, ya que la geometría Euclidiana es vista desde el colegio, por lo que es más familiar que la geometría vectorial."

Cuadro 18: Respuesta de SA para la pregunta a)

Una respuesta similar es la que entrega el estudiante CC.

Handwritten text in Spanish: "a) Fíjese la parte dos es lo usual en los programas, pero que se busquen una aplicación del teorema de Pitágoras que pare de la comprobación de la tesis, es mucho más adecuada la parte 1."

Cuadro 19: Respuesta de CC para la pregunta a)

Para el estudiante EM, le resulta más sencillo trabajar con la geometría euclidiana que con vectores, y así queda demostrado con su respuesta.

Handwritten text in Spanish: "a) Creo que la versión 1 es más sencilla de abordar pues solo trabaja con magnitudes de los segmentos. Sin embargo, al trabajar con vectores la proporcionalidad se debe abordar desde un punto de vista de la ponderación de vectores, pues no es posible dividir vectores."

Cuadro 20: Respuesta de EM para la pregunta a)

En cambio para el estudiante RP, resulta más sencilla la parte 1 debido a que no recordaba el uso de vectores.

Handwritten text in Spanish: "a) la primera debido a que no recordaba bien el uso de vectores."

Cuadro 21: Respuesta de RP para la pregunta a)

Por otro lado, tres estudiantes señalan que prefirieren la parte 2. Dos estudiantes plantean su elección, pero no explicitan la razón de ello, como por ejemplo en la respuesta que se ve en el cuadro.

a) ¿Cuál de las versiones le resultó más adecuada de desarrollar, según sus años de enseñanza? *la parte 2*

Cuadro 21: Respuesta de DV para la pregunta a)

Al contrario, el estudiante RM señala que en la parte 2 se utiliza un razonamiento común.

a) LA SEGUNDA, DEBIDO A QUE SE UTILIZA EL RAZONAMIENTO COMÚN, EN LA PRIMERA SE SOSTIENE SOBRE UN CONFLICTO COGNITIVO DE EXISTENCIA

Cuadro 22: Respuesta de RM para la pregunta a)

En contraste con las respuestas de los estudiantes que prefieren la parte 1 o la parte 2, el estudiante IC menciona que no hay mayores diferencias entre ambas, pero sin argumentar suficientemente.

a). No existieron mayores diferencias en el desarrollo de ambas preguntas

Cuadro 22: Respuesta de RM para la pregunta a)

A continuación se analizará la pregunta b) de la parte 3, en donde el enunciado es: ¿La versión sintética (pregunta1) le sirvió para realizar la versión vectorial (pregunta 2)?

Las respuestas de los estudiantes se dividieron en forma igual entre los que respondieron que sí y los que no.

Dos estudiantes que respondieron afirmativamente, pero sin dar argumentación, como queda de manifiesto en el cuadro 23.

b) ¿La versión sintética (pregunta1) le sirvió para realizar la versión vectorial (pregunta 2)? *si*

Cuadro 23: Respuesta de DV para la pregunta b)

El estudiante SA, en cambio, argumenta que usó las mismas propiedades, pero sin entrar en mayores detalles.

Handwritten text in a box: "b) Si, ya que ocupé las mismas propiedades."

Cuadro 24: Respuesta de SA para la pregunta b)

El estudiante RP entrega otra argumentación de la forma en que utilizó la parte 1 en la parte 2.

Handwritten text in a box: "b) Si, ya que ocupé lo que se me dijo de los vectores y lo traspasé a medidas."

Cuadro 25: Respuesta de RP para la pregunta b)

Dos estudiantes que respondieron negativamente, pero sin dar argumentación, como queda de manifiesto en el cuadro 26.

Handwritten text in a box: "b) ¿La versión sintética (pregunta1) le sirvió para realizar la versión vectorial (pregunta 2)? No"

Cuadro 26: Respuesta de IC para la pregunta b)

Por otro lado el estudiante RM responde negativamente, aunque no indica mayores detalles de sus razones.

Handwritten text in a box: "b) NO UTILICÉ LA PREGUNTA 1 EN 2."

Cuadro 27: Respuesta de IC para la pregunta b)

En cambio el estudiante CC, entrega mayores argumentos a su respuesta negativa pues, señala que son aparentemente independientes.

Handwritten text in a box: "b) no necesariamente, la parte 1 cumple un papel de recordatorio de hipotesis y teoremas, pero se piensa en la parte 2, pero son aparentemente problemas independientes."

Cuadro 28: Respuesta de CC para la pregunta b)

A continuación se analizará la pregunta c) de la parte 3 en donde el enunciado es: ¿Utilizó las mismas propiedades en las dos versiones? Justifique.

Las respuestas de los estudiantes se dividieron en 5 que contestaron afirmativamente y en 3 que opinaron lo contrario.

Dos estudiantes afirman que usaron las mismas propiedades, tal como lo muestra el cuadro.

Handwritten text in Spanish: "c) Si, utilicé las mismas propiedades, en parte porque no recuerdo cómo trabajar bien con vectores, así que asumí que lo de la primera parte podía ser utilizado en la segunda."

Cuadro 29: Respuesta de SA para la pregunta c)

Se identifican dos estudiantes que afirman que usaron el Teorema de Tales en ambas versiones, respuestas que se esperaba según el análisis a priori, como por ejemplo la respuesta que muestra el cuadro.

Handwritten text in Spanish: "c) Si, lo da a aplicar el caso particular del Teorema de Tales, ya que en ambos se cumplen las hipótesis."

Cuadro 30: Respuesta de CC para la pregunta c)

En cambio el estudiante RM señala que utilizó el concepto de proporciones en ambas versiones, el cual tiene relación con el Teorema de Tales.

Handwritten text in Spanish: "c) Si, Proporciones"

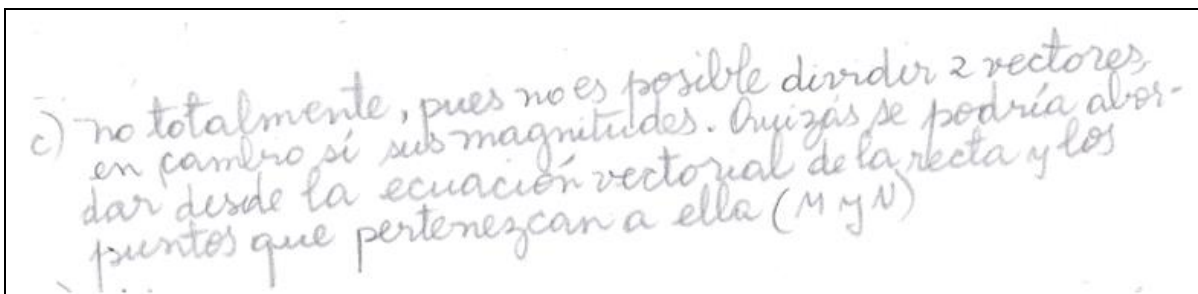
Cuadro 31: Respuesta de RM para la pregunta c)

Por otro lado, para el estudiante IC no se utilizan las mismas propiedades y su argumentación se muestra en el cuadro.

Handwritten text in Spanish: "c) No utilicé lo mismo, en el primer caso me guié más por la parte geométrica y en el segundo caso utilicé Tales."

Cuadro 32: Respuesta de IC para la pregunta c)

Para el estudiante EM la parte vectorial se debe relacionar desde otro punto de vista a la parte sintética.

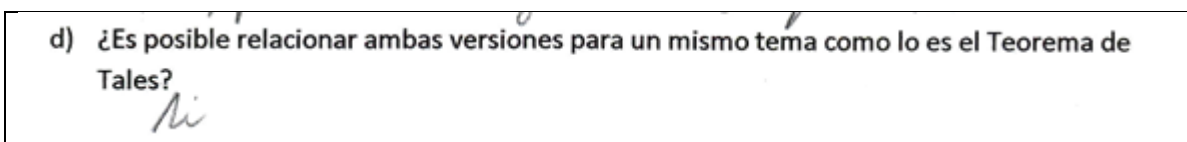


Cuadro 33: Respuesta de EM para la pregunta c)

A continuación se analizará la pregunta d) de la parte 3 en donde el enunciado es: ¿Es posible relacionar ambas versiones para un mismo tema como lo es el Teorema de Tales?

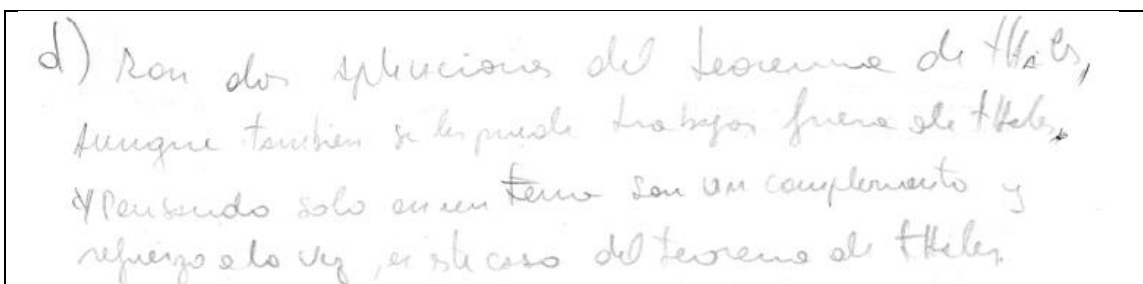
Las respuestas en su mayoría fueron afirmativas a la posibilidad de relacionar ambas versiones.

Todos tuvieron respuestas similares, salvo que hubo dos estudiantes que no justificaron su respuesta, tal como lo muestra el cuadro.



Cuadro 34: Respuesta de EM para la pregunta d)

Otros respondieron que el Teorema de Tales es la forma en que se relacionan ambas versiones, que es el modo en que se esperaba que respondieran los estudiantes según el análisis a priori presentado anteriormente, tal como lo señala la respuesta del estudiante CC.



Cuadro 35: Respuesta de EM para la pregunta d)

A continuación se analizará la pregunta e) de la parte 3 en donde el enunciado es: ¿Cree posible utilizar estas versiones en la educación media? ¿Por qué? ¿En qué nivel las utilizaría?

Todos coinciden en la respuesta, ya que sí se puede utilizar en educación media, tal como se esperaba dado el análisis a priori pero, varían sus respuestas en el nivel en que lo aplicarían.

Una de las tres respuestas similares fue la del estudiante CC que se señala que se puede aplicar la actividad en segundo medio.

E) Desde la perspectiva del contenido no hay impedimento para trabajar en educación media, ya que son la parte del programa, de la unidad de geometría de 2º medio. Desde allí es perfectamente posible y adecuado este tipo de problemas, en especial la parte 1, donde deben ocupar otros conceptos como de clasificación de triángulos. Pero más que el nivel, es el manejo de los conceptos previos el que nos da la luz verde para trabajar estos contenidos. Siempre pensando desde el contenido.

Cuadro 36: Respuesta de CC para la pregunta e)

Otra de las respuestas fue la del estudiante EM que señala que las versiones se pueden aplicar en distintos niveles,

e) Sí, creo que se puede aplicar la primera versión en 2º medio. La versión vectorial en 4º y además simultáneamente la 1 y 2 en 4º medio. La trabajaría considerando el desarrollo de los contenidos que propone el

Cuadro 37: Respuesta de EM para la pregunta e)

El estudiante señala que sí se puede utilizar, pero no dicen en que nivel utilizarla, al menos la versión vectorial, por ejemplo la respuesta del estudiante IC.

e) La primera parte la aplicaría en 2do medio para profundizar el Teorema de Thales y el segundo no sé si donde utilizarlo

Cuadro 38: Respuesta de IC para la pregunta e)

Si se comparan los resultados obtenidos por los estudiantes con el análisis a priori que se realizó en el capítulo anterior, se recogen los siguientes resultados:

Comparación entre análisis a priori y resultados de los estudiantes en la versión que relaciona el enfoque sintético y el enfoque vectorial en el Teorema de Tales

En la pregunta a) la mayoría de los estudiantes están de acuerdo en que la versión sintética del Teorema de Tales le resultó más adecuada de desarrollar, dado que les resulta más familiar y sus propiedades las manejan de mejor manera que la de los vectores y esta, además, coincide con la respuesta del análisis a priori presentado anteriormente. Tres personas prefirieron la parte 2, pero no explicaron mayores motivos del por que les resultaba más adecuada.

En la pregunta b) la mitad de los estudiantes respondieron de forma afirmativa, pero de ellos solamente dos argumentaron que les sirvió porque utilizaron las mismas propiedades sintéticas, el resto no argumentó el por que de su elección afirmativa. La otra mitad respondió negativamente, pero de ellos sólo uno argumento y su respuesta fue que eran problemas independientes. Estas respuestas difieren del análisis a priori realizado anteriormente ya que ninguno de los estudiantes hace referencia a la figura ni al Teorema de Tales. Lo que puede deberse a que los estudiantes al estar más familiarizados con la parte sintética, no puedan utilizar directamente propiedades del enfoque sintético en el enfoque vectorial.

En la pregunta c) La mayoría de los estudiantes respondió afirmativamente y de ellos la mayoría coincide con la respuesta del análisis a priori, realizado anteriormente, la cual es el Teorema de Tales. Uno de los estudiantes responde negativamente, pero señala que si se transforma la parte vectorial del ejercicio a su versión analítica es posible relacionarlos, lo que puede deberse a la distancia que tiene el estudiante con el enfoque vectorial, por lo que no le es posible relacionar las versiones sintética y vectorial utilizando las mismas propiedades. Por último, un estudiante responde negativamente ya que menciona que en la primera versión se guió por la parte geométrica y en la segunda utilizó el Teorema de Tales, lo que se debe a que en la primera versión utilizó propiedades de semejanzas de triángulos y proporciones por lo que no se alejaría en demasía del análisis a priori pues, las propiedades que utilizó en la parte 1 son parte del Teorema de Tales, ya que dicho teorema forma dos triángulos semejantes cuando se traza una recta paralela a un triángulo y las proporciones que se utilizan como introducción para desarrollar el Teorema de Tales.

En la pregunta d) La mayoría de los estudiantes responde que sí es posible relacionar ambas versiones del Teorema de Tales, lo que va de acorde al análisis a priori, presentado en el capítulo anterior. Uno de los estudiantes señala que se debe dejar en claro que el Teorema de Tales pertenece a la geometría euclidiana, esto se debe a que el estudiante no integra al Teorema como una aplicación en el

enfoque vectorial, entonces a pesar de que responde afirmativamente sigue encontrando que los enfoques son entes separados. Por otra parte, un estudiante menciona que se debe considerar la situación en que se debe aplicar las versiones, en la que vayan relacionándose propiedades de triángulos y de puntos medios, por lo que esta respuesta no se alejaría del todo del análisis a priori ya que claramente esta actividad fue realizada para que pudieran relacionar los distintos elementos que tienen en común ambas versiones.

En la pregunta e) la totalidad de los estudiantes están de acuerdo en que sí es posible utilizar estas versiones en la educación media, tal como se respondió en el análisis a priori, realizado anteriormente. En lo que no se manifiesta un acuerdo es en el nivel en que se utilizarían estas versiones. Solamente dos estudiantes responden que el nivel a utilizar debiera ser tercero medio para ambos enfoques lo que va en relación con el análisis a priori. En cambio, el resto propone realizarlas en niveles distintos, la primera versión varía entre primero y segundo medio en su aplicación y la segunda versión va entre tercero y cuarto medio. Estas disimilitudes en los niveles en los cuales deben aplicarse estos enfoques puede deberse al posible desconocimiento del currículum escolar, el cual tiene el concepto de vectores como contenidos de Tercero Medio, por lo que sería enriquecedor presentarlo en ese nivel de estudios.

De acuerdo a los análisis presentados en este capítulo, ya es posible realizar las conclusiones pertinentes referidas a la Actividad que tenía como objetivo relacionar los enfoques sintético y vectorial en el Teorema de Tales, las cuales se presentan a continuación.

5.5 Síntesis de Resultados obtenidos

Remitiéndose a los resultados obtenidos en la versión sintética del Teorema de Tales es posible concluir que el trabajo matemático, los planos verticales del ETM activados por el problema, la manera en que las génesis se relacionan por medio de estos planos verticales del ETM activados y el paradigma geométrico en que trabajaron los estudiantes coincide plenamente con el análisis a priori, realizado anteriormente, por lo que el objetivo, con respecto al problema fue cumplido ya que quedo en evidencia que el trabajo esperado que realizaran los estudiantes, con la información obtenida de los Estándares Orientadores para las carreras de Pedagogía y los Programas de la asignatura Geometría, fue concordante por la actividad realizada por ellos.

Refiriéndose a los resultados obtenidos en la versión vectorial del Teorema de Tales es posible concluir que el trabajo matemático en cuanto a resultados es positivo ya que concluyen lo que se esperaba según el análisis a priori realizado anteriormente, pero en su desarrollo cambia, ya que lo esperado era que trabajaran con propiedades vectoriales, aplicaran el teorema de Tales para la

pregunta a) y luego por el resultado anterior y usando Teorema de vectores pudiesen responder a la pregunta b). Pero, la forma de trabajar de los estudiantes, en su gran mayoría, fue realizar un cambio de registro desde el trabajo vectorial a un trabajo de geometría sintética en donde aplicaron teorema de Tales o criterios de semejanza de triángulos. De lo anterior se deduce que los estudiantes presentan nociones de que las versiones sintética y vectorial se pueden relacionar, pero no logran llevarlo a buen término debido a que, tal como lo evidenciaron los análisis desde los programas de la asignatura Geometría, no se aprecia una relación entre ambos enfoques para el teorema de Tales en su enseñanza.

Por último, si se alude a los resultados obtenidos en la versión que relaciona los enfoques sintético y vectorial en el Teorema de Tales es posible concluir que, respecto a la pregunta a) hay total coincidencia con el análisis a priori ya que claramente, para los estudiantes resulta más cómodo trabajar con la versión sintética, ya que con ella se sienten más familiarizados debido a que se les enseñó desde su educación escolar. En la pregunta b) existe una opinión dividida respecto a que si la versión sintética le sirve para realizar la versión vectorial esto se puede deber a lo expresado anteriormente. Para los estudiantes no es claro relacionar ambos enfoques respecto al teorema de Tales. Siguiendo con la pregunta c), las respuestas obtenidas coinciden con el análisis a priori, pues dejan claro que una de las propiedades que se utilizan en ambas versiones es el Teorema de Tales, de las respuestas de los estudiantes, una señala que se podrían utilizar las mismas propiedades si se convierte el registro de vectorial a analítico, lo que puede deberse a que para ese estudiante no es clara la relación entre el enfoque sintético y vectorial. Continuando con la pregunta d), todos los estudiantes concuerdan que sí es posible relacionar ambos enfoques respecto al Teorema de Tales tal como se había mencionado en el análisis a priori. Pero de los estudiantes, uno responde que hay que dejar en claro que el Teorema de Tales pertenece a la geometría euclidiana, lo que deja en evidencia que el estudiante entiende a los enfoques como entes separados, a pesar de que siente que sí cree que puedan relacionarse.

Finalmente, si se analizan las respuestas de los estudiantes en la pregunta e) coinciden con el análisis a priori en que estas versiones se pueden utilizar en educación media, en lo que se difiere es en el nivel en que se debería utilizar, ya que las respuestas varían entre primero a cuarto medio, lo que puede deberse a la propia experiencia de los estudiantes, pues en el nivel en que a ellos les enseñaron el Teorema de Tales, es el nivel en que ellos aplicarían las versiones.

Como conclusión de los resultados se puede decir que van en total concordancia con los análisis y objetivos expuestos anteriormente, pues deja de manifiesto que los estudiantes se sienten más cómodos y familiarizados al trabajar con la versión sintética del Teorema de Tales que con la versión vectorial. Por otro lado, para los estudiantes, no es clara la forma en que se relacionan ambos enfoques a pesar de que por sus respuestas aplican las mismas propiedades o muy similares, análisis que se había realizado previamente. Finalmente queda

claro que si es posible relacionar ambos enfoques y que, incluso, se pueden aplicar las versiones en educación media.

5.6 Síntesis del Capítulo

En este capítulo se presentan los análisis de las tres partes de la actividad realizada por los estudiantes, la que tiene como objetivo relacionar los enfoques sintético y vectorial en el teorema de Tales.

Cada pregunta y su respectiva respuesta fue analizada por separado, contrastándola con el análisis a priori, realizado anteriormente, y luego con esa información se realizaron conclusiones generales de los resultados obtenidos, los cuales tienen en total concordancia con lo que se esperaba de la actividad.

Capítulo VI: Conclusiones de la Investigación.

En el presente capítulo se señalan las conclusiones de la investigación, respecto a los resultados de la actividad y de como esta pasa a ser una propuesta de situaciones en ETM respecto al Teorema de Tales cuando se quieren relacionar los enfoques sintético y vectorial.

6.1 Conclusiones de la Investigación

A lo largo de esta Investigación se evidencian distintas características que son relevantes de mencionar, comenzando por la información recopilada por los análisis de los Estándares Orientadores para las carreras de Pedagogía y por los programas de la asignatura Geometría de la UCh y la UAH la que fue de utilidad para el diseño de la actividad en que se relaciona el enfoque sintético y vectorial en el Teorema de Tales debido a que apporto información respecto a los conocimientos mínimos esperados de los estudiantes debiesen manejar respecto al Teorema de Tales y al concepto de vectores. Esta actividad se aplicó en 8 estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemática, la que luego de ser aplicada, permite inferir diversos aspectos.

Desde el aspecto matemático, en el trabajo de los estudiantes al realizar la actividad que relaciona los enfoques sintético y vectorial en el Teorema de Tales se puede señalar lo siguiente:

El trabajo matemático que realizaron los estudiantes deja de manifiesto que el referencial teórico que poseen es el adecuado para resolver el tipo de preguntas que se les presentó, ya que todos obtuvieron resultados positivos en las dos versiones del teorema de Tales, estando de acuerdo en la mayoría de los resultados del análisis a priori realizado en el capítulo anterior, siendo la versión sintética la más comprensible de desarrollar para los estudiante, según sus propias palabras (Ver anexo 2).

En el aspecto de los Planos Verticales activados en los estudiantes por la actividad, se puede mencionar que:

Los Planos Verticales que se activaron en los estudiantes coinciden plenamente con lo planteado en el análisis a priori de la situación, excepto en un estudiante, que en la pregunta b) de la versión vectorial activó un plano distinto ya

que no se presumió que realizaría un desarrollo en el cual se trabajara la figura, usando artefactos materiales.

El tercer aspecto que es de importancia mencionar, es la parte que relaciona los enfoques sintético y vectorial en el Teorema de Tales.

En esta parte es posible señalar que dado el análisis de la preguntas y en especial de la pregunta b) en donde los estudiantes entienden la parte sintética y vectorial del teorema de Tales como entes separados, ya que ninguno de los estudiantes pudo notar que se podía utilizar la versión sintética en la versión vectorial, a pesar de que en la pregunta c) respondieron que utilizaron el Teorema de Tales en ambas versiones. Esto, se menciona en los análisis anteriores, cuando se analizaron los programas de la asignatura Geometría y en los análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes.

En cambio, esta dicotomía en ambas versiones, para los estudiantes, cambia cuando se le pregunta si es posible relacionar ambas versiones para un tema como lo es el Teorema de Tales (pregunta d) ya que todos afirman que si es posible relacionarlas, e incluso algunos proponen la forma de realizarlo. Además, todos responden afirmativamente que estas versiones se pueden aplicar en un nivel de educación media por lo que queda en evidencia que para ellos las versiones son útiles para tratar el Teorema de Tales y que incluso se complementan al momento de estudiarlo y aplicarlo. Sólo discrepan en el posible nivel que debiesen utilizarse las versiones pues, las respuestas varían entre primero a cuarto medio, lo que puede deberse a su propia experiencia, ya que es posible que les hayan enseñado el Teorema de Tales en el nivel que ellos indican que aplicarían la actividad.

Por lo tanto, y por lo descrito anteriormente, la actividad cumple con los objetivos ya señalados pues, los estudiantes saben utilizar contenidos de geometría sintética y vectorial pero, que se sienten más familiarizados con la versión sintética del Teorema de Tales y que no les es posible relacionar ambos enfoques ya que los estudiantes los identifican como temas distintos, sin relación. Para que eso cambie, en la parte 3 de la actividad, se relacionan el enfoque sintético y vectorial en el Teorema de Tales con el fin de que los estudiantes logren articular dichos enfoques y así alcancen una comprensión más amplia del Teorema de Tales.

En definitiva, la actividad se convierte en una propuesta de situaciones de referencia en el ETM relativo al Teorema de Tales para la formación de inicial de profesores. Queda en evidencia que mediante la actividad los estudiantes logran comprender más sobre el Teorema de Tales lo que se traduce en un beneficio directo para toda la comunidad educativa desde el ejercicio profesional.

Bibliografía.

- Alsina C. (2007). Geometría y Realidad. Universidad Politécnica de Cataluña.
- Aravena, M.; Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule. Talca, Chile. *Relime* V. 16.
- Arnould, A. (1667). *Nouveaux éléments de géométrie*, del sitio web: <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6565463h/f16.image>
- Babcock, J.; Babcock, P.; Buhler, J.; Cady, J.; Cogan, L.; Houang, R.; et al. (2010). *Breaking the cycle: an international comparison of U.S. mathematics teacher preparation. Initial findings from the teacher education and development study in mathematics (Teds-M)*. Center for Research in Math and Science Education, Michigan State University.
- Balacheff, N. (2000). Procesos de Prueba en los alumnos de Matemáticas. Universidad de los Andes. Bogotá.
- Blanco, L; Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza – aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6(2), 107-132.
- Boyer, C. (2010). *Historia de la Matemática*. Tercera Edición. Editorial Alianza.
- Cheuquepán, D.; Barbé, J. (2012). Propuesta Didáctica para las traslaciones en el plano Cartesiano con el uso de planilla de cálculo. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 29, 131 – 154.
- Choquet, G. (1964). L'enseignement de la géométrie.
- CIDE (2009). Programa Mentes Activas. Universidad Alberto Hurtado.
- Clairaut, A. C. (1741). Elementos de Geometria. Adaptación al castellano por Vicente Meavilla y Carlos Vicén.
- Crespo, C.; Farfán, R.; Lezama, J. (2010). Argumentaciones y Demostraciones: Una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. *Relime*, 13 (3), 283 – 306.
- De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemática. *Research Unit on mathematics Education*. Universidad de Stellenbosch, del sitio web: <http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proofb.pdf>.

- Descartes, R. (1637). La géométrie, del sitio web: http://www.gutenberg.org/files/26400/26400-pdf.pdf?session_id=084aefddb22f0d561ca76d019ab0d260e2d63e45.
- Duval, R. (1993). Registres de representations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 34 – 65.
- Duval, R. (1999). Semiosis y Pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5 – 53.
- Espinoza, L.; Barbé, J.; Mitrovich, D.; Rojas, D. (2007). El problema de la enseñanza de la geometría en educación general básica chilena y una propuesta de enseñanza en el aula. *Grupo Félix Klein*. Universidad de Santiago de Chile.
- Faifofer, A. (1890). Elementi di geometria ad uso degl' istituti tecnici (1^o biennio) e dei licei, del sitio web: <http://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/ACV0547.0001.001/6?rgn=full+text;view=pdf>.
- Fernández, D.; Montoya E. (2013). Geometría Dinámica: De la visualización a la prueba. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa RELME, Brasil.
- Francoeur, L. B. (1819). Cours complet de mathématiques pures, del sitio web: <https://eudml.org/doc/203045>.
- Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados?. *Revista Suma*, 39, pp. 13 – 25.
- Guilmin, A. (1859). Cours de géométrie élémentaire à l'usage des lycées des collèges, del sitio web: <http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=ucm.5305747998;view=1up;seq=5>.
- Gutiérrez, A. (2005). Aspectos Metodológicos de la Investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica, del sitio web: <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/marcotex.html>.
- Hadamard, J. (1898). Lecons de géométrie élémentaire, del sitio web: <https://archive.org/details/leonsdegomtriel02hadagoog>.
- Haruna, N. (2000). Teorema de Thales: Uma abordagem do processo ensino – aprendizagem. (Tesis Magíster). Universidad Católica de Sao Paulo. Brasil.

- Henríquez, C. (2013). *Presentación Didáctica de la Geometría*. Magíster en Didáctica de la Matemática. Universidad Alberto Hurtado.
- Hernández, R.; Fernández, C.; Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México. Mc Graw – Hill.
- Houdement, C.; Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. V. 11. pp. 175-193. IREM de Strasbourg.
- Joyce, D. (1996). Elementos de Euclides, del sitio web: http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm.
- Khun, T. (1962). *The structure of scientific revolutions*. Traducción de Carlos Solís Santos. México: Fondo de Cultura Económica (Brevarios; 213).
- Kuzniak, A. (2011) El Espacio de Trabajo Matemático y su génesis. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9–24.
- Kuzniak, A.; Richard P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de Vista y Perspectivas, del sitio web: http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM_ES/Relime_Intro_es.pdf.
- Lacroix, S. F. (1798). *Eléments de géométrie à l'usage de l'école des quatre nations*, del sitio web: babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=nyp.33433069096661;view=1up;seq=7.
- Latorre, M. (2004). Aportes para el análisis de las racionalidades presentes en las prácticas pedagógicas. *Estudios pedagógicos* (Valdivia), 30, 75-91.
- Laguerre, E. (2005). *Une ingenierie didactique pour l'apprentissage du Theoreme de Thales au college*. (Tesis Doctoral). University Denis Diderot. Francia.
- Legendre, A. D. (1794). *Eléments de géométrie*, del sitio web : <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k202689z.r=Legendre%2C+Adrien-Marie.langFR>.
- McKinsey & Company (2007). *How the World's Best Performing School Systems Have Come Out on Top*.
- Mercier, D-J. (2003). *Théorème de Thalés. Projection dans le plan et dans l'espace, caractère affine des projections*. IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret. Paris.
- Ministerio de Desarrollo Social (2013). Orientaciones Sectoriales Educación, del sitio web: <http://sni.ministeriodesarrollosocial.gob.cl/PDF/orien%20educacion.pdf>

- Mineduc (2011). Currículum escolar Segundo Año medio, del sitio web del Mineduc: <http://www.curriculumnacional.cl>
- Mineduc (2012). Estándares Orientadores para Carreras de Pedagogía en Educación Media para Matemática, del sitio web: <http://www.mineduc.cl/usuarios/cpeip/doc/201206011651510.LibroEstAndaresEducaciOnMedia.pdf>.
- Mrabet, S. (2013). *Difficultés des élèves autour du théorème de Thalès*. 17^{ème} école d'été de Didactique des Mathématiques. Nantes.
- Pérez, S.; Guillén G. (2009). *Planteamiento de un proyecto de investigación sobre la enseñanza de la Geometría en Secundaria a través de diferentes enfoques. Utilización de un curso – taller como técnica para la utilización de datos*. Universidad de Valencia. España.
- PISA (2009). Resumen de Resultados. Unidad de Currículum y Evaluación. Ministerio de Educación de Chile.
- PSU (2013). Resolución Prueba de Matemática. DEMRE. Universidad de Chile, del sitio web del DEMRE: <http://www.demre.cl/publicaciones.htm>
- Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies: Une approche cognitive des nstruments contemporains*. Francia, Armand Colin.
- Rouché, E.; Comberousse, Ch. (1891). *Traité de Géométrie Élémentaire*, del sitio web: <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k996417.r=Rouch%C3%A9%2C+Eug%C3%A8ne.langES>
- Santaló, L. A. (1980): «Situación de la enseñanza de la Geometría frente a las nuevas tendencias de la educación matemática», *Revista de Bachillerato*, suplemento del n.º 13, 23-28.
- SIMCE (2013). Resultados Nacionales SIMCE. Ministerio de Educación de Chile.
- Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de Casos*. 2 da. Ed., Madrid, Ediciones Morata.
- TIMSS (2011). Highlights from the Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS).
- Torregosa, G.; Quezada H. (2007). Coordinación de Procesos Cognitivos en Geometría. *Relime*, 10(2), 275 – 300.
- Trouche, L. (2004): Managing the Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environments: Guiding Student's Command Process

Through Instrumental Orchestrations, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281 - 307.

- Vérillon, P.; Rabardel, P. (1995). Cognitions and Artifacts: A contribution to the Story of Thought in Relation to instrumented Activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), 77 – 101.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 133 – 169.

Anexos.

En esta sección, se muestran los anexos de la Investigación:

Anexo 1: Actividad

Actividad

Nombre: _____

Fecha: _____

*La siguiente Actividad corresponde a un Trabajo de Tesis de Magíster en Didáctica de la Matemática. La Actividad cuenta con tres preguntas de desarrollo sobre el Teorema de Tales. **Responde en forma clara cada pregunta del cuestionario y te pedimos no borrar tu trabajo.** Además, puedes usar el instrumento que estimes necesario para trabajar como regla, o compás. Esta información es confidencial y es para fines de investigación.*

Parte 1

- 1) Consideremos un ΔABC tal que $AB = 4\text{cm}$, $AC = 7\text{cm}$ y $BC = 6\text{cm}$. Los puntos M y N pertenecen a los segmentos AB y AC respectivamente, de tal modo que se forma un segmento MN que es paralelo al segmento BC.
- c) Supongamos que $BM = x\text{cm}$. ¿En qué lugar se debe colocar M para que el triángulo BMN sea un triángulo isósceles de base $\overline{BN}$?
- d) ¿Cómo justificas el resultado anterior?

Parte 2

- 2) Sea un triángulo ΔABC cualquiera. Sea M un punto del segmento CA y N un punto del segmento BC de tal manera que se forma el segmento MN.
- c) Si los vectores $\overrightarrow{CM}$ y $\overrightarrow{MA}$ son equipolentes¹ y los vectores $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$. ¿Qué relación existe en las longitudes de los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{AB}$?
- d) Probar que los puntos M y N son puntos medios de los segmentos CA y BC respectivamente

¹**Vectores equipolentes:** Dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ se llaman EQUIPOLENTES si tienen el **mismo módulo**, la **misma dirección** y el **mismo sentido**

Parte 3

- 3) Responda a las siguientes preguntas:
- e) ¿Cuál de las versiones le resultó más adecuada de desarrollar, según sus años de enseñanza?
 - f) ¿La versión sintética (pregunta 1) le sirvió para realizar la versión vectorial (pregunta 2)?
 - g) ¿Utilizó las mismas propiedades en las dos versiones? Justifique.
 - h) ¿Es posible relacionar ambas versiones para un mismo tema como lo es el Teorema de Tales?
 - i) ¿Cree posible utilizar estas versiones en la educación media? ¿Por qué? ¿En qué nivel las utilizaría?

Anexo 2: Actividad resuelta por estudiantes

Facultad de Educación
Magíster en Didáctica de la Matemática
Estudiante: Daniel Fariás Rojas

UNIVERSIDAD
ALBERTO HURTAD
LA UNIVERSIDAD SUMMA DA CHILE

Actividad

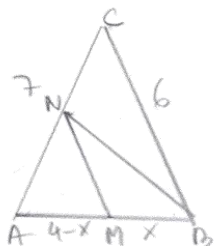
Nombre: R. M.

Fecha: _____

La siguiente Actividad corresponde a un Trabajo de Tesis de Magíster en Didáctica de la Matemática. La Actividad cuenta con tres preguntas de desarrollo sobre el Teorema de Tales. Responde en forma clara cada pregunta del cuestionario y te pedimos no borrar tu trabajo. Además, puedes usar el instrumento que estimes necesario para trabajar como regla, o compás. Esta información es confidencial y es para fines de investigación.

Parte 1

- 1) Consideremos un ΔABC tal que $AB = 4\text{cm}$, $AC = 7\text{cm}$ y $BC = 6\text{cm}$. Los puntos M y N pertenecen a los segmentos AB y AC respectivamente, de tal modo que se forma un segmento MN que es paralelo al segmento BC .
 - a) Supongamos que $BM = x\text{cm}$. ¿En qué lugar se debe colocar M para que el triángulo BMN sea un triángulo isósceles de base $\overline{BN}$?
 - b) ¿Cómo justificas el resultado anterior?



$$\begin{aligned} a) \quad \frac{4-x}{x} &= \frac{4}{6} \\ 24 - 6x &= 4x \\ 24 &= 10x \\ 2,4 &= x \end{aligned}$$

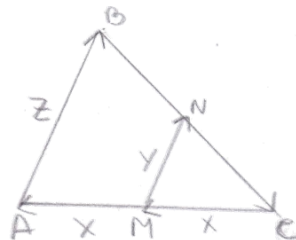
M SE DEBE COLOCAR A 1,6 cm DE A

b) SE JUSTIFICA POR EL TEOREMA DE TALES

Parte 2

2) Sea un triángulo ΔABC cualquiera. Sea M un punto del segmento CA y N un punto del segmento BC de tal manera que se forma el segmento MN.

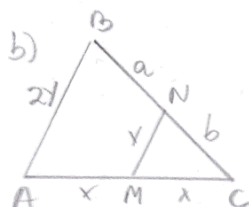
- a) Si los vectores $\overrightarrow{CM}$ y $\overrightarrow{MA}$ son equipolentes¹ y los vectores $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$. ¿Qué relación existe en las longitudes de los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{AB}$?
- b) Probar que los puntos M y N son puntos medios de los segmentos CA y BC respectivamente



$$a) \frac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{AB}} \rightarrow \frac{y}{Z} = \frac{x}{2x}$$

$$y = \frac{Z}{2}$$

Z ES EL DOBLE DE Y
AB ES EL DOBLE DE MN



$$\frac{x}{b} = \frac{2x}{a+b}$$

$$\frac{a+b}{b} = 2$$

$a+b=2b \rightarrow a=b$ * N ES PUNTO MEDIO DE BC

¹Vectores equipolentes: Dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ se llaman EQUIPOLENTES si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido

Parte 3

3) Responda a las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuál de las versiones le resultó más adecuada de desarrollar, según sus años de enseñanza?
- b) ¿La versión sintética (pregunta 1) le sirvió para realizar la versión vectorial (pregunta 2)?
- c) ¿Utilizó las mismas propiedades en las dos versiones? Justifique.
- d) ¿Es posible relacionar ambas versiones para un mismo tema como lo es el Teorema de Tales?
- e) ¿Cree posible utilizar estas versiones en la educación media? ¿Por qué? ¿En qué nivel las utilizaría?

a) LA SEGUNDA, DEBIDO A QUE SE UTILIZA EL RAZONAMIENTO COMÚN, EN LA PRIMERA SE SOSTIENE SOBRE UN CONFLICTO COGNITIVO DE EXISTENCIA

b) NO UTILICÉ LA PREGUNTA 1 EN 2

c) SÍ, PROPORCIONES

d) SÍ, HABRÍA QUE DETERMINAR LAS CARACTERÍSTICAS Y QUE PROPIEDADES SE CUMPLEN CONSIDERANDO EL Δ Y LOS PUNTOS MEDIOS.

e) SÍ, POR QUE SE RAZONA Y COMENTA EL CONFLICTO COGNITIVO

Actividad

Nombre: IC

Fecha: 23-Nov-15

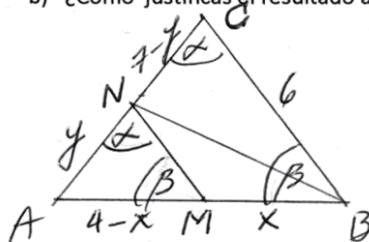
La siguiente Actividad corresponde a un Trabajo de Tesis de Magíster en Didáctica de la Matemática. La Actividad cuenta con tres preguntas de desarrollo sobre el Teorema de Tales. Responde en forma clara cada pregunta del cuestionario y te pedimos no borrar tu trabajo. Además, puedes usar el instrumento que estimes necesario para trabajar como regla, o compás. Esta información es confidencial y es para fines de investigación.

Parte 1

- 1) Consideremos un ΔABC tal que $AB = 4\text{cm}$, $AC = 7\text{cm}$ y $BC = 6\text{cm}$. Los puntos M y N pertenecen a los segmentos AB y AC respectivamente, de tal modo que se forma un segmento MN que es paralelo al segmento BC .

- a) Supongamos que $BM = x\text{cm}$. ¿En qué lugar se debe colocar M para que el triángulo BMN sea un triángulo isósceles de base $\overline{BN}$?

- b) ¿Cómo justificas el resultado anterior?



a) $\Delta AMN \cong \Delta ABC$, por proporciones

$$\frac{4-x}{4} = \frac{x}{6}$$

$$6(4-x) = 4x$$

$$24 - 6x = 4x$$

$$24 = 10x \Rightarrow x = 2,4$$

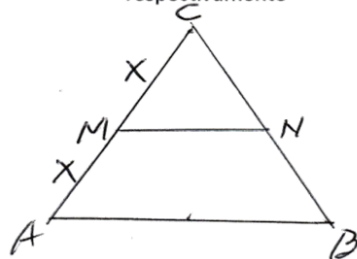
Por lo tanto $4 - x = 4 - 2,4 = 1,6$
Entonces M se debe colocar a $1,6\text{cm}$ de A .

Parte 2

2) Sea un triángulo ΔABC cualquiera. Sea M un punto del segmento CA y N un punto del segmento BC de tal manera que se forma el segmento MN.

a) Si los vectores $\overrightarrow{CM}$ y $\overrightarrow{MA}$ son equipolentes¹ y los vectores $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$. ¿Qué relación existe en las longitudes de los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{AB}$?

b) Probar que los puntos M y N son puntos medios de los segmentos CA y BC respectivamente



$$a) \frac{CM}{MA} = \frac{2x}{2x} \Rightarrow \frac{x}{2x} = \frac{MN}{AB} \Rightarrow AB = 2MN$$

5). Como $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$ y M pto medio del lado AC
tenemos que MN es mediana y por lo tanto
N es pto medio del lado CB

¹Vectores equipolentes: Dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ se llaman EQUIPOLENTES si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido

Parte 3

3) Responda a las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuál de las versiones le resultó más adecuada de desarrollar, según sus años de enseñanza?
- b) ¿La versión sintética (pregunta 1) le sirvió para realizar la versión vectorial (pregunta 2)? *No*
- c) ¿Utilizó las mismas propiedades en las dos versiones? Justifique.
- d) ¿Es posible relacionar ambas versiones para un mismo tema como lo es el Teorema de Tales?
- e) ¿Cree posible utilizar estas versiones en la educación media? ¿Por qué? ¿En qué nivel las utilizaría?

- a). *No existieron mayores diferencias en el desarrollo de ambas preguntas*
- c). *No utilicé lo mismo, en el primer paso me guíé más por la parte geométrica y en el segundo caso utilicé Tales.*
- d). *No solo proporciones*
- e). *La primera parte la aplicaría en 2do medio para profundizar el Teorema de Tales y el segundo no sé bien donde utilizarlo*

Actividad

Nombre: E. M.

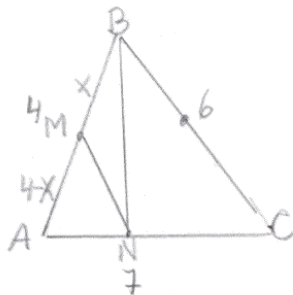
Fecha: 23-noviembre

La siguiente Actividad corresponde a un Trabajo de Tesis de Magíster en Didáctica de la Matemática. La Actividad cuenta con tres preguntas de desarrollo sobre el Teorema de Tales. Responde en forma clara cada pregunta del cuestionario y te pedimos no borrar tu trabajo. Además, puedes usar el instrumento que estimes necesario para trabajar como regla, o compás. Esta información es confidencial y es para fines de investigación.

Parte 1

- 1) Consideremos un $\triangle ABC$ tal que $AB = 4\text{cm}$, $AC = 7\text{cm}$ y $BC = 6\text{cm}$. Los puntos M y N pertenecen a los segmentos AB y AC respectivamente, de tal modo que se forma un segmento MN que es paralelo al segmento BC.

- a) Supongamos que $BM = x\text{cm}$. ¿En qué lugar se debe colocar M para que el triángulo BMN sea un triángulo isósceles de base $\overline{BN}$?
- b) ¿Cómo justificas el resultado anterior?



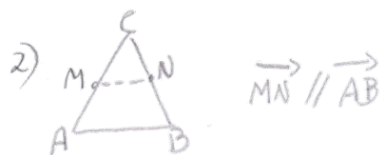
$$\begin{aligned}\frac{4-x}{x} &= \frac{4}{6} \\ 6(4-x) &= 4x \\ 24-6x &= 4x \\ 24 &= 4x+6x \\ 24 &= 10x \\ 2,4 &= x\end{aligned}$$

Entonces M se debe
poner a 2,4 cm de B

Se justifica ya que $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{BC}$, entonces se puede usar proporciones, porque AB y AC son rectas secantes, lo que nos lleva a utilizar el teorema de Tales.

Parte 2

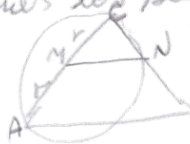
- 2) Sea un triángulo ΔABC cualquiera. Sea M un punto del segmento CA y N un punto del segmento BC de tal manera que se forma el segmento MN.
- a) Si los vectores $\overrightarrow{CM}$ y $\overrightarrow{MA}$ son equipolentes¹ y los vectores $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$. ¿Qué relación existe en las longitudes de los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{AB}$?
- b) Probar que los puntos M y N son puntos medios de los segmentos CA y BC respectivamente



a) $\frac{CM}{MA} = \frac{CN}{CB}$ $\frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB}$

→ Tomaré el módulo de los vectores para trabajar la división de los segmentos que estos representan.

b) Si tenemos un compás podremos probar fácilmente que cada punto es un punto medio del segmento respectivo haciendo una circunferencia con centro en M o N y verificando que esta circunferencia se intersecta en 2 los vértices del triángulo, pues los segmentos AM y MC son radios



Por $\angle CAB \cong \angle CMN$ y $\angle CBA \cong \angle CNM$



¹Vectores equipolentes: Dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ se llaman EQUIPOLENTES si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido

Parte 3

3) Responda a las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuál de las versiones le resultó más adecuada de desarrollar, según sus años de enseñanza?
- b) ¿La versión sintética (pregunta 1) le sirvió para realizar la versión vectorial (pregunta 2)?
- c) ¿Utilizó las mismas propiedades en las dos versiones? Justifique.
- d) ¿Es posible relacionar ambas versiones para un mismo tema como lo es el Teorema de Tales?
- e) ¿Cree posible utilizar estas versiones en la educación media? ¿Por qué? ¿En qué nivel las utilizaría?

- a) Creo que la versión 1 es más sencilla de abordar pues solo trabaja con magnitudes de los segmentos. Sin embargo, al trabajar con vectores la proporcionalidad se debe abordar desde un punto de vista de la ponderación de vectores, pues no es posible dividir vectores.
- b) Sí
- c) No totalmente, pues no es posible dividir 2 vectores en cambio sí sus magnitudes. Quizás se podría abordar desde la ecuación vectorial de la recta y los puntos que pertenezcan a ella (M y N)
- d) Sí
- e) Sí, creo que se puede aplicar la primera versión en 2° medio. La versión vectorial en 4° y además simultáneamente la 1 y 2 en 4° medio. La trabajaría considerando el desarrollo de los contenidos que propone el contenido actual.

Actividad

Nombre: MR

Fecha: 23/11/2015

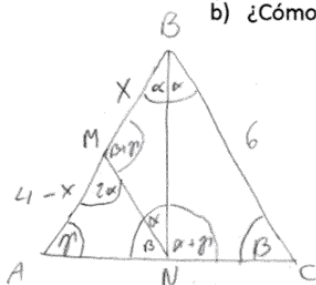
La siguiente Actividad corresponde a un Trabajo de Tesis de Magíster en Didáctica de la Matemática. La Actividad cuenta con tres preguntas de desarrollo sobre el Teorema de Tales. Responde en forma clara cada pregunta del cuestionario y te pedimos no borrar tu trabajo. Además, puedes usar el instrumento que estimes necesario para trabajar como regla, o compás. Esta información es confidencial y es para fines de investigación.

Parte 1

- 1) Consideremos un ΔABC tal que $AB = 4\text{cm}$, $AC = 7\text{cm}$ y $BC = 6\text{cm}$. Los puntos M y N pertenecen a los segmentos AB y AC respectivamente, de tal modo que se forma un segmento MN que es paralelo al segmento BC .

- a) Supongamos que $BM = x\text{cm}$. ¿En qué lugar se debe colocar M para que el triángulo BMN sea un triángulo isósceles de base $\overline{BN}$?

- b) ¿Cómo justificas el resultado anterior?



2) Por proporciones se tiene que $\Delta AMN \sim \Delta ABC$

$$\frac{4-x}{x} = \frac{4}{6}$$

$$24 - 6x = 4x$$

$$24 = 10x$$

$$2,4 = x$$

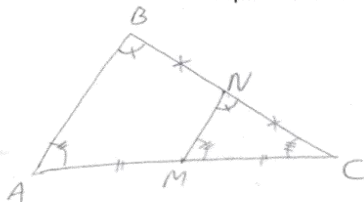
Entonces x se ubica a $2,4\text{cm}$ de B o se ubica a $4 - 2,4 = 1,6\text{cm}$ de A

B) Se justifica por propiedades de trazos proporcionales en triángulos semejantes

Parte 2

2) Sea un triángulo ΔABC cualquiera. Sea M un punto del segmento CA y N un punto del segmento BC de tal manera que se forma el segmento MN.

- a) Si los vectores $\overrightarrow{CM}$ y $\overrightarrow{MA}$ son equipolentes¹ y los vectores $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$. ¿Qué relación existe en las longitudes de los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{AB}$?
- b) Probar que los puntos M y N son puntos medios de los segmentos CA y BC respectivamente



① la relación que existe entre $\overrightarrow{NM}$ y $\overrightarrow{AB}$ es

$$a) \frac{CN}{NM} = \frac{BC}{AB} \quad b) \frac{AB}{NM} = \frac{AC}{MC} = \frac{2MC}{MC} = 2$$

② Los triángulos MCN es semejante al triángulo ABC (considerando las condiciones enunciadas en la parte a), pues como $MN \parallel AB$ los $\angle MNC \cong \angle ABC$ son iguales, $\angle BAC \cong \angle NMC \cong \angle ACB \cong \angle MCN$

M es punto medio por la relación encontrada en a), y

$$\frac{AC}{MC} = \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NC} = 2 \quad \text{Entonces N es punto medio}$$

¹Vectores equipolentes: Dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ se llaman EQUIPONENTES si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido

Parte 3

3) Responda a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál de las versiones le resultó más adecuada de desarrollar, según sus años de enseñanza?

la segunda

b) ¿La versión sintética (pregunta 1) le sirvió para realizar la versión vectorial (pregunta 2)?

no

c) ¿Utilizó las mismas propiedades en las dos versiones? Justifique.

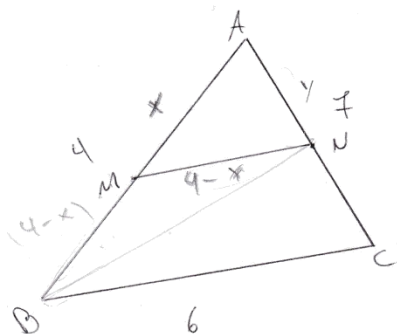
no, pues en la segunda se ocupan los elementos secundarios

d) ¿Es posible relacionar ambas versiones para un mismo tema como lo es el Teorema de Tales?

si

e) ¿Cree posible utilizar estas versiones en la educación media? ¿Por qué? ¿En qué nivel las utilizaría?

si, pues se puede verificar propiedades de triángulos, en 3° medio



$$\Rightarrow \frac{x}{(4-x)} = \frac{4}{6}$$

$$6x = 16 - 4x$$

$$10x = 16$$

$x = 1,6 \rightarrow$ a distância de M ao ponto de A

$$\Rightarrow \frac{16}{24} = \frac{y}{(7-y)}$$

$$16 \cdot 7 - 16y = 24y$$

$$16 \cdot 7 = 40y$$

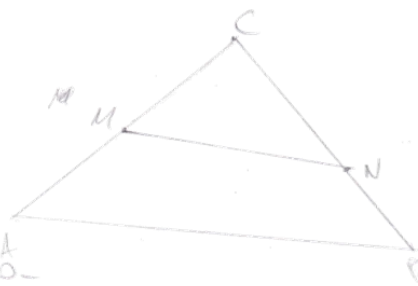
$$2 \cdot 4 \cdot \frac{16 \cdot 7}{40} = y$$

$$\Rightarrow \frac{14}{5} = y$$

Parte 2

2) Sea un triángulo ΔABC cualquiera. Sea M un punto del segmento CA y N un punto del segmento BC de tal manera que se forma el segmento MN.

- a) Si los vectores $\overrightarrow{CM}$ y $\overrightarrow{MA}$ son equipolentes¹ y los vectores $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$. ¿Qué relación existe en las longitudes de los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{AB}$?
- b) Probar que los puntos M y N son puntos medios de los segmentos CA y BC respectivamente



A) Como el vector $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$

entonces tenemos las hipótesis necesarias para el teorema de Tales, (Caso particular)

donde suponiendo que el módulo $\|\overrightarrow{CM}\| = a \Rightarrow \|\overrightarrow{MA}\| = a$

luego, debemos tener: $\frac{a}{\|\overrightarrow{MN}\|} = \frac{2a}{\|\overrightarrow{AB}\|} \Rightarrow \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{MN}\|} = 2$

es decir, el vector $\overrightarrow{AB}$ tiene el doble de magnitud que el vector $\overrightarrow{MN}$.

B) Sabiendo que $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$, y como ya sabemos que M es pt medio de CA porque $\overrightarrow{CM}$ y $\overrightarrow{MA}$ son Equipolentes, basta confirmar que N es pt medio de CB.

Por lo tanto se debe cumplir: Si $a = \|\overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{MA}\| \Rightarrow \frac{a}{\|\overrightarrow{CN}\|} = \frac{a}{\|\overrightarrow{NB}\|} = 1$.

La medida de CN es igual a la medida de NB.

Eso significa que N es pt medio de CB.

¹Vectores equipolentes: Dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ se llaman EQUIPOLENTES si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido

Parte 3

3) Responda a las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuál de las versiones le resultó más adecuada de desarrollar, según sus años de enseñanza?
- b) ¿La versión sintética (pregunta 1) le sirvió para realizar la versión vectorial (pregunta 2)?
- c) ¿Utilizó las mismas propiedades en las dos versiones? Justifique.
- d) ¿Es posible relacionar ambas versiones para un mismo tema como lo es el Teorema de Tales?
- e) ¿Cree posible utilizar estas versiones en la educación media? ¿Por qué? ¿En qué nivel las utilizaría?

Respuestas

- a) En la parte dos es lo usual en los programas, creo que si buscamos una aplicación del teorema de Tales que pase de la comprobación de la tesis, es mucho más adecuada la parte 1.
- b) No necesariamente, la parte 1 cumple un papel de recordatorio de hipótesis y tesis, si es que se piensa en la parte 2, pero son aparentemente problemas independientes.
- c) Si, los dos se aplican al caso particular del Teorema de Tales, ya que en ambos se reúnen las hipótesis.

d) Con dos aplicaciones del teorema de Thales, aunque también se le puede trabajar fuera de Thales, pensando solo en un triángulo son un complemento y refuerzo a la vez, al estudio del teorema de Thales.

E) Desde la perspectiva del contenido no hay impedimento para trabajar en educación media, ya que son la parte del programa, de la unidad de geometría de 2º medio. Desde allí es perfectamente posible y adecuado este tipo de problemas, en especial la parte 1, donde deben ocupar otros conceptos como de clasificación de triángulos. Pero más que el nivel, son el manejo de los conceptos previos al q' nos da la luz verde para trabajar estos contenidos.
Entonces pensando desde el contenido.

Actividad

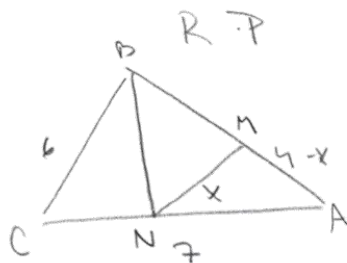
Nombre: RP

Fecha: 26/11/2015

La siguiente Actividad corresponde a un Trabajo de Tesis de Magíster en Didáctica de la Matemática. La Actividad cuenta con tres preguntas de desarrollo sobre el Teorema de Tales. Responde en forma clara cada pregunta del cuestionario y te pedimos no borrar tu trabajo. Además, puedes usar el instrumento que estimes necesario para trabajar como regla, o compás. Esta información es confidencial y es para fines de investigación.

Parte 1

- 1) Consideremos un ΔABC tal que $AB = 4\text{cm}$, $AC = 7\text{cm}$ y $BC = 6\text{cm}$. Los puntos M y N pertenecen a los segmentos AB y AC respectivamente, de tal modo que se forma un segmento MN que es paralelo al segmento BC .
 - a) Supongamos que $BM = x\text{cm}$. ¿En qué lugar se debe colocar M para que el triángulo BMN sea un triángulo isósceles de base $\overline{BN}$?
 - b) ¿Cómo justificas el resultado anterior?



$$\frac{x}{6} = \frac{4-x}{4}$$

$$4x = 24 - 6x$$

$$10x = 24$$

$$x = \frac{24}{10} = 2,4$$

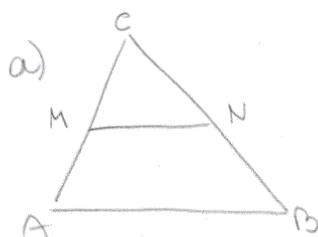
b) El triángulo BMN es isósceles y se justifica por los pasos anteriores

Parte 2

2) Sea un triángulo ΔABC cualquiera. Sea M un punto del segmento CA y N un punto del segmento BC de tal manera que se forma el segmento MN.

a) Si los vectores $\overrightarrow{CM}$ y $\overrightarrow{MA}$ son equipolentes¹ y los vectores $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$. ¿Qué relación existe en las longitudes de los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{AB}$?

b) Probar que los puntos M y N son puntos medios de los segmentos CA y BC respectivamente



Como $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$ se cumple que

$$\frac{CM}{MN} = \frac{CA}{AB}$$

Como $\overrightarrow{CM}$ equipolente a $\overrightarrow{MA}$ entonces

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MA}, \text{ luego } \frac{CM}{MA} = \frac{2CM}{AB} \Rightarrow AB = 2MA$$

b) Como $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CM}$ equipolente con $\overrightarrow{MA}$ entonces
M punto medio de AC

$$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN}$$

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB}$$

¹Vectores equipolentes: Dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ se llaman EQUIPOLENTES si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido

Parte 3

3) Responda a las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuál de las versiones le resultó más adecuada de desarrollar, según sus años de enseñanza?
- b) ¿La versión sintética (pregunta 1) le sirvió para realizar la versión vectorial (pregunta 2)?
- c) ¿Utilizó las mismas propiedades en las dos versiones? Justifique.
- d) ¿Es posible relacionar ambas versiones para un mismo tema como lo es el Teorema de Tales?
- e) ¿Cree posible utilizar estas versiones en la educación media? ¿Por qué? ¿En qué nivel las utilizaría?

a) la primera debido a que no recordaba bien el uso de vectores.

b) Si, ya que ocupé lo que se me dijo de los vectores y lo traspasé a medidas.

c) Si porque no recordaba como trabajar solo con vectores

d) Si pero creo que hay que recordar el cómo se trabaja con vectores

e) Si, la primera inducirá, además de las propiedades del teorema, algebra por lo que podría utilizarse desde primero medio, la segunda creo que podría ser desde tercero medio, donde ya ocupen mejor los vectores.

Actividad

Nombre: D.V

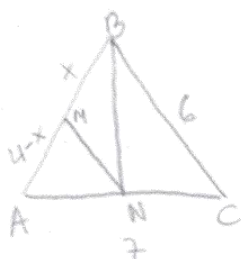
Fecha: 26/11/15

La siguiente Actividad corresponde a un Trabajo de Tesis de Magíster en Didáctica de la Matemática. La Actividad cuenta con tres preguntas de desarrollo sobre el Teorema de Tales. Responde en forma clara cada pregunta del cuestionario y te pedimos no borrar tu trabajo. Además, puedes usar el instrumento que estimes necesario para trabajar como regla, o compás. Esta información es confidencial y es para fines de investigación.

Parte 1

- 1) Consideremos un ΔABC tal que $AB = 4\text{cm}$, $AC = 7\text{cm}$ y $BC = 6\text{cm}$. Los puntos M y N pertenecen a los segmentos AB y AC respectivamente, de tal modo que se forma un segmento MN que es paralelo al segmento BC .

- a) Supongamos que $BM = x\text{cm}$. ¿En qué lugar se debe colocar M para que el triángulo BMN sea un triángulo isósceles de base $\overline{BN}$?
- b) ¿Cómo justificas el resultado anterior?



Se necesita que $BM = MN$.

Supongamos que $MN = x\text{cm}$

Además $MN \parallel BC$, por lo tanto podemos usar el Teorema de Tales ya que tenemos dos rectas secantes cortadas por dos rectas paralelas

$$\frac{4-x}{x} = \frac{4}{6} \Rightarrow 24 - 6x = 4x \Rightarrow 24 = 10x \Rightarrow x = 2,4$$

$\therefore x = 2,4\text{cm}$ y M debe ir a $2,4\text{cm}$ de B .

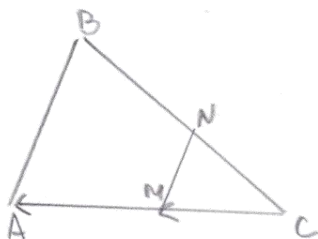
b) El resultado se justifica por lo anterior.

Parte 2

2) Sea un triángulo ΔABC cualquiera. Sea M un punto del segmento CA y N un punto del segmento BC de tal manera que se forma el segmento MN.

a) Si los vectores $\overrightarrow{CM}$ y $\overrightarrow{MA}$ son equipolentes¹ y los vectores $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$. ¿Qué relación existe en las longitudes de los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{AB}$?

b) Probar que los puntos M y N son puntos medios de los segmentos CA y BC respectivamente



a) la relación entre

$$\frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$$

b) al ser $\overrightarrow{CM}$ equipolente con $\overrightarrow{MA}$
se tiene que
 $CM = MA$

como $CA = CM + MA$

$$CA = 2CM$$

$$\frac{CA}{CM} = \frac{2}{1}$$

entonces M es punto Medio

al ser $MN \parallel AB$ y
M punto medio diremos

$$\frac{CA}{CM} = \frac{CB}{CN} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{CB}{CN}$$

entonces N también es
punto medio

¹Vectores equipolentes: Dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ se llaman EQUIPOLENTES si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido

Parte 3

3) Responda a las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuál de las versiones le resultó más adecuada de desarrollar, según sus años de enseñanza? *la parte 2*
- b) ¿La versión sintética (pregunta 1) le sirvió para realizar la versión vectorial (pregunta 2)? *si*
- c) ¿Utilizó las mismas propiedades en las dos versiones? Justifique.
solo el paralelismo y Tales
- d) ¿Es posible relacionar ambas versiones para un mismo tema como lo es el Teorema de Tales?
si, son bastante adecuados
- e) ¿Cree posible utilizar estas versiones en la educación media? ¿Por qué? ¿En qué nivel las utilizaría?

si, en 2° o 3° medio, para utilizar la resolución de problemas como estos, sacamos del esquema al alumno de solo responder operaciones.

Actividad

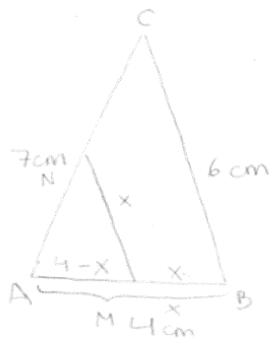
Nombre: SA

Fecha: 26-11-15

La siguiente Actividad corresponde a un Trabajo de Tesis de Magíster en Didáctica de la Matemática. La Actividad cuenta con tres preguntas de desarrollo sobre el Teorema de Tales. Responde en forma clara cada pregunta del cuestionario y te pedimos no borrar tu trabajo. Además, puedes usar el instrumento que estimes necesario para trabajar como regla, o compás. Esta información es confidencial y es para fines de investigación.

Parte 1

- 1) Consideremos un ΔABC tal que $AB = 4\text{cm}$, $AC = 7\text{cm}$ y $BC = 6\text{cm}$. Los puntos M y N pertenecen a los segmentos AB y AC respectivamente, de tal modo que se forma un segmento MN que es paralelo al segmento BC .
 - a) Supongamos que $BM = x\text{cm}$. ¿En qué lugar se debe colocar M para que el triángulo BMN sea un triángulo isósceles de base $\overline{BN}$?
 - b) ¿Cómo justificas el resultado anterior?



Aplicando Tales

$$\frac{4-x}{x} = \frac{4}{6}$$

$$6(4-x) = 4x$$

$$24 - 6x = 4x$$

$$24 = 4x + 6x$$

$$24 = 10x$$

$$x = \frac{24}{10}$$

Es decir, $MN = 2,4\text{cm}$

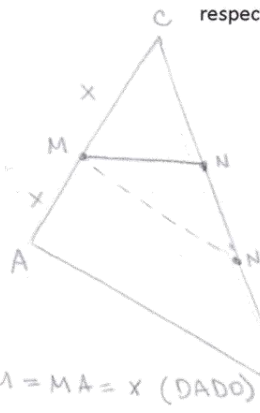
∴ se formó un triángulo isósceles BMN

Parte 2

2) Sea un triángulo ΔABC cualquiera. Sea M un punto del segmento CA y N un punto del segmento BC de tal manera que se forma el segmento MN.

a) Si los vectores $\overrightarrow{CM}$ y $\overrightarrow{MA}$ son equipolentes¹ y los vectores $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$. ¿Qué relación existe en las longitudes de los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{AB}$?

b) Probar que los puntos M y N son puntos medios de los segmentos CA y BC respectivamente



$$a) |\overrightarrow{CM}| = |\overrightarrow{MA}| = x$$

$$\frac{x}{|MN|} = \frac{2x}{|AB|} \Rightarrow |AB| = 2 |MN|$$

$\therefore$ El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es el doble del módulo del vector $\overrightarrow{MN}$

$$CM = MA = x \text{ (DADO)}$$

$$\frac{x}{MN} = \frac{2x}{AB} \text{ (Thales)}$$

$$AB = 2MN$$

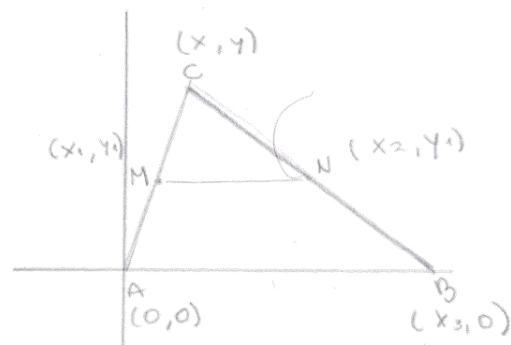
$$\frac{CN}{MN} = \frac{CB}{AB}$$

$$\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{MN}$$

$$\overrightarrow{CN} \cdot 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{MN}$$

$$2 \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{CN} = \frac{\overrightarrow{CB}}{2}$$



¹Vectores equipolentes: Dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ se llaman EQUIPOLENTES si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido

Parte 3

3) Responda a las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuál de las versiones le resultó más adecuada de desarrollar, según sus años de enseñanza?
- b) ¿La versión sintética (pregunta 1) le sirvió para realizar la versión vectorial (pregunta 2)?
- c) ¿Utilizó las mismas propiedades en las dos versiones? Justifique.
- d) ¿Es posible relacionar ambas versiones para un mismo tema como lo es el Teorema de Tales?
- e) ¿Cree posible utilizar estas versiones en la educación media? ¿Por qué? ¿En qué nivel las utilizaría?

- a) La primera, ya que la geometría Euclidiana es vista desde el colegio, por lo que es más familiar que la geometría vectorial.
- b) Si, ya que ocupé las mismas propiedades.
- c) Si, utilicé las mismas propiedades, en parte porque no recuerdo cómo trabajar bien con vectores, así que asumí que lo de la primera parte podía ser utilizado en la segunda.
- d) Creo que si, pero dejando en claro que Tales nació y pertenece a la geometría Euclidiana.
- e) La primera versión si es aplicable a la matemática vista en la media (1ro medio), la segunda podría ser para un electivo (3ro - 4to medio).