UNIVERSIDAD
ALBERTO HURTADO

Facultad de Educación

Departamento de Pedagogías Medias y Didácticas Específicas

Pedagogía en Matemática

Seminario de titulación

ACCIONES O ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR ESTUDIANTES DE SEGUNDO MEDIO EN LA BÚSQUEDA DE TÉCNICAS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS.

Seminario de Título para optar al título de Profesor de Matemática,

MARIO ANTONIO LÓPEZ TORRES.

CAMILA ANDREA OYARCE SANDOVAL.

JONATHAN ANDRÉS SAAVEDRA ALBORNOZ.

Profesores guías: Dra. María Soledad Montoya González

Dr. Gonzalo Isaac Espinoza Vásquez.

Santiago, Chile

2022

AGRADECIMIENTOS

Ha sido un camino largo, lleno de aprendizaje, tanto de Matemática, como de la vida. He crecido mucho en estos años y por supuesto que se debe a dos factores: por un lado, mi propio esfuerzo, por el otro, la gente hermosa que me rodea.

Y es que primeramente, debo agradecer a mis padres, Mario Antonio López Pinochet y Carmen Gloria Torres Farías, por estar siempre conmigo, los amo y les dedico este trabajo, mi título de profesor de Matemática y cada logro que obtenga en lo que decida hacer.

A su vez, agradezco a mi pareja, Valentina Javiera Rojas Núñez, por apoyarme y estar conmigo cada día, desde hace mucho tiempo. Por acompañarme en las buenas y malas, llenando mi vida de felicidad.

Además, agradezco a mis amigos con quienes hice este Seminario de Título, Jonathan Saavedra y Camila Oyarce, nuestra amistad hizo que esto resultara perfecto, no pude haber elegido un mejor equipo.

Para finalizar, quiero agradecer a cada persona que me ha ayudado a crecer:

En la universidad, destaco a Sebastián Orellana, Yerko Simunovic, Felipe Barrera y Cristián Olivares, por creer en mí y abrirme las puertas. A mis amigos de carrera, definitivamente las risas hicieron que cada ramo se aprobara de la mejor forma.

Fuera de la universidad, agradezco a mis eternos amigos, que llevan años a mi lado, quienes conocen todo de mí y siempre me han acompañado, les tengo un amor inmenso.

A todos los mencionados, les dedico este logro.

Mario Antonio López Torres.

Finalizando esta etapa me gustaría agradecer a mi mamá Mirian Ester Sandoval Gálvez y papá Juan Samuel Oyarce Llantén por el apoyo incondicional que me han brindado en cada etapa de mi vida, ellos me han motivado para lograr todo lo que me propongo y me han aportado los valores que me hacen ser la persona que soy hoy en día.

Me gustaría agradecer a mis hermanas Viviana Oyarce y Natalia Oyarce quienes han sido unas guías a lo largo todo este proceso y mis sobrinos Alonso Mejías y Abraham Mejías quienes alegran mis días.

A su vez, agradezco a mi pareja y compañero de seminario de título Jonathan Saavedra, quien fue y es un pilar fundamental durante todo este proceso, él fue quien me motivó cada día y acompañó a lo largo de toda esta etapa, tanto emocionalmente como académicamente.

Así también, agradezco a mi grupo de tesis, Mario López y Jonathan Saavedra, por acompañarme durante todo este proceso, hicieron que esta experiencia fuera mucho más agradable.

Camila Andrea Oyarce Sandoval.

Finalizando este proceso, agradezco infinitamente a mi madre Nayaret Albornoz y mi padre Christian Saavedra quienes son pilares fundamentales en mi vida. Todo lo que he logrado es gracias a su apoyo incondicional.

También agradezco a mi hermano Benjamín Saavedra por su constante apoyo durante toda esta etapa y a mi hija Rafaela Saavedra, quien ha sido mi motor durante toda esta etapa, sin lugar a dudas todo lo que hago es por ella.

Agradecimientos también para mi pareja Camila Oyarce, una persona que me dió todo el apoyo para seguir este camino, también ha sido la persona más importante que he conocido durante mi estancia en la Universidad. Te agradezco enormemente por toda la ayuda que me diste y el aporte que has sido en mi vida, mil agradecimientos para ti, una mujer excepcional.

También agradezco a Mario López y Camila Oyarce por ser mis compañeros de este gran viaje…recordando horas de trabajo y todo el sacrificio realizado. Hoy cerramos este hermoso momento y que mejor que al lado de dos personas por las cuales daría mi vida.

Finalmente, agradezco a todas las personas que he conocido y han sido un granito de arena durante mi vida, compañeros de futsal y el profesor Cristian. Mi profesora guía Carolina Chihuailaf y el curso maravilloso con el que pude realizar las clases, el querido 2°A. A mis compañeros de universidad con los que viví hermosos momentos.

Muchas gracias a todos.

Jonathan Saavedra Albornoz.

Índice

Resumen.

Para el presente Seminario de Título, basado en las acciones o estrategias utilizadas por las estudiantes de segundo medio en la búsqueda de técnicas de resolución de ecuaciones cuadráticas, se consideraron los 3 métodos de resolución que plantea el Ministerio de Educación y un innovador método propuesto por Po-Shen Loh.

Se consideró este tema al observar una práctica pedagógica muy recurrente, pues, la enseñanza de la ecuación cuadrática se realiza de manera descontextualizada, es decir, al momento de presentar los métodos de resolución, no se realiza ningún análisis previo. Por ello, se propone una secuencia de clases basada en la Teoría de Situaciones Didácticas presentada por Guy Brousseau, cuyo enfoque metodológico utilizado es la Ingeniería Didáctica y el Estudio de Clase.

Por otra parte, se realiza un exhaustivo análisis a las acciones o estrategias que utilizan las estudiantes al momento de resolver una ecuación cuadrática, considerando las respuestas que realizaron las estudiantes en aquellas situaciones de aprendizajes claves.

Este Seminario de Título finaliza con una reflexión que se orienta a cómo influyó esta implementación de clases en nuestro quehacer pedagógico y cómo contribuye al perfil de egreso de la carrera de Pedagogía en Matemática.

Introducción.

La siguiente investigación, realizada en el Seminario de Titulación, se presenta para optar al grado de Profesor de Matemática otorgado por la Universidad Alberto Hurtado. Ésta se realizó en el décimo semestre de la carrera y está íntimamente relacionado a la práctica profesional, la cual se realizó en el Liceo Paulina Von Mallinckodt.

Este Seminario, consta de 7 capítulos cuyo foco se encuentra en la secuencia de enseñanza aprendizaje de los métodos de resolución de la ecuación cuadrática, considerando los propuestos por el Ministerio de Educación y agregando un nuevo método de resolución, llamado método de Po-Shen Loh.

Se consideró esta temática, puesto que, se observó una concurrencia en la enseñanza de los métodos de resolución de la ecuación cuadrática, pues, se realiza de manera descontextualizada, es decir, en las aulas chilenas este contenido suele presentar sin realizar un análisis previo. De lo anterior, surge la pregunta: ¿Qué acciones o estrategias utilizan los estudiantes para la búsqueda de técnicas de resolución de ecuaciones cuadráticas?

Para fundamentar esta problemática se consideran varios antecedentes claves, como lo es la memorización de la fórmula general, comprensión de las ecuaciones, del signo igual y de las notaciones, enseñanza tradicional, escasez de materiales de apoyo y bajo rendimiento en matemática, entre otros. Cabe mencionar que tanto los antecedentes como la problemática se desarrollan en capítulo I.

Luego, en el capítulo II, se desarrolla todo lo relacionado a la ecuación cuadrática, considerando elementos epistemológicos, su evolución a lo largo de la historia, los métodos de resolución de la ecuación cuadrática junto a todas las demostraciones correspondientes.

Por otra parte, se hace referencia a la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) propuestas por Guy Brousseau en 1970, basando nuestros planes de clase en esta teoría, es por ello por lo que el foco de nuestra implementación se centra en las situaciones generadas por las estudiantes y el medio, tales como, situación de acción, formulación, validación e institucionalización (en la que es parte el profesor).

El enfoque metodológico utilizado en esta investigación corresponde a la Ingeniería Didáctica y el Estudio de Clase, pues, la primera es la que nos permite dar una ordenación a las secuencias de aprendizaje y fundamentarla, mientras que el Estudio de Clase corresponde a un método japonés basado en la resolución de problemas. Se recalca, que el Estudio de Clase se realizó en la última sesión de nuestra implementación de clases.

Los resultados que arrojaron las sesiones de clase se analizan en capítulo VII, en él se presentan algunas reflexiones sobre el quehacer pedagógico que siguieron luego de analizar estos resultados.

Por último, se presentan las conclusiones de nuestra investigación, se hace énfasis en la planificación e implementación de clases y cómo contribuyeron al perfil de egreso.

CAPÍTULO I.

PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS.

En el primer capítulo del presente Seminario de Título abordaremos la problemática existente en la enseñanza de la ecuación cuadrática en estudiantes de segundo medio. En este sentido, se presentarán los antecedentes que destacan dicha problemática, junto con un análisis de dos Textos del estudiante y del Programa de Estudio del nivel correspondiente, para luego plantear los objetivos y la pregunta de la investigación.

1.1 Problemática

Inicialmente, la ecuación cuadrática es vista en las instituciones educativas chilenas en la Educación Media, específicamente en la segunda unidad del Programa Ministerial para segundo medio (2016) y se titula "Funciones cuadráticas, ecuaciones cuadráticas y la inversa de una función".

Se considera que la problemática detectada ocurre en el proceso de enseñanza de la ecuación cuadrática, sumado a los métodos que se utilizan para calcular y obtener sus soluciones.

Ahora bien, en relación con dichos métodos, el Programa de Estudio de segundo medio, junto con los Textos del Estudiante, proponen una secuencia de enseñanza basada en tres métodos de resolución para estas ecuaciones:

- Factorización.
- Completación de cuadrados
- Fórmula general.

Respecto a este último método, en los Textos del Estudiante no existe un mayor análisis en la demostración de dicha fórmula o, al menos, de dónde proviene, lo que fomenta la memorización de los alumnos, generando dificultades en el aprendizaje del álgebra por la ausencia de diferentes formas de representación de los objetos matemáticos.

Por otro lado, existe un desinterés de los estudiantes en aprender matemática, y se debe, principalmente, a la complejidad propia del contenido (en este caso, la ecuación cuadrática). De hecho, Godino y Font (2003), señalan que “la experiencia de los profesores y los resultados de diversas investigaciones muestran que el álgebra resulta un tema difícil” (p. 816), pero también, el profesor es determinante en cómo enseña y en las técnicas de enseñanza que utiliza para motivar a sus estudiantes. De lo anterior resultan dos aspectos relevantes:

- Enseñanza tradicional de los profesores.
- Falta de herramientas o materiales de apoyo.

Estos elementos son determinantes para un claro resultado: bajo rendimiento en Matemática. Según el Diagnóstico Integral de Aprendizajes en el año 2021, muestra que existe un bajo rendimiento en Matemática en estudiantes de segundo medio.

En cuanto a algunos antecedentes claves que destacan dentro de esta problemática, existen estudios y autores que se presentan en “1.2 Antecedentes”, sobre las dificultades que conlleva la memorización de la Fórmula general de la ecuación cuadrática, cuando no se realiza un previo análisis, incluso, según Lavilla (2011), “cuando estas palabras son recordadas meramente por medio de la repetición mecánica, tanto el proceso de aprendizaje como el producto o resultados son malos” (p. 313). De esta forma, se limita la total comprensión de la Fórmula general.

Por otra parte, como segundo antecedente, se encuentra la comprensión de las ecuaciones, del signo igual y las notaciones, Godino y Font (2003), mencionan que estos conceptos pueden causar dificultades en el aprendizaje.

Como tercer antecedente y relacionado con los anteriores, se encuentra la enseñanza tradicional en la que predominan modelos epistemológicos euclidianos, como los que menciona Gascón (2001), en la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.

En relación con el cuarto antecedente, se incluye la falta de herramientas o materiales de apoyo que fomenten la enseñanza tradicional. La organización UNICEF (2016), enfatiza en la diferencia entre el uso de la tecnología para formar personas aptas en el área, con el uso de dicha tecnología como un recurso que aporte a la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes.

Para finalizar, como último antecedente y, a modo general, tenemos el bajo rendimiento en matemática que, como menciona Bastidas (2010), más de la mitad de los estudiantes de segundo medio tiene dificultades para traducir ecuaciones de segundo grado desde un lenguaje natural a un lenguaje algebraico.
Junto a la contextualización del problema y a los antecedentes que son parte de la problemática, surge la pregunta de investigación:

> ¿Qué acciones o estrategias utilizan los estudiantes para la búsqueda de técnicas de resolución de ecuaciones cuadráticas?

1.2 Antecedentes.

A continuación, se presentan algunos antecedentes que justifican la problemática planteada con anterioridad:

1.2.1 Memorización de la fórmula general.

En una sección del contenido, específicamente en lo que compete a la Fórmula general, es común observar cómo se presenta sin realizar una demostración o, al menos, un análisis acabado de dicha fórmula, para que los y las estudiantes entiendan cómo y de dónde proviene, lo que fomenta su memorización, incluso dejando de lado su propia comprensión al momento de resolver distintas ecuaciones nos remitimos directamente a un algoritmo sin conocer de dónde proviene; un ejemplo es el caso de la ecuación cuadrática en el que se hace un uso memorístico de la fórmula general sin reflexionar el porqué es necesario utilizar dicha fórmula en una situación determinada.

La memorización como una práctica pedagógica puede causar una mecanización más rápida del contenido, sin embargo, los y las estudiantes no lograrán una comprensión efectiva, pues puede causar dificultad transitar hacia otro aprendizaje al no realizar un análisis sobre la justificación del contenido, en relación con esto, Näslund-Hadley y Villanueva (2021) mencionan que

> El problema del enfoque de aprendizaje de Tiza y Charla es que la memorización es la forma más baja de aprendizaje. Aunque la memorización es la forma de aprendizaje adecuada para las tablas de sumar, restar y multiplicar, el aprendizaje memorístico no debería ser la práctica pedagógica principal en nuestras escuelas. De hecho, la memorización puede llegar a crear barreras en la mente que impidan explorar y pensar de forma crítica y avanzar hacia formas de aprendizaje más elevadas.

1.2.2 Comprensión de las ecuaciones, del signo igual y de las notaciones.

En relación con el segundo antecedente, “las dificultades que tienen los alumnos en el uso de las variables en el contexto de la resolución de las ecuaciones provienen de las interpretaciones que hacen de la igualdad” (Godino y Font, 2003, p. 815).

Por otro lado, el signo igual “es la representación de un concepto o idea matemática. Sin embargo, dicho significado no es unívoco, estando ligado al contexto en el que se considere” (Molina y Castro, 2006, p. 3). De hecho, existen múltiples significados para el signo igual, en este caso, nos centraremos en la expresión de una equivalencia condicional, ya que, “este significado lo encontramos en el contexto del álgebra, en situaciones en las que el signo igual expresa una equivalencia sólo cierta para algún valor o algunos valores de la(s) variable(s), pudiendo no existir ninguno.” (Molina y Castro, 2006, p. 3)

Además, Molina et al. (2006) citado en Parodi et al. (2017), menciona que, “el significado de expresión de una equivalencia es el único que hace referencia a una relación que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva” (p. 54), mientras que, en otros significados de la igualdad no se cumplen algunas de estas propiedades.

Según Godino y Font (2003), “diversos estudios muestran que las interpretaciones que hacen los niños del signo $=$ y de las ecuaciones pueden diferir de las que pretendemos en la enseñanza” (p. 815). Por ejemplo, los estudiantes piensan que el uso principal del signo igual es para poder separar el problema de la respuesta, es decir, la igualdad $3+4=7$, se interpreta como “3 más 4 es igual a 7” y no como una relación de equivalencia entre las expresiones “$3+4$” y “7”.

Se sabe que el valor proposicional en una ecuación puede ser verdadero o falso, según el valor asignado a la incógnita, además, este valor puede no ser único, sino múltiples. “Esto ayudará a los alumnos a superar su idea de que el signo $=$ es una indicación de realizar un cálculo” (Godino y Font, 2003, p. 816).

Por otro lado, el uso de notaciones en aritmética y álgebra es común, pero pueden ser ambiguas, “lo que puede explicar las dificultades en el aprendizaje” (Godino y Font, 2003, p. 816). Se utilizan expresiones similares en aritmética y álgebra, pero que tienen significados muy distintos, por ejemplo, 34 y $3x$. El 3 de 34 nos indica el lugar de las decenas, por ende, representa 30 unidades. No obstante, $3x$ significa que el 3 multiplica a la x. En este último caso, se omite el signo de multiplicar, dado que, tiende a confundirse con la letra equis. También, Godino y Font (2003), mencionan que se pueden complicar más las interpretaciones cuando se escribe $34x$, ya que, ahora se debe considerar que 34 multiplica a la x, además de considerar que el 3 representa las decenas y el 4 las unidades. En el contexto algebraico escribimos ab para indicar el producto $a \cdot b$, pero en aritmética $3 \cdot 5 \neq 35$. De igual modo, $ab = ba$, pero $35 \neq 53$; $4 + 0{,}75 = 4{,}75$, pero $2x + y \neq 2xy$ (Godino y Font, 2003, p. 816).

1.2.3 Enseñanza tradicional.

Ahora bien, el desinterés en matemática también puede ser causado por el enfoque tradicional de enseñanza. Entendemos este enfoque como una clase expositiva, en la que el profesor es el proveedor del conocimiento y se deja de lado la construcción conjunta del saber. En este tipo de enseñanza predominan los modelos epistemológicos euclidianos cuya característica principal es que "pretenden trivializar el conocimiento matemático" (Gascón, 2001, p. 5). Este modelo da origen a otro tipo de modelo docente llamado modelo tecnicista, que "identifica implícitamente "enseñar y aprender matemáticas" con "enseñar y aprender técnicas" (algorítmicas)" (Gascón, 2001, p. 7), haciendo hincapié en procedimientos simples, olvidando lo que categorizamos como un problema, "que son aquellos cuya dificultad principal consiste en escoger las técnicas adecuadas para construir una "estrategia de resolución"". En este sentido, puede decirse que el tecnicismo comparte con el teoricismo [modelo relacionado con enseñar técnicas acabadas] la trivialización de la actividad de resolución de problemas" (Gascón, 2001, p. 7). Según Gascón (2001), existen concepciones ligadas a modelos epistemológicos cuasi-empíricos y también euclidianos, que prolongan metodologías basadas exclusivamente en el uso del Texto del estudiante, o bien, el uso de pautas aplicadas en años anteriores, por lo que no son considerados los nuevos paradigmas educativos en los y las estudiantes.

Por otro lado, Posadas (2013) realiza un estudio que involucra el método tradicional de enseñanza de la ecuación cuadrática, en el que concluye que las clases estudiadas realzan las destrezas de cálculo, pero no se hace énfasis en las distintas conexiones que existen. En consecuencia, la enseñanza tradicional no favorecerá la comprensión del concepto de ecuación cuadrática.

1.2.4 Escasez de materiales de apoyo.

De la propia enseñanza tradicional (descrita en 1.2.3), en la que es común que el profesor sea quien exponga los contenidos y los y las estudiantes se dediquen exclusivamente a escribir y memorizar, es que se considera también, la falta de materiales de apoyo por parte de los docentes y también, de los establecimientos educativos, para poder enriquecer el conocimiento y aprendizaje de cada estudiante. Según Flores et al. (2011):

> Todavía son escasos o insuficientes los materiales y recursos didácticos para matemáticas que existen en los centros de enseñanza. Y aún más rara es su utilización en clase. Últimamente se están supliendo por los medios tecnológicos y la incorporación de los ordenadores. Sin embargo, es importante dar un lugar en el aula al uso de materiales y recursos manipulativos ya que son una ayuda importante para el aprendizaje de los alumnos. (p. 65)

Si bien la cita anterior no alude específicamente a la ecuación cuadrática (más bien generaliza a la matemática en su totalidad), es imperante recalcar que en este contenido es completamente posible utilizar herramientas tecnológicas, recursos didácticos o manipulativos que contribuyan al aprendizaje de los y las estudiantes.

Ahora bien, cuando hablamos de la carencia de materiales de apoyo e involucramos el uso de los medios tecnológicos, La organización UNICEF (2016, p. 156) señala en “La naturaleza del aprendizaje: Usando la investigación para inspirar la práctica” que es necesario marcar una diferencia entre el uso de tecnología que fomenta su propia utilización para tener estudiantes aptos en esa área, con el empleo de la tecnología como un recurso que aporte al aprendizaje de los y las estudiantes y sea utilizada como una herramienta, pues el uso de la tecnología necesita ajustarse para suplir las exigencias de los y las estudiantes y, por supuesto, también de los y las docentes.

> En este sentido, y atendiendo a las necesidades de la escuela actual, los docentes vienen llevando a cabo unas prácticas diferenciadoras en el aula, con las cuales se busca una mejor comprensión del mundo por parte de los estudiantes a partir de una interpretación desde las asignaturas, en este caso específico desde las matemáticas. Esto se realiza con el fin de aportar herramientas a los estudiantes, para que así logren ser competentes dentro del mundo actual y así mismo puedan hacer uso de las herramientas tecnológicas que ya poseen. (Ortiz y Romero, 2015, p. 10)

Según Ortiz y Romero (2015), la implementación de la tecnología se convierte en una necesidad en los centros educativos y tiene como propósito fundamental encontrar nuevas estrategias que permitan una mejor comprensión de los objetos matemáticos, por ejemplo, la visualización de objetos matemáticos en tres dimensiones, que causan problemas al realizarlos con lápiz y papel.

1.2.5 Bajo rendimiento en Matemática.

Si tenemos en cuenta la memorización de la fórmula general, sumado al desinterés que puede generar este tipo de prácticas, además de la enseñanza tradicional y la escasez de materiales y herramientas tecnológicas, es muy probable que esto ocasione un bajo rendimiento en matemática. A continuación, se presentan algunos estudios que avalan esta afirmación:

En Chile, en el año 2021, se realizó a nivel nacional el Diagnóstico Integral de Aprendizajes (DIA), este proceso "evalúa los aprendizajes del currículum priorizado obtenidos por los estudiantes durante el año escolar anterior (2020) en el contexto de la pandemia" (Agencia de Calidad de la Educación, 2021, p. 2). A través de este diagnóstico se elaboraron más de setenta y tres mil informes con datos de 1.866.503 estudiantes, de los cuales 113.986

correspondía a los resultados obtenidos en III° medio (II° medio del año 2020), que sólo alcanzaron un 33% de logro en cuanto a los objetivos priorizados (que contempla todos los correspondientes a segundo medio), lo que muestra evidencia concreta sobre el bajo rendimiento en matemática en estudiantes de educación media:

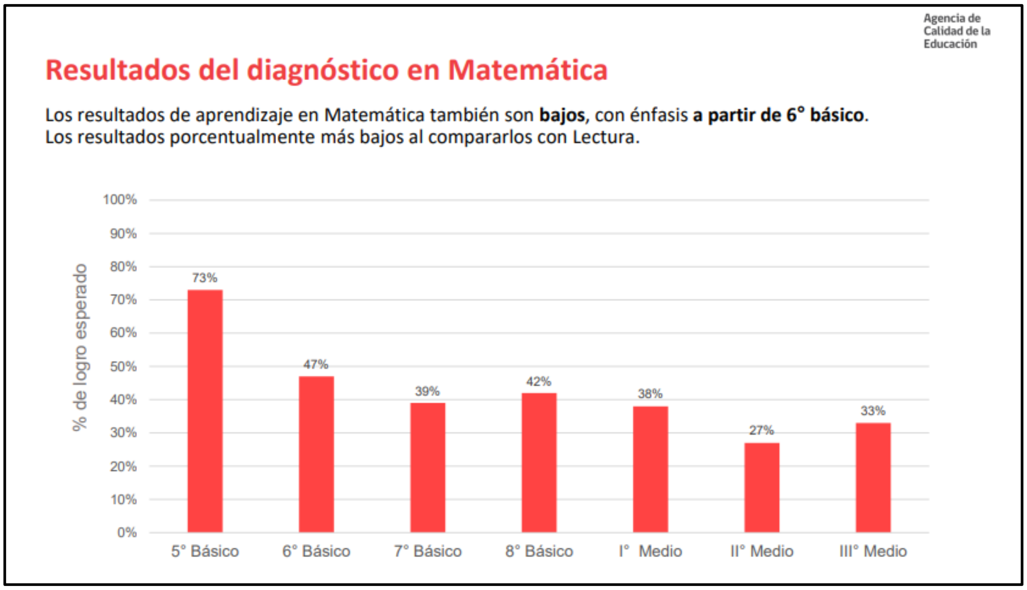


Figura 1. Resultados del diagnóstico en Matemática.
Fuente: Agencia de Calidad de la Educación (2021, p. 24)

En la figura 1 es posible observar que existe una disminución en los logros obtenidos por los estudiantes desde quinto básico hasta tercero medio, lo que entrega indicios sobre el nivel alcanzado por estudiantes de segundo medio en lo que respecta a ecuación cuadrática.

Por otra parte, la comprensión de la ecuación cuadrática es otra dimensión para analizar. Bastidas (2010, p. 66), indica que un 56% de los estudiantes presenta dificultades para traducir ecuaciones de segundo grado desde un lenguaje natural a un lenguaje algebraico. De lo anterior, es posible observar que lo expuesto por Bastidas sigue ocurriendo en el aula, lo que influye directamente en el bajo rendimiento de los y las estudiantes.

1.2.6 Análisis Curricular

La ecuación cuadrática y sus resoluciones se presentan en la unidad 2 del Programa de Estudio de segundo medio, llamada “Funciones cuadráticas, ecuaciones cuadráticas y la inversa de una función”, tiene por propósito que “los alumnos descubran el cambio cuadrático, en comparación con el cambio lineal, y desarrollen la función inversa a una función, en el caso de funciones lineales y funciones cuadráticas” (Ministerio de Educación, 2022).

Para lograr este objetivo de aprendizaje es necesario que los y las estudiantes conozcan previamente la función lineal y afín, la representación gráfica de una función y la ecuación de primer grado.

El Ministerio de Educación (2016, p. 96) en el Programa de Estudio busca promover el desarrollo de las habilidades de modelar y resolver problemas, las cuales se detallarán a continuación:

- Utilizar estrategias avanzadas (OA a)
- Comprobar resultados propios y evaluar procesos (OA b)
- Identificar ideas propias y respuestas en lenguaje matemático (OA c)
- Utilizar un lenguaje funcional para resolver problemas y representar fenómenos cotidianos y científicos (OA h)
- Ajustar modelos acercándonos a la realidad (OA j)
- Identificar si un cambio es cuadrático o porcentual constante, y seleccionar el modelo adecuado (OA i)

Así también, se espera que los y las estudiantes, a lo largo de toda esta unidad sean capaces de trabajar colaborativamente, aborden problemas de la vida cotidiana de manera flexible y creativa, para ello, el Ministerio de Educación (2016, p. 95) propone el desarrollo de las siguientes actitudes:

- Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas (OA A)

- Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas (OA D)

Las Bases Curriculares establecen Objetivos de Aprendizaje Transversales como aquellos que "establecen metas de carácter comprensivo y general para la educación escolar, referidas al desarrollo personal, intelectual, moral y social de las y los estudiantes" (Ministerio de Educación, 2015, p. 25), por tanto, estos objetivos se desarrollan a lo largo de toda la instancia escolar, esto contempla clases, recreos, celebraciones de fiestas, entre otros y están estrechamente relacionados con los Objetivos de Aprendizaje (OA). En la educación media son promovidos mediante los contenidos, actitudes, habilidades, valores y comportamientos que deberían desarrollar los y las estudiantes y son incluidos en el currículum para su trabajo en conjunto.

Para el desarrollo de los Objetivos de Aprendizaje el Programa de Estudio propone Orientaciones Didácticas cuya finalidad es apoyar a los profesores y las profesoras en el quehacer docente.

> La búsqueda de nuevos conocimientos, así como del desarrollo de habilidades y de una comprensión más profunda de la matemática, ha llevado a los y las docentes a proponer variados lineamientos didácticos y numerosas metodologías de enseñanza. (Ministerio de Educación, 2016, p. 44)

Estas abordan los siguientes puntos:

- Aprender haciendo
- Centrar el aprendizaje en él o la estudiante
- Experiencias previas
- Conexiones
- Recurrir frecuentemente a representaciones, analogías y metáforas
- Progresión de complejidad
- Comunicación y aprendizaje cooperativo

- El uso de tecnologías de información y comunicación (TIC)
- Repasar y ejercitar
- La retroalimentación

Nuestra investigación se ocupará del siguiente Objetivo de Aprendizaje propuesto por el Ministerio de Educación (2016, p. 96):

> OA 4: Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica, o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones cuadráticas de la forma:
>
> - $ax^2 = b$
> - $(ax + b)^2 = c$
> - $ax^2 + bx = 0$
> - $ax^2 + bx = c$
>
> (a, b, c son números racionales, $a \neq 0$)

Durante el desarrollo de este Objetivo de Aprendizaje se abordarán los siguientes contenidos: ecuación cuadrática, discriminante y resolución (utilizando los métodos de factorización, completación de cuadrado y utilizando la fórmula general).

El Programa de Estudio (2016, p. 96) organiza los contenidos expuestos anteriormente de tal forma que presentan la ecuación cuadrática, luego los métodos de resolución cómo factorización, completación de cuadrado y fórmula general y finalmente utilizan discriminante para determinar la cantidad de soluciones en los números reales que tiene la ecuación cuadrática. A continuación, se presenta un esquema en el cual se ordenó todos estos contenidos:

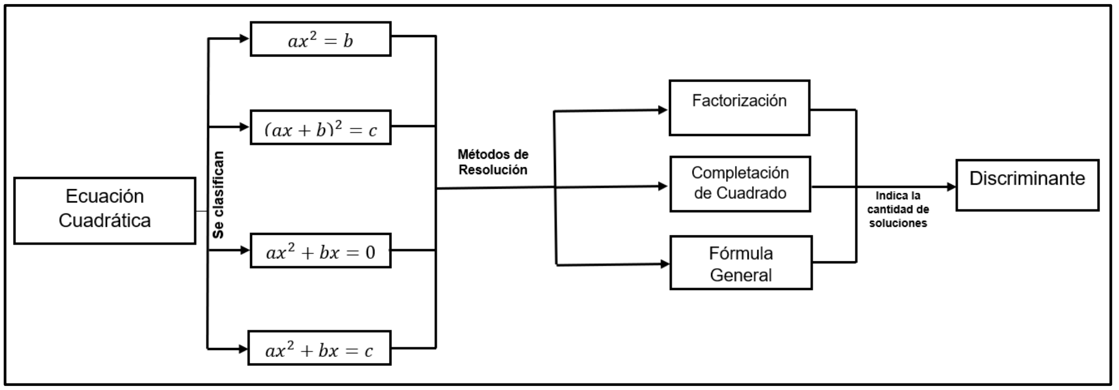


Figura 2. Mapa conceptual sobre la organización de los contenidos.
Fuente: Elaboración propia.

Para finalizar este análisis curricular se comentará sobre las actividades que propone, estas son 10 de las cuáles 6 buscan desarrollar la habilidad de resolver problemas, 2 modelar y 2 promueven ambas habilidades. Respecto a la pregunta ¿las actividades son problemas o ejercicios? Se considera ejercicio a aquella actividad en las cuales sus resultados son inmediatos, no requiere mucho esfuerzo por parte de los y las estudiantes, “En los ejercicios se puede decidir con rapidez si se saben resolver o no; se trata de aplicar un algoritmo, que pueden conocer o ignorar” (Peréz y Beltrán, 2011, p. 78), por otra parte, un problema se considera un proceso en el cual la solución no es inmediata, se debe analizar y reflexionar para lograrla, en relación con ello se menciona:

> Un "problema" sería una cuestión a la que no es posible contestar por aplicación directa de ningún resultado conocido con anterioridad, sino que para resolverla es preciso poner en juego conocimientos diversos, matemáticos o no, y buscar relaciones nuevas entre ellos (Pérez y Beltrán, 2011, p. 78)

Se concluyó que el Programa de Estudio posee diferentes tipos de actividades, entre ellas, cinco se consideran actividades de ejercicios, mientras que, existen otras cinco que se consideran problemas, entendiendo un problema como:

> Toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarla. Se añade como condición que la vía de pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer realizar la transformación. (Campistrous y Rizo, 1997, p. 9)

Dicho esto, un problema se considera una situación en la que no se puede responder de manera directa, sino que para encontrar una respuesta es necesario poner en juego conocimientos previos, en este caso matemáticos y buscar nuevas relaciones entre ellos.

A continuación, se presentará un ejemplo de un ejercicio planteado en el programa ministerial de segundo medio:

5. Resuelven las siguientes ecuaciones cuadráticas. Si es posible, no aplican la fórmula:
   - $5x^2 = 60x$
   - $4x^2 - 12x + 9 = 0$
   - $2x^2 + 12x + 10 = 0$
   - $x^2 + 6x + 9 = 1$
   - $(x + 25)^2 = 111x - 275$
   - $(x - 4) \cdot (x + 1,5) = 0$

Resolver problemas
Utilización de estrategias avanzadas. (OA a)

Figura 3. Actividad sugerida 5.

Fuente: Programa de Estudio Segundo medio (2016, p. 107)

En la figura 3 es posible determinar que la actividad 5 sugerida por el programa ministerial corresponde a la resolución de las ecuaciones cuadráticas planteadas, por tanto, corresponderá a una actividad que se basa solo en ejercicios.

En la siguiente figura se mostrará una actividad categorizada como problema, pues su respuesta no es directa. La actividad corresponde a:

Actividades

1. Si se prolonga un lado de un cuadrado en 2 cm y se acorta el otro lado en 2 cm, se obtiene un rectángulo con un área de 45 cm^2. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado inicial?
   - Confeccionan un bosquejo que represente el problema.
   - Elaboran la ecuación cuadrática con la cual se puede determinar la resolución.
   - Resuelven la ecuación; eligen la resolución que corresponde.
   - Realizan la prueba de la resolución.

Resolver problemas
Utilizar estrategias avanzadas. (OA a)

Resolver problemas
Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

Figura 4. Actividad sugerida 1.

Fuente: Programa de Estudio Segundo medio (2016, p. 105)

La figura 4 se categoriza como problema, ya que, la solución no es inmediata, primero los y las estudiantes deberán plantear un bosquejo sobre el cuadrado con las medidas de sus nuevos lados y además relacionarlo con el área de un cuadrado elaborando así la ecuación cuadrática correspondiente, por tanto, tendrían que disponer de conocimientos previos tales como áreas de cuadriláteros y multiplicación de binomios para luego resolver dicha ecuación y comprobar sus resultados.

1.2.7 Análisis Textos Escolares.

En esta sección se analizarán los Textos del Estudiante de Matemática de 2° Medio de los años 2017 y 2021, por una parte, el escrito del año 2017 fue escrito por Ana Chacón, Guillermo García, Pedro Rupin, Javiera Setz y Marcia Ramírez, Editorial SM, en él la ecuación cuadrática se aborda en la "Unidad 2: Álgebra y Funciones", específicamente en la lección 4, lo trata desde la página 94 a la 121. Por otra parte, el Texto del Estudiante de Matemática de 2° Medio del año 2021 fue escrito por Eduardo Díaz, Natalia Ortiz, Katherine Morales, Manuel Rebolledo, Robbie Barrera y Patricio Norambuena, Editorial SM, en este escrito la ecuación cuadrática se presenta en la "Unidad 2: Funciones cuadráticas, ecuaciones cuadráticas y la inversa de una función", trata dicho contenido desde la página 51 hasta la página 62.

Se comenzará analizando el Texto del Estudiante de Matemática del año 2017 el cuál comienza introduciendo el contenido recordando ecuaciones lineales, producto notables y factorización, para ello realizan seis ítems de ejercitación, luego comienza la siguiente sección: “Tema 1: ¿Cuándo se dice que una ecuación es cuadrática?”, se realiza una actividad de modelación en la cual se presenta un problema y deben identificar variables, cabe destacar que en este problema se les entrega una ecuación cuadrática. Posteriormente se formaliza el contenido presentando la siguiente definición de ecuación cuadrática:

> Se dice que una ecuación es **cuadrática**, o de segundo grado con una incógnita, cuando después de reducir sus términos semejantes se puede ordenar como: $ax^2 + bx + c = 0$. Los coeficientes a, b y c corresponden a números reales y a debe ser distinto de cero ($a \neq 0$).
>
> Así, por ejemplo, las expresiones de la forma $ax^2 = b$, $(ax + b)^2 = c$, $ax^2 + bx = 0$, y $ax^2 + bx = c$ son ecuaciones cuadráticas.
>
> Una ecuación cuadrática puede tener a lo más **dos soluciones** en los números reales.

Figura 5. Explicación Ecuación Cuadrática.

Fuente: Texto del estudiante, Matemática 2° medio (2017, p. 97)

Luego de presentar la definición el escrito presenta seis ítems de actividades en las cuales los y las escolares deben identificar la ecuación cuadrática y sus coeficientes. Posteriormente comienza el “Tema 2: ¿En qué consiste la resolución por factorización?”, al igual que en la lección anterior se comienza con una actividad introductoria en la que se presenta un problema y los y las estudiantes deben analizar la ecuación cuadrática y factorizarla, pero a diferencia de la sección anterior acá se trabajan con cuatro ítems de actividades antes de formalizar el contenido, luego de esto, se realizan tres ítems más de actividades de práctica. El método de resolución de ecuaciones cuadráticas se presenta de la siguiente manera:

- Cuando en una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ la expresión algebraica $ax^2 + bx + c$ se puede factorizar en dos expresiones lineales, la ecuación se puede resolver al separarlas en las dos ecuaciones lineales asociadas.
  Esto puede realizarse en los números reales ya que se cumple:
  $$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0.$$
- En particular, cuando en la ecuación $a = 1$, una estrategia posible es buscar dos números x_1 y x_2 tales que su producto sea igual a c y su suma sea igual a b, de forma que su factorización es:
  $$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = 0.$$
  En este caso, se tiene que x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación.
- Cuando $a \neq 1$, se puede intentar usar la estrategia anterior, dividiendo toda la ecuación por a para luego factorizarla, aunque esta idea no siempre logra simplificar la resolución de la ecuación, porque puede suceder que con los coeficientes obtenidos la expresión no sea simple de factorizar.

Figura 6. Explicación del Método de Factorización.

Fuente: Texto del estudiante, Matemática 2° medio (2017, p. 103)

Se da inicio a la siguiente sección “Tema 3: ¿Cuál es el algoritmo para completar cuadrado?”, se comienzan presentando dos actividades de modelación, en una de ellas se realiza el algoritmo de la completación de cuadrado y se les solicita a los y las estudiantes determinar las soluciones, posteriormente se formaliza el contenido y se realizan cuatro ítems de actividades de práctica. El método de resolución de completación de cuadrado se presenta de la siguiente manera:

El algoritmo de **completación de cuadrados** consiste en transformar una ecuación cuadrática, ya sea que esté escrita en la forma general $ax^2 + bx + c = 0$ o no, en una ecuación de la forma $(x - m)^2 = n$, siguiendo estos pasos:

1º Cuando la ecuación está en su forma general, si $a \neq 1$ se divide por a, y se resta el término independiente a ambos lados de la ecuación, de modo que quede de la forma: $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$.

2º Se calcula el término que permite completar el cuadrado: $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ y se suma a ambos lados de la igualdad.

3º En el lado izquierdo, se factoriza como un cuadrado de binomio y en el derecho, se calcula la suma para dejar solo un número racional. Si este resultado es negativo, la ecuación cuadrática no tiene solución en los números reales.

4º Se separa en dos ecuaciones. Como en el lado izquierdo hay una expresión algebraica que está al cuadrado, al escribir las ecuaciones lineales deba considerarse los dos signos. Es decir, se escribe una ecuación con el signo positivo (para el lado derecho) y otra con el signo negativo.

5º Luego, se resuelven las ecuaciones lineales resultantes y se expresa cada solución por separado.

Figura 7. Explicación del Método de Completación de Cuadrados.

Fuente: Texto del estudiante, Matemática 2° medio (2017, p. 107)

Por último, se presenta la siguiente sección: “Tema 4: ¿Cómo se aplica la fórmula general”, se presentan tres actividades introductorias, en una de ellas se presenta la fórmula general y se espera que los y las estudiantes la interpreten, indiquen los valores de los coeficientes, sustituyan en la fórmula y encuentren las soluciones, luego se formaliza este método y se presenta junto a la definición de discriminante, se realizan cinco ítems de actividades de práctica? El método resolución utilizando la fórmula general y discriminante se presenta de la siguiente manera:

Al considerar la **ecuación cuadrática** $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$; se pueden obtener sus soluciones, x_1 y x_2, directamente mediante las siguientes fórmulas generales:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Además, con la fórmula general se puede determinar la cantidad de soluciones reales de una ecuación cuadrática, sin necesidad de calcularlas rigurosamente, es decir, sin aplicar algún tipo de resolución.
Esto es posible calculando el valor del **discriminante** de una ecuación cuadrática, que se simboliza con la letra griega delta (Δ). Este valor, que se obtiene de la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$, cumple las siguientes características:

1º Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene **dos soluciones** en los números reales.

2º Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene **una solución** en los números reales.

3º Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación **no tiene solución** en los números reales.

Figura 8. Explicación de Fórmula General y Discriminante.
Fuente: Texto del estudiante, Matemática 2° medio (2017, p. 113)

Finalmente, este texto presenta una sección de evaluación en la que se presentan dieciséis ítems de actividades relacionadas en su mayoría a ejercicios, pues los y las estudiantes no necesitan realizar un análisis muy extenso para llegar a su resultado, a continuación, se presenta uno de ellos:

8 Resuelve las siguientes ecuaciones mediante la fórmula general.

a. $x^2 - 5x - 14 = 0$

b. $-x^2 - 11x - 30 = 0$

c. $2x^2 - x - 3 = 0$

d. $x^2 + 12x + 31 = 0$

e. $-2x^2 + 12x - 29 = 0$

f. $3x^2 - 10x + 8 = 0$

Figura 9. Actividad sugerida 8.
Fuente: Texto del estudiante, Matemática 2° medio (2017, p. 120)

Comenzando con el análisis del Texto del Estudiante de Matemática del año 2021 el cuál trata la ecuación cuadrática en la lección 5, inicia con una actividad de modelación, posteriormente presenta la definición de ecuación cuadrática, en ella especifica los distintos tipos de raíces como se puede observar en la Figura 10:

Una **ecuación de segundo grado** o **ecuación cuadrática** tiene la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0$$

Donde a, b y c son llamados coeficientes de la ecuación. Las ecuaciones de segundo grado tienen dos raíces o soluciones, las cuales denotaremos como x_1 y x_2, y se dividen en:

Raíces reales distintas	Raíces reales iguales	No pertenece a los reales
$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1 \neq x_2$	$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1 = x_2$	$x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$

Por ejemplo, la ecuación $3x^2 + 2x = 0$ es **incompleta** y tiene coeficientes $a = 3$, $b = 2$ y $c = 0$, mientras que $2x^2 + x - 3 = 0$ es **completa** con coeficientes $a = 2$, $b = 1$ y $c = -3$.

Figura 10. Explicación Ecuación Cuadrática.

Fuente: Texto del estudiante, Matemática 2° medio (2021, p. 51)

Luego de presentar esta definición se realizan seis ítems de ejercitación en la cual se espera que los y las estudiantes identifiquen los coeficientes de la ecuación cuadrática y analicen las soluciones de algunas ecuaciones. Se continúa al siguiente tema relacionado al método de resolución de ecuación cuadrática por factorización, en el se comienzan con dos ítems de ejercicios relacionados a la habilidad de modelar y luego se presenta el método de resolución de ecuaciones cuadráticas utilizando la factorización:

Un método para resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita es la factorización. Este método consiste en factorizar e igualar a cero cada uno de sus factores. De este modo, se despeja la incógnita en cada uno de ellos.

Ejemplo: $x^2 + 4x - 21 = 0$

$$(x + 7)(x - 3) = 0$$

$x + 7 = 0 \longrightarrow x_1 = -7$ o $x - 3 = 0 \longrightarrow x_2 = 3$

Figura 11. Explicación del Método de Factorización.

Fuente: Texto del estudiante, Matemática 2° medio (2021, p. 54)

Se continúa con cuatro ítems de ejercicios en los cuáles se espera que los y las escolares factoricen ecuaciones cuadráticas con cierto producto notable (sale detallado en el enunciado de cada ítem), cabe destacar que cada uno de ellos propone el enunciado, un ejemplo de lo que se espera que realicen los y las estudiantes y una cantidad de ejercicios.

Comenzando la sección de resolución de ecuaciones cuadráticas utilizando la completación de cuadrados se realizan tres ítems de actividades en las cuales uno de ellos resuelve una ecuación cuadrática utilizando este método y se detalla el paso a paso, se propone que los y las estudiantes realicen un análisis guiado por preguntas sobre estos pasos. Se propone la explicación de este método de la siguiente manera:

Un método para resolver ecuaciones de segundo grado es utilizar la **completación de cuadrados**. Para ello, sigue estos pasos:

PASO 1: Despejar el término libre de la ecuación.

$$5x^2 - 3x - 2 = 0 \longrightarrow 5x^2 - 3x = 2$$

PASO 2: Despeja el término cuadrático del coeficiente *a*.

$$5x^2 - 3x = 2 \quad / \cdot \frac{1}{5}$$

PASO 3: Completar el cuadrado de binomio sumando a ambos lados el cuadrado de la mitad del coeficiente de *x* para luego factorizarlo.

$$x^2 - \frac{3}{5}x = \frac{2}{5} \quad \text{/Se suma } \frac{9}{100} \text{ para formar } \left(x - \frac{3}{10}\right)^2.$$

$$x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{9}{100} = \frac{2}{5} + \frac{9}{100} \quad \text{/Factorizando:}$$

$$\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{49}{100}$$

PASO 4: Encontrar las soluciones de la ecuación mediante la factorización $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, considerando el cuadrado de binomio como uno de los términos.

$$\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 - \left(\frac{7}{10}\right)^2 = 0$$

$$\left(\left(x - \frac{3}{10}\right) - \left(\frac{7}{10}\right)\right) \cdot \left(\left(x - \frac{3}{10}\right) + \left(\frac{7}{10}\right)\right) = 0$$

$$x - \frac{3}{10} - \frac{7}{10} = 0 \text{ o } \quad x - \frac{3}{10} + \frac{7}{10} = 0$$

$$x - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} \quad \text{o} \quad x - \frac{3}{10} = -\frac{7}{10}$$

$$x_1 = 1 \quad \text{o} \quad x_2 = -\frac{2}{5}$$

Figura 12. Explicación del Método de Completación de Cuadrados.
Fuente: Texto del estudiante, Matemática 2° medio (2021, p. 57)

Se proponen tres ítems de ejercitación y se concluye el método. Se continúa con el método de resolución utilizando la fórmula general acá se presentan dos actividades, en una se presenta una demostración de la fórmula en cuestión y se les solicita a los y las estudiantes que analicen los pasos, mientras que en la segunda se presenta un ejemplo de la resolución utilizando este método y se muestra el paso a paso y se les solicita a los alumnos y las alumnas que realicen el mismo procedimiento con diez ecuaciones. Luego de estas actividades se formaliza este método y se concluye con tres ítems de ejercitación. A continuación, se presenta la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas:

En toda ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, es posible obtener sus soluciones mediante la **fórmula general**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \longrightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Figura 13. Explicación de la Fórmula General.

Fuente: Texto del estudiante, Matemática 2° medio (2021, p. 59)

Finalmente, se presenta la fórmula para encontrar el discriminante y su utilidad, luego de esto se realizan tres ítems de actividad, en los cuales uno de ellos presenta el enunciado junto con un ejemplo de lo que se espera que realicen. A continuación, se presenta la explicación de discriminante que muestra el texto:

El **discriminante** (Δ) de una ecuación cuadrática de fórmula general $ax^2 + bx + c = 0$ es:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Mediante el valor del discriminante de una ecuación cuadrática, es posible determinar la existencia de las soluciones. Se pueden dar tres casos:

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
La ecuación tiene dos soluciones reales distintas.	La ecuación tiene dos soluciones reales iguales.	La ecuación no tiene solución en los reales.

Figura 14. Explicación del Discriminante.

Fuente: Texto del estudiante, Matemática 2° medio (2021, p. 60)

Se finaliza la lección 5 relacionada a ecuación cuadrática con un taller utilizando material concreto.

Sobre las actividades que presenta el texto del año 2021 se puede concluir que en su mayoría se trata de ejercicios, pues los y las estudiantes no necesitan realizar un análisis sobre lo que deben realizar, dado que, la mayoría de los ejercicios van ejemplificados con un paso a paso. A continuación, se presenta un ejemplo de una actividad propuesta por este escrito:

3. Resuelve las ecuaciones de segundo grado factorizando con el producto notable pedido. Guíate por los ejemplos:

a. Mediante término común:

Ejemplo: $3x^2 - 9x = 0$

Paso 1: Se identifica el término común. En este caso es $3x$.

Paso 2: Se reescribe la ecuación utilizando el factor: $3x \cdot (x - 3) = 0$

Paso 3: Se resuelve: $3x = 0 \longrightarrow x_1 = 0$ o $x - 3 = 0 \longrightarrow x_2 = 3$

I. $x^2 - 7x = 0$

II. $6x^2 + 6x = 0$

III. $18x^2 + 15x = 0$

IV. $5x^2 + 23x = 0$

Figura 15. Actividad 3.

Fuente: Texto del estudiante, Matemática 2° medio (2021, p. 54)

Para concluir este análisis de los Textos del Estudiante de Matemática de 2° medio de los años 2017 y 2021 se puede decir que a modo general presentan el contenido en cuestión de manera similar, la única diferencia que se logró apreciar es en relación con el discriminante, pues en el texto del año 2017 se presenta junto a la explicación de la fórmula general, mientras que en el texto del año 2021 se presentan en secciones separadas.

1.3 Objetivos.

Objetivo general:

- ➔ Caracterizar las acciones que realizan estudiantes de segundo medio en la búsqueda de estrategias para la resolución de ecuaciones cuadráticas.

Objetivos específicos:

- ➔ Diseñar e implementar una propuesta de enseñanza aprendizaje que permita a los estudiantes utilizar cuatro métodos de resolución diferentes.
- ➔ Analizar los resultados entregados por los estudiantes respecto a la aplicación del método de Po-Shen Loh.
- ➔ Analizar los distintos tipos de estrategias utilizadas por los estudiantes luego de observar cuatro métodos de resolución distintos.
- ➔ Evaluar la propuesta de enseñanza aprendizaje respecto a los resultados entregados por los estudiantes.

CAPÍTULO II

OBJETO O CONTENIDO MATEMÁTICO

En este segundo capítulo de nuestro Seminario de Título, se presentarán, inicialmente, elementos de la epistemología del objeto matemático (incluida la historia de este). Por otro lado, se detallan una serie de definiciones relacionadas al objeto matemático y, por supuesto, otras, relacionadas en particular, con cada método de resolución de las ecuaciones cuadráticas. Además, se precisa cada uno de dichos métodos y los conceptos relacionados a ellos.

2.1 Elementos de la epistemología del objeto matemático.

El objeto matemático que abordaremos en este trabajo es la ecuación cuadrática, para ello se comenzará haciendo un análisis epistemológico con la finalidad de comprender cómo se consolidó y poder relacionar dicho objeto con la secuencia didáctica que se abordará más adelante.

El matemático Neugebauer, en el año 1930, descubrió que las ecuaciones cuadráticas fueron vistas por primera vez en la cultura babilónica (1.800 a 1.600 a.C.), Boyer (1986) en su libro titulado “La Historia de la Matemática” presenta un problema

> En el que se pide hallar el lado de un cuadrado si su área menos el lado es igual a 14,30 [el autor se refiere a 14,30 en sistema sexagesimal y, al transformarlo a sistema decimal, se tiene: $14 \times 60^1 + 30 \times 60^0 = 840 + 30 = 870$]; la solución a este problema es equivalente a la resolución de la ecuación $x^2 - x = 870$ y viene explicada por el escriba de la forma siguiente:
>
> Toma la mitad de 1 [el número 1 en el sistema sexagesimal es igual al 1 del sistema decimal y se expresa de la siguiente manera: $1 \times 60^0 = 1$], que es 0;30 [Al expresar 0;30 en sistema decimal se tiene $0 \times 60^0 + 30 \times 60^{-1} = 0{,}5$], y multiplica 0;30 por 0;30 [se realiza el producto entre $0{,}5 \times 0{,}5$], que es

0;15 [Al expresar 0;15 en sistema decimal se tiene $0 \times 60^0 + 15 \times 60^{-1} = 0{,}25$]; suma este número a 14,30 [sumando se tiene $870 + 0{,}25$], lo que da 14,30;15 [el resultado es $870{,}25$]. Este es el cuadrado de 29;30 [Al expresar 29;30 en sistema decimal se tiene $29 \times 60^0 + 30 \times 60^{-1} = 29 + 0{,}5 = 29{,}5$]; ahora suma 0;30 a 29;30 [Al sumar 29;30 con 0;30 en sistema decimal se tiene $29{,}5 + 0{,}5$], cuyo resultado es 30, que es el lado del cuadrado. (p. 56)

Al expresar con sistema decimal lo que el escriba decía, se tiene lo siguiente

<<Toma la mitad de 1, que es 0,5, y multiplica 0,5 por 0,5, que es 0,25; suma este número a 870, lo que da 870,25. Este es el cuadrado de 29,5; ahora suma 0,5 a 29,5, cuyo resultado es 30, que es el lado del cuadrado>>

Neugebauer encuentra este problema en uno de los textos escritos por los babilonios, sobre su solución, menciona que se obtiene aplicando la fórmula $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$, de la cual resulta lo que actualmente se conoce como una raíz o solución de la ecuación $x^2 - px = q$. Boyer (1986), también comenta sobre textos en los que los babilonios reducían ecuaciones cuadráticas a la forma canónica $x^2 + px = q$.

Boyer (1986), menciona que, en la época antigua, medieval y a comienzos de la edad moderna no eran consideradas las ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + px + q = 0$ donde *p* y *q* fueran números positivos, ya que, en estos casos la ecuación no tiene raíces o soluciones positivas (dado que los negativos no eran aceptados como números en ese momento), por ello clasificaron las ecuaciones cuadráticas en su forma canónica de la siguiente manera: $x^2 + px = q$; $x^2 = px + q$; $x^2 + q = px$. La solución de las ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + px + q = 0$ donde p y q fueran números positivos fueron resueltas a mediados de la edad moderna.

Continuando la evolución histórica del concepto, Yuste (2008), menciona que Diofanto de Alejandría introdujo por primera vez un algoritmo para resolver ecuaciones cuadráticas y por tanto surgió una definición para ecuación cuadrática que decía que son “igualdades en las que dos especies son iguales a una especie [se entiende como especie a un monomio[1]] ($ax^2 \pm bx = c$)” (p. 231). Sin embargo, el algoritmo de Diofanto careció de todo sentido en el ámbito geométrico. Aun así,

> Dicho algoritmo lo obtuvo mediante el desarrollo algebraico de completar el cuadrado, pero todavía pendiente de las limitaciones impuestas por sus predecesores. Sólo consiguió extraer una solución (o raíz) de cada una de las igualdades establecidas (pues no había posibilidad de admitir cantidades negativas). (Yuste, 2008, p. 219)

Dicho todo esto, a modo general los métodos babilónicos eran analógicos[2] y descriptivos, a diferencia de lo que proponía Diofanto, dado que, en su argumentación no infieren líneas ni superficies, tampoco se asemejaba a lo propuesto por los árabes quienes fueron los que justificaron la ecuación cuadrática a través de la geometría.

---

[1]Los monomios son una expresión algebraica cuyos elementos no están separados por los signos de las operaciones de la suma y la resta; en otras palabras, son un conjunto de letras y números relacionados entre sí por todas las operaciones aritméticas, excepto la suma y la resta, por ejemplo, axy, $bx^2y^3z^2$. (Cárdenas, 2014, p. 72)

Martel (2002), menciona que los hindúes (598 d.C. - 670 d.C.), por su parte, redujeron todos los casos planteados por Diofanto a uno sólo. Además, fueron unos de los primeros en dar las soluciones por parejas, por tanto, en ocasiones admitían soluciones negativas.

Dalcín y Olave (2007), indican que Mohammed ibn-Musa al-Jwarizmi (780 d.C. - 859 d.C.) destaca en una de sus obras llamada <<Precisiones sobre el

cálculo del al-jabr y al-muwabala>> en la que se describen ecuaciones cuadráticas en donde sus coeficientes debían ser positivos, dado que aún no se aceptaban los negativos como números. Además, admitía los coeficientes y soluciones racionales y positivas y para el coeficiente principal siempre era uno.

Martel (2002), menciona que Abraham bar Hiyya Na-Nasi (1.070 d.C. - 1.136 d.C.) fue un distinguido matemático y astrónomo nacido en Barcelona. Uno de sus libros que más destaca tiene el nombre de Liber Embadorum y en él se ofrece por primera vez una solución a las ecuaciones cuadráticas y los distintos casos sobre la resolución numérica como gráfica.

2.2 Objeto o contenido matemático.

Antes de comenzar con el objeto matemático, es importante aclarar ciertos conceptos ligados a la ecuación cuadrática:

---

[2] Vosniadou (1989), entiende un razonamiento analógico como una extrapolación de una estructura relacional desde un dominio conocido a un dominio nuevo, y cuyos dominios deben compartir una estructura similar.

[2] Holyoak y Koh (1987), definen un razonamiento analógico como una generación de conocimiento aplicable a un dominio nuevo por la transferencia del conocimiento de un dominio mejor conocido.

<u>Proceso algebraico</u>

> Un proceso matemático es algebraico si contiene una o varias de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación aplicadas una o varias veces, en cualquier orden, a números complejos cualesquiera [nos limitaremos al conjunto de los números reales] o a símbolos cualesquiera que representen números complejos. (Lehmann, 2008, p. 8)

Expresión algebraica

> De acuerdo con la definición anterior, el resultado de dicho tipo de proceso algebraico "se llama expresión algebraica" (Lehmann, 2008, p. 11).

Por lo mismo, se utilizarán los axiomas de cuerpo para justificar las demostraciones que se muestran más adelante, dado que, abordaremos el conjunto de los números reales como un cuerpo ordenado. Gutiérrez y Robinson (2015), nos dicen que

> Dado que el primer interés es abordar el estudio de la parte algebraica de los números reales, asumimos que sobre R están definidas dos operaciones binarias, denominadas suma y multiplicación, las cuales representaremos con "$+$" y "$\cdot$" respectivamente. Esto es, cada par de números reales x, y tiene asociado un único número real $x+y$ (su suma) y de igual manera otro único número real $x \cdot y$ (su producto). Escribiremos simplemente xy en lugar de $x \cdot y$. (p. 5)

Gutiérrez y Robinson (2015), en primera instancia, mencionan las propiedades que se cumplen en la igualdad en R.

I1 Reflexividad. Para todo $x \epsilon R$, se verifica que $x = x$.

I2 Simetría. Para todo $x, y \epsilon R$, si $x = y$, entonces $y = x$.

I3 Transitividad. Para todo $x, y , z \epsilon R$, si $x = y$ y $y = z$, entonces $x = z$

I4 Monotonía. Para todo $x, y , z \epsilon R$, si $x = y$, entonces $x + z = y + z$ y $xz = yz$. (p.5)

Luego, Gutiérrez y Robinson (2015), mencionan los axiomas de cuerpo para R, que será la base para cada justificación de los métodos que se mostrarán más adelante.

Para todo $x, y , z \epsilon R$

C1 Asociatividad. $(x + y) + z = x + (y + z)$ y $(xy)z = x(yz)$.

C2 Conmutatividad. $x + y = y + x$ y $xy = yx$.

C3 Existencia de módulos. Existe un número real 0 (cero) y un número real 1 (uno) tal que para todo $x \epsilon R$ se verifica $x + 0 = x$ y $x1 = x$.

C4 Existencia de inversos. Para todo $x \epsilon R$ existe $y \epsilon R$ tal que $x + y = 0$. Se denotará este y con $-x$. Además, para todo $0 \neq x \epsilon R$ existe $z \epsilon R$ tal que $xz = 1$. La notación usual para este z es x^{-1} o $\frac{1}{x}$.

C5 Distributividad. $x(y + z) = xy + xz$.

En este punto podemos decir que el conjunto R con las operaciones suma y multiplicación adquiere la estructura algebraica de cuerpo (también usualmente denominada campo). (p.5)

Por otro lado, Palacios (2002), define lo siguiente:

Llamaremos grupo al par $(G,*)$ constituido por un conjunto no vacío G y una operación sobre él que verifica las siguientes propiedades:

0) * es estable en G, es decir, $a * b \epsilon G, \forall a, b \epsilon G$

1) Asociativa, $(a * b) * c = a * (b * c), \ \forall a, b, c \ \epsilon G$
2) Existencia de elemento neutro, $e \epsilon G$ tal que

$$a * e = e * a = a, \forall a \epsilon G$$

3) Existencia de elemento simétrico, $\forall a, \epsilon G, \exists b \epsilon G$, tal que

$$a * b = b * a = e$$

(El elemento simétrico de a suele denotar por a’ ó a^{-1}). (p. 3)

Además, “si todos los elementos del grupo $(G,*)$ verifican la propiedad

4) Conmutativa, $a * b = b * a, \forall\, a, b \in G$ diremos que el grupo es conmutativo o abeliano" (Palacios, 2002, p. 3).

Con esto, es posible decir que "$(R, +)$ y $(R, \cdot)$ son grupos abelianos" (Palacios, 2002, p. 3).

Como se mencionó anteriormente, el conjunto de los números reales es ordenado, es decir, existe una relación que nos permite comparar dos números reales dados.

> Se asume que sobre R está definida una relación "menor que". Si $x, y \in R$, entonces $x < y$ se lee "x es menor que y". También utilizaremos la notación $y > x$ (se lee "y es mayor que x") como alternativa para $x < y$.
> Para nosotros no será relevante cómo se define esta relación menor que, lo realmente relevante es el hecho que se verifique las siguientes propiedades, denominadas axiomas de orden para los números reales.
>
> **O1 Tricotomía.** Para cada par de números reales x, y se verifica una y sólo una de las siguientes afirmaciones: $x < y$, $x = y$,∨ $y < x$.
>
> **O2 Transitividad.** Si $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$.
>
> **O3. Monotonía.** Si $x < y$, entonces $x + z < y + z$ para todo $z \in R$ y $xz < yz$ para todo $z > 0$. (Gutiérrez y Robinson, 2015, p. 11)

Términos semejantes

Además, es importante mencionar que "los términos algebraicos que difieren únicamente en sus coeficientes se llaman términos semejantes" (Lehmann, 2008, p. 12).

Variable

Una variable es “un símbolo que puede representar diferentes valores” (Lehmann, 2008, p. 67) en una expresión o relación, o en el desarrollo de un ejercicio o problema.

Constante

Una constante es algo completamente distinto a una variable, pues es “un símbolo que representa un valor fijo” (Lehmann, 2008, p. 67).

Incógnita

Wilhelmi, Godino y Lasa (2014), señalan que una incógnita es “algo que tiene un valor fijado pero que no se conoce aún” (p. 574).

Al trabajar con la ecuación cuadrática debemos considerar que tendremos incógnitas y que el símbolo que representará el valor buscado se usa como denominación de un número específico, pero que aún no se conoce su identidad. Por lo tanto, es importante realizar la diferenciación entre variable e incógnita al trabajar la ecuación cuadrática.

Ecuación

Lehmann (2008), se refiere a una ecuación como “una igualdad entre dos expresiones'' (p. 81). Además, llama miembros a dichas expresiones. Por otro lado, Carreño y Cruz (2017), señalan que, una ecuación es “una igualdad que presenta incógnitas y que es verdadera sólo para algunos valores de la incógnita” (p. 60).

Una solución

Reconociendo el concepto de ecuación es posible determinar que se trabajará con incógnitas, por tanto, Lehmann (2008), menciona que “todo número que satisface a una ecuación con una incógnita recibe el nombre de raíz o solución de esa ecuación” (p.82).

Entenderemos una solución de una ecuación según Aufmann y Lockwood (2013), como un número que, cuando se sustituye por la incógnita, nos da como resultado una ecuación verdadera.

Función cuadrática

Al referirnos a la función cuadrática, Lehmann (2008) dice que

> Nuestro estudio de las funciones enteras en x con el caso particular en que el grado es 2. Entonces la función se llama función cuadrática de x y generalmente se le escribe en la forma:
>
> $$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$
>
> en donde a, b y c son constantes [también llamados coeficientes]. (p. 101)

2.2.1 Ecuación Cuadrática.

Lehmann (2008) presenta la ecuación cuadrática de la siguiente manera:

> Si la función cuadrática de x se iguala a cero, entonces obtenemos la ecuación cuadrática con una incógnita.
>
> $$(1) \quad ax^2 + bx + c = 0$$
>
> en donde a, b y c son constantes [también llamados coeficientes] y el coeficiente de a debe ser distinto de cero. La ecuación (1) también se conoce como la forma canónica de la ecuación de segundo grado. (p. 101).

Los términos de una ecuación cuadrática son el término cuadrático ax^2, el término lineal bx y el término independiente c.

Ramírez (2011), hace referencia a los tipos de ecuaciones cuadráticas clasificándolas como completas, incompleta pura e incompleta mixta. Sobre las ecuaciones completas menciona que "si la ecuación contiene los tres términos [es decir, $ax^2 + bx + c = 0$], se dice que es una ecuación cuadrática completa" (p. 275). Por otra parte, clasifica las ecuaciones incompletas puras indicando que “si la ecuación contiene únicamente el término cuadrático, o bien una combinación del término cuadrático y el término independiente [$ax^2 = 0$ o $ax^2 + c = 0$], se dice que es una ecuación cuadrática incompleta pura” (p. 275). El último caso que considera es el de la ecuación cuadrática incompleta mixta mencionando que “Si la ecuación contiene únicamente el término cuadrático y el término lineal [$ax^2 + bx = 0$], se dice que es una ecuación cuadrática incompleta mixta” (p. 275).

Para encontrar las soluciones de la ecuación comúnmente se utilizan los métodos de factorización, Po-Shen Loh (método que es parte del objetivo de nuestra investigación), completación de cuadrados y aplicación de la fórmula general, que serán detallados más adelante.

2.2.2 Métodos de resolución de una ecuación cuadrática.

Principalmente, trabajaremos con tres métodos de resolución para una ecuación cuadrática. Además, utilizaremos un cuarto método de resolución que será incluido en la secuencia de aprendizaje, llamado “método de Po-Shen Loh”. De esta forma, los métodos de resolución de una ecuación cuadrática serán vistos en el siguiente orden: factorización, Po-Shen Loh, completación de cuadrados, fórmula general.

Método de resolución de una ecuación cuadrática por factorización.

Tanto en este, como en los siguientes métodos de resolución, se definirán ciertos conceptos referentes al propio método, que complementarán y facilitarán la comprensión.

En primer lugar, comenzaremos analizando el método de resolución por factorización, sin embargo, como acabamos de mencionar, es necesario dejar algunos conceptos claros antes de examinar dicho método.

<u>Factor</u>

Lehmann (2008), menciona que, al considerar la operación multiplicación tendremos dos símbolos a y b, que representarán dos números que multiplicaremos entre sí y, además, c será la representación de su producto. De esta forma, podemos representar la igualdad de la siguiente manera:

$$a \cdot b = c$$

De la cual a y b se llaman factores de c.

Baeza, et al. (2014) llama factor a "cada uno de los números o expresiones algebraicas que forman parte de una multiplicación" (p. 196).

Producto Notable

Existen productos de expresiones algebraicas que reciben el nombre de Producto Notable, "ya que el producto o resultado es fácil de obtener sin tener que hacer grandes multiplicaciones" (Baeza et al., 2014, p. 196). Con esto, es posible observar patrones especiales al realizar la multiplicación de binomios, entre los que más destacan son:

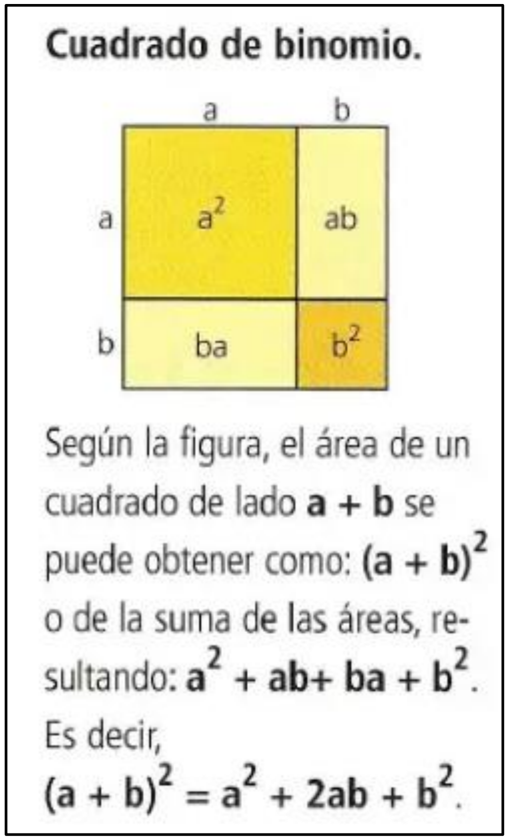
Cuadrado de binomio

Baeza, et al. (2014), menciona que un cuadrado de binomio "es igual al cuadrado del primer término, más (o menos) el doble del producto de ambos términos más el cuadrado del segundo término" (p. 196).

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \qquad \boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Figura 16. Fórmula cuadrado de binomio. Fuente: Aritmética y Álgebra (Baeza et al. 2014, p. 196)

Además, es posible determinar la relación entre la representación geométrica y algebraica del cuadrado de binomio en la siguiente imagen:



Según la figura, el área de un cuadrado de lado **a + b** se puede obtener como: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2$ o de la suma de las áreas, resultando: $\mathbf{a}^2 + \mathbf{ab} + \mathbf{ba} + \mathbf{b}^2$. Es decir,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Figura 17. Representación de un cuadrado de binomio de manera geométrica. Fuente: Aritmética y Álgebra (Baeza et al., 2014, p. 196)

Suma por diferencia

Baeza, et al. (2014), menciona que “el producto de la suma de dos términos por la diferencia de los mismos términos es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término” (p. 196). Por lo que se tiene que:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Figura 18. Fórmula suma por diferencia. Fuente: Aritmética y Álgebra (Baeza et al., 2014, p. 196)

Además, es posible determinar la relación entre la representación geométrica y algebraica de la suma por diferencia como muestra la siguiente imagen:

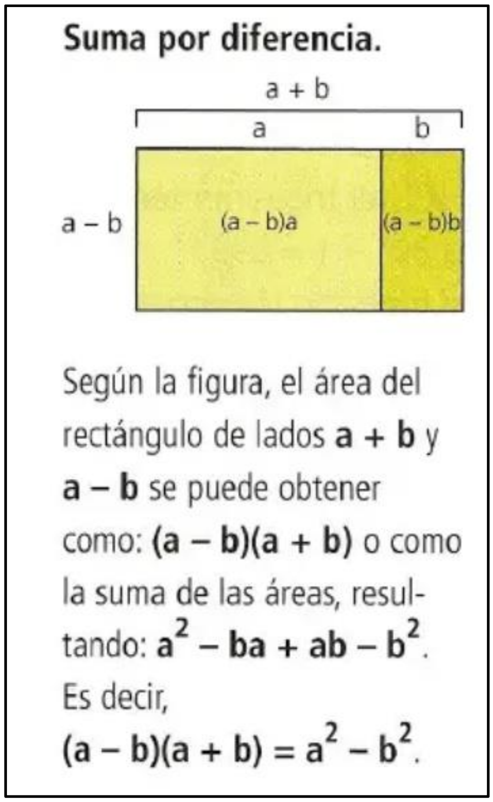


Figura 19. Representación de una suma por diferencia de manera geométrica. Fuente: Aritmética y Álgebra (Baeza et al., 2014, p. 196)

Por último, tendremos en consideración el siguiente producto notable:

Multiplicación de dos binomios con un término común

Baeza, et al. (2014), dice que “el producto de dos binomios con un término común es igual al cuadrado del primer término común, más el producto de la suma de los términos distintos por el término común, más el producto de los términos distintos” (p. 196), teniendo que:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Figura 20. Fórmula de una multiplicación de dos binomios con un término común. Fuente: Aritmética y Álgebra (Baeza et al., 2014, p. 196)

Presentados estos productos notables, es posible analizar el método de resolución de una ecuación cuadrática por factorización.

Factorización

Una factorización corresponde a la obtención de los factores de un producto dado. “Factorizar una expresión significa expresarla como producto de dos o más factores” (Baeza et al., 2014, p. 198).

Como se mencionó en 2.2.1, una ecuación cuadrática se puede escribir de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$. Para resolver una ecuación cuadrática con el método de factorización, se debe utilizar la propiedad del producto cero ($ab = 0$, si $a = 0$ o $b = 0$) cuando el polinomio $ax^2 + bx + c$ es factorizable.

Es importante considerar que “no siempre es posible encontrar una factorización del trinomio de una ecuación cuadrática, sin embargo, cuando es posible, permite resolverla de manera inmediata” (Baeza, et al., 2014, p. 243).

Así, los pasos que Lehmann (2008) menciona para resolver una ecuación cuadrática completa por factorización son los siguientes:

1. Escribir la ecuación cuadrática en su forma canónica.
2. Factorizar el trinomio general de segundo grado del primer miembro de la ecuación en dos factores lineales.
3. Establecer cada factor igual a cero.
4. Resolver ambas ecuaciones lineales para la incógnita.

Además, dice que, “la única restricción sobre las constantes a, b y c es que $a \neq 0$. Por tanto, tanto b como c, o ambas, pueden ser cero”. (p. 102)

Dicho esto, si se considera $c = 0$, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se reduce a:

$$(2)\ ax^2 + bx = 0$$

que puede ser factorizado de la siguiente forma (en este caso, por factor común):

$$x(ax + b) = 0 \ / \ C5\ Distributividad$$

se puede aplicar la propiedad $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0\ o\ b = 0$ lo que sería igual a resolver dos ecuaciones lineales, de la siguiente manera

$$x = 0 \text{ o } (ax + b) = 0$$

de esta forma, las soluciones de (2) corresponden a 0 y $-\frac{b}{a}$.

Por otra parte, si se considera $b = 0$, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se reduce a:

$$(3)\ ax^2 + c = 0$$

> Al resolver una ecuación del tipo $x^n = a$ en el conjunto de los números reales, no se toma en cuenta que en el caso en el cual n es par y a positivo, el doble signo “$\pm$” que aparece delante del radical n-ésimo de a, está generado por el módulo de x y no por el radical n-ésimo de a, que es sólo un número. (Buhlea y Gómez, 2008, p.18)

$$x^n = a \Rightarrow \sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{a} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} n = 2k \\ a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[2k]{x^{2k}} = \sqrt[n]{a} \Rightarrow |x| = \sqrt[n]{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt[n]{a} \\ \begin{cases} n = 2k+1 \\ a \in \Re \end{cases} \Rightarrow \sqrt[2k+1]{x^{2k+1}} = \sqrt[n]{a} \Rightarrow x = \sqrt[n]{a} \end{cases}$$

Figura 21. Utilización del signo “$\pm$”. Fuente: Sobre raíces y radicales. Efectos de dos culturas de enseñanza (Buhlea y Gómez, 2008, p. 18)

Ahora, podremos ocupar la definición anterior al llegar al último paso, primero se despeja la incógnita x y se tiene que:

$$ax^2 + c = 0 \qquad /+(-c)\ C4\ Existencia\ de\ inversos$$

$$\Leftrightarrow ax^2 = -c \qquad /\cdot \frac{1}{a}\ C4\ Existencia\ de\ inversos$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \qquad /\sqrt{\blacksquare}\ Extraer\ raíz$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

de esta forma, las soluciones de (3) corresponden a $+\sqrt{-\frac{c}{a}}$ y $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Por otro lado, Baeza et al. (2014) dice que

> Para calcular el valor numérico de una raíz se debe tener en cuenta el valor del índice y el signo de la cantidad subradical. Si consideramos la raíz $\sqrt[n]{a}$ se tiene que:
>
> Si n es par

- $a > 0$, el valor de la raíz es único.
- y $a = 0$, entonces el valor de la raíz es 0.
- y $a < 0$, no existe ningún número real que cumpla la condición $b^n = a$, por lo que la raíz no tiene ningún valor real. (p.119)

Por tanto, es fundamental considerar que el valor de $-\frac{c}{a}$ debe ser mayor o igual que cero para que las soluciones sean reales.

Método de resolución de una ecuación cuadrática por Po-Shen Loh.

En base a esto, se aplicará un método para resolver ecuaciones cuadráticas, Po-Shen Loh (2019, p. 2), menciona que, para que el método sea efectivo debemos encontrar una factorización de la siguiente forma:

$$x^2 + Bx + C = (x - R)(x - S)$$

Entonces, un valor de x hace que el producto sea cero justamente cuando al menos uno de los factores se vuelve cero, que sucede precisamente cuando $x = R$ o $x = S$. Por ley distributiva, basta con encontrar dos números R y S con suma $\frac{-B}{A}$, sin embargo, al tener la ecuación con coeficiente $A = 1$ se puede determinar que la suma es $-B$. Por otro lado, si realizamos el producto entre R y S obtendremos $\frac{C}{A}$, pero, $A = 1$, por lo tanto, el producto será C, y {R, S} será nuestro conjunto solución.

Además, menciona que dos números sumarán $-B$ justamente cuando su promedio sea $\frac{-B}{2}$, por lo que, basta con encontrar dos números de la forma $\frac{-B}{2} \pm z$ cuyo producto sea C, siendo "z" una cantidad desconocida. Lo interesante es que el producto de estos dos números es una diferencia de cuadrados, quedando de la siguiente manera:

$$\left(\frac{-B}{2} + z\right)\left(\frac{-B}{2} - z\right) = C \ / \ C5\ Distributividad$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-B}{2}\right)^2 - z^2 = C \ / \ C4\ Existencia\ de\ inversos$$

$$\Leftrightarrow z^2 = \frac{B^2}{4} \quad - C$$

Dado que siempre existe una raíz cuadrada (extendiéndose a los complejos si es necesario) seleccione arbitrariamente una raíz cuadrada de $\frac{B^2}{4} \quad - C$ que sea nuestro z y que satisfaga la última ecuación. Volviendo atrás a través de la lógica es posible concluir que R y S existen de la forma $\frac{-B}{2} \pm\ z$, y entonces

$$\frac{B}{2} \quad - \sqrt{\frac{B^2}{4} - C}$$

que justamente corresponde a todas las soluciones de la ecuación cuadrática original.

Método de resolución de una ecuación cuadrática por completación de cuadrados.

Antes de analizar el método de resolución por completación de cuadrados se presentarán algunos conceptos claves que facilitarán su comprensión.

<u>Binomio</u>

Lehmann (2008), señala que, “si dos o más expresiones algebraicas [definida en 2.2] están enlazadas por los signos $+$ o $-$, la expresión resultante se llama suma algebraica”. A su vez, “una suma algebraica de dos términos se llama binomio” (p. 12).

<u>Trinomio</u>

Kaufmann y Schwitters (2013), mencionan que, “los polinomios también se clasifican, cuando tienen dos términos, como binomio y cuando tienen tres términos como trinomios” (p.109).

<u>Trinomio cuadrado perfecto</u>

Se menciona que “los trinomios en los lados izquierdos [$ax^2 + bx + c$] se llaman trinomios cuadrados perfectos; son el resultado de elevar al cuadrado un binomio” (Kaufmann y Schwitters, 2013, p. 148).

Conociendo estas definiciones, Angel y Runde (2013), mencionan que, podemos resolver una ecuación cuadrática utilizando el método completación de cuadrado, para ello, se sumará una constante en ambos lados de la ecuación, pero en un miembro de la ecuación tendremos un trinomio cuadrado perfecto, así será posible calcular sus soluciones. Dicho esto, los autores proponen una serie de pasos para resolver una ecuación cuadrática utilizando el método por completación de cuadrados:

1. Si es necesario, utiliza la propiedad de la multiplicación (o división) de la igualdad para hacer que el coeficiente principal [el coeficiente a] sea 1.
2. Reescribe la ecuación aislando la constante [el coeficiente c] en el lado derecho de la ecuación.
3. Toma la mitad del coeficiente numérico del término de primer grado [la mitad del coeficiente b], elévala al cuadrado y suma esta cantidad en ambos lados de la ecuación.
4. Factoriza el trinomio como el cuadrado de un binomio.
5. Utiliza la propiedad de la raíz cuadrada, para tomar la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación.
6. Resuelve para la incógnita.
7. Verifica tus soluciones en la ecuación original. (Angel y Ruste, 2013, p. 496)

Método de resolución de una ecuación cuadrática por fórmula general.

<u>Discriminante</u>

“El discriminante de una ecuación cuadrática [$ax^2 + bx + c = 0$] es la expresión bajo el signo radical [bajo la raíz cuadrada] en la fórmula [general de la ecuación] cuadrática” (Angel y Runde, 2013, p. 508). Y corresponde a:

$$b^2 - 4ac$$

Baeza, et al. (2014), indica que,

> El discriminante suele denotarse por la letra griega Δ (delta). El discriminante permite determinar la cantidad de soluciones reales que tiene la ecuación:
>
> Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales [distintas].
>
> Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una solución real.
>
> Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales. (p. 244)

Dicho lo anterior, para la resolución de la ecuación de segundo grado utilizando la fórmula general, se debe comenzar verificando que la ecuación se encuentre de forma canónica. A continuación, se presenta una deducción de dicha fórmula:

$$ax^2 + bx + c = 0, \;\; a \neq 0,$$

$$\Leftrightarrow \; x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \; / \; C4\ Existencia\ de\ inversos$$

Luego, para completar cuadrados en el primer miembro de la ecuación, se sumará a ambos lados de la ecuación $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, tal como se mencionó en el paso 3 del método de completación de cuadrados, de esta forma el primer miembro de la ecuación se podrá escribir como un cuadrado de binomio.

$$\Leftrightarrow \; x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \; / \; I4\ Monotonía$$

$$\Leftrightarrow \; \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \; / \; Extraer\ raíz\ cuadrada$$

“Extrayendo la raíz cuadrada” (Lehmann, 2008, p. 104) se obtiene:

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \; / \; C4\ Existencia\ de\ inversos$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \; \vee x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (4)$$

Finalmente, las ecuaciones descritas en (4) son conocidas como la fórmula general de la ecuación de segundo grado y es común verla de la siguiente forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lo cual es reafirmado por Lehmann (2008), pues menciona que, “la ecuación de segundo grado con una incógnita, $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,$ tiene las soluciones: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$" (p. 105).

Otra demostración de la deducción de las soluciones de la ecuación de segundo grado es la siguiente:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad /\cdot 4a$$

$$/Propiedad\ I4\ Monotonía$$

$$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \qquad /+b^2$$

$$/Propiedad\ I4\ Monotonía$$

$$/+(-4ac)$$

$$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - 4ac = b^2 - 4ac$$

$$/Propiedad\ I4\ Monotonía$$

$$/C4\ Existencia\ de\ inversos$$

$$/4a^2x^2 + 4abx + b^2 = (2ax + b)^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \qquad /C5\ Distributividad$$

$$\Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \qquad /\sqrt{}$$

$$Extraer\ raíz\ cuadrada$$

$$\Leftrightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$/ +(-b)$

$/I4\ Monotonía$

$/C4\ Existencia\ de\ inversos$

$$\Leftrightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$/\cdot \frac{1}{2a}$

$/C4\ Existencia\ de\ inversos$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Finalmente, llegamos a las mismas soluciones para la ecuación (1).

Las soluciones de la ecuación cuadrática cumplen algunas propiedades, Lehmann (2008), menciona que, "las raíces de la ecuación cuadrática general están expresadas en términos de los coeficientes, la suma y el producto de las raíces también puede expresarse en términos de los coeficientes" (p. 108).

Luego, trabajando las soluciones de la ecuación, las sumaremos para verificar como se expresa en términos de los coeficientes, es decir:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac} - b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Con esto, es posible concluir que la suma de las soluciones de la ecuación cuadrática es igual a $\frac{-b}{a}$.

Por otro lado, realizando el producto de las soluciones para conocer su expresión en términos de los coeficientes se tiene que:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$
$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{b^2 - \ (b^2 - 4ac)}{4a^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{4ac}{4a^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Con esto, es posible determinar que el producto de las soluciones de la ecuación cuadrática es igual a $\frac{c}{a}$.

Lehmann (2008), enuncia un teorema que dice “en la ecuación general de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, la suma de las raíces es $-\frac{b}{a}$ y el producto es $\frac{c}{a}$” (p. 108).

Finalmente, los métodos presentados se justifican mediante las propiedades y axiomas de cuerpo de los números reales. En este caso, la propiedad transitiva nos permite verificar que las ecuaciones iniciales y finales son equivalentes, es decir, ambas poseen la misma solución.

CAPÍTULO III.

MARCO DE REFERENCIA.

En este tercer capítulo, titulado Marco de Referencia, se presentan los lineamientos que rigen nuestro diseño didáctico. En él, se detalla la Teoría de Situaciones Didácticas expuesta por Guy Brousseau y las situaciones generadas por los y las estudiantes, y el medio, tales como, situación de acción, formulación, validación e institucionalización (en la que es parte el profesor). Por otro lado, se presenta también la utilización del enfoque teórico en el diseño didáctico y cómo es aplicada la TSD en cada clase de nuestra propuesta.

3.1 Enfoque teórico del diseño didáctico.

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), propuesta por Brousseau, se origina en el año 1970, e indica las relaciones existentes entre el o la estudiante, el o la profesor(a) y el contenido en cuestión (en nuestro caso la ecuación cuadrática). De esta forma, Brousseau, citado en Avila (2001), propone lo siguiente:

> Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos y objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución. (p. 8)

Nuestro Seminario de Título tiene como marco de referencia esta teoría, y se proponen actividades didácticas cuya finalidad es que los y las estudiantes construyan su propio conocimiento, en estas situaciones el o la docente cumplirá un rol de mediador, el personaje principal en esta secuencia es el alumno o alumna. Brousseau, citado en Avila (2001), clasifica las relaciones que se generan entre los y las estudiantes y el medio en las siguientes categorías:

Situación de acción.

Son aquellas situaciones en las cuales los y las escolares interactúan con el medio, es decir

> Cuando el estudiante debe resolver un problema por sus propios medios sin ayuda externa se ve abocado a recurrir a recursos que se ha encontrado con anterioridad. En el caso de las situaciones didácticas, se pretende que el alumno eche mano de conocimientos previos, como lo son los conceptos o metodologías que ha utilizado para que descubra la forma de resolver la situación que se le ha planteado, pues en la medida en que el estudiante indague y profundice acerca de la situación, en esa misma medida obtendrá resultados óptimos. (Padilla, 2018, p. 21)

Situación de formulación.

En estos momentos, los y las alumnas intercambian ideas grupalmente, se espera que se utilice un lenguaje adecuado para que los emisores comprendan el mensaje, dicho en otras palabras,

> Una vez el estudiante ha resuelto la situación e interiorizado el concepto involucrado, la mejor forma de demostrar este conocimiento es comunicárselo a otro, o lo que es mejor aún, creando un discurso alrededor del mismo, que permita verificar que el conocimiento adquirido, no solamente pudo ser apropiado, sino que además se pueden inferir conclusiones a raíz de este y de la situación didáctica planteada. (Padilla, 2018, p. 21)

Situación de validación.

En esta fase, el individuo busca convencer a los demás oyentes de la validez de sus afirmaciones, es decir,

> El estudiante debe probar los instrumentos utilizados para lograr resolver la situación planteada, pero además debe estar dispuesto a defender con argumentos el porqué de las decisiones tomadas. A partir de aquí el estudiante puede emitir juicios para comprobar toda la metodología utilizada. (Padilla, 2018, p. 21)

<u>Situación de institucionalización.</u>

En este momento, el profesor formaliza el conocimiento del cual los y las estudiantes se han apropiado, en este momento el conocimiento se transforma en un saber, en otros términos,

> Es una situación de formalización de un conocimiento matemático producido por los alumnos y el saber cultural. Durante esta situación se deben sacar conclusiones, recapitular, sistematizar, ordenar y vincular lo que produjeron los alumnos en el desarrollo de las secuencias didácticas. La institucionalización es de alguna manera complementaria a la devolución. (Figueroa, 2013, p. 14)

Cabe destacar que este Seminario de Título comparte lo que menciona Ortiz (2015), quien menciona lo siguiente:

> Es así como, desde el punto de vista constructivista, se puede pensar que el aprendizaje se trata de un proceso de desarrollo de habilidades cognitivas y afectivas, alcanzadas en ciertos niveles de maduración. Este proceso implica la asimilación y acomodación lograda por el sujeto, con respecto a la información que percibe. (p. 99)

3.2 Utilización del enfoque teórico para el diseño didáctico.

Aplicando el enfoque teórico descrito en 3.1, en nuestro diseño didáctico se presentan diferentes situaciones dentro de la práctica educativa, entre ellas las a-didácticas y las didácticas, entendiendo las primeras como “una situación matemática específica de dicho conocimiento tal que, por sí misma, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional, permita o provoque un cambio de estrategia en el jugador" (Bosch et al., 1997), además, la situación a-didáctica

> Es únicamente una parte de una situación más amplia que Brousseau llama situación didáctica (específica de C). Ésta comprende las relaciones establecidas explícita o implícitamente entre los alumnos, un cierto medio (que incluye instrumentos y objetos) y el profesor, con el objetivo de que los alumnos aprendan el conocimiento matemático C. (Bosch et al., 1997. p. 217)

Por lo mismo, es que se relacionarán dichas situaciones al diseño didáctico propuesto para el proceso de enseñanza aprendizaje de resolución de ecuaciones cuadráticas.

Durante las situaciones a-didácticas ocurridas en el desarrollo de resolución de problemas propuestos por el profesor, se pueden observar tres fases, que son las de acción, formulación y validación, descritas en 3.1, mientras que, la institucionalización es una situación de formalización de un conocimiento matemático.

Se plantea en el diseño e implementación de la secuencia didáctica incorporar una situación a-didáctica, que es fundamental en la Teoría de Situaciones Didácticas. En la sesión 12 se presenta en una hoja un problema contextualizado, para que las estudiantes trabajen en torno a las tres fases anteriores.

La sesión fue trabajada con tiempos establecidos, en primer lugar, se entrega el problema a cada estudiante para que lean el enunciado y luego trabajen individualmente, de este modo, se incluye la situación de acción, dado que, las estudiantes tenían que utilizar conocimientos previos y actuar sobre el problema utilizando estrategias propias.

En segunda instancia, al acabar la situación de acción, se propone a las estudiantes trabajar en parejas o tríos, incorporando de este modo la situación de formulación, pues, en este momento, las estudiantes intercambian información comunicando sus desarrollos.

Luego, se incluye la situación de validación, para ello, se solicita a 3 estudiantes para que voluntariamente pasen a la pizarra a mostrar los desarrollos realizados. En este caso, el alumno es el emisor y debe ser capaz de validar su desarrollo frente a los demás.

Finalmente, se institucionaliza el contenido utilizando los mismos desarrollos realizados por las estudiantes en la pizarra, destacando lo que realizaron de manera correcta y corrigiendo los errores existentes, utilizándolos como un momento de aprendizaje.

Por lo mismo, es que la Teoría de Situaciones Didácticas se incorpora en la secuencia de clases diseñada, dado que, existen situaciones que son claves y esenciales en la teoría propuesta por Brousseau, citado en Avila (2001).

CAPÍTULO IV.

METODOLOGÍA.

En este capítulo, correspondiente a la Metodología, se profundizan los elementos de la Ingeniería Didáctica con sus respectivas fases. En complemento, se presenta un esquema que muestra la relación existente entre el alumno, el profesor y el saber.

Por otro lado, se presentan las características del Estudio de Clase, con sus 3 partes (preparación, implementación y revisión) y un detalle de la aplicación de la metodología en nuestra propuesta de enseñanza aprendizaje.

4.1 Elementos de la Ingeniería Didáctica.

En cuanto a la metodología de Ingeniería Didáctica, es necesario mencionar que, según Calderón y León (2005), corresponde a una “metodología de investigación en el campo de la didáctica” (p. 71), y está sistematizada de acuerdo con el orden de complejidad del objeto matemático (en nuestro caso, ecuación cuadrática). Considerando la evolución de los conocimientos y, además, la hipótesis de aprendizaje relacionada con el “aprender haciendo”, es importante considerar a las y los alumnos y sus participaciones, interacciones, acciones y afirmaciones. Según De Faria (2006), de acuerdo con la metodología de investigación, la Ingeniería Didáctica “se caracteriza por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en el aula, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza” (p. 2), pero también se caracteriza por “el registro de los estudios de caso y por la validación que es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis apriori y aposteriori” (p. 2).

Ahora bien, es fundamental recordar que la Ingeniería Didáctica nace de la Teoría de Situaciones Didácticas y de la Teoría de la Transposición Didáctica, lo cual puede ser representado en el siguiente esquema:

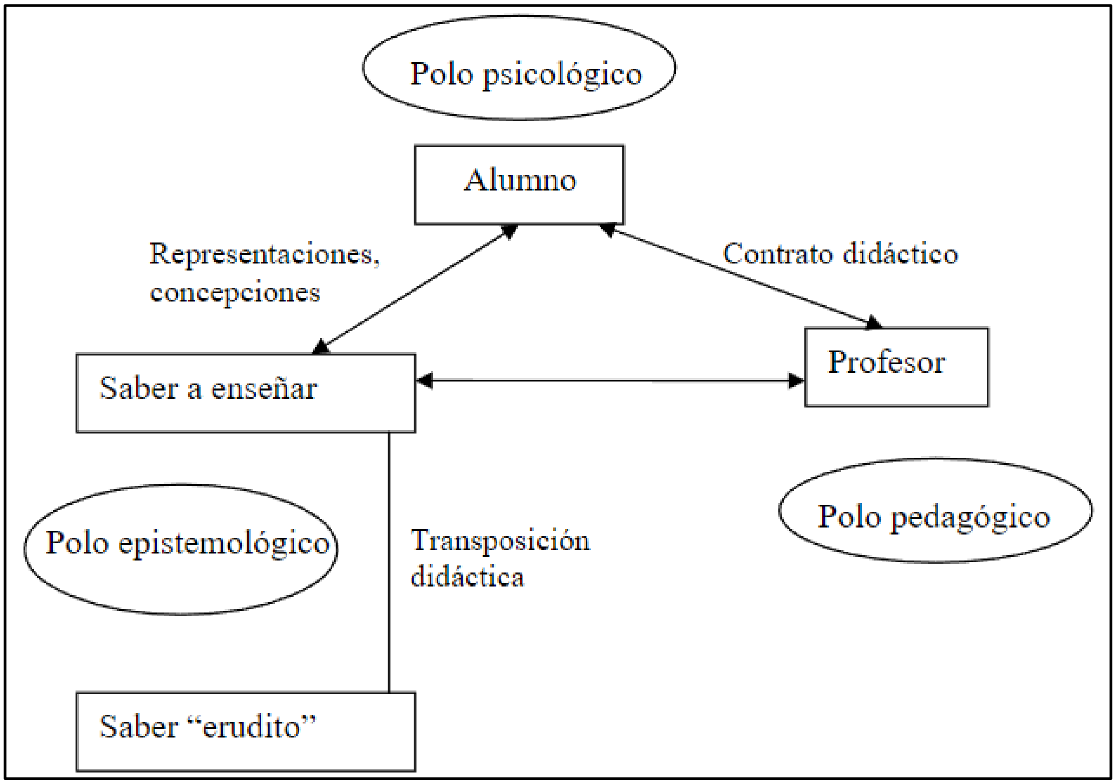


Figura 22. Relación entre el alumno, profesor y el saber. Fuente: Ingeniería Didáctica. (De Faria, 2006, p. 2)

Por otro lado, según Artigue et al. (1995), la Ingeniería Didáctica está compuesta por 4 fases:

- Análisis preliminar, con su respectiva dimensión epistemológica, cognitiva y didáctica. Los análisis preliminares más frecuentes son:

  El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
  El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
  El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.

> El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.
> Y, por supuesto, todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación. (p. 38)

- Concepción y Análisis apriori, donde se identifican las variables macro y micro didácticas: “las variables macro-didácticas o globales, concernientes a la organización global de la Ingeniería. Y las variables micro-didácticas o locales, concernientes a la organización local de la Ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase” (p. 42).
- Experimentación, donde se prueba el diseño creado y se recopilan todos los datos que entrega la fase anterior, que corresponde a la Concepción y Análisis apriori.
- Análisis aposteriori y evaluación, donde se analizan los resultados obtenidos por parte de los y las estudiantes y se contrastan las ideas previas de la prueba de la secuencia didáctica versus los resultados obtenidos. Además, esta fase, según Artigue et al. (1995)

> Se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se completan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso. (p. 48)

Ahora bien, es fundamental relacionar este Seminario de Título con las etapas utilizadas de la Ingeniería Didáctica. Para ello, las fases presentes son:

<u>Análisis preliminar.</u>

Se considera una clase inicial, correspondiente al análisis epistemológico de la ecuación cuadrática y, por supuesto, las concepciones propias de las estudiantes, teniendo en cuenta los conocimientos que habían adquirido y reforzándolos antes de comenzar con nuestra propuesta.

Concepción y análisis apriori.

Se realiza nuestra propuesta de enseñanza aprendizaje, considerando los análisis apriori de las sesiones claves. De esta forma, se tomó en cuenta el contexto del curso, es decir, una variable didáctica, provocando adaptaciones de nuestra propuesta y así, promover el aprendizaje de las estudiantes.

Experimentación.

En esta fase, el profesor indica a las estudiantes el objetivo de cada clase y cómo será la dinámica de cada una, observando cada acción que realizaban las alumnas para poder mejorar las clases siguientes.

Análisis aposteriori y evaluación.

Se consideran los resultados que proporcionan las estudiantes luego de las clases de nuestra propuesta de enseñanza aprendizaje, y se contrasta con el análisis apriori, teniendo en cuenta las guías y trabajo en clases.

4.2 Metodología de Estudio de Clases.

En relación con la metodología de Estudio de Clases, es importante recalcar que comenzó a finales del siglo XIX y corresponde a “un proceso mediante el cual los profesores trabajan en común para mejorar progresivamente sus métodos pedagógicos, examinándose y criticándose mutuamente las técnicas de enseñanza” (Mena, 2007, p. 1), lo cual contribuye enormemente a la formación profesional de los docentes.

“El Estudio de Clases consiste en la preparación; la clase a investigar, y sesiones de revisión” (Isoda, 2007, p. 26).

La primera etapa, “preparación”, es el proceso de transformar un proyecto de currículo proyectado, tal como el que se encuentra en la Guía de Orientaciones para la Enseñanza o en los libros de texto, en uno que puede implementarse en el aula. Este proceso comienza con la búsqueda y selección de materiales relevantes para el propósito de la clase, y sigue con el refinamiento de su diseño, sobre la base de las necesidades efectivas de los alumnos; todo lo anterior se reúne en un plan de clase. Lo significativo del Estudio de Clases es que todos estos procesos se realizan en colaboración con otros profesores. Se enseña entonces una clase, la clase a investigar, basada en el plan elaborado. Ella es observada por una cantidad –variable– de profesores, a quienes a menudo se suman instructores universitarios y supervisores de la junta de educación correspondiente. Luego de la clase, se hace una sesión de revisión con los observadores. (Isoda, 2007, p. 28)

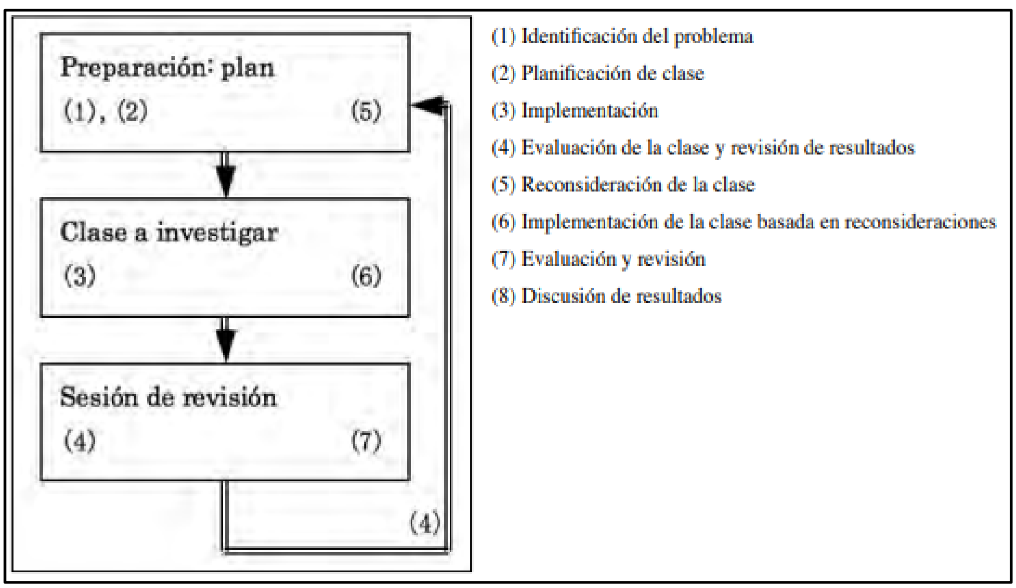


Figura 23. Diagrama de flujo de entrenamiento pedagógico.
Fuente: (Stigler y Hiebert, 1999)

Según Mena (2007), El Estudio de Clases se compone de tres partes:

- Preparación: corresponde a

transformar un proyecto de currículo, tal como el de la Guía de Orientaciones para la Enseñanza o el que se encuentra en unos libros

> de texto, en uno que puede implementarse en el aula. Trabajando en colaboración, los profesores buscan y seleccionan materiales relevantes para el propósito de la clase, refinan un primer diseño de acuerdo con las necesidades efectivas de los alumnos, y reúnen todo ello en un plan de clase. (p. 2)

- Clase de Estudio: también llamada "de investigación, que se enseña, y a la cual asiste una cantidad variable de profesores, a quienes a menudo se suman instructores universitarios y supervisores" (p. 3). Implica la realización y la experimentación de la clase (incluye el desarrollo, la gestión y visita de los pares, en ocasiones, incorpora la grabación de un video para su posterior revisión).

- Revisión: esta fase incluye a los observadores.

> Comienza con un breve preámbulo en que el profesor que impartió la clase explica su propósito. Sobre la base del plan de enseñanza distribuido de antemano, se explicitan conceptos acerca de los materiales pedagógicos y características o estatus de los alumnos, de acuerdo con cada etapa de la clase, y los propósitos de cada problema y actividad realizados en ella. Luego, cada participante expresa opiniones y pregunta acerca de los problemas dados en la clase y el rol formativo del profesor, así como acerca de las expresiones y actividades de aprendizaje de los alumnos. (p. 3)

En otras palabras, esta fase corresponde a la discusión de la clase después de haberla realizado (incluye el análisis de la clase en equipo, la experiencia de la clase por parte del o la docente que la impartió y la discusión de los pares sobre el plan de clases). De esta forma, los y las profesores tienen un rol esencial, pues son ellos quienes aprenden sobre la forma en la que dictan sus clases y, por otro lado, desarrollan la propia seguridad para poder componer un mejor modelo de clase (rediseñada).

Considerando tanto la metodología de Ingeniería Didáctica como la de Estudio de Clases, es que aplicaremos el diseño didáctico en el Liceo Paulina Von Mallinckrodt, en el nivel de II° medio. En cuanto a la Ingeniería Didáctica y sus elementos, están íntegramente relacionados con nuestro diseño didáctico y, el Estudio de Clases, se realizará en la última sesión (Clase 12 que se presentará en Capítulo VI).

CAPÍTULO V.

SECUENCIA DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE.

En el presente capítulo, se presenta la descripción de la secuencia de enseñanza aprendizaje, considerando el contexto en el cual se implementa, junto con el nivel del curso y el número de estudiantes, sumado a la cantidad de planes de clases y el objetivo general de la propuesta. Por otro lado, se muestra la tabla de la secuencia de clase, relacionada a la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Además, se exhibe una tabla con el plan de clases, detallando el objetivo de cada sesión, junto con las respectivas guías y análisis apriori de las situaciones de aprendizajes claves.

5.1 Descripción de la secuencia enseñanza aprendizaje.

En este punto, es importante mencionar que nuestra secuencia de enseñanza aprendizaje está preparada para las estudiantes del Liceo Politécnico Paulina von Mallinckrodt, de Providencia. En relación con el curso en el que se realizará la implementación, corresponde al II° A, conformado por 30 alumnas (el liceo es exclusivamente de mujeres) y sus edades están en el rango de 15 a 16 años.

En relación con la asignatura de Matemática, nuestra secuencia y Planes de Clases son parte del eje de Álgebra y Funciones, específicamente del OA 04, nivel 2, que nos indica lo siguiente:

> Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica, o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones de la forma:
>
> - $ax^2 = b$
> - $(ax + b)^2 = c$
> - $ax^2 + bx = 0$

- $ax^2 + bx = c$

(a, b, c son números racionales, $a \neq 0$) (Ministerio de Educación, 2015, p. 124)

Para la propuesta de enseñanza aprendizaje, consideramos 12 Planes de Clases, algunos de dos horas pedagógicas (45 minutos cada una) y otros, de sólo una.

El objetivo general de la propuesta es caracterizar las acciones que realizan estudiantes de segundo medio en la búsqueda de estrategias para la resolución de ecuaciones cuadráticas. En cuanto a las guías de trabajo, su objetivo principal es monitorear los avances de las estudiantes, estas se trabajarán en parejas y se irán retroalimentando en la clase siguiente. La metodología de trabajo se basa en una planificación diversificada utilizando diferentes métodos para la resolución de ecuaciones de segundo grado aplicados en diversos contextos con el propósito de “enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en todos los estudiantes” (Currículum Nacional, 2022) para que así las estudiantes opten a procedimientos que se adapten a sus capacidades, habilidades y competencias. Además, los contenidos adquiridos que necesitan las alumnas para realizar las actividades de resolución de ecuaciones cuadráticas son productos notables, factorización, propiedades de los números reales, método de factorización, método de Po-Shen Loh, método de Completación de cuadrados y método por fórmula general.

A continuación, se presenta la tabla de la secuencia de clase relacionada a la Teoría Antropológica de lo Didáctico:

Clase	**Tarea**	**Técnica**	**Tecnología**	**Teoría/ Obj. matemátic**

				o
1	Determinar la ecuación del siguiente problema: El patio de José tiene forma rectangular, el largo mide 6 metros más que su ancho y el área total es de 16 m^2.	Establecer incógnitas. Representar gráfica y algebraicamente el problema. Determinar posibles valores que satisfacen la ecuación.	Factorización. Multiplicación de expresiones algebraicas. Propiedades de la igualdad. Características y propiedades de un cuadrilátero. Sistema de medición por asignación de valores.	Ecuación cuadrática. El conjunto de los números reales es un cuerpo. Función área. Función medida. Paralelogramos, clasificación y propiedades.
2	Determinar las edades de Carlos y Lucía, considerando lo siguiente: Carlos es tres años mayor que Lucía y la suma de los cuadrados de ambas	Establecer incógnitas. Representar algebraicamente el problema mediante una ecuación. Reducir términos semejantes.	Multiplicación de expresiones algebraicas. Propiedades de la igualdad. Cuadrado de binomio. Factorización de trinomio. Propiedad de	Ecuación cuadrática. Método de resolución de una ecuación cuadrática por factorización.

	edades es 89	Simplificar la ecuación. Determinar los valores que satisfacen la ecuación mediante el método de resolución por factorización.	producto nulo.	El conjunto de los números reales es un cuerpo.
3	Determinar las edades de Paula y Josefa considerando lo siguiente: Las edades de Paula y Josefa suman 11 años y el producto de sus edades es de 18 años.	Establecer incógnitas. Representar algebraicamente el problema mediante una ecuación. Determinar los valores que satisfacen la ecuación mediante el método de resolución por factorización. Analizar las soluciones acordes al problema.	Multiplicación de expresiones algebraicas. Propiedades de la igualdad. Factorización de trinomio. Propiedad de producto nulo.	Ecuación cuadrática. Método de resolución de una ecuación cuadrática por factorización. El conjunto de los números reales es un cuerpo.

4	Determinar las dimensiones de un cuadro considerando lo siguiente: El largo de un cuadro es 5 metros mayor que su ancho, si el área es $150\ m^2$	Establecer incógnitas. Representar algebraicamente el problema mediante una ecuación. Determinar los valores que satisfacen la ecuación mediante el método de resolución por factorización. Analizar las soluciones acordes al problema.	Multiplicación de expresiones algebraicas. Propiedades de la igualdad. Factorización de trinomio. Propiedad de producto nulo. Características y propiedades de un cuadrilátero. Sistema de medición por asignación de valores.	Ecuación cuadrática. Método de resolución de una ecuación cuadrática por factorización. El conjunto de los números reales es un cuerpo. Función área. Función medida. Paralelogramos, clasificación y propiedades.
5	Determinar la ecuación cuadrática considerando los	Establecer distancias. Representar geométricame	Multiplicación de expresiones algebraicas. Propiedades de	Ecuación cuadrática. Método de resolución

	datos que entrega la situación problema.	nte el problema. Representar algebraicamente el problema mediante una ecuación. Determinar la distancia entre cada punto de penal a la mitad de la cancha. Determinar la distancia desde el inicio de la cancha a cada punto penal. Determinar la ecuación cuadrática solicitada.	la igualdad. Sistema de medición por asignación de valores. Suma por diferencia.	de una ecuación cuadrática de Po-Shen Loh. El conjunto de los números reales es un cuerpo. Función medida. Paralelogramos, clasificación y propiedades.
6	Determinar en cuántos años la edad del abuelo será igual al producto de las edades de ambos nietos	Establecer incógnitas. Representar algebraicamente el problema mediante una ecuación.	Multiplicación de expresiones algebraicas. Propiedades de la igualdad. Suma por diferencia.	Ecuación cuadrática. Método de resolución de una ecuación cuadrática

	considerado lo siguiente: Un abuelo tiene 67 años y sus dos nietos tienen 3 y 4 años.	Determinar los valores que satisfacen la ecuación mediante el método de resolución de Po-Shen Loh. Analizar las soluciones acordes al problema.		de Po-Shen Loh. El conjunto de los números reales es un cuerpo.
7	Determinar cuántas personas asistieron a un asado considerando lo siguiente: Un curso organiza un asado de fin de año, para el cual una persona se encarga de las compras y gasta \$45.000, dinero que será devuelto mediante una	Establecer incógnitas. Representar algebraicamente el problema mediante una ecuación. Simplificar la ecuación. Determinar los valores que satisfacen la ecuación mediante el método de resolución de Po-Shen Loh. Analizar las	Multiplicación de expresiones algebraicas. Propiedades de la igualdad. Suma por diferencia.	Ecuación cuadrática. Método de resolución de una ecuación cuadrática de Po-Shen Loh. El conjunto de los números reales es un cuerpo.

	cuota que pagará cada participante del asado. Pero seis personas que habían dicho que no irían, cambiaron de opinión y asisten al asado. Entonces la cuota por persona disminuye $250.	soluciones acordes al problema.		
8	Determinar el ancho de un marco de pintura considerando lo siguiente: El marco de una pintura mide 18 cm por 14 cm. La pintura ocupa $192\ cm^2$.	Establecer incógnitas. Representar algebraicamente el problema mediante una ecuación. Determinar los valores que satisfacen la ecuación mediante el método de resolución por completación de cuadrados.	Multiplicación de expresiones algebraicas. Propiedades de la igualdad. Cuadrado de binomio. Características y propiedades de un cuadrilátero. Sistema de medición por asignación de valores.	Ecuación cuadrática. Método de resolución de una ecuación cuadrática por completación de cuadrados. El conjunto de los números reales es un cuerpo.

		Analizar las soluciones acordes al problema.		Función área. Función medida. Paralelogramos, clasificación y propiedades.
9	Hallar el lado de un cuadrado cuya diagonal mide 3 cm más que un lado.	Establecer incógnitas. Representar algebraicamente el problema mediante una ecuación. Determinar los valores que satisfacen la ecuación mediante el método de resolución por completación de cuadrados. Analizar las soluciones acordes al problema.	Multiplicación de expresiones algebraicas. Propiedades de la igualdad. Cuadrado de binomio. Características y propiedades de un cuadrilátero. Sistema de medición por asignación de valores.	Ecuación cuadrática. Método de resolución de una ecuación cuadrática por completación de cuadrados. El conjunto de los números reales es un cuerpo. Función área. Función medida.

				Cuadrado y sus propiedades. Teorema de Pitágoras.
10	La suma de los cuadrados de tres números pares consecutivos es 596. Determinar el mayor entero del trío.	Establecer incógnitas. Representar algebraicamente el problema mediante una ecuación. Determinar los valores que satisfacen la ecuación utilizando la fórmula general. Analizar las soluciones acordes al problema.	Multiplicación de expresiones algebraicas. Propiedades de la igualdad. Cuadrado de binomio.	Ecuación cuadrática. Método de resolución de una ecuación cuadrática utilizando la fórmula general. El conjunto de los números reales es un cuerpo.
11	Determinar el ancho que debe tener el pasto para que quede	Establecer incógnitas. Representar algebraicamen	Multiplicación de expresiones algebraicas. Propiedades de	Ecuación cuadrática. Método de resolución

	repartido uniformemente considerando lo siguiente: Se instalará una piscina cuyo largo es de $20\,m$ y cuyo ancho es de $16\,m$. El liceo compró un total de $160\,m^2$ de pasto sintético que se pondrá alrededor de la piscina. Si se desea utilizar todo el material disponible.	te el problema mediante una ecuación. Simplificar la ecuación. Determinar los valores que satisfacen la ecuación utilizando la fórmula general. Analizar las soluciones acordes al problema.	la igualdad. Características y propiedades de un cuadrilátero. Sistema de medición por asignación de valores.	de una ecuación cuadrática utilizando la fórmula general. El conjunto de los números reales es un cuerpo. Función área. Función medida. Paralelogramos, clasificación y propiedades.

5.2 Planes de Clases.

En la sección de anexos se adjuntan los planes de clases, en estos se detalla el eje temático, unidad de aprendizaje, objetivo de aprendizaje, objetivo de la clase, actitudes, habilidades, actividades y acciones que realiza el docente.

A continuación, se presenta un cuadro de resumen en él se exponen las secciones de clases junto a sus objetivos.

Número de Clase	Objetivo de la clase
1	Identificar y plantear ecuaciones cuadráticas y sus componentes.
2	Analizar y resolver una ecuación cuadrática utilizando el método de resolución por factorización.
3	Resolver problemas contextualizados relacionados con la situación problema utilizando el método de factorización.
4	Resolver guía de aprendizaje N°1 de ecuación cuadrática relacionada al método de factorización.
5	Analizar y resolver problemas que involucren ecuaciones cuadráticas utilizando el método de resolución de Po-Shen Loh.
6	Resolver problemas contextualizados relacionados con la ecuación cuadrática utilizando el método de Po-Shen Loh.
7	Resolver guía de aprendizaje N°2 de ecuación cuadrática relacionada al método de Po-Shen Loh.
8	Analizar y resolver problemas que involucren ecuaciones cuadráticas utilizando el método de resolución de completación de cuadrados.
9	Resolver guía de aprendizaje N°3 de ecuación cuadrática relacionada al método de completación de cuadrados.
10	Analizar y resolver problemas que involucren ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general. Utilizar discriminante para encontrar el número de soluciones de una ecuación cuadrática.
11	Resolver guía de aprendizaje N°4 de ecuación cuadrática relacionada a la fórmula general y discriminante.
12	Analizar y resolver problemas contextualizados sobre ecuación cuadrática utilizando los distintos métodos de resolución.

Cabe destacar, que la sesión 12 corresponde al estudio de clases, por tanto, el plan de clase de esta será presentado más adelante en el capítulo VI relacionado propiamente al estudio de clases.

5.3 Guías de trabajo.

A continuación, se presentan las guías realizadas para cada método de resolución de la ecuación cuadrática, estas guías serán trabajadas en bloques de 45 minutos, en las clases 4, 7, 9 y 11.

Liceo Politécnico
Paulina von Mallinckrodt
Departamento de Matemática

Guía método de factorización - 2°Medio

Año 2022

Asignatura: Matemática	Profesor: Carolina Chihuailaf Vera – Jonathan Saavedra Albornoz Correo Institucional: carolina.chihuailaf@liceopaulina.cl	
Nombre:		
Curso: 2° ____	**Fecha:**	
Contenido: Ecuación cuadrática – Método de resolución por factorización – Productos notables.		
Objetivo: Resolver ecuaciones cuadráticas mediante el método de resolución por factorización.		

1. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización.

Ecuación cuadrática	Soluciones
a. $x^2 + 16x + 28 = 0$	$x_1 =$ $x_2 =$
b. $a^2 - a - 2 = 0$	$a_1 =$ $a_2 =$

c. $s^2 + 7s = 30$		$s_1 =$ $s_2 =$

2. Hallar la ecuación cuadrática cuyas soluciones sean $\frac{1}{2}$ y 3.

Desarrollo:

3. Calcular las soluciones de la siguiente ecuación cuadrática utilizando el método de factorización $2(x-1)^2 = 8$

Desarrollo:

4. Problema:

   El largo de un cuadro es 5 metros mayor que su ancho, si el área es de $150m^2$. ¿Cuáles son las medidas del cuadro?

Representación gráfica	Desarrollo:

Liceo Politécnico
Paulina von Mallinckrodt
Departamento de Matemática

Guía método de Po-Shen Loh - 2°Medio

Año 2022

Asignatura: Matemática	Profesor: Carolina Chihuailaf Vera – Jonathan Saavedra Albornoz Correo Institucional: carolina.chihuailaf@liceopaulina.cl
Nombre:	
Curso: 2° ____	**Fecha:**
Contenido: Ecuación cuadrática – Método de resolución por Po-Shen Loh – Productos notables.	
Objetivo: Resolver ecuaciones cuadráticas mediante el método de resolución de Po-Shen Loh	

1. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método de Po-Shen Loh.

Ecuación cuadrática	Soluciones
a. $x^2 - x - 1 = 0$	$x_1 =$ $x_2 =$
b. $a^2 + 10a + 16 = 0$	$a_1 =$ $a_2 =$
c. $s^2 - 14s = -24$	$s_1 =$ $s_2 =$
d. $r^2 - 8r + 17 = 0$	$r_1 =$ $r_2 =$

2. Problema:

   Un curso organiza un asado de fin de año, para el cual una persona se encarga de las compras y gasta $45.000, dinero que será devuelto mediante una cuota que pagará cada participante del asado. Pero seis personas que habían dicho que no irían, cambiaron de opinión y asistieron al asado. Entonces la cuota por persona disminuye $250. ¿Cuántas personas asistieron al asado?

Desarrollo:

Liceo Politécnico
Paulina von Mallinckrodt
Departamento de Matemática

Guía método de completación de cuadrados - 2°Medio

Año 2022

Asignatura: Matemática	Profesor: Carolina Chihuailaf Vera – Jonathan Saavedra Albornoz Correo Institucional: carolina.chihuailaf@liceopaulina.cl
Nombre:	
Curso: 2° ____	**Fecha:**

Contenido: Ecuación cuadrática – Método de resolución por completación de cuadrados – Productos notables.
Objetivo: Resolver ecuaciones cuadráticas mediante el método de resolución por completación de cuadrados

1. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando completación de cuadrados.

Ecuación cuadrática	Soluciones
a. $x^2 - 3x - 28 = 0$	$x_1 =$ $x_2 =$
b. $a^2 - 6a - 16 = 0$	$a_1 =$ $a_2 =$
c. $y^2 - 2y = 3$	$y_1 =$ $y_2 =$
d. $h^2 + 10h - 24 = 0$	$h_1 =$ $h_2 =$

1. Problema 1:

Hallar el lado de un cuadrado cuya diagonal mide 3 cm más que un lado.

Desarrollo:

2. Problema 2:

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 cm. Un cateto mide 4 cm más que el otro. Encontrar la longitud de los catetos.

Desarrollo:

Liceo Politécnico
Paulina von Mallinckrodt
Departamento de Matemática

Guía método por fórmula general - 2°Medio

Año 2022

Asignatura: Matemática	Profesor: Carolina Chihuailaf Vera – Jonathan Saavedra Albornoz Correo Institucional: carolina.chihuailaf@liceopaulina.cl	
Nombre:		
Curso: 2° ____		Fecha:
Contenido: Ecuación cuadrática – Método de resolución por fórmula general.		
Objetivo: Resolver ecuaciones cuadráticas mediante el método de resolución por fórmula general mediante problemas y ejercicios. Analizar el discriminante para determinar la cantidad de soluciones de una ecuación cuadrática.		

1. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método por fórmula general.

Ecuación cuadrática
a. $4x^2 + 12x = 7$
b. $3y^2 - 7y + 4 = 0$
c. $5t^2 = 80$
d. $h^2 + 7h = 18$

Soluciones
$x_1 =$ $x_2 =$
$a_1 =$ $a_2 =$
$y_1 =$ $y_2 =$
$h_1 =$ $h_2 =$

2. Encontrar el valor de la discriminante y determinar cuántas soluciones reales tiene cada ecuación cuadrática.

Ecuación cuadrática		Discriminante	Cantidad de soluciones
a. $-x^2 + 4x = -7$		$\Delta =$	
b. $9y^2 + 2 = 0$		$\Delta =$	
c. $2t^2 - 4t + 2 = 0$		$\Delta =$	
d. $5h^2 - 4h = 1$		$\Delta =$	

Situación problema:

El liceo Paulina Von Mallinckrodt busca fomentar la natación en sus estudiantes, para ello instalará una piscina cuyo largo es de 20 m y cuyo ancho es de 16 m. El liceo compró un total de $160\ m^2$ de pasto sintético que se pondrá alrededor de la piscina. Si se desea utilizar todo el material disponible ¿Cuál es el ancho que debe tener el pasto que rodeará la piscina para que quede repartido uniformemente?

Desarrollo:

5.4 Análisis apriori de situaciones de aprendizajes claves.

En esta sección se presentará el análisis apriori de las actividades 2, 5, 8 y 10, se considera a estas clases dado que en ellas las alumnas tienen el primer acercamiento a cada uno de los métodos.

El análisis apriori se realiza en torno a una situación problema de cada una de las clases nombradas, para ello, se realizaron problemas acordes a cada método de resolución.

Análisis apriori: Método de factorización

Situación problema: Carlos es tres años mayor que Lucía y la suma de los cuadrados de ambas edades es 89. ¿Cuál es la edad de Carlos y Lucía?

1. ¿Cuál es la respuesta a la situación?

   Carlos tiene 8 años y Lucía tiene 5 años

2. ¿Cuáles son los conocimientos en juego?

   - Ecuación cuadrática
   - Factorización de trinomio
   - Propiedad de producto nulo ($a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$)

3. ¿Cuáles son los conocimientos adquiridos que necesita el alumno para resolver la situación?
   - Producto de expresiones algebraicas.
   - Reducción de términos semejantes.
   - Factorización.

4. ¿Cuáles serían las posibles estrategias de los/as alumnos/as para resolver la situación?

   Estrategia 1:

   La estrategia 1 estará relacionada al tanteo, las estudiantes escribirán todas aquellas edades cuya diferencia sea de tres años, para ello podrán realizar una tabla de valores e ir probando cual de todas las edades cumple con la condición de que la suma de sus cuadrados sea igual a 89.

Edades cuya diferencia es 3		**Suma de cada edad al cuadrado**	**Resultado de la suma de cada edad al cuadrado**
1	4	$1^2 + 4^2$	17
2	5	$2^2 + 5^2$	29
3	6	$3^2 + 6^2$	45

4	7	$4^2 + 7^2$	65
5	8	$5^2 + 8^2$	89

Luego las estudiantes notarán que las edades que cumplen la condición del problema son 5 y 8 años y por la descripción del problema concluirán que Carlos tiene 8 años y Lucía 5 años.

Estrategia 2:

1. Plantear la situación problema algebraicamente, para ello se comenzará definiendo las incógnitas:

   Edad de Lucía: x

   Edad de Carlos: $x + 3$

   Por tanto, la situación expresada algebraicamente sería:

   $$x^2 + (x+3)^2 = 89$$

   Resolviendo algebraicamente:

   $$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + 6x + 9 = 89$$
   $$\Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 80 = 0$$
   $$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 40 = 0$$
   $$\Leftrightarrow (x-5)(x+8) = 0$$

   Considerar la propiedad del producto nulo ($a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$) para resolver la ecuación igualando cada factor a 0:

   $$x - 5 = 0 \qquad\qquad x + 8 = 0$$
   $$\Leftrightarrow x = 5 \qquad\qquad \Leftrightarrow x = -8$$

   Obtendrán que las posibles soluciones son -8 y 5, pero cómo se trata de edades sólo deberán considerar $x = 5$.

   Se concluye que Carlos tiene 8 años y Lucía 5 años.

5. ¿Cuáles son las posibles dificultades?

- Plantear correctamente el problema.
- Analizar cuáles soluciones son acordes al problema.

6. ¿Cuáles serían los posibles errores de los/as alumnos/as al resolver?

- Consideran la solución $x = -8$ cómo solución del problema.
- Errores al multiplicar binomios, al reducir términos semejantes, al factorizar.
- Determinar soluciones erróneas.

<u>Análisis apriori: Método de Po-Shen Loh</u>

Situación problema: Necesitamos encontrar una ecuación cuadrática cuyo coeficiente c es igual a 28. Si una persona se para en el punto de penal y otra persona en el otro punto de penal deberán caminar la misma distancia para llegar a la mitad de la cancha.

Considere que la distancia desde el inicio de la cancha a cada punto penal representa una solución de la ecuación (x_1 y x_2) y se cumplirá la siguiente propiedad:

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

¿Cómo representarías en la figura y algebraicamente la distancia del inicio de la cancha a cada punto penal?

¿Cuál es la ecuación y cuáles son sus soluciones?

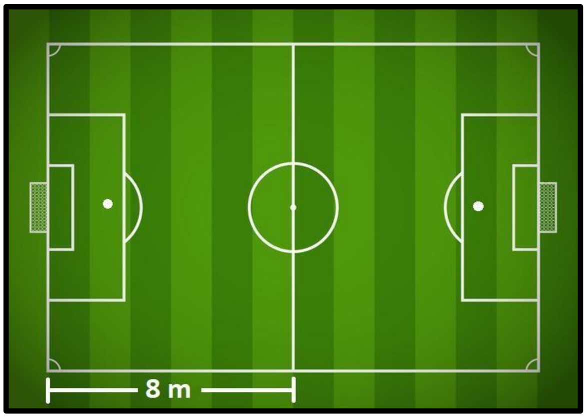


Figura 24. Representación pictórica del problema planteado.

Fuente: Elaboración propia.

1. ¿Cuál es la respuesta a la situación?

   Pregunta 1: ¿Cómo representarías en la figura y algebraicamente la distancia del inicio de la cancha a cada punto penal?

   La representación de los datos en la figura corresponde a:

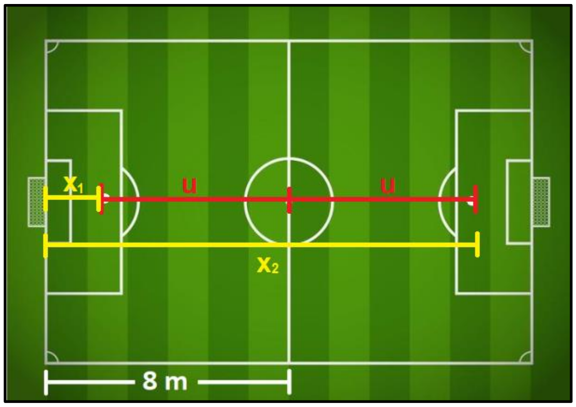


Figura 25. Representación pictórica del problema.

Fuente: Elaboración propia.

Mientras que la representación algebraica es:

$$x_1 = 8 - u$$
$$x_2 = 8 + u$$

Por otra parte, la ecuación que representa este problema es $(8 - u)(8 + u) = 28$.

Pregunta 2: ¿Cuál es la ecuación y cuáles son sus soluciones?

El valor de $u = \pm 6$, se considerará el valor positivo, dado que, se trata de distancias, por tanto, se obtiene que $x_1 = 2$ y $x_2 = 14$.

La ecuación que tiene como soluciones $x_1 = 2$ y $x_2 = 14$ es $x^2 - 16x + 28 = 0$.

2. ¿Cuáles son los conocimientos en juego?

    - Ecuación cuadrática.
    - Propiedad de producto nulo ($a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$)
    - Suma por diferencia.

3. ¿Cuáles son los conocimientos adquiridos que necesita el alumno para resolver la situación?
    - Producto de expresiones algebraicas.
    - Reducción de términos semejantes.
    - Factorización.

4. ¿Cuáles serían las posibles estrategias de los/as alumnos/as para resolver la situación?

    Se considera que la representación pictórica (Figura 26) de la situación planteada para todas las estrategias es la siguiente:

    Se define la distancia desde cada punto de penal a la mitad de la cancha como u, mientras que la distancia desde el inicio a cada punto como x_1 y x_2 respectivamente.

    Estrategia 1:

    Se define $x_1 = 8 - u$ y $x_2 = 8 + u$.

    Considerando la propiedad del producto nulo y que el coeficiente c es 28 se plantea la siguiente ecuación:

    $$(8-u)(8+u) = 28$$

    Resolviendo la ecuación utilizando suma por diferencia:

    $$8^2 - u^2 = 28$$
    $$\Leftrightarrow 8^2 - 28 = u^2$$
    $$\Leftrightarrow 36 = u^2$$
    $$\Leftrightarrow \pm 6 = u$$

    De acá el valor de $u = \pm 6$, se considera el valor positivo dado que se trata de distancias, entonces calculando los valores de x_1 y x_2:

$$x_1 = 8 - u \qquad\qquad x_2 = 8 + u$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 8 - 6 \qquad\qquad \Leftrightarrow x_2 = 8 + 6$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 2 \qquad\qquad \Leftrightarrow x_2 = 14$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x_1 = 2$ y $x_2 = 14$.

Calculando la ecuación:

$$(x - 2)(x - 14) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 14x - 2x + 28 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 28 = 0$$

Por último, se tiene que la ecuación buscada es $x^2 - 16x + 28 = 0$

Estrategia 2:

Se define $x_1 = 8 - u$ y $x_2 = 8 + u$.

Considerando la propiedad del producto nulo y que el coeficiente c es 28 se plantea la siguiente ecuación:

$$(8 - u)(8 + u) = 28$$

Resolviendo la ecuación utilizando suma por diferencia:

$$8^2 - u^2 = 28$$
$$\Leftrightarrow 8^2 - 28 = u^2$$
$$\Leftrightarrow 36 = u^2$$
$$\Leftrightarrow \pm 6 = u$$

De acá el valor de $u = \pm 6$, se considera el valor positivo dado que se trata de distancias, entonces su representación es:

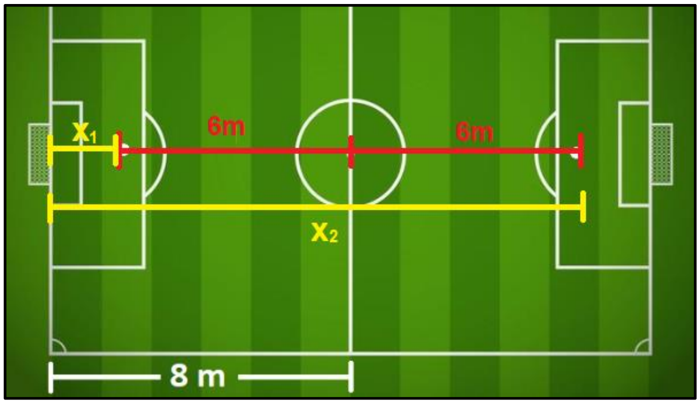


Figura 26. Representación pictórica del problema con medidas.

Fuente: Elaboración propia.

Observando la representación se puede concluir que $x_1 = 2$, ya que, $8 - 6 = 2$ y $x_2 = 14$, ya que, $8 + 6 = 14$.

Calculando la ecuación:

$$(x - 2)(x - 14) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 14x - 2x + 28 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 28 = 0$$

Por último, se tiene que la ecuación buscada es $x^2 - 16x + 28 = 0$

5. ¿Cuáles son las posibles dificultades?

- Plantear correctamente el problema

6. ¿Cuáles serían los posibles errores de los/as alumnos/as al resolver?

- Consideran $u = -6$.
- Errores al multiplicar binomios, al reducir términos semejantes, al factorizar.
- Determinar soluciones erróneas.

<u>Análisis apriori: Método de completación de cuadrados</u>

Situación problema: El marco de una pintura mide 18 cm por 14 cm. La pintura ocupa $192\ cm^2$. Encontrar el ancho del marco.

1. ¿Cuál es la respuesta a la situación?

   El ancho del marco mide $1cm$

2. ¿Cuáles son los conocimientos en juego?

   - Ecuación cuadrática
   - Cuadrado de binomio

3. ¿Cuáles son los conocimientos adquiridos que necesita el alumno para resolver la situación?

    - Producto de expresiones algebraicas
    - Reducción de términos semejantes
    - Factorización
    - Propiedades de los números racionales

4. ¿Cuáles serían las posibles estrategias de los/as alumnos/as para resolver la situación?

    Estrategia 1:

    1. Calcular el área total del cuadro

    $$18 \cdot 14 = 252$$

    2. Restar el área de la pintura al área total

    $$252 - 192 = 60$$

    3. Se tiene la siguiente representación

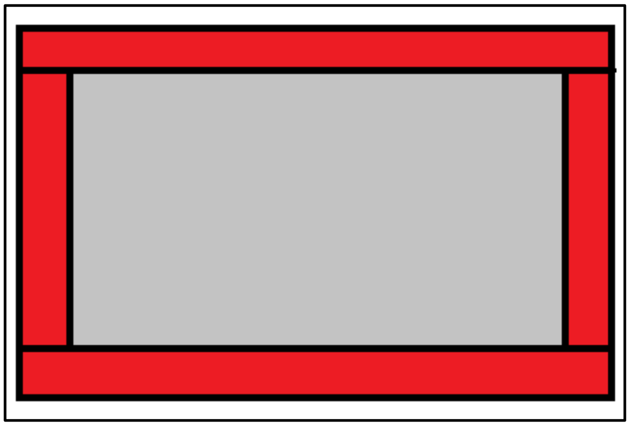


Figura 27. Representación pictórica del problema.

Fuente: Elaboración propia.

De acá, se tiene que el área de color rojo es $60\ cm^2$.

4. Se realiza el cálculo por tanteo considerando medidas menores a $14\ cm$.

5. Se obtiene que $1\ cm$ coincide con las condiciones requeridas, por tanto, la representación sería la siguiente:

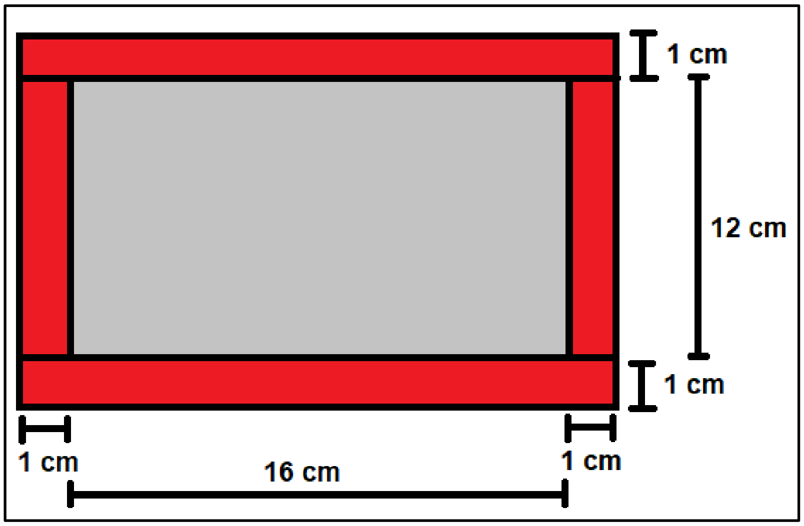


Figura 28. Representación pictórica del problema con medidas.

Fuente: Elaboración propia.

6. Al calcular las áreas por separado se tiene:

   I. Área de los rectángulos horizontales

$$(1 + 16 + 1) \cdot 1 = 18$$

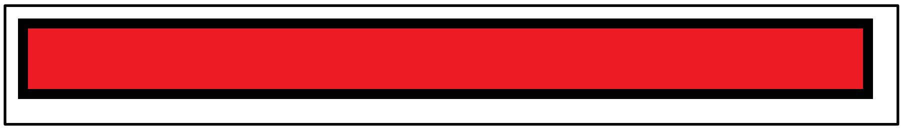


Figura 29. Representación pictórica del rectángulo horizontal.

Fuente: Elaboración propia.

   II. Área de los rectángulos verticales

$$12 \cdot 1 = 12$$

Figura 30. Representación pictórica del rectángulo vertical.

Fuente: Elaboración propia.

7. Para comprobar que el área es $60\ cm^2$ se sumarán las áreas de todos los rectángulos de color rojo

$$Área_{roja} = 12 + 12 + 18 + 18 = 60\ cm^2$$

8. Finalmente se obtiene que el ancho del marco es $1\ cm$.

Estrategia 2:

1. Modelar la situación algebraicamente

$$(18 - 2x)(14 - 2x) = 192$$

2. Resolver la ecuación

$$\Leftrightarrow 252 - 36x - 28x + 4x^2 = 192$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 64x + 60 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 15 = 0$$

3. Considerar el cuadrado de binomio para resolver la ecuación

$$\Leftrightarrow x^2 - 16x = -15$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 8^2 = -15 + 8^2$$
$$\Leftrightarrow (x - 8)^2 = 49$$
$$\Leftrightarrow (x - 8) = \sqrt{49}$$
$$\Leftrightarrow (x - 8) = \pm 7$$
$$\Leftrightarrow x = 7 + 8 = 15 \ \vee \ x = -7 + 8 = 1$$

4. Analizar cuál de las dos soluciones es acorde al problema, en este caso se descartó $x = 15$, ya que, una de las medidas del marco es $14\ cm$

5. Finalmente, se obtiene que el ancho del marco es $1\ cm$.

5. ¿Cuáles son las posibles dificultades?

- Plantear correctamente el problema
- Analizar las soluciones de la ecuación

6. ¿Cuáles serían los posibles errores de los/as alumnos/as al resolver?

- Errores al multiplicar binomios, al reducir términos semejantes, al factorizar.
- Error al completar el cuadrado de binomio
- Determinar soluciones erróneas.

<u>Análisis apriori: Fórmula general</u>

Situación problema: La suma de los cuadrados de tres números pares consecutivos es 596. Determinar el mayor entero del trío.

1. ¿Cuál es la respuesta a la situación?

   El número entero mayor del trío es 16.

2. ¿Cuáles son los conocimientos en juego?

   - Ecuación cuadrática
   - Cuadrado de binomio
   - Fórmula general

3. ¿Cuáles son los conocimientos adquiridos que necesita el alumno para resolver la situación?

   - Producto de expresiones algebraicas

- Reducción de términos semejantes
- Propiedades de los números racionales

4. ¿Cuáles serían las posibles estrategias de los/as alumnos/as para resolver la situación?

Estrategia 1:

1. Realizar por tanteo una tabla en la que se consideren tres números pares consecutivos hasta que la suma de los cuadrados sea 596.

N_1	N_2	N_3	**Suma de cuadrados**	**Resultado**
2	4	6	$2^2 + 4^2 + 6^2$	56
4	6	8	$4^2 + 6^2 + 8^2$	116
6	8	10	$6^2 + 8^2 + 10^2$	200
8	10	12	$8^2 + 10^2 + 12^2$	308
10	12	14	$10^2 + 12^2 + 14^2$	440
12	14	16	$12^2 + 14^2 + 16^2$	596

2. Se obtiene que los números pares buscados son 12, 14 y 16.
3. Finalmente se obtiene que el número par mayor es 16.

Estrategia 2:

1. Modelar la situación algebraicamente

$$(2x)^2 + (2x+2)^2 + (2x+4)^2 = 596$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x^2 + 8x + 4 + 4x^2 + 16x + 16 = 596$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 + 24x - 576 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 48 = 0$$

2. Aplicar la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-48)}}{2(1)}$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{2}$$
$$x = \frac{-2 \pm 14}{2}$$

   Las soluciones serían:

$$x = \frac{-2 + 14}{2} = 6 \ \vee x = \frac{-2 - 14}{2} = -8$$

3. Finalmente, se obtiene que el valor de $x = 6$, así los números serían 12, 14 y 16.

4. El número mayor del trío será 16.

5. ¿Cuáles son las posibles dificultades?

   - Plantear correctamente el problema.
   - Analizar las soluciones de la ecuación.

6. ¿Cuáles serían los posibles errores de los/as alumnos/as al resolver?

   - Error al identificar los coeficientes de la ecuación.
   - Errores al multiplicar binomios, al reducir términos semejantes.
   - Determinar soluciones erróneas.
   - Error al aplicar la fórmula general.

CAPÍTULO VI.

ESTUDIO DE CLASES.

En este capítulo, se presenta el Estudio de Clase basado en la resolución de problemas. El proceso se realiza en tres etapas: la primera corresponde a la discusión sobre la clase que ha sido diseñada por el equipo de trabajo; la segunda es la aplicación de la clase por un integrante del grupo de trabajo, en nuestro caso, la clase fue grabada y editada, rescatando los momentos más importantes de la misma; la tercera etapa consiste en discutir sobre lo observado en la clase desde el ámbito matemático-didáctico.

De esta forma, dentro del capítulo se presentan 5 elementos, Descripción de la clase diseñada; Plan de clase en forma detallada; Experimentación de la clase; Discusión de la clase; y Reflexión sobre el proceso de Estudio de Clases y aprendizajes profesionales.

6.1 Descripción de la clase diseñada.

A continuación, se describe la sesión del Estudio de Clase para el Seminario de Título, la que se llevó a cabo el martes 25 de octubre del año 2022. Se realizó al finalizar la subunidad de ecuación cuadrática, específicamente en la clase n° 12, por lo tanto, las estudiantes ya tenían conocimiento sobre los distintos métodos de resolución de una ecuación cuadrática (vistos en Capítulo II). El objetivo de dicha sesión fue analizar y resolver un problema contextualizado sobre ecuación cuadrática utilizando los distintos métodos de resolución. Esta actividad se implementó en el curso segundo medio A, asistieron un total de 18 alumnas.

La clase diseñada trata de una situación problema, para la cual las escolares dispusieron de 1 hora y 30 minutos para abordarlo, el desarrollo de esta sesión se realizó considerando la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), propuesta por Guy Brousseau, citado en Ávila (2001), es por ello que la clase transitó por las distintas fases de esta teoría: se comenzó con la Situación de Acción, aquí, las estudiantes abordaron el problema individualmente (en 6.2 se detalla el tiempo de cada fase), luego, pasando a la Situación de Formulación, las alumnas realizaron un trabajo colaborativo en parejas o tríos. Se continuó con la Situación de Validación, en donde se les solicitó a tres estudiantes escribir sus desarrollos en la pizarra (representando a sus respectivos grupos) y luego explicarlos. Y, finalmente, el profesor realizó explicación e institucionalización del problema apoyándose de los desarrollos escritos por las alumnas en la pizarra (y también sobre aquellos que no fueron explicados por las estudiantes).

Por otra parte, tal como se ha mencionado anteriormente, el Estudio de Clase corresponde a un proceso en el cual

> Los profesores se reúnen en grupos pequeños para realizar un estudio sistemático, cooperativo y crítico de sus prácticas pedagógicas, a través de un ciclo que incluye la planificación conjunta de una clase, la ejecución de ésta por parte de uno de sus miembros, y luego su observación y análisis por parte del grupo. (Ministerio de Educación, 2019, p. 2)

Por ello, se realizó una planificación en conjunto de quienes presentan este Seminario, analizando qué tipo de situación problema será la adecuada para implementar. El desarrollo de la clase fue grabado desde las instrucciones dadas por el profesor hasta la institucionalización del contenido. En relación con el problema, a las alumnas se les entregó en una hoja que fue retirada al finalizar la clase, con el fin de poder examinar las acciones que realizaron tanto las estudiantes como el docente durante el desarrollo del problema.

6.2 Plan de clase en forma detallada.

A continuación, se presenta el plan de clase, en el cual se detalla el Objetivo de Aprendizaje, Objetivo de la clase, Habilidades, y las Actitudes que se trabajarán. Además, en esta planificación, aparecen detalladamente las acciones que realiza el docente durante la clase, junto a los tiempos que se dispondrán para cada período. Es fundamental señalar que la sesión está enfocada mayoritariamente por las acciones que realizan las estudiantes, por tanto, el docente cumple solamente el rol de guía durante esta, lo cual implica que se limitará a responder dudas relacionadas con el enunciado e indicará los tiempos para pasar a las distintas fases que propone la Teoría de Situaciones Didácticas:

<table>
<tr><th colspan="5">Plan de clase</th></tr>
<tr><td>Eje temático</td><td>Álgebra y funciones</td><td>Unidad o tema</td><td>Unidad 2: Funciones cuadráticas, ecuaciones cuadráticas y la inversa de una función.</td><td>Sesión
N°12</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo general de unidad</td><td colspan="3">Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica, o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones de la forma:
● $ax^2 = b$
● $(ax + b)^2 = c$
● $ax^2 + bx = 0$
● $ax^2 + bx = c$
(a, b, c son números racionales, $a \neq 0$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Meta(s) u objetivo de aprendizaje</td><td colspan="3">Analizar y resolver un problema contextualizado sobre ecuación cuadrática utilizando los distintos métodos de resolución.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Habilidad</td><td colspan="3">OAH a
Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes:
● Simplificar el problema y estimar el resultado.
● Descomponer el problema en subproblemas más sencillos.
● Buscar patrones.
● Usar herramientas computacionales.

OAH b
Evaluar el proceso y comprobar resultados y</td></tr>
</table>

	soluciones dadas de un problema matemático. OAH c Utilizar lenguaje matemático para identificar sus propias ideas o respuestas. OAH h Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad. OAH j Ajustar modelos, eligiendo los parámetros adecuados para que se acerquen más a la realidad.
Actitud	OAA A Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas. OAA D Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.

Momentos de la clase	**Actividades de aprendizaje**	**Intervención Docente**	**Recursos de aprendizaje**	**Tiempo estimado**
Inicio	**Situación problema:** Carla vende chocolates en el kiosco de un liceo. Compra una cantidad de cajas de chocolate por	El profesor inicia la clase, saluda al grupo de curso y entrega la guía de trabajo que contiene la situación problema. Indica las instrucciones para	- Pizarra - Plumón - Cuaderno - Lápices	15 min

	$40.000. El día lunes fue a comprar como normalmente lo hace y se dio cuenta que se instaló una nueva distribuidora de confites, decidió ir a preguntar por el valor de las cajas de chocolate y está feliz, pues en la primera distribuidora, ese dinero le alcanza para 5 cajas menos porque cuestan $400 más. ¿Cuánto cuesta cada caja de chocolate en cada local?	el desarrollo de la actividad y enfatiza en que esta comienza con una etapa individual. Designa unos minutos para que las estudiantes lean el problema y escriban o subrayen información que consideren importante. Transcurrido el tiempo el docente indica que deben analizar la información que aporta el problema y proponer distintas estrategias para su solución dejando registro en su cuaderno.		
Desarrollo		Las estudiantes trabajan individualmente en la solución del problema. Cuando el docente observe que la mayoría de las estudiantes ha propuesto algún desarrollo les		50 min.

		indicará que deben juntarse en grupos de a lo más 3 estudiantes y compartir sus estrategias. Cuando el docente observe que los grupos terminaron de discutir sus ideas les solicitará a ciertas estudiantes compartir sus estrategias y resultados con el curso. Durante todo el desarrollo de la actividad el docente transitará por la sala respondiendo únicamente dudas respecto al enunciado del problema.		
Cierre		El docente junto a las estudiantes ordena las ideas y sacan conclusiones respecto a la situación problemática para dar una respuesta final e institucionalizar el contenido.		25 min.

A continuación, se presenta el análisis apriori del Estudio de Clase, cabe mencionar que se realiza en torno a una situación clave que se presenta en la sesión, como lo es, la situación problema. En este análisis se describen las expectativas que tiene el profesor implementador antes de realizar la clase, además se presentan las posibles estrategias, errores y dificultades de las estudiantes.

1. ¿Cuál es la respuesta a la situación? Escriba su procedimiento y explique.
   Cada caja en el nuevo local cuesta $1.600, mientras que en el antiguo local cada caja cuesta $2.000

2. ¿Cuáles son los conocimientos en juego?
   - Ecuación cuadrática
   - Método de resolución de la ecuación cuadrática
     - ➔ Factorización
     - ➔ Po-Shen Loh
     - ➔ Completación de cuadrados
     - ➔ Fórmula general

3. ¿Cuáles son los conocimientos adquiridos que necesita el alumno para resolver la situación?
   - Producto de expresiones algebraicas
   - Reducción de términos semejantes
   - Factorización.
4. ¿Cuáles serían las posibles estrategias de los/as alumnos/as para resolver la situación?
   Estrategia 1:
   1. Definir las variables
      n: cantidad de cajas; c: valor caja chocolate

   2. Encontrar la ecuación cuadrática

$$n \cdot c = 40.000\ ;\ c = \frac{40.000}{n}$$

$$(n-5)(c+400) = 40.000$$

$$\Leftrightarrow c + 400 = \frac{40.000}{n-5}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{40.000}{n-5} - 400$$

$\Leftrightarrow c = \frac{40.000-400n+2.000}{n-5}$ / Pero $c = \frac{40.000}{n}$

$$\Rightarrow \frac{40.000}{n} = \frac{40.000-400n+2.000}{n-5}$$

$$\Leftrightarrow 40.000 \cdot (n-5) = n \cdot (40.000 - 400n + 2.000)$$

$$\Leftrightarrow 40.000n - 200.000 = 40.000n - 400n^2 + 2.000n$$

3. Reducción de términos semejantes

$$400n^2 - 2.000n - 200.000 = 0$$

$$n^2 - 5n - 500 = 0$$

4. Encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática

   4.1 Aplicando método de factorización:

$$(n-25) \cdot (n+20) = 0$$

   Utilizando la propiedad $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ó $b = 0$

   1. $n - 25 = 0$

$$\Leftrightarrow n = 25$$

   2. $n + 20 = 0$

$$\Leftrightarrow n = -20$$

   Entonces $n_1 = 25$; $n_2 = -20$

   4.2 Aplicando el método de Completación de cuadrados$n^2 - 5n - 500 = 0$

$$\Leftrightarrow n^2 - 5n - 500 + 500 = 500$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 5n = 500$$

   Luego, para completar el cuadrado se tiene que sumar $\frac{5}{2}$ en ambos lados de la ecuación, por lo tanto, se tiene que: $\Leftrightarrow n^2 - 5n + (\frac{5}{2})^2 = 500 + (\frac{5}{2})^2$

$$\Leftrightarrow (n - \frac{5}{2})^2 = \frac{2025}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(n-\frac{5}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{2025}{4}}$$

$$\Leftrightarrow n = \pm\sqrt{\frac{2025}{4}}+\frac{5}{2}$$

$$n = \pm\frac{45}{2}+\frac{5}{2}$$

Así, los valores posibles de n son:

$n_1 = \frac{5}{2}+\frac{45}{2} = 25$ $\qquad$ $n_2 = \frac{5}{2}-\frac{45}{2} = -20$

4.3 Aplicando el método de fórmula general:

Identificamos los coeficientes para sustituir en la fórmula generala$a = 1$; $b = -5$; $c = -500$

Sustituyendo se tiene:

$$n = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(-500)}}{2(1)}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 2000}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{5 \pm \sqrt{2025}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{5 \pm 45}{2}$$

Entonces las soluciones son:

$n_1 = \frac{5+45}{2} = 25$ $\qquad$ $n_2 = \frac{5-45}{2} = -20$

4.4 Aplicando el método de Po-Shen Loh:

Calculando $\frac{-b}{2}$ se obtiene $\frac{5}{2}$

Luego, se tiene que:

$n_1 = \frac{5}{2} + u$ y $n_2 = \frac{5}{2} - u$

Ahora, utilizando la propiedad de las soluciones de la ecuación cuadrática se tiene que el producto de ambas soluciones es igual a c. Por lo tanto, se tiene que:

$$\left(\frac{5}{2}+u\right)\left(\frac{5}{2}-u\right)=-500$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^2-u^2=-500$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^2+500=u^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{4}+\frac{2000}{4}=u^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2025}{4}=u^2$$

$$\Leftrightarrow \pm\sqrt{\frac{2025}{4}}=u$$ [redacted]

Así, $u=\pm\frac{45}{2}$

Tomando cualquiera de los valores de u sustituimos en $n_1=\frac{5}{2}+u$ y $n_2=\frac{5}{2}-u$.

Se tiene que:

$n_1=\frac{5}{2}+\frac{45}{2}=25$

$n_2=\frac{5}{2}-\frac{45}{2}=-20$

5. Analizar las soluciones.
   Como en el contexto se pregunta por cajas de chocolates, se considera sólo $n_1=25$.

6. Sustituir en la ecuación que representa el valor de cada caja de chocolate.

   Reemplazando $n=25$, tenemos: $c=\frac{40.000}{25}$; $c=\$1.600$

7. Responder la pregunta del problema.
   Cada caja en el nuevo local cuesta $1.600, mientras que en el antiguo local cada caja cuesta $2.000

Estrategia 2:

1. Definir las variables

   n: cantidad de cajas; c: valor caja chocolate.

2. Encontrar la ecuación cuadrática

   $n \cdot c = 40.000\ ;\ n = \frac{40.000}{c}$

   $$(n+5)(c-400) = 40.000$$
   $$\Rightarrow \left(\frac{40.000}{c} + 5\right)(c-400) = 40.000$$

   $\Leftrightarrow 40.000 - \frac{16.000.000}{c} + 5c - 2.000 - 40.000 = 0\ \ \Leftrightarrow 40.000c - 16.000.0000 + 5c^2 - 2.000c - 40.000c = 0$

   $$\Leftrightarrow 5c^2 - 16.000.0000 - 2.000c = 0$$
   $$\Leftrightarrow c^2 - 400\ c - 3.200.0000 = 0$$

3. Encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática

   <u>3.1 Aplicando método de factorización</u>:

   $(c-2000)\cdot(c+1600) = 0$

   Utilizando la propiedad $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ó $b = 0$

   3. $c - 2000 = 0$

      $$\Leftrightarrow c = 2000$$

   4. $c + 1600 = 0$

      $$\Leftrightarrow c = -1600$$

   Entonces $c_1 = 2000\ ;\ c_2 = -1600$

   <u>3.2 Aplicando el método de Completación de cuadrados</u>

   $$c^2 - 400\ c - 3.200.0000 = 0 \Leftrightarrow c^2 - 400c \qquad /+3.200.000$$
   $$= 3.200.000$$

   Luego, para completar el cuadrado se tiene que sumar $1.600.000$ en ambos lados de la ecuación, por lo tanto, se tiene que:

$$\Leftrightarrow c^2 - 400c + (200)^2 = 3.200.000 + 40000$$
$$\Leftrightarrow (c - 200)^2 = 3.240.000$$
$$\Leftrightarrow (c - 200) \quad = \pm\sqrt{3.240.000}$$
$$\Leftrightarrow c = \pm 1.800 + 200$$

Así, los valores posibles de c son:

$c_1 = 1.800 + 200 = 2.000$ $\qquad$ $c_2 = -1.800 + 200 = -1.600$

3.3 Aplicando el método de fórmula general:

$$c^2 - 400\, c - 3.200.0000 = 0$$

Identificamos los coeficientes para sustituir en la fórmula generalal $a = 1$; $b = -400$; $c = -3.200.000$

Sustituyendo se tiene:

$$c = \frac{-(-400) \pm \sqrt{400^2 - 4(1)(-3.200.000)}}{2(1)}$$
$$\Leftrightarrow c = \frac{400 \pm \sqrt{160.000 + 12.800.000}}{2}$$
$$\Leftrightarrow c = \frac{400 \pm \sqrt{12.960.000}}{2}$$
$$\Leftrightarrow c = \frac{400 \pm 3.600}{2}$$

Entonces las soluciones son:

$c_1 = \frac{400+3.600}{2} = 2.000$ $\qquad$ $c_2 = \frac{400-3.600}{2} = -1.600$

3.4 Aplicando el método de Po-Shen Loh:

$$c^2 - 400\, c - 3.200.0000 = 0$$

Calculando $\frac{-b}{2}$ se obtiene 200

Luego, se tiene que:

$c_1 = 200 + u$ y $c_2 = 200 - u$

Ahora, utilizando la propiedad de las soluciones de la ecuación cuadrática se tiene que el producto de ambas soluciones es igual a c. Por lo tanto, se tiene que:

$$(200+u)(200-u) = -3.200.000$$
$$\Leftrightarrow (200)^2 - u^2 = -3.200.000$$
$$\Leftrightarrow (200)^2 + 3.200.000 = u^2$$
$$\Leftrightarrow 40.000 \quad + 3.200.000 = u^2$$
$$\Leftrightarrow 3.240.000 = u^2$$
$$\Leftrightarrow \pm 1800 = u$$

Así, $u = \pm 1800$

Tomando cualquiera de los valores de u sustituimos en $c_1 = 200 + u$ y $c_2 = 200 - u$.

Se tiene que:

$c_1 = 200 + 1.800 = 2.000$ $\qquad$ $c_2 = 200 - 1.800 = -1.600$

4. Analizar las soluciones
   Como en el contexto se pregunta por el valor de las cajas de chocolates, se considera sólo $c_1 = 2.000$.

5. Responder la pregunta del problema.
   Cada caja en el nuevo local cuesta $1.600, mientras que en el antiguo local cada caja cuesta $2.000

5. ¿Cuáles son las posibles dificultades?
   - Plantear correctamente el problema.
   - Identificar las incógnitas.
6. ¿Cuáles serían los posibles errores de los/as alumnos/as al resolver?
   Errores al multiplicar binomios, al reducir términos semejantes, al factorizar, aplicación de la raíz cuadrada.

6.3 Experimentación de la clase.

La clase se llevó a cabo el día 25 de octubre del año 2022, entre 08:00 y 09:30 de la mañana. De lo anterior, es necesario especificar que, de los 90 minutos de clase, se emplearon:

- 10 minutos para que las estudiantes ingresaran a la sala, el profesor pasara la lista y se les hiciera entrega del problema.
- 5 minutos para la lectura de instrucciones por parte del profesor, dando lugar a dudas relacionadas estrictamente con las instrucciones, mas no con el problema.
- 25 minutos para la Situación de Acción, es decir, desde que leyeron el problema hasta que terminaron de resolverlo individualmente (o, al menos, intentarlo).
- 15 minutos para la Situación de Formulación, esto es, cuando se juntaron en parejas o tríos y trabajaron en la resolución del problema.
- 20 minutos para la Situación de Validación, es decir, cuando las 3 estudiantes que salieron a la pizarra de manera voluntaria presentaron sus respuestas (en representación de sus grupos) y las comentaron al curso.
- 15 minutos para la Institucionalización, donde el profesor hizo la puesta en común y formalizó el contenido, en relación con el problema y lo realizado por las estudiantes en la pizarra.

En esta sesión, asistieron 18 estudiantes.

Dentro de las instrucciones dadas por el profesor, se encuentran:

- Dispondrán de 25 minutos para leer el problema, analizarlo y proponer estrategias de manera individual.
- Luego, tendrán 15 minutos para reunirse en parejas o tríos para compartir sus estrategias de resolución.
- Después, tendrán 20 minutos para compartir sus respuestas al curso, en la pizarra, representando a sus grupos.

- Y finalmente, vendrá la institucionalización del contenido.
- Respecto al problema, no habrá ayuda en lo que se refiere al problema, solamente en lo que se refiere al enunciado.

Luego de las instrucciones, el profesor entrega a las estudiantes la hoja con la situación problema y recalca que no habrá ayuda en relación con el problema, dando inicio al trabajo individual.

Después de los 25 minutos correspondientes a la Situación de Acción, el profesor indica a las estudiantes que pueden juntarse en parejas o tríos para compartir sus respuestas y complementarlas con las que tienen, o bien, aquellas que no hayan terminado, puedan seguir avanzando de manera grupal. En estos momentos, aparecen preguntas como:

- “¿Cómo se hace?”
- “Profe, ¿está bien?”
- “¿Cómo voy?”
- “Profe, ¿me puede revisar esto?”

Para cada una de las preguntas, la respuesta siempre fue “no puedo responder ese tipo de preguntas”.

Después de que el profesor observó que la mayoría de las estudiantes había resuelto el problema, dividió la pizarra en tres y solicitó que tres estudiantes fueran voluntariamente a escribir y explicar su desarrollo. Mientras esto ocurría, una estudiante (llamada “Estudiante 1”), dijo “profe, ¿por qué a la estudiante X le quedó en menos y a mí me quedó todo en más?”, a lo que el profesor respondió “porque aquí era $x - 5$”. Luego, otra alumna (llamada “Estudiante 2”), preguntó: “profe, ¿puedo ocupar la fórmula general?”, a lo que el docente respondió “puedes utilizar el método que más te acomode”.

Cuando una de las estudiantes que salió a la pizarra voluntariamente terminó de escribir el desarrollo, el profesor solicitó al curso que se quedaran en silencio para poder escuchar la explicación de su compañera.

La primera estudiante en escribir su desarrollo en la pizarra (llamada “Estudiante 3”), explica su desarrollo comenzando con la definición de las incógnitas, expone cómo se forma la ecuación cuadrática y la resuelve utilizando la fórmula general de la ecuación cuadrática, de la que se obtienen dos soluciones, una negativa y otra positiva. la Estudiante 3, indica que sólo sirve la solución positiva dado que “los precios no pueden ser negativos”, y culmina su explicación comentando que se debe reemplazar la solución obtenida, en la ecuación que determina la cantidad de cajas, obteniéndose 20. A continuación, se presenta una imagen del desarrollo que realizó la Estudiante 3 en la pizarra:

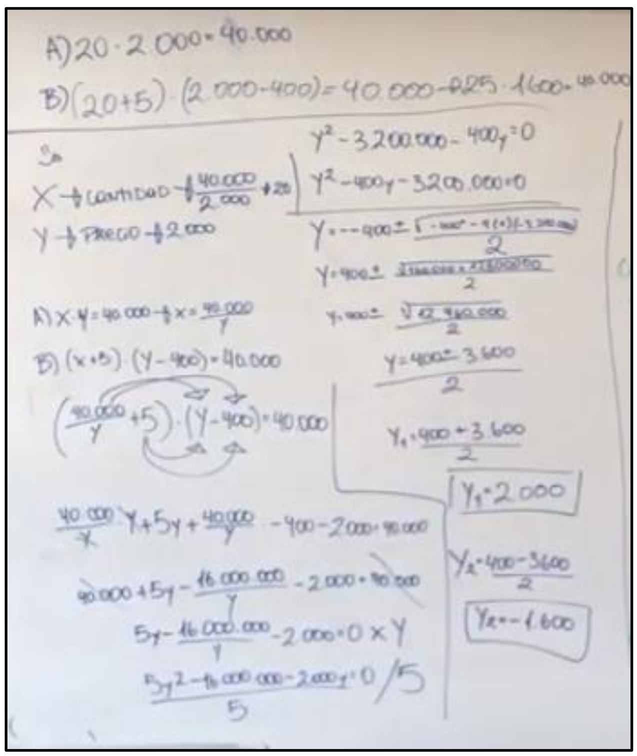


Figura 31. Desarrollo del problema escrito por Estudiante 3.

Fuente: *Respuesta de estudiantes*.

Luego, la segunda alumna en salir voluntariamente a la pizarra (llamada “Estudiante 4”), explica su desarrollo estableciendo otras incógnitas, por lo tanto, llega a una ecuación con distintos coeficientes que los de la Estudiante 3, sin embargo, ella utilizó el método de resolución de Po-Shen Loh. Cabe destacar que la alumna no realizó todo el desarrollo en el pizarrón, puesto que fue la última en comenzar a escribir, pero, al momento de explicar, hizo énfasis en cómo continuaba. En la figura 34 se presenta una imagen del desarrollo que realizó en la pizarra:

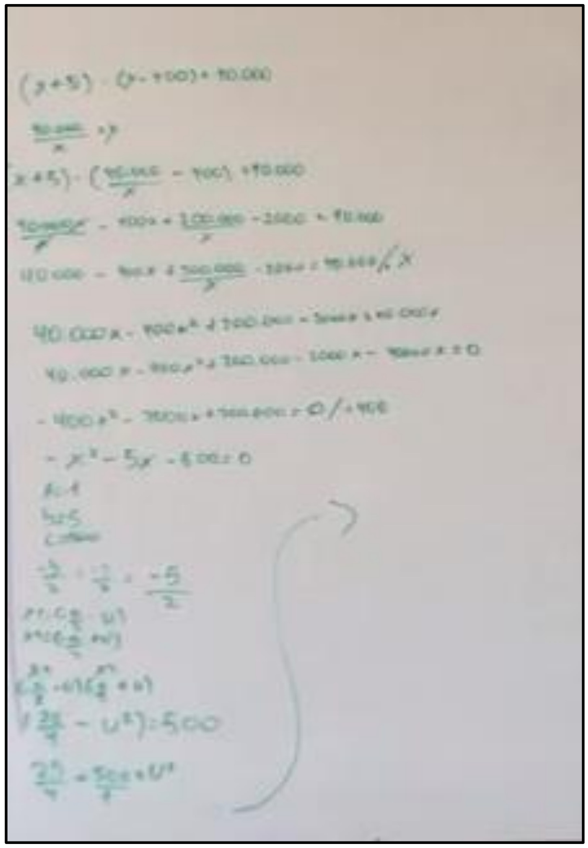


Figura 32. Desarrollo del problema escrito por Estudiante 4.

Fuente: *Respuesta de estudiantes*.

Por último, la tercera estudiante que salió voluntariamente a la pizarra (llamada "Estudiante 5"), explicó el desarrollo del problema de manera similar a Estudiante 4, pero, para resolver la ecuación cuadrática utilizó la fórmula general de la misma. A continuación, se presenta una imagen del desarrollo que realizó en la pizarra:

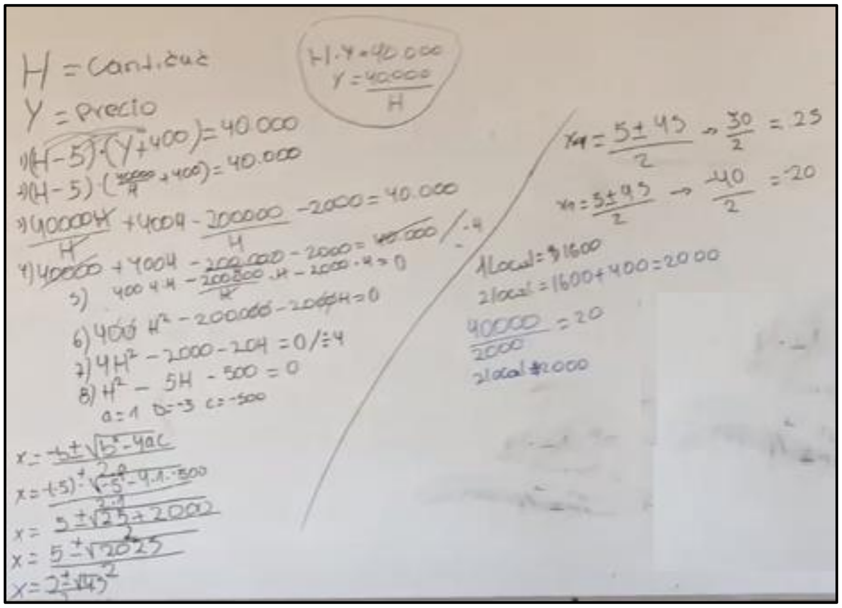


Figura 33. Desarrollo del problema escrito por Estudiante 5.

Fuente: *Respuesta de estudiantes*.

Luego de la explicación realizada por las 3 estudiantes, el profesor utilizó los registros que dejaron en la pizarra para volver a explicar el desarrollo del problema, haciendo énfasis en cómo se encontraba cada incógnita y la ecuación cuadrática, para llegar a la solución (considerando que sólo una era correcta, en este caso). Luego, se retiraron las hojas con los desarrollos de las estudiantes y se dio por finalizada la clase.

6.4 Discusión de la clase.

Dentro de la fase de Metodología del Estudio de Clases, se presenta una fase de Revisión que incluye a los observadores y, según Mena (2007)

> Comienza con un breve preámbulo en que el profesor que impartió la clase explica su propósito. Sobre la base del plan de enseñanza distribuido de antemano, se explicitan conceptos acerca de los materiales pedagógicos y características o estatus de los alumnos, de acuerdo con cada etapa de la clase, y los propósitos de cada problema y actividad realizados en ella. Luego, cada participante expresa opiniones y pregunta acerca de los problemas

> dados en la clase y el rol formativo del profesor, así como acerca de las expresiones y actividades de aprendizaje de los alumnos. (p. 3)

De lo anterior, es importante señalar que esta fase se realizó de manera presencial junto al grupo de seminaristas y la Dra. María Soledad Montoya. Esta instancia de revisión se llevó a cabo mediante la observación del video de la clase presentada anteriormente. Durante la sesión, se realizaron comentarios, opiniones y sugerencias referidas a las acciones realizadas por el profesor implementador y las estudiantes, las cuales se especifican a continuación.

En relación con los aspectos de carácter pedagógico:

- Se promueve la autonomía por parte del estudiante, pues el docente no lee la situación problema y permite que las estudiantes trabajen sin intervención por parte de él. De lo anterior, es importante señalar que esta acción se relaciona con el contrato didáctico existente entre el profesor y los alumnos, estableciendo las acciones a realizar por cada una de las partes. En relación con ello, Avila (2001), señala que

  > [En todas las situaciones didácticas] Se establece una relación que determina - explícitamente en una pequeña parte, pero sobre todo implícitamente - lo que cada participante, el profesor y el alumno, tiene la responsabilidad de hacer y de lo cual será, de una u otra manera, responsable frente al otro. Este sistema de obligaciones recíprocas se parece a un contrato (...) lo que nos interesa de ese contrato es la parte específica del contenido, es decir, el contrato didáctico. (p. 10)

- Se fomenta la participación de todas las estudiantes en la Situación de Formulación (cuando las alumnas trabajan en parejas o tríos).
- Se impulsa la libre participación de las estudiantes en representación de sus respectivos grupos, evitando que sea el profesor quien escoja a las alumnas emitiendo algún juicio de valor.

En cuanto a los relacionados con el aspecto didáctico:

- Se presenta un efecto Topaze en algunos momentos de la clase. Al respecto, cabe destacar que, según Brousseau, citado en Guzmán et al. (2020), un efecto Topaze

> Se caracteriza por que el estudiante llega a la solución de una situación dada apoyado por medios externos; esto significa que, ante una situación dada, el profesor evita la elaboración de una respuesta por parte del alumno, al darle señales para que el alumno dé la respuesta que él espera. (p. 655)

Dicho lo anterior, se produjo un efecto Topaze cuando:

- Una alumna le preguntó al profesor, "¿podemos elegir el método que nosotras queramos?", y él respondió "claro, después de que lleguen a la ecuación cuadrática pueden utilizar cualquiera de los métodos". La respuesta anterior pudo haber afectado la dificultad del problema, puesto que el profesor entregó señales indicando que debían llegar a una ecuación cuadrática.
- Una estudiante dice, "profe, ¿por qué a la estudiante X le quedó en menos y a mí me quedó todo en más?", a lo que el profesor respondió "porque aquí era $x - 5$", entregando la respuesta a la alumna.

- Una alumna preguntó, "profe, ¿puedo ocupar la fórmula general?", a lo que el docente respondió "puedes utilizar el método que más te acomode", afirmando que, efectivamente, debían utilizar uno de los métodos de resolución de la ecuación cuadrática vistos en clases.

Cuando el profesor entregó la última instrucción, señaló "respecto a la actividad, no habrá ayuda en lo que se refiere al problema, solamente en lo que se refiere al enunciado". Si el profesor hubiese leído el enunciado (o parte de él), podría haber entregado señales de cómo debían proceder al darle énfasis en alguna frase del problema, provocando así un efecto Topaze.

Además, continuando con los aspectos relacionados al carácter didáctico, es importante señalar que, durante la clase, los errores de las estudiantes no se utilizaron como una instancia de aprendizaje. Si el profesor hubiese seleccionado algún error presente en el desarrollo del problema que las estudiantes escribieron en la pizarra, hubiese sido beneficioso al momento de institucionalizar el contenido. Respecto al uso del error como una instancia de aprendizaje, Guerrero et al (2013), señala que

> Los maestros pueden y deben crear el escenario para que el estudiante acierte, y que, en los intentos fallidos, aprenda y recree la necesidad de pensar de manera distinta, de que también tenga la oportunidad de evaluar su situación particular y los efectos en los demás, para que, con criterio y posición crítica, deconstruya y fundamente teoría nueva, se proyecte desde sus propias experiencias para caminar por un sistema que funciona por aceptación general. (p. 17)

Por lo tanto, cada comentario y sugerencia que aparecen luego de analizar el video del Estudio de Clase debe ser considerado en la siguiente planificación o propuesta de clase, incluyendo a los profesores que participaron de dicho Estudio.

6.5 Reflexión sobre el proceso de Estudio de Clases y aprendizajes profesionales.

En primera instancia, reflexionando sobre el proceso de Estudio de Clases, previamente el profesor implementador se encontraba seguro al momento de realizar la clase, dado que, ya había trabajado dos semestres junto al mismo curso por lo que existía un vínculo profesor-alumna, sin embargo, se encontraba ansioso porque esta sesión era grabada y no quería cometer errores. También, existía una preocupación de cómo abordarían el problema las estudiantes, pues, no estaban acostumbradas a trabajar regularmente con problemas de este tipo, a pesar de ver algunos similares en las sesiones de clases anteriores, no eran suficientes para tener un ritmo de trabajo constante.

Al comenzar la clase, el docente indicó las instrucciones de trabajo mencionando que solo respondería dudas relacionadas al enunciado de la situación problema, realizó esta acción para promover el trabajo autónomo y evitar cometer un efecto Topaze al responder las preguntas.

Durante el desarrollo de la clase, el clima de aula fue positivo, entendiendo a modo general un clima escolar positivo a

> Aquellos en que se facilita el aprendizaje de todos quienes lo integran; los miembros del sistema se sienten agradados y tienen la posibilidad de desarrollarse como personas, lo que se traduce en una sensación de bienestar general, sensación de confianza en las propias habilidades, creencia de la relevancia de lo que se aprende o en la forma en que se enseña, identificación con la institución, interacción positiva entre pares y con los demás actores. (EducarChile, 2008, p. 4)

Sin dudas, el clima favoreció a las estudiantes y nace la reflexión ¿Cómo mantener un clima de aula que facilite de mejor forma el aprendizaje de las estudiantes?

A modo general, un clima de aula que favorece el desarrollo de las estudiantes es aquel en que las estudiantes sienten el apoyo necesario de sus pares y profesores, además respetan sus diferencias. Por otro lado, "la posibilidad de que la escuela sea significada por el alumno como una experiencia emocionalmente positiva va a depender en gran medida del ambiente que logren crear los alumnos y los profesores en el contexto educacional" (Ascorra, P. et al., 2003, p. 120)

Por otra parte, la clase diseñada se enfoca en la habilidad de resolver problemas propuesta por el Ministerio de educación (2015), cuyo propósito es "se habla de resolver problemas (en lugar de ejercicios) cuando la o el estudiante logra solucionar una situación problemática dada, contextualizada o no, sin que se le haya indicado un procedimiento a seguir" (p. 97), sin embargo, en el contexto del curso, la mayoría de las alumnas no estaban acostumbradas a resolver situaciones problemas previo a la implementación de la secuencia de enseñanza aprendizaje, lo que dificultó el desarrollo de la actividad, de hecho, 4 alumnas no registraron nada en la hoja entregada, por lo que nos surge la pregunta ¿Qué estrategias se pueden utilizar con aquellas estudiantes que no comprenden cómo resolver una situación problema?, pues se desconoce la razón porque no hicieron nada, se especula que puede ser porque no entienden cómo resolver el problema, o bien, simplemente deseaban hacer nada en esta clase.

Se considera fundamental la acción que debería realizar el docente frente a este tipo de situaciones, pues él debería ser el encargado de monitorear el aprendizaje de todas las estudiantes y evitar este tipo de situaciones. En este caso, la participación de las estudiantes en el aula estará condicionada por algunos factores.

> Por una parte, dependerá de las significaciones de los profesores acerca de ésta, las que, a su vez, estarán influidas por las racionalidades que informan sus prácticas docentes. Por otra, dependerá de la naturaleza de las oportunidades que propicia el profesor para que los estudiantes se puedan o no involucrar activamente en sus procesos formativos, decidiendo quien toma la iniciativa, incorporando o desechando sus contribuciones según su pertenencia o según su viabilidad. En definitiva, dependerá casi exclusivamente del profesor. (Prieto, 2005, p. 28)

Sobre la acción que debe realizar el docente para promover la habilidad de resolver problemas, Simonsen (2015), menciona que

> Esto plantea a los docentes y directivos de las escuelas y también a los formadores de los futuros profesores un nuevo desafío, sobre todo porque la resolución de problemas parece estar ausente de la formación inicial y de las aulas escolares.

En efecto, este es un problema que supera a las estudiantes del liceo, sin embargo, se considera fundamental como futuros profesores promover el desarrollo de esta habilidad, pues se considera que

> La resolución de problemas es sin duda una llave para el aprendizaje integral de los estudiantes. Involucra todos lo que los niños saben de una situación,

> así como lo que pueden observar en ella, y los insta a probar soluciones que les hacen pensar, asumiendo riesgos, así como procesos metacognitivos para comprobar resultados y reflexionar sobre lo realizado. (EducarChile, s. f.)

Con respecto a las acciones realizadas por el profesor implementador, durante la observación del video se presenció la recurrencia al efecto Topaze en tres ocasiones, recordando que es “aquella circunstancia en donde el estudiante llega a la solución de un problema, pero no ha sido por sus propios medios, sino porque el profesor asume la resolución del problema” (Chavarría, 2006, p. 3), si bien el docente no indico la solución al problema como tal, si dio indicios de cómo se debía llegar a esta, pues, indicó que luego de llegar a una ecuación cuadrática podían utilizar el método de resolución que más les acomode. Cabe mencionar que este era uno de los temores del docente antes de realizar la clase, pues si bien en ocasiones puede ser utilizada como un último recurso, es importante no abusar de ella.

Continuando, se pudo observar la buena relación entre el profesor implementador y las alumnas, se nota que existe un buen clima de aula que promueve el respeto entre el grupo de curso y el profesor. Se considera fundamental promover este tipo de relación, ya que, se habla de personas afectuosas y la confianza que deposita el docente en las estudiantes puede ser muy enriquecedora en cuanto a su disposición por aprender. Se observó que el docente en todo momento motivó al curso para resolver el problema, siempre les indicó que tenían todas las capacidades para desarrollar la situación exitosamente, él depositó toda su confianza en las escolares, en relación con el tacto que posee el profesor en su quehacer pedagógico van Manen (1998) menciona que

> Por tanto, la esperanza se refiere a lo que nos proporciona la paciencia y la tolerancia, la creencia y la confianza en las posibilidades de nuestros niños. Los niños que sienten nuestra confianza se ven animados a confiar en sí mismos. La confianza nos hace capaces. La esperanza confiada es nuestra experiencia de las posibilidades y el desarrollo del niño. Esta confianza

> permite que el niño pueda confiar en sus propias posibilidades y en su desarrollo. (p. 82)

En consecuencia, la confianza que proporciona el profesor cumple un rol fundamental en el proceso de enseñanza, así como también, los lazos afectivos que se generan con los y las estudiantes son importantes en el quehacer docente.

Por otra parte, se sabe que todas las alumnas aprenden de manera distintas, por ello, es importante que, al momento de enseñar un nuevo contenido, este se explique de diferentes maneras, pues, todos/as los/as alumnas/os pasar por procesos cognitivos diferentes

> Por eso, cuando dos estudiantes, cada uno por su cuenta, le piden ayuda al profesor para que les explique una tarea o un problema de características similares, el profesor puede tranquilamente sugerir a uno de ellos que lo vuelva a considerar detenidamente mientras que igual de tranquilamente puede animar al otro sin separarse de él, ayudándole en su presencia a resolver el problema. (van Manen, 1998, p. 200)

Relacionando lo mencionado por Van Manen con lo observado en la clase, es que se considera tan importante la situación de validación e institucionalización del contenido, ya que, por una parte, las mismas estudiantes tuvieron las oportunidades de compartir estrategias o apoyarse en caso de ser necesario en la solución de la situación problema, y además, el profesor institucionaliza el problema.

A modo de síntesis, se realizó una reflexión sobre las prácticas pedagógicas, considerando como fomentar un clima de aula positivo, las dificultades presentadas relacionadas a la habilidad de resolución de problemas, la confianza que deposita el docente en las estudiantes y los procesos de aprendizaje. El aprendizaje profesional que dejaron estas reflexiones se basa principalmente en el quehacer docente, ya que, se cree un desafío importante considerar estas reflexiones al momento de presentarse frente a un curso, pues es importante tener presente que trata de personas afectuosas y las relaciones que se tengan con ellas será considerable al momento de realizar las clases.

CAPÍTULO VII.

ANÁLISIS DE RESULTADOS.

En el presente capítulo, correspondiente a Análisis de resultados, se trabajan las resoluciones de las estudiantes producidas en la experimentación de la clase y luego, se contraponen con las ideas previas de la secuencia didáctica (esta es la última fase de la Ingeniería Didáctica). Analizando los resultados, podremos responder a nuestra pregunta de investigación, sobre qué acciones o estrategias utilizan los estudiantes para la búsqueda de técnicas de resolución de ecuaciones cuadráticas.

Inicialmente, se presenta un Análisis aposteriori considerando aquellas clases en las que hubo aprendizajes claves, es decir, se hará una selección entre las 12 sesiones. Por otro lado, se realiza una confrontación entre los Análisis apriori y aposteriori.

7.1 Análisis aposteriori de las situaciones de enseñanza y aprendizaje claves.

Para el análisis aposteriori de las situaciones de enseñanza y aprendizaje claves, se seleccionaron las clases 2, 5, 8, 10 y 12.

Se escogió la clase 2, porque en ella se propone inicialmente el método de resolución de una ecuación cuadrática por factorización, sin que las estudiantes conozcan (aún), el método.

De la misma forma con la clase 5, se eligió porque se propone primeramente el método de resolución de una ecuación cuadrática por Po-Shen Loh.

Continuando con el mismo criterio, se escogieron las clases 8 y 10 porque se propusieron inicialmente los métodos de resolución de una ecuación cuadrática por Completación de cuadrados y por Fórmula general, respectivamente.

Para la clase 12, se eligió una situación de enseñanza y aprendizaje clave porque se implementó el Estudio de Clase, que trataba de una situación problema que involucra cualquiera de los cuatro métodos vistos en clases.

7.1.1 Análisis aposteriori de la situación de enseñanza y aprendizaje de la clase 2.

Esta clase corresponde a la sesión 2, la clase se realizó un martes y asistieron un total de 21 estudiantes, durante la actividad se plantea la primera situación problema, que dice lo siguiente:

- ➔ Carlos es tres años mayor que Lucía y la suma de los cuadrados de ambas edades es 89. ¿Cuál es la edad de Carlos y Lucía?

En este caso, las estudiantes debían trabajar el problema en su cuaderno, para luego mencionar las estrategias utilizadas.

<u>Estrategias</u>

Respecto de la Estrategia 1 mencionada en Capítulo V, específicamente en 5.4 Análisis apriori de situaciones de aprendizajes claves de la sesión 2, dos de las estudiantes responden a la pregunta utilizando el tanteo, argumentando que $5^2 = 25$ y que $8^2 = 64$ y que al sumarlos da como resultado 89, por lo tanto, la edad de Carlos es 8 años y la de Lucía 5 años.

Por otro lado, cinco estudiantes plantean la Estrategia 2, es decir, plantean la situación algebraicamente y de manera correcta llegando a la ecuación cuadrática, sin embargo, solo una de ellas llega correctamente a las soluciones, respondiendo correctamente las edades.

<u>Dificultades</u>

Respecto de las dificultades expuestas en el análisis apriori se observó, por una parte, que la mayoría de las estudiantes presentan obstáculos en el planteamiento del problema, puesto que, no comprendían cómo pasar del lenguaje natural al lenguaje matemático. Por otra parte, se observó que las alumnas presentan dificultades para analizar las soluciones del problema, dado que, consideraron que ambas soluciones estaban correctas.

Errores

De las estudiantes que plantearon el problema de manera algebraica, se pudieron evidenciar algunos de los errores mencionados, por ejemplo, al multiplicar binomios, llegando a ecuaciones cuadráticas incorrectas. También, se pudieron ver errores al simplificar la ecuación cuadrática. Por último, otro de los errores observados fue la factorización de trinomio, pues, los números utilizados en la factorización no eran acordes a la ecuación propuesta.

Enfoque teórico

Se observó que las estudiantes no pasaron por la situación de acción, ya que, desde que les presentó la situación problema, ellas comenzaron a trabajar inmediatamente en duplas o tríos comentando sus ideas, situándose inmediatamente en la situación de formulación. Por otra parte, la clase continuó con la situación de validación, el profesor implementador solicitó a una estudiante escribir y explicar sus estrategias de manera voluntaria, cabe destacar que la estudiante que salió a delante de la sala escribió un desarrollo correcto por lo que no se logró utilizar el error como una instancia de aprendizaje (en esta ocasión). Luego, el profesor institucionaliza el método de factorización, haciendo énfasis en las distintas estrategias utilizadas.

7.1.2 Análisis aposteriori de la situación de enseñanza y aprendizaje de la clase 5.

La clase corresponde a la sesión 5 que se realizó un martes y asistieron 25 estudiantes, para el desarrollo de la clase se consideró la siguiente situación problema:

➔ Necesitamos encontrar una ecuación cuadrática cuyo coeficiente c es igual a 28. Si una persona se para en el punto de penal y otra persona en el otro punto de penal deberán caminar la misma distancia para llegar a la mitad de la cancha.

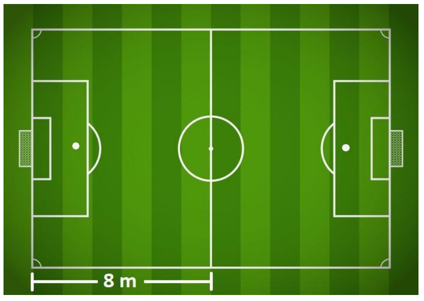


Figura 34. Representación pictórica del problema planteado.

Fuente: Elaboración propia.

¿Cómo representarías en la figura y algebraicamente la distancia del inicio de la cancha a cada punto penal?

Considere que la distancia desde el inicio de la cancha a cada punto penal representa una solución de la ecuación (x_1 y x_2) y se cumplirá la siguiente propiedad:

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

¿Cuál es la ecuación y cuáles son sus soluciones?

Las estudiantes desarrollaron el problema en su cuaderno y luego explicaron sus estrategias a sus compañeras.

<u>Estrategias</u>

Respecto de la Estrategia 1 mencionada en Capítulo V, específicamente en

5.4 Análisis apriori de situaciones de aprendizajes claves de la sesión 5, se registró que dos estudiantes lograron llegar a la respuesta utilizando esta estrategia, sin embargo, 5 estudiantes iniciaron su desarrollo utilizando este planteamiento, pero cometieron errores algebraicos por lo que no llegaron a la respuesta correcta.

Luego, se observó que una estudiante utilizó la estrategia 2 exitosamente, en cambio, 3 alumnas iniciaron el desarrollo del problema utilizando esta estrategia, pero dejaron incompleta.

Dificultades

Respecto a las dificultades, tal como se previó en el análisis apriori, gran parte del alumnado presentó dificultades en el planteamiento del problema, pues no comprendían cómo relacionar la cancha con la ecuación cuadrática.

Errores

La mayoría de las estudiantes cometió los errores previstos en el análisis apriori, ya que, muchas alumnas presentaron errores en la reducción de términos semejantes, multiplicar binomios y consideraron las medidas de la cancha negativas.

Enfoque teórico

Al comienzo de la clase, específicamente cuando el profesor implementador presenta la situación problema a las estudiantes, hace énfasis en que primero deben analizar el problema individualmente, pues, se encuentran en la situación de acción, de esta forma se logra apreciar el primer contacto que tienen las estudiantes con el problema, se pudo observar a las alumnas trabajar gráficamente y algebraicamente en encontrar la ecuación cuadrática. Luego, el docente indica el momento en que deben trabajar grupalmente y compartir sus ideas, por lo que, las estudiantes se reunieron en duplas o tríos y finalizaron el desarrollo del ejercicio, pues, en la situación de acción nadie había alcanzado a encontrar la respuesta al problema. Finalmente el profesor solicita que dos estudiantes salgan (de manera voluntaria) al pizarrón a escribir y explicar sus estrategias, pero las alumnas que participaron utilizaron la misma estrategia (estrategia 2), por lo que el profesor al momento de realizar la institucionalización del método de Po-Shen Loh, lo hizo haciendo énfasis en la otra estrategia que se podría utilizar (estrategia 1).

7.1.3 Análisis aposteriori de la situación de enseñanza y aprendizaje de la clase 8.

Esta clase corresponde a la sesión 8, la clase se realizó un lunes y asistieron un total de 26 estudiantes, durante la actividad se plantea la siguiente situación problema:

- ➔ El marco de una pintura mide 18 cm por 14 cm. La pintura ocupa $192\ cm^2$. Encontrar el ancho del marco.

En este caso, nuevamente las estudiantes debían trabajar el problema en su cuaderno, para luego mencionar las estrategias utilizadas frente a sus compañeras.

Estrategias

Respecto de la Estrategia 1 mencionada en Capítulo V, específicamente en 5.4 Análisis apriori de situaciones de aprendizajes claves de la sesión 8, ninguna de las estudiantes planteó el problema gráficamente, por lo tanto, la Estrategia 1 no fue utilizada.

En relación con la Estrategia 2, 9 estudiantes modelaron el problema algebraicamente, 3 de las estudiantes llegaron a la ecuación cuadrática sin simplificar, 3 de las estudiantes llegaron a la ecuación cuadrática simplificada y 3 estudiantes llegaron a ecuaciones cuadráticas incorrectas. Respecto del método, 4 de las estudiantes realizaron el método de manera correcta, llegando a las soluciones de la ecuación, no obstante, sólo 3 respondieron correctamente al problema.

Dificultades

Respecto de las dificultades propuestas, nuevamente se observó que la mayoría de las estudiantes no pudieron plantear el problema de manera correcta. Por otro lado, 1 de las estudiantes llegó correctamente a las soluciones de la ecuación, pero no analizó dichas soluciones con lo que se preguntaba en el problema.

Errores

De las estudiantes que modelaron el problema de manera algebraica, se pudieron hacer notar algunos de los errores mencionados en el análisis apriori, por ejemplo, al multiplicar binomios, llegando a ecuaciones cuadráticas incorrectas. También, se pudieron ver errores al simplificar la ecuación cuadrática. Por último, se pudieron ver errores al completar el cuadrado de binomio.

Enfoque teórico

Respecto a la incidencia de la Teoría de Situaciones Didácticas en la clase 8, se presenció a las alumnas transitar por la situación de acción, pues, se les presentó el problema y ellas trabajaron individualmente, se observó que la mayoría comenzó representando la situación de manera pictórica, pero cuando pasaron a la situación de formulación acudían a estrategias algebraicas. Finalmente, el profesor solicita a una estudiante que salga a la pizarra (de manera voluntaria) a escribir y explicar su estrategia, sin embargo, no se logró continuar con la situación de institucionalización, puesto que no alcanzó el tiempo.

7.1.4 Análisis aposteriori de la situación de enseñanza y aprendizaje de la clase 10.

Esta sesión corresponde a la clase 10 que fue realizada un martes y asistieron 17 alumnas, para el desarrollo de la clase se presentó la siguiente situación problema:

- ➔ La suma de los cuadrados de tres números pares consecutivos es 596. Determinar el mayor entero del trío.

En esta clase, las estudiantes debían desarrollar el problema en su cuaderno, y luego compartir sus estrategias con sus compañeras:

Estrategias

Respecto de la Estrategia 1 mencionada en Capítulo V, específicamente en 5.4 Análisis apriori de situaciones de aprendizajes claves de la sesión 10, se registró que 12 alumnas resolvieron el problema utilizando esta estrategia, si bien no realizaron la tabla como lo propone la estrategia, si lo hicieron a través de ensayo y error.

Por otra parte, se encontró a 2 estudiantes resolver el problema utilizando la estrategia 2, ya que, realizaron la modelación del problema encontrando la ecuación cuadrática que lo representa y luego utilizaron la fórmula general para encontrar las soluciones.

Dificultades

En primera instancia se presentaron dificultades en la comprensión del problema, sin embargo, el profesor indicó que, si no comprenden la situación problema, la relean, analicen y subrayen lo que indica cada parte de este, de esta manera las estudiantes comprendan de mejor manera lo que indica el enunciado.

Errores

Se presentaron errores aritméticos, pues en muchas ocasiones las estudiantes cometieron errores al calcular el cuadrado de un número. Además, se registraron equivocaciones al momento de utilizar la fórmula general, ya que, sustituyeron los valores de los coeficientes de manera incorrecta.

Enfoque teórico

Respecto a la influencia de la Teoría de Situaciones Didácticas en la clase 10, se observó que las estudiantes luego de leer la situación problema comenzaron a trabajar inmediatamente en duplas, por lo que, no se apreció la situación de acción en esta clase, sino que comenzó con la situación de formulación. Luego, el profesor implementador solicita a dos estudiantes escribir y explicar sus estrategias en la pizarra, se preocupó en que estas alumnas utilicen estrategias distintas. Finalmente, el profesor institucionaliza el contenido utilizando las estrategias presentadas por las estudiantes.

7.1.5 Análisis aposteriori de la situación de enseñanza y aprendizaje del Estudio de Clase.

Como se mencionó en *Capítulo VI*, específicamente en 6.1 Descripción de la clase diseñada, asistieron 18 estudiantes para el Estudio de Clase. Aquí, se planteó la siguiente situación problema:

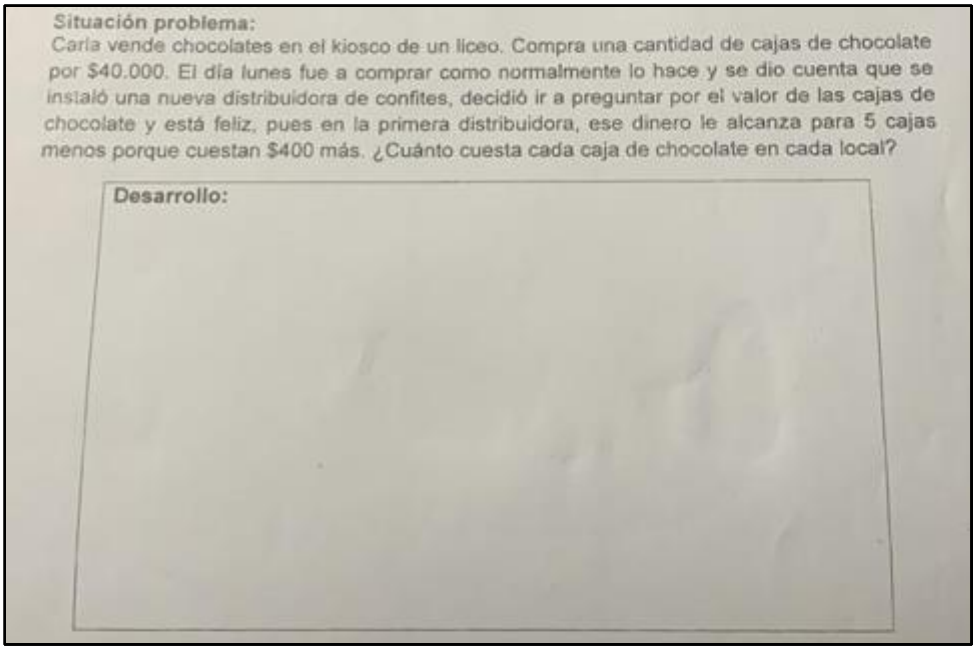
- ➔ Carla vende chocolates en el kiosco de un liceo. Compra una cantidad de cajas de chocolate por $40.000. El lunes fue a comprar, como normalmente lo hace y se dio cuenta que se instaló una nueva distribuidora de confites, decidió ir a preguntar por el valor de las cajas de chocolate y está feliz, pues en la primera distribuidora, ese dinero le alcanza para 5 cajas menos porque cuestan $400 más. ¿Cuánto cuesta cada caja de chocolate en cada local?

Para este problema, separaremos aquellas estudiantes que entregaron la hoja con el problema sin ningún tipo de desarrollo, con aquellas que nos proporcionaron alguna respuesta, considerando desde el mínimo desarrollo, hasta la solución del problema (independiente si está correcto o no).

Figura 35. Gráfico de estudiantes con y sin desarrollo.

Fuente: Elaboración propia.

El gráfico anterior nos muestra que la cantidad de estudiantes que entregaron el problema sin ningún tipo de desarrollo fue de 4. Mientras que, 14 estudiantes entregaron su hoja con el problema con algún desarrollo.



Situación problema:
Carla vende chocolates en el kiosco de un liceo. Compra una cantidad de cajas de chocolate por $40.000. El día lunes fue a comprar como normalmente lo hace y se dio cuenta que se instaló una nueva distribuidora de confites, decidió ir a preguntar por el valor de las cajas de chocolate y está feliz, pues en la primera distribuidora, ese dinero le alcanza para 5 cajas menos porque cuestan $400 más. ¿Cuánto cuesta cada caja de chocolate en cada local?

Desarrollo:

Figura 36. Estudio de Clase, respuesta sin desarrollo.

Fuente: *Respuesta de estudiante*.

La figura anterior es representativa para las 4 estudiantes que entregaron el problema sin ningún tipo de desarrollo, lo que significa que 14 fueron las estudiantes que hicieron, desde una mínima respuesta, hasta la solución del problema (sin considerar si está correcto o no).

De las 14 estudiantes restantes, estableceremos las siguientes categorías:

1. <u>Definición de incógnitas</u>

Aquellas alumnas que solamente plantearon las incógnitas realizaron algún desarrollo pero no utilizaron ningún método de resolución.

2. <u>Modelación del problema</u>

Aquellas estudiantes que llegaron a la ecuación cuadrática. Para este punto, se consideran 2 ecuaciones (simplificadas) a las que podrían llegar las alumnas en caso de que su desarrollo estuviese correcto:

Ecuación 1: $x^2 - 5x - 500 = 0$

Ecuación 2: $y^2 - 400y - 3.200.000 = 0$

Para las ecuaciones 1 y 2, se proponen los distintos métodos de resolución del problema, es decir, se mostrarán aquellos desarrollos que nacen de la ecuación 1, y los que emanan de la ecuación 2.

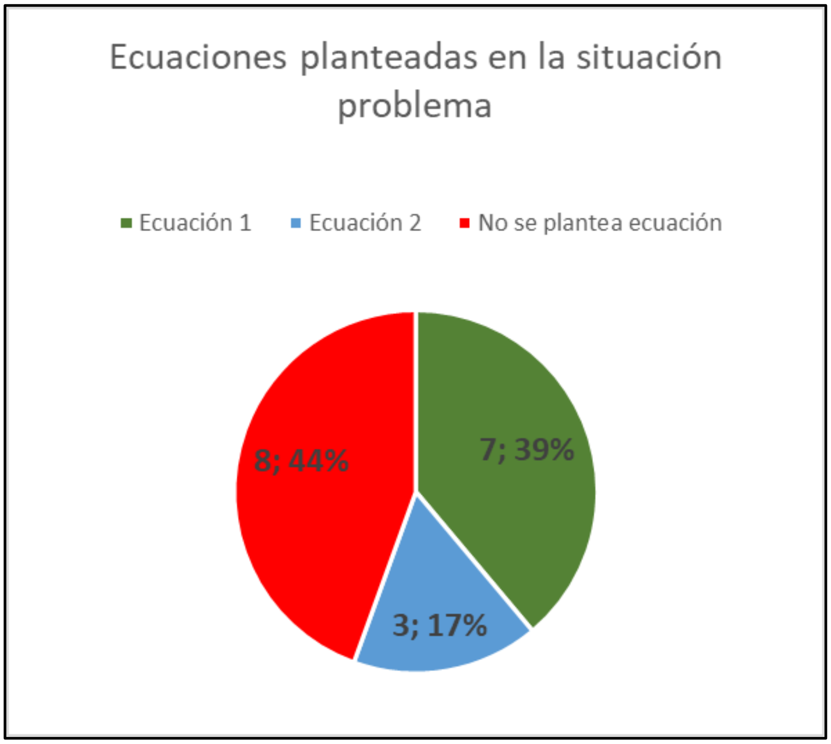
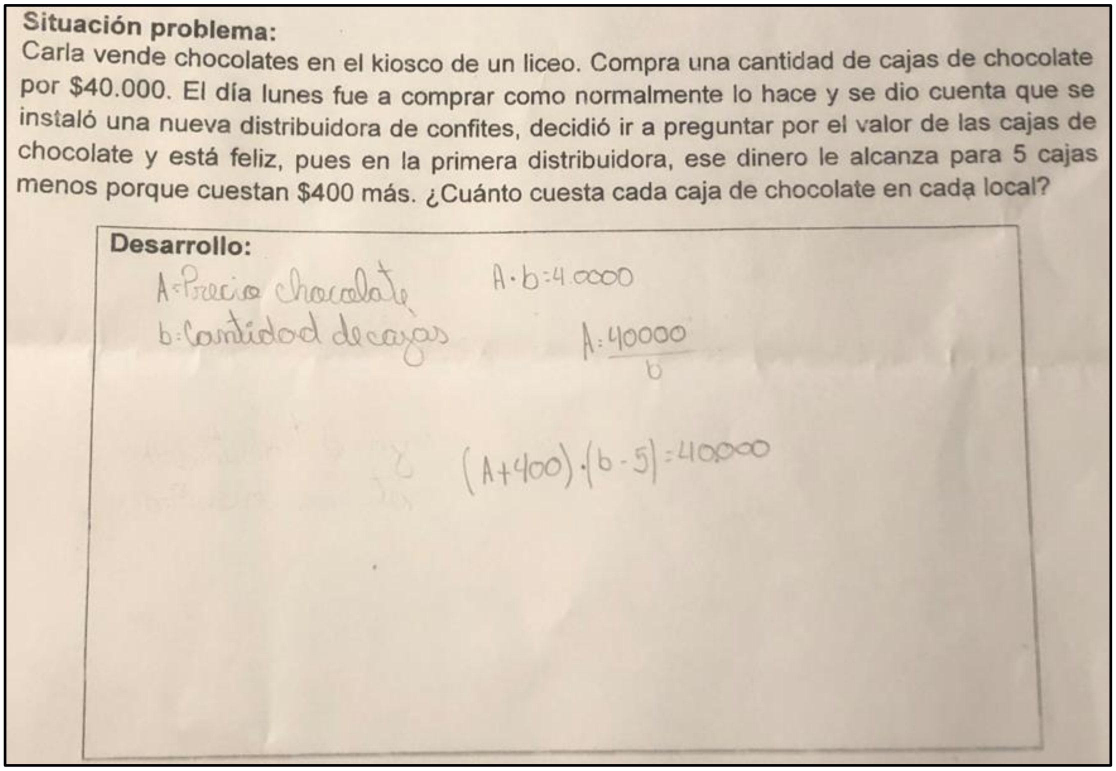


Figura 37. Gráfico sobre ecuaciones planteadas por estudiantes.

Fuente: Elaboración propia.

El gráfico anterior, nos da a conocer que, durante la modelación del problema, 7 estudiantes llegan a la ecuación 1, 3 estudiantes llegan a la ecuación 2, y finalmente 8 estudiantes no llegan a ningún tipo de ecuación.

<u>Categoría 1</u>: estudiantes que solamente definieron las incógnitas.



Situación problema:
Carla vende chocolates en el kiosco de un liceo. Compra una cantidad de cajas de chocolate por $40.000. El día lunes fue a comprar como normalmente lo hace y se dio cuenta que se instaló una nueva distribuidora de confites, decidió ir a preguntar por el valor de las cajas de chocolate y está feliz, pues en la primera distribuidora, ese dinero le alcanza para 5 cajas menos porque cuestan $400 más. ¿Cuánto cuesta cada caja de chocolate en cada local?

Desarrollo:
A=Precio chocolate
b=Cantidad de cajas

$A \cdot b = 4.0000$

$A = \frac{40000}{b}$

$(A+400)\cdot(b-5) = 40000$

Figura 38. Estudio de Clase, definición de incógnitas.

Fuente: *Respuesta de estudiante*.

La imagen anterior es representativa para 4 estudiantes que sólo plantearon las incógnitas (o su desarrollo es mínimo).

<u>Categoría 2</u>: estudiantes que llegan a una de las dos ecuaciones cuadráticas posibles.

Como se mencionó anteriormente, se consideran dos ecuaciones cuadráticas posibles, las que son:

(1) $x^2 - 5x - 500 = 0$
(2) $y^2 - 400y - 3.200.000 = 0$

En primera instancia, analizaremos la ecuación 1.

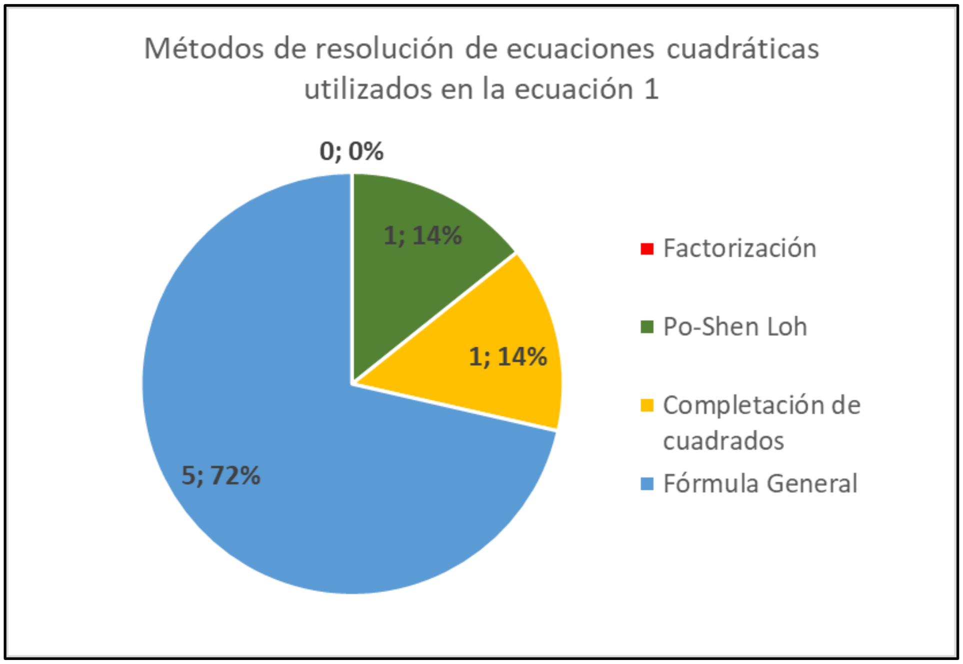


Figura 39. Gráfico de los métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas.

Fuente: Elaboración propia.

Del gráfico anterior, se extrae la siguiente información de las estudiantes que llegaron a la ecuación 1:

- 0 estudiantes utilizaron el método de resolución de una ecuación cuadrática por factorización.
- 1 estudiante utilizó el método de resolución de una ecuación cuadrática por Po-Shen Loh. En relación con esta estudiante, su desarrollo fue el siguiente:

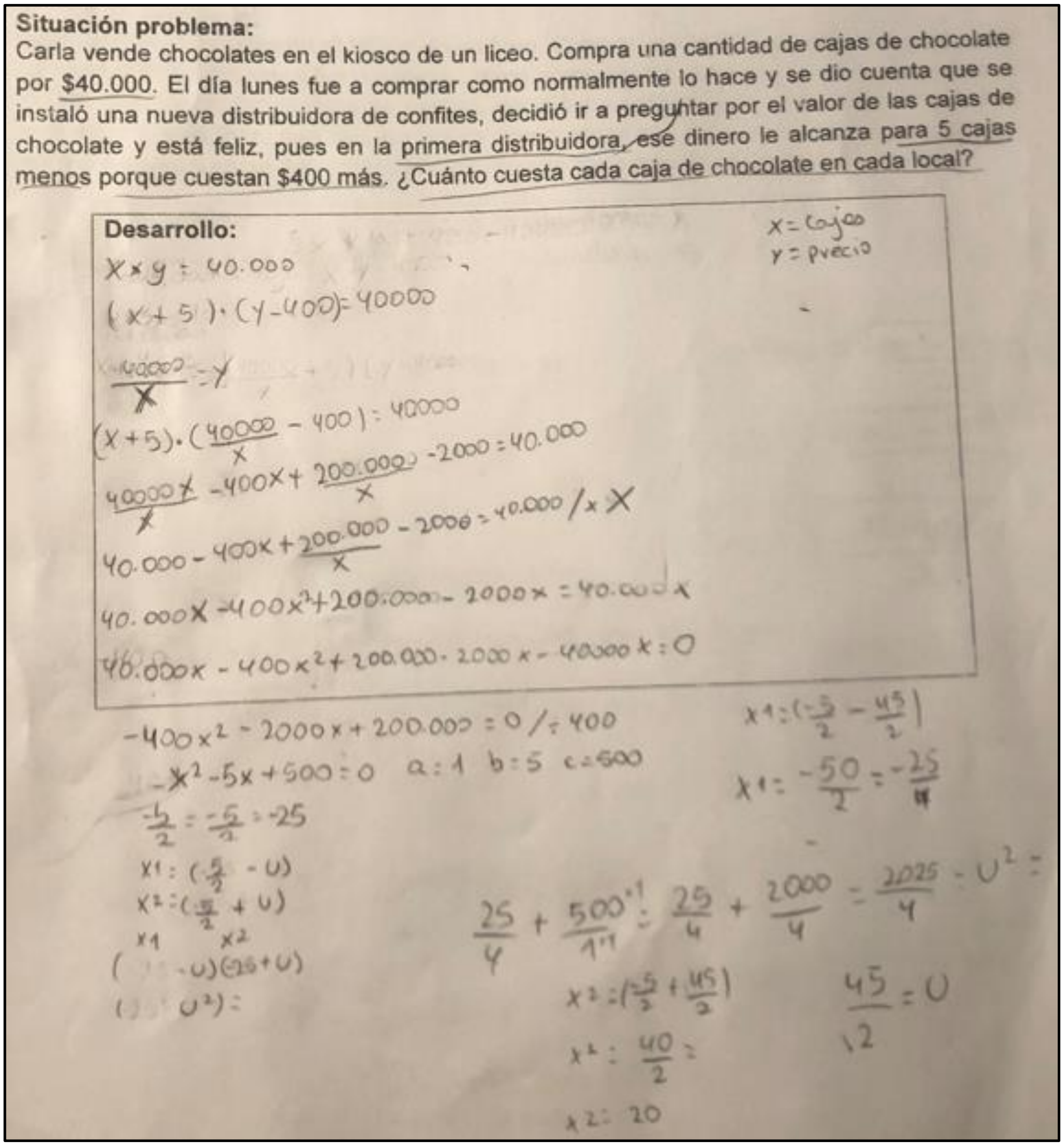
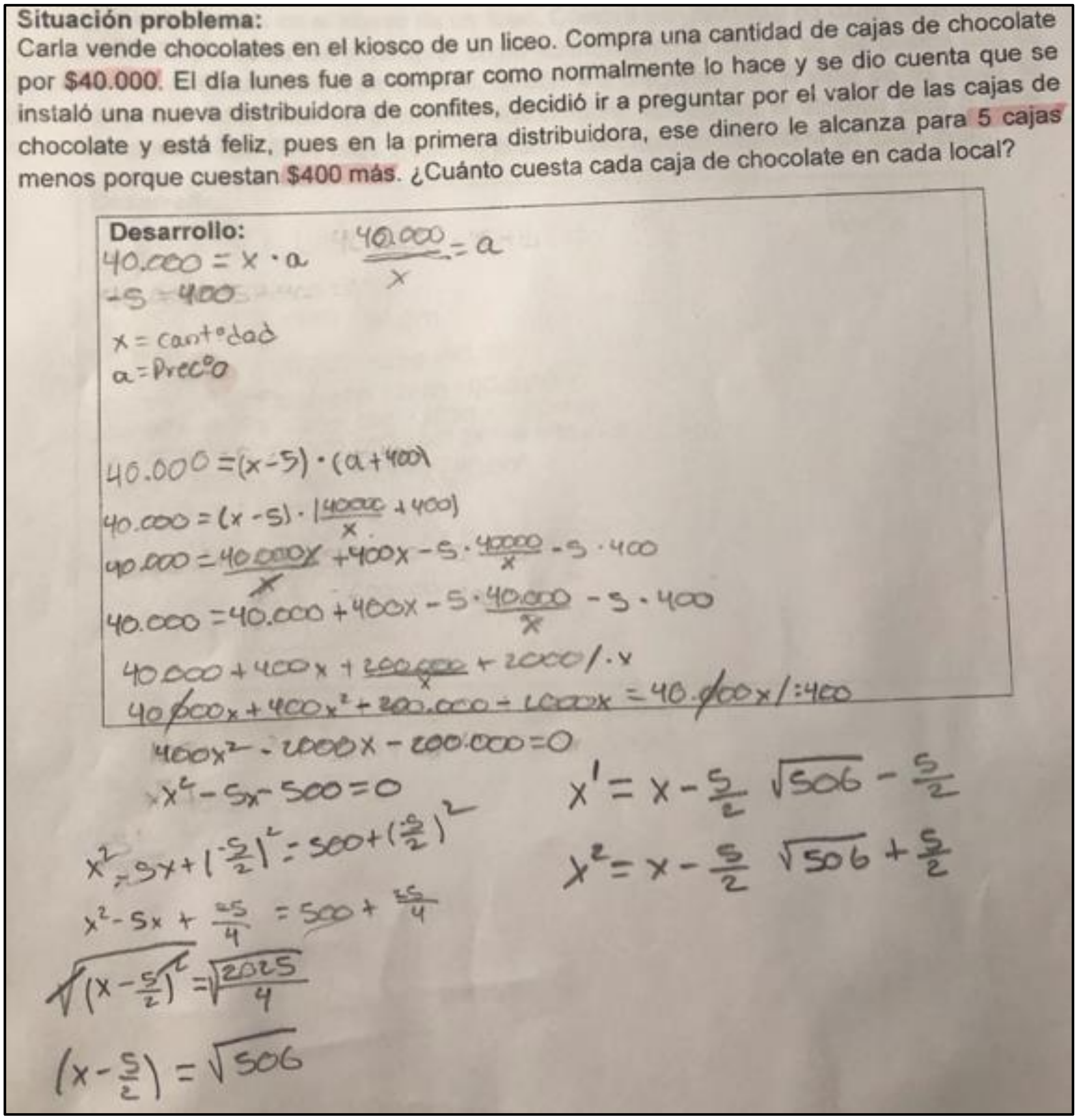


Figura 40. Estudio de Clase, resolución con método de Po-Shen Loh.

Fuente: *Respuesta de estudiante*.

- 1 estudiante utilizó el método de resolución de una ecuación cuadrática por Completación de cuadrados. Respecto a esta alumna, su desarrollo fue el siguiente:



Situación problema:
Carla vende chocolates en el kiosco de un liceo. Compra una cantidad de cajas de chocolate por $40.000. El día lunes fue a comprar como normalmente lo hace y se dio cuenta que se instaló una nueva distribuidora de confites, decidió ir a preguntar por el valor de las cajas de chocolate y está feliz, pues en la primera distribuidora, ese dinero le alcanza para 5 cajas menos porque cuestan $400 más. ¿Cuánto cuesta cada caja de chocolate en cada local?

Desarrollo:

$40.000 = x \cdot a \qquad \frac{40.000}{x} = a$

x = cantidad
a = precio

$40.000 = (x-5)\cdot(a+400)$

$40.000 = (x-5)\cdot\left(\frac{40000}{x} + 400\right)$

$40.000 = \frac{40.000x}{x} + 400x - 5\cdot\frac{40000}{x} - 5\cdot 400$

$40.000 = 40.000 + 400x - 5\cdot\frac{40.000}{x} - 5\cdot 400$

$40000 + 400x + \frac{200.000}{x} + 2000 \quad /\cdot x$

$40000x + 400x^2 + 200.000 + 2000x = 40.000x \quad /:400$

$400x^2 - 2000x - 200.000 = 0$

$x^2 - 5x - 500 = 0$

$x^2 - 5x + \left(\frac{-5}{2}\right)^2 = 500 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 500 + \frac{25}{4}$

$\sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2025}{4}}$

$\left(x - \frac{5}{2}\right) = \sqrt{506}$

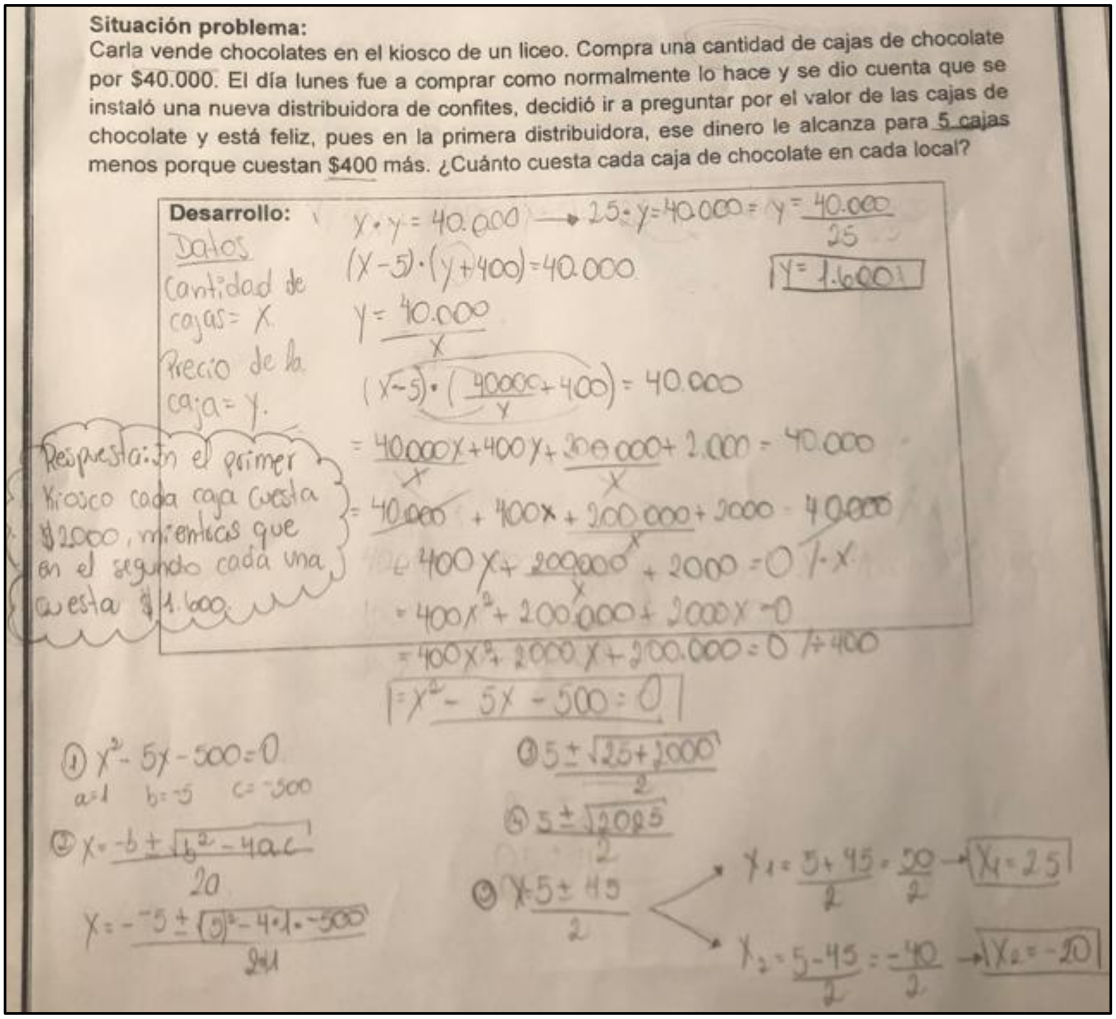
$x' = x - \frac{5}{2} \quad \sqrt{506} - \frac{5}{2}$

$x^2 = x - \frac{5}{2} \quad \sqrt{506} + \frac{5}{2}$

Figura 41. Estudio de Clase, resolución con Completación de cuadrados.

Fuente: *Respuesta de estudiante*.

- 5 estudiantes utilizaron el método de resolución de una ecuación cuadrática por Fórmula general. En cuanto a estas 5 alumnas, la figura que mejor las representa es la siguiente:



Situación problema:
Carla vende chocolates en el kiosco de un liceo. Compra una cantidad de cajas de chocolate por $40.000. El día lunes fue a comprar como normalmente lo hace y se dio cuenta que se instaló una nueva distribuidora de confites, decidió ir a preguntar por el valor de las cajas de chocolate y está feliz, pues en la primera distribuidora, ese dinero le alcanza para 5 cajas menos porque cuestan $400 más. ¿Cuánto cuesta cada caja de chocolate en cada local?

Desarrollo:

Datos
Cantidad de cajas = X
Precio de la caja = Y.

$X \cdot Y = 40.000 \rightarrow 25 \cdot Y = 40.000 = Y = \frac{40.000}{25}$ $\boxed{Y = 1.600}$

$(X-5)\cdot(Y+400) = 40.000$

$Y = \frac{40.000}{X}$

$(X-5)\cdot\left(\frac{40000}{Y}+400\right) = 40.000$

$= \frac{40000X}{X} + 400X + \frac{200000}{X} + 2.000 = 40.000$

$= \cancel{40.000} + 400X + \frac{200.000}{X} + 2000 - \cancel{40.000}$

$= 400X + \frac{200000}{X} + 2000 = 0 \;/\cdot X$

$= 400X^2 + 200.000 + 2000X = 0$

$= 400X^2 + 2000X + 200.000 = 0 \;/ \div 400$

$\boxed{= X^2 - 5X - 500 = 0}$

Respuesta: En el primer kiosco cada caja cuesta $2000, mientras que en el segundo cada una cuesta $1.600

① $X^2 - 5X - 500 = 0$
$a = 1 \quad b = -5 \quad c = -500$

② $X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$X = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4\cdot 1\cdot -500}}{2\cdot 1}$

③ $\frac{5 \pm \sqrt{25 + 2000}}{2}$

④ $\frac{5 \pm \sqrt{2025}}{2}$

⑤ $X = \frac{5 \pm 45}{2}$

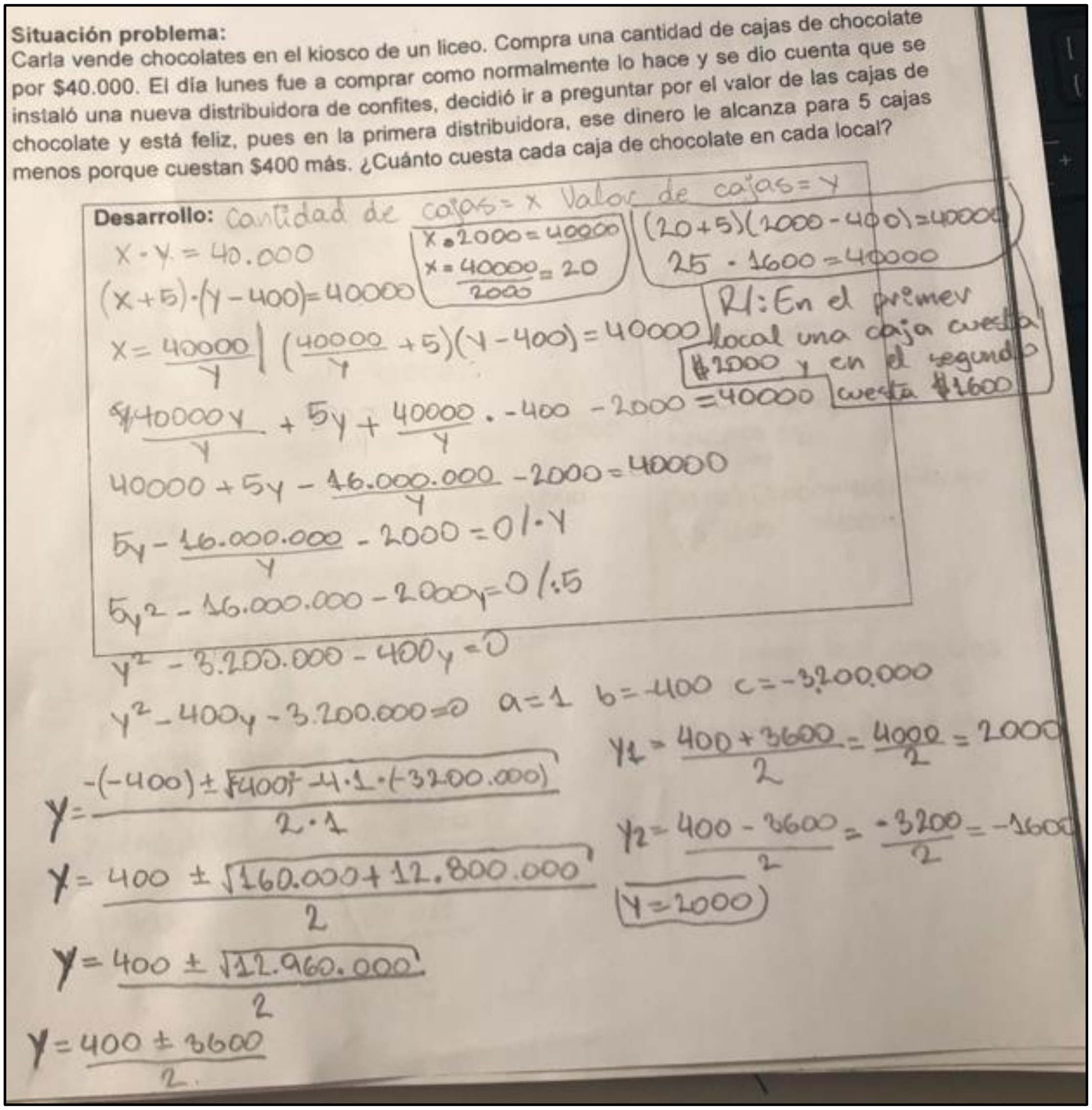
$X_1 = \frac{5+45}{2} = \frac{50}{2} \rightarrow \boxed{X_1 = 25}$

$X_2 = \frac{5-45}{2} = \frac{-40}{2} \rightarrow \boxed{X_2 = -20}$

Figura 42. Estudio de Clase, resolución con Fórmula general ecuación 1.

Fuente: *Respuesta de estudiante*.

Con respecto a las 3 estudiantes que llegaron a la ecuación 2, la totalidad de ellas utilizó el método de resolución de una ecuación cuadrática por Fórmula general y, la resolución del problema que mejor representa a estas estudiantes es:



Situación problema:
Carla vende chocolates en el kiosco de un liceo. Compra una cantidad de cajas de chocolate por $40.000. El día lunes fue a comprar como normalmente lo hace y se dio cuenta que se instaló una nueva distribuidora de confites, decidió ir a preguntar por el valor de las cajas de chocolate y está feliz, pues en la primera distribuidora, ese dinero le alcanza para 5 cajas menos porque cuestan $400 más. ¿Cuánto cuesta cada caja de chocolate en cada local?

Desarrollo: Cantidad de cajas = x Valor de cajas = y

$x \cdot y = 40.000$

$(x+5)\cdot(y-400) = 40000$

$x = \frac{40000}{y}$ | $\left(\frac{40000}{y}+5\right)(y-400) = 40000$

$\frac{40000y}{y} + 5y + \frac{40000}{y}\cdot -400 - 2000 = 40000$

$40000 + 5y - \frac{16.000.000}{y} - 2000 = 40000$

$5y - \frac{16.000.000}{y} - 2000 = 0 \;/\cdot y$

$5y^2 - 16.000.000 - 2000y = 0 \;/:5$

$y^2 - 3.200.000 - 400y = 0$

$y^2 - 400y - 3.200.000 = 0 \quad a=1 \quad b=-400 \quad c=-3.200.000$

$y = \frac{-(-400) \pm \sqrt{(-400)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3200.000)}}{2\cdot 1}$

$y = \frac{400 \pm \sqrt{160.000 + 12.800.000}}{2}$

$y = \frac{400 \pm \sqrt{12.960.000}}{2}$

$y = \frac{400 \pm 3600}{2}$

$y_1 = \frac{400+3600}{2} = \frac{4000}{2} = 2000$

$y_2 = \frac{400-3600}{2} = \frac{-3200}{2} = -1600$

$\boxed{y = 2000}$

$x \cdot 2000 = 40000$

$x = \frac{40000}{2000} = 20$

$(20+5)(2000-400) = 40000$

$25 \cdot 1600 = 40000$

R/: En el primer local una caja cuesta $2000 y en el segundo cuesta $1600

Figura 43. Estudio de Clase, resolución con Fórmula general ecuación 2.

Fuente: *Respuesta de estudiante*.

Dificultades

En cuanto a las dificultades encontradas, es importante mencionar que uno de los mayores problemas que tuvieron las estudiantes fue la definición de las incógnitas de manera correcta, lo que pudo ser causado por una poca o nula comprensión del enunciado.

Errores frecuentes

Se presentaron errores en la definición de incógnitas.

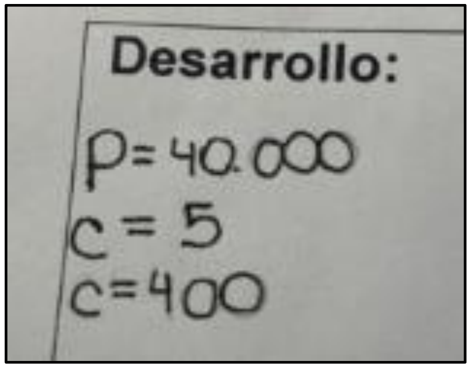


Figura 44. Estudio de Clase, errores en definición de incógnitas.

Fuente: *Respuesta de estudiante*.

Se observaron errores en la modelación del problema (error de signo en los coeficientes), sumado a errores en la identificación de estos ($b = 5$, en vez de $b = -5$).

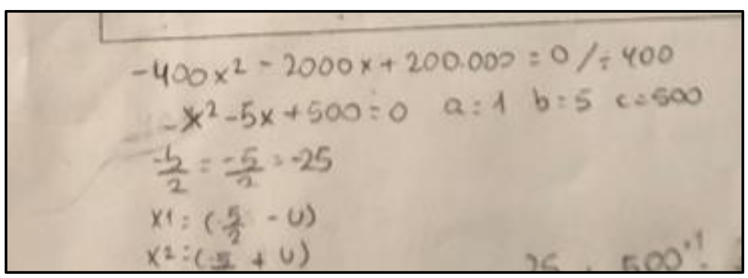


Figura 45. Estudio de Clase, errores en modelación del problema.

Fuente: *Respuesta de estudiante*.

Se presentaron errores aritméticos ($5 - 45 = 40$):

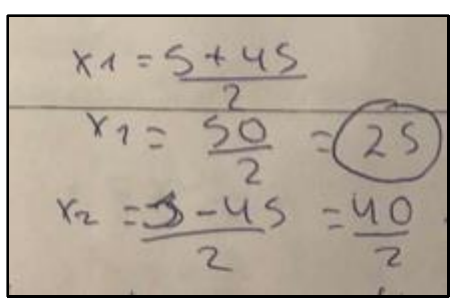


Figura 46. Estudio de Clase, errores aritméticos.

Fuente: *Respuesta de estudiante*.

Se presentaron errores al dividir $\left(\sqrt{\frac{2025}{4}} \neq \sqrt{506}\right)$, no considera parte decimal:

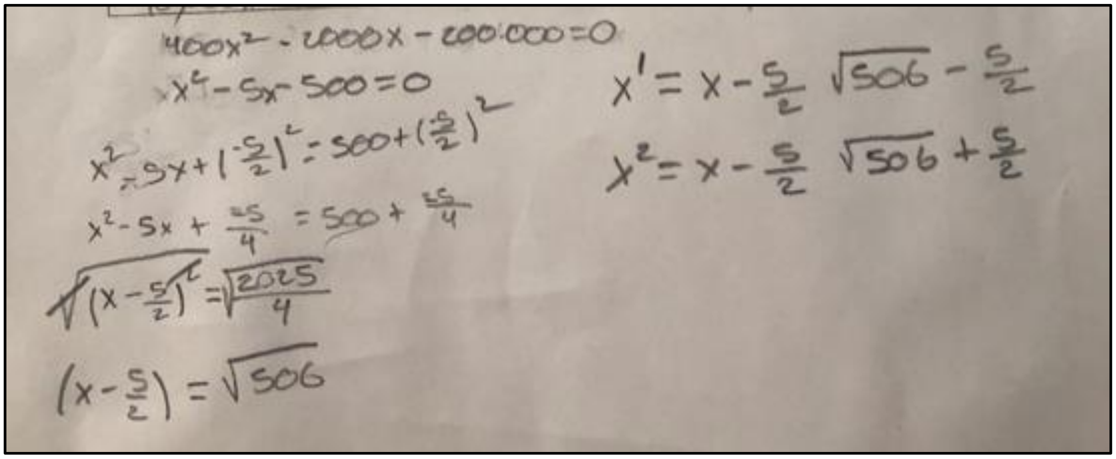


Figura 47. Estudio de Clase, errores aritméticos.

Fuente: *Respuesta de estudiante*.

Ahora que ya se especificaron los resultados proporcionados por las estudiantes, surgen varias conclusiones.

Inicialmente, se observa una gran dificultad en cuanto a la modelación del problema en las alumnas, puesto que varias de ellas sólo definieron las incógnitas e incluso otras, ni siquiera supieron cómo comenzar a desarrollarlo, ni consideraron los datos relevantes del problema. Surge la pregunta, ¿por qué se dio este problema? La resolución de problemas no fue exclusiva del Estudio de Clase, sino que, se trabajó en varias clases de la propuesta, sobre todo en aquellas en las que se vería por primera vez cada uno de los cuatro métodos de resolución de una ecuación cuadrática.

En lo que respecta a los métodos, se considera que las alumnas prefirieron no utilizar el de factorización debido a que no resultaba inmediato, puesto que los coeficientes de la ecuación cuadrática eran 400 y $-3.200.000$. Por otro lado, observamos que el método de resolución de una ecuación cuadrática por Po-Shen Loh fue utilizado de manera correcta, llegando a las soluciones y considerando, en este caso, sólo una que satisfacía la ecuación.

En cuanto al método de resolución por completación de cuadrados, se cree que sólo una estudiante lo utilizó debido a que la mayoría de las alumnas tiene dificultades con la comprensión del método o no prefieren trabajar con números racionales porque tienden a cometer errores, de hecho, en el desarrollo de la estudiante que utilizó este método se observa que cometió un error al dividir, pues no considero la parte decimal del número y su desarrollo se vio alterado.

Finalmente, se considera que varias estudiantes se inclinaron por utilizar el método de resolución de una ecuación cuadrática por Fórmula general puesto que, independiente de las ecuaciones que obtuvieron, considerando, por supuesto, cualquiera de las dos correctas ($x^2 - 5x - 500 = 0$, o $y^2 - 400y - 3.200.000 = 0$), es que las alumnas debían identificar los coeficientes y luego utilizar la fórmula general de la ecuación cuadrática, lo que significaba un trabajo más sencillo para aquellas estudiantes que comprendían la labor algebraica ligada a ella.

<u>Enfoque teórico</u>

Respecto a la influencia de la Teoría de Situaciones Didácticas en el Estudio de Clase, se cree que todas las fases estuvieron presentes en esta sección. En un comienzo, las estudiantes transitaron por la situación de acción en la que tuvieron el primer contacto con la situación problema, para esto, el profesor implementador les entregó una hoja con la situación problema, cabe mencionar, que él no leyó el problema en voz alta, pues, era de su interés considerar las interpretaciones que le daban las escolares. Luego de la situación de acción, el docente les indicó a las alumnas que se podían reunir en duplas o tríos para compartir sus estrategias, en estos momentos comenzó la situación de formulación. Cuando el profesor observó que la mayoría de las estudiantes terminó el problema, solicitó que tres alumnas salieran a la pizarra a escribir y explicar sus estrategias de manera voluntaria, produciéndose así, la situación de validación. Por último, el docente institucionalizó el contenido utilizando los registros realizados por las mismas escolares en la pizarra.

7.2 Confrontación de los análisis apriori y aposteriori.

Este apartado presenta la confrontación del análisis apriori (realizado en *Capítulo V*, sección 5.4) y el análisis aposteriori (realizado en la sección 7.1) de aquellas situaciones claves en el proceso de enseñanza aprendizaje, dicha confrontación se realizará en tablas comparativas. Terminando con una síntesis de lo abordado en los análisis. En esta sección, se consideran las estrategias, errores y dificultades que cometieron las estudiantes.

7.2.1 Confrontación de análisis apriori y aposteriori de la clase 2.

Clase	**Análisis apriori**	**Análisis aposteriori**
Estrategias	Estrategia 1	2 estudiantes de un total de 21 utilizaron esta estrategia para resolver el problema.
	Estrategia 2	5 estudiantes de un total de 21 utilizaron esta estrategia para resolver el problema, sin embargo, sólo una llegó correctamente a la solución del problema.
Dificultades	Planteamiento del problema	7 estudiantes presentaron dificultades en el planteamiento del problema.
	Análisis de las soluciones acorde al contexto del problema	No se logró evidenciar esta dificultad, puesto que, sólo una estudiante llegó a la respuesta de manera algebraica.
Errores	Determinar soluciones erróneas	No se evidenció este error, puesto que la alumna que resolvió el problema algebraicamente

		determinó correctamente la solución.
	Errores algebraicos	Se presenciaron errores algebraicos en 4 estudiantes, puesto que, al multiplicar binomios, llegaron a ecuaciones incorrectas.

7.2.2 Confrontación de análisis apriori y aposteriori de la clase 5.

Clase	Análisis apriori	Análisis aposteriori
Estrategias	Estrategia 1	7 estudiantes de un total de 25 utilizaron esta estrategia para resolver el problema, sin embargo, 2 alumnas llegaron a la respuesta correcta.
	Estrategia 2	4 estudiantes de un total de 25 utilizaron esta estrategia para resolver el problema, sin embargo, sólo una llegó correctamente a la solución del problema.
Dificultades	Planteamiento del problema	14 estudiantes presentaron dificultades en el planteamiento del problema.
Errores	Determinar soluciones erróneas	2 estudiantes cometieron errores en la solución del problema, pues consideraron medidas negativas.
	Errores algebraicos	La mayoría de las estudiantes cometió errores en la reducción de términos semejantes y multiplicar binomios.

7.2.3 Confrontación de análisis apriori y aposteriori de la clase 8.

Clase	Análisis apriori	Análisis aposteriori
Estrategias	Estrategia 1	No se evidenció a estudiantes utilizar esta estrategia.
	Estrategia 2	9 estudiantes de un total de 26 utilizaron esta estrategia para

		resolver el problema, sin embargo, sólo 4 alumnas llegaron correctamente a la solución del problema.
Dificultades	Planteamiento del problema	La mayoría de las estudiantes no pudo plantear el problema correctamente.
	Análisis de las soluciones acorde al contexto del problema	No se registra evidencia en esta categoría, puesto que sólo una estudiante llegó a las soluciones del problema, pero lo dejó incompleto.
Errores	Determinar soluciones erróneas	No se evidenció este error, puesto que la alumna que resolvió la ecuación cuadrática no determinó cuáles soluciones servían.
	Completación del cuadrado de binomio	Se presenció a 4 estudiantes cometer errores en la completación del cuadrado de binomio.
	Errores algebraicos	La mayoría de las estudiantes que trabajaron en el problema cometieron errores algebraicos, puesto que simplificaron la ecuación cuadrática de manera incorrecta o cometieron errores en la multiplicación de binomios.

7.2.4 Confrontación de análisis apriori y aposteriori de la clase 10.

Clase	**Análisis apriori**	**Análisis aposteriori**
Estrategias	Estrategia 1	12 estudiantes de un total de 17 utilizaron esta estrategia para resolver el problema.
	Estrategia 2	2 estudiantes de un total de 21 utilizaron esta estrategia para resolver el problema.
Dificultades	Planteamiento del problema	Muy pocas estudiantes presentaron dificultades en el planteamiento del problema.

	Análisis de las soluciones acorde al contexto del problema	No se logró evidenciar esta dificultad.
Errores	Identificar los coeficientes de la ecuación	Se evidenció este error en una alumna.
	Determinar soluciones erróneas.	No se logró evidenciar este error.
	Errores algebraicos	4 estudiantes presentaron errores algebraicos.
	Error al aplicar la fórmula general.	No se logró evidenciar este error.

7.2.5 Confrontación de análisis apriori y aposteriori de la clase del Estudio de Clase.

Clase	Análisis apriori	Análisis aposteriori
Estrategias	Estrategia 1	7 estudiantes de un total de 18 utilizaron esta estrategia para resolver el problema, sin embargo, de estas sólo 5 llegaron a la respuesta correcta.
	Estrategia 2	3 estudiantes de un total de 18 utilizaron esta estrategia para resolver el problema.
Dificultades	Planteamiento del problema	8 estudiantes presentaron dificultades en el planteamiento del problema.
	Identificar las incógnitas.	4 estudiantes tuvieron dificultades para identificar las incógnitas.
Errores	Errores aritméticos.	Se registró que 2 estudiantes cometieron errores aritméticos.
	Errores algebraicos.	Se presenciaron errores algebraicos en 4 estudiantes,

		puesto que, al multiplicar binomios, llegaron a ecuaciones incorrectas.

7.2.6 Síntesis de la confrontación entre el análisis apriori y análisis aposteriori.

Para finalizar esta sección, se considera pertinente realizar una síntesis en la que se abordan las expectativas que presentó el grupo de seminaristas que trabaja esta investigación previamente a la implementación de clases y cómo resultó posterior a esta.

En las secciones anteriores se puede observar que las expectativas coinciden totalmente con las acciones que realizaron las estudiantes, puesto que la mayoría de las estrategias, dificultades y errores fueron evidenciados durante la implementación de clases, esto puede ser porque el profesor implementador tenía conocimiento de las formas en las que trabaja el curso.

Sin embargo, se considera que las estudiantes presentaron un déficit en cuanto a la habilidad de resolver problemas y modelación, puesto que, la mayoría de las alumnas presentó dificultades para comprender las situaciones problemas, lo que prolongó la secuencia de clases, pues se cree fundamental priorizar el correcto aprendizaje de las estudiantes. Se considera, además, que esta situación se pudo evitar si se realizaba una mejor evaluación diagnóstica, previa a la realización de los planes de clases, pues se hubiesen considerado los niveles cognitivos del grupo de curso.

A pesar de presentar esta dificultad en la secuencia de clases, se cree que ésta sirvió en el desarrollo de las habilidades de modelar y resolver problemas, puesto que, todas las clases tenían cómo mínimo una situación problema que promueve el desarrollo de estas.

CONCLUSIONES.

Ahora que ya culminamos este Seminario de Título, surgen varias conclusiones a raíz de la pregunta de investigación, la problemática detectada, además de mejoras para la secuencia de enseñanza aprendizaje y por supuesto, aprendizajes profesionales.

Comenzando con la pregunta de investigación: ¿Qué acciones o estrategias utilizan los estudiantes para la búsqueda de técnicas de resolución de ecuaciones cuadráticas? Basamos nuestro Seminario de Título en esta interrogante. Para responder, consideramos las acciones o estrategias que podían utilizar nuestras estudiantes del II° A del colegio Paulina von Mallinckrodt. Ahora bien, por supuesto que fue necesario fundamentar nuestra propuesta en la resolución de problemas (cada vez que se pudiese), de esta forma, presentamos un problema en el que las estudiantes debían descubrir el método de resolución de la ecuación cuadrática que teníamos propuesto para esa clase. De esta forma, complementamos nuestra propuesta con la metodología del Estudio de Clases, así, las alumnas eran el foco principal de la clase para que luego pudiéramos analizar las estrategias utilizadas por ellas. Ahora bien, efectivamente obtuvimos respuestas frente a las acciones o estrategias utilizadas, pero en el Estudio de Clase, no obtuvimos alguna resolución de una estudiante con el método de factorización, lo que sin duda nos llamó la atención, ¿por qué ocurrió esto? Si bien esta pregunta fue respondida, creemos importante volver a mencionar que los coeficientes de una ecuación cuadrática influyen, en parte, en el método de resolución de esta.

Lamentablemente, ocurrió lo esperable, algunas alumnas no fueron capaces de comprender algún método en particular, y peor aún, hubo estudiantes que, dado el problema del Estudio de Clase, no fueron capaces de utilizar ninguno de los cuatro métodos vistos en las sesiones, por lo que nos preguntamos, ¿cómo incluir a aquellas estudiantes que no fueron capaces de resolver una ecuación cuadrática con, al menos, un método? Si bien es una pregunta con respuestas muy amplias, consideramos que, de acuerdo con lo visto en clases, hubo desinterés en aprender este contenido, pero es algo que se repitió con estas estudiantes a lo largo de todo el año, independiente del contenido que se estuviese viendo.

En cuanto a la problemática, nuestro foco de investigación se dio en segundo medio, específicamente en lo que se refiere a la ecuación cuadrática. Consideramos que existe un problema que intentamos solucionar con nuestra propuesta de enseñanza aprendizaje, de hecho, propusimos un “nuevo” método de resolución que no aparecía en los colegios de Chile, arriesgándonos con una idea que resultó bien, tanto en las clases destinadas para este método, como con aquella estudiante que desarrolló el problema del Estudio de Clase con dicho método. Ahora bien, ¿por qué tomamos la decisión de incluir este procedimiento? La respuesta es sencilla: por la problemática. Por ejemplo, en cuanto al método de resolución de una ecuación cuadrática por Fórmula general, observamos que no existe un profundo análisis en la demostración de dicha fórmula, lo que fomenta la memorización en nuestros estudiantes por sobre la efectiva comprensión del contenido, generando posibles dificultades en el aprendizaje del álgebra. Por otro lado, se sumaba a la problemática la enseñanza tradicional y el desinterés de las estudiantes para aprender matemática, por lo que también enfocamos nuestras clases en una enseñanza más dinámica, que hiciera partícipe a las alumnas, invitándolas implícitamente a pensar y reflexionar, antes de resolver o calcular algo, por tener que hacerlo.

En relación con el marco de referencia, expresado en la Teoría de Situaciones Didácticas, podemos concluir que es de gran ayuda al momento de realizar una secuencia didáctica como para su análisis. Durante la secuencia didáctica surgieron propuestas de actividades cuya finalidad era que las estudiantes pudieran construir su propio conocimiento y en base a esas actividades se plantea un problema para el Estudio de Clases, en el cual el docente solo era un mediador, ya que, las estudiantes eran las protagonistas del estudio. En relación con cada situación, es importante considerar que nos benefició, puesto que, determinamos los tiempos para cada una de las fases, lo que nos facilitó un mejor control de aula y por consecuencia una clase más amena. También, al realizar las situaciones de la Teoría de Situaciones Didácticas, se pudo observar cuáles eran las estudiantes que iban trabajando individualmente, cuáles no lo hacían y esperaban para trabajar en grupo y cuáles simplemente no trabajaban.

Respecto al objetivo general de la investigación, se ha concluido que se cumplió, puesto que, a lo largo del proceso al trabajar la secuencia de enseñanza aprendizaje se ha podido caracterizar las distintas estrategias que realizan las estudiantes de segundo medio en la búsqueda de estrategias para la resolución de ecuaciones cuadráticas. La secuencia fue diseñada, implementada y posteriormente analizada, obteniendo diferentes resultados, los que dieron los lineamientos para la clasificación de las estrategias utilizadas, en este caso, a través de la modelación, para luego establecer métodos de resolución. Respecto a los Objetivos Específicos, también se cumplieron, pues, en primer lugar, se pudo diseñar e implementar una propuesta que incluyera los cuatro métodos de resolución de una ecuación cuadrática, generando los tiempos suficientes para enseñar cada uno de los métodos, logrando que las estudiantes sean capaces de resolver ecuaciones cuadráticas de cualquier tipo. También se analizaron los resultados entregados por las estudiantes respecto del método de Po-Shen Loh y los otros métodos de resolución, en este caso, fue posible observar uno de los desarrollos con el método de Po-Shen Loh, igualando al método de completación de cuadrados y superando la utilización del método de factorización, sin embargo, la utilización de la fórmula general fue utilizada en la mayoría de los desarrollos propuestos, por tanto, sigue siendo predominante al momento de resolver ecuaciones cuadráticas.

En cuanto a los aprendizajes profesionales desde el ámbito disciplinar, es fundamental destacar lo aprendido respecto del objeto matemático y cómo fue su evolución durante los años hasta lo que hoy conocemos como ecuación cuadrática. Dicho esto, podemos relacionar lo anterior con el perfil de egreso de la Carrera Pedagogía en Matemática de la Universidad Alberto Hurtado, que nos menciona que un profesor egresado “Comprende la naturaleza del conocimiento matemático, la formación de las ideas, conceptos y propiedades de los objetos matemáticos, en base a su desarrollo histórico epistemológico y comprende los fenómenos que los originan.” (Universidad Alberto Hurtado, 2016, p. 1). Por otro lado, la secuencia se relaciona también a otro punto del perfil de egreso, que dice que un docente “utiliza modelos matemáticos tanto en la resolución de problemas del mundo real como del mundo matemático, analizando la pertinencia de las soluciones encontradas” (Universidad Alberto Hurtado, 2016, p. 1). Finalmente, respecto del ámbito disciplinar, el uso epistemológico del objeto matemático condujo a una secuencia didáctica significativa.

En relación con el aspecto profesional y saber pedagógico, si lo asociamos con nuestro perfil de egreso, definitivamente nos comprometimos con nuestras estudiantes, puesto que basamos nuestras clases en su propio aprendizaje y consideramos los cuatro dominios del Marco para la Buena Enseñanza (MBE): preparación de la enseñanza, creación de un ambiente propicio para el aprendizaje, enseñanza para el aprendizaje de todos los estudiantes, y responsabilidades profesionales. Por otro lado, reconocemos el uso de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación, utilizando específicamente la plataforma Kahoot, evitando la enseñanza tradicional. Además, reflexionamos como grupo de Seminario de Título, de manera constante, sobre las clases que planificamos, en pos del aprendizaje de nuestras alumnas. Por otro lado, rescatamos el incesante apoyo y desarrollo personal de nuestras estudiantes, respetando y valorando la diversidad en un colegio exclusivamente de mujeres.

Respecto al aspecto didáctico, es fundamental considerar por parte del docente que el contenido a enseñar es mucho más significativo cuando las planificaciones se realizan en conjunto, cuando hay interacción en la que cada miembro aporta y reflexiona en torno a la secuencia didáctica. Un egresado de Pedagogía en Matemática "analiza, diseña e interviene propuestas didácticas adaptadas a las condiciones de contexto de sus estudiantes respetando ritmos de aprendizaje." (Universidad Alberto Hurtado, 2016, p. 1), por tanto, se puede destacar como un aprendizaje el trabajo colaborativo en la que el docente

> Identifica e investiga sobre las posibles causas de fracasos en el aula de matemáticas, tales como los errores frecuentes de los estudiantes, los obstáculos de aprendizaje, la forma de presentación y organización de los contenidos, las representaciones semióticas empleadas, la fenomenología de los objetos matemáticos, entre otros y lo confronta con las teorías del aprendizaje. (Universidad Alberto Hurtado, 2016, p. 1)

Consideramos estas conclusiones como las más importantes de nuestro Seminario de Título, a pesar de que existen algunas que creemos no tan necesarias de enfatizar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Agencia de Calidad de la Educación. (s. f.). *Categoría de Desempeño*. Agencia Orienta. Recuperado 1 de septiembre de 2022, de https://agenciaorienta.gob.cl/otros/media/8945

Agencia de Calidad de la Educación. (2021). *Resultados Diagnóstico Integral de Aprendizaje 2021*. https://www.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/19/2021/05/PresentacionDIA_26mayo.pdf

Angel, A. & Runde, D. (2013). *Álgebra Intermedia* (8.ª ed.). Pearson.

Artigue, M., Douady, R., & Moreno, L. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Universidad de los Andes.

Ascorra, P., Arias, H. & Graff, C. (2003). *La escuela como contexto de contención social y afectiva.* Facso. http://www2.facso.uchile.cl/publicaciones/enfoques/07/Ascorra_Arias_Graff_EscuelaContencionSocialAfectiva.pdf

Aufmann, R. & Lockwood, J. (2013). *Álgebra elemental* (8.ª ed.). Cengage Learning.

Ausubel, D., Novak, J. & Hanesian, H. (1983). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo.* 2° Ed.Trillas México.

Avila, A. (2001). *El maestro y el contrato en la teoría Brousseauniana* (N.º 13).

Baeza, Á., Barriga, P., Barrios, C., Miranda, R., Norambuena, A., Venegas, S. & Villena, M. (2014). Aritmética y Álgebra. Manual Esencial, Santillana.

Bastidas, M. (2010). *Estrategia Didáctica para el Desarrollo de la Creatividad en la Resolución de Problemas de Sistemas de Ecuaciones Lineales y Ecuaciones de Segundo Grado en el Tercer Año de la Unidad Educativa "General José Antonio Páez".* Universidad de Carabobo, Carabobo, Valencia.

Bosch, M., Chevallard, Y., Gascón J. (1997). *Estudiar Matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: ICE-HORSORI.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática* (1.ª ed.). Alianza Editorial.

Buhlea, C. (2008). *Sobre raíces y radicales. Efectos de dos culturas de enseñanza (España-Rumania)*. Memoria de tercer ciclo no publicada. Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia, Valencia, España.

Calderón, D. & León, O. (2005). *La ingeniería didáctica como metodología de investigación del discurso en el aula.* Universidad del Valle.

Cárdenas, J. (2014). *Álgebra* (1.ª ed.) [ELibro]. Grupo Editorial Patria.

Carreño, X. & Cruz, X. (2017). *Álgebra*. Departamento Pedagógico Arráyan Editores S.A.

Chavarría, J. (2006). *Teoría de las Situaciones Didácticas*. Universidad Nacional.

Cruz, E. (2008). *Diseño de una secuencia didáctica, donde se generaliza el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática*. México D.F. https://www.cicata.ipn.mx/assets/files/cicata/ProME/docs/tesis/tesis_maestria/2008/cruz_2008.pdf

Dalcín, M. & Olave, M. (2007). *Ecuaciones de segundo grado: su historia*. Funes.uniandes. Recuperado 15 de septiembre de 2022, de http://funes.uniandes.edu.co/5169/1/Dalc%C3%ADnEcuacionesALME2007.pdf

De Faria, E. (2006). *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática: Ingeniería Didáctica.* Universidad de Costa Rica.

E. Díaz, N. Ortiz, K. Morales, M. Rebolledo, R. Barrera & P. Norambuena (2022). *Matemática 2° medio*. Currículum Nacional. MINEDUC. Chile.

EducarChile. (2008). Clima escolar, de aula y trabajo. Valoras UC. https://www.educarchile.cl/recursos-para-el-aula/clima-social-escolar

EducarChile. (s. f.). ¿Por qué es importante la resolución de problemas? EducarChile. https://www.educarchile.cl/creatimat/por-que-es-tan-importante-la-resolucion-de-problemas

Figueroa, R. (2013). *Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas.* Lima, Perú. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A. & Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Gascón, J. (2001). *Incidencias del modelo epistemológico de las matemáticas sobre el modelo docente.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, (p. 129-159).

Godino, J. & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* Universidad de Granada.

González R. (2005). *Un modelo explicativo del interés hacia las matemáticas de las y los estudiantes de secundaria. Educación Matemática*, . ISSN: 0187-8298. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40517105

Guerrero, J., Castillo, E., Chamorro, H. & de Gil, G. (2013). El error como oportunidad de aprendizaje desde la diversidad en las prácticas evaluativas. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4757466

Gutiérrez, I. & Robinson, J. (2015). *Los números reales. En Matemáticas básicas con trigonometría.* Editorial Universidad del Norte.

Guzmán, I., Pino-Fan, L. & Arredondo, E. (2020). *Paradojas Didácticas Observadas en la Gestión de los Teoremas de Euclides.* Bolema, Río Claro.

Holyoak, K. J., & Koh, K. (1987). Surface and structural similarity in analogical transfer. *Memory & Cognition*. University of California.

Huertas, J. (1997). *Motivación: Querer aprender* (Vol. 2).

Isoda, M., Arcavi, A. & Mena, A. (2007). *El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas. Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global.* Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Kaufmann, J. & Schwitters, K. (2013). *Álgebra* (8.ª ed.). Cengage Learning. https://webproxy.uahurtado.cl:2735/es/ereader/uahurtado/40007

Lavilla, L. (2011). *La memoria en el proceso de enseñanza/aprendizaje*. Pedagogía Magna.

Lehmann, C. (2008). *Álgebra*. Editorial Limusa S.A.

Loh, P.-S. (2019). *A Simple Proof of the Quadratic Formula*. https://doi.org/10.48550/arXiv.1910.06709

Martel, J. (2002). *La ecuación cuadrática: Perspectiva histórica*. Formación del profesorado e investigación en educación matemática IV. Recuperado 15 de septiembre de 2022, de http://fpiem.webs.ull.es/index.php/fpiem/article/viewFile/117/116

Mena, A. (2007). El estudio de clases japonés en perspectiva. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Ministerio de Educación. (2015). *Bases Curriculares*.

Ministerio de Educación. (2012). *Estándares Orientadores para carreras de pedagogía en Educación Media*.

Ministerio de Educación. (2016). Matemática. Programa de Estudio Segundo Medio. Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación. (2019). *Estudio de Clases*. CPEIP. OCDE, OIE-UNESCO, & UNICEF. (2016). *La naturaleza del aprendizaje: Usando la investigación para inspirar la práctica*. Tinto Estudio, S.A.

Ministerio de Educación. (2019, abril). *Estudio de clases*. CPEIP. Recuperado 6 de noviembre de 2022, de https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2019/04/Estudio-de-clases.pdf

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Universidad de Granada, España

Molina, M., Castro, E. y Ambrose, R. (2006). Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. PNA, 1(1), 33-46.

Näslund-Hadley, E., & Villanueva, N. (2021). *La memorización obstaculiza el aprendizaje – El Premio Superhéroes del Desarrollo del BID reconoce una forma alternativa de enseñar*. Enfoque Educación. Recuperado 1 de septiembre de 2021, de https://blogs.iadb.org/educacion/es/la-memorizacion-obstaculiza-el-aprendizaje-el-premio-superheroes-del-desarrollo-del-bid-reconoce-una-forma-alternativa-de-ensenar/

OECD. (s. f.). *Estudiantes de bajo rendimiento: Por qué se quedan atrás y cómo ayudarles a tener éxito*. Recuperado 1 de septiembre de 2022, de https://www.oecd.org/chile/PISA-2012-low-performers-Chile-SPA.pdf

Ortiz, D. (2015). *El constructivismo como teoría y método de enseñanza*. Pontificia Universidad Católica del Ecuador.

Ortiz, L. & Romero, M. (2015). La implementación de las TIC en el aula de matemáticas: Una mirada sobre su concepción en el siglo XXI. Bogotá.

Padilla, F. (2018). *Aplicación de la Teoría de Situaciones Didácticas para la detección de factores que dificultan la interpretación de problemas aditivos de números reales con estudiantes de noveno de la I. E. R Tambores.* Universidad Tecnológica de Pereira.

Palacios, M. (2002). *Grupos, anillos y cuerpos.* Universidad de Zaragoza.

Parodi, S., Ochoviet, C. & Lezama J. (2017). *La comprensión del signo de igual en la entrada al álgebra: el diseño de tareas y la conversación en la clase de matemática.* Montevideo, Uruguay.

Paulino, P. & Lopes da Silva, A. (2011). Knowing how to learn and how to teach motivation: Contributions from self-regulation of motivation to more effective learning. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 29, 656-662. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.11.289

Peña, C. (2002). *Rendimiento escolar en Chile en establecimientos públicos y privados: ¿Qué nos muestra la nueva evidencia?* Opech. Recuperado 1 de septiembre de 2022, de http://www.opech.cl/bibliografico/Doc_Financiamiento/RendimientoEscolarEnChileEnEstablecimientosPublicosYPrivadosPena.pdf

Pérez, Y., & Beltrán, C. (2011). *¿Qué es un problema en Matemática y cómo resolverlo? Algunas consideraciones preliminares*. EduSol, 11 (34),74-89. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=475748673009

Posadas, P. (2013). *Evaluación de la Idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre ecuaciones de segundo grado en 3° de educación secundaria obligatoria*. https://xdoc.mx/preview/evaluacion-de-la-idoneidad-didactica-de-una-experiencia-de-5c1feba493bc4

Prieto, M. (2005). La participación de los estudiantes: ¿un camino hacia su emancipación? Theoria, 14(1).

Ramírez, L. (2011). *Álgebra* (1ª ed.). Grupo Editorial Éxodo.

Ricoy, M., & Couto, M. (2018). *Desmotivación del alumnado de secundaria en la materia de matemáticas*. Scielo. Recuperado 1 de septiembre de 2022, de https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1607-40412018000300069

Simonsen, E. (2015). Reportaje: Los obstáculos y desafíos de introducir la resolución de problemas en el aula. Centro de investigación avanzada en educación. https://www.ciae.uchile.cl/index.php?page=view_noticias&langSite=es&id=660

Stigler, J. & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom.* New York: Free Press.

UNICEF. (2016). La naturaleza del aprendizaje: Usando la investigación para inspirar la práctica.

Universidad Alberto Hurtado (2016). Perfil de egreso de la carrera Pedagogía en Matemática. Universidad Alberto Hurtado.

van Manen, M. (1998). En tacto en la enseñanza. El significado de la sensibilidad pedagógica. Paidós Educador.

Vosniadou, S. (1988). *Analogical reasoning as a mechanismin knowledge acquisition:a developmental perspective.* University of Illinois at Urbana-Champaign University.

Wilhelmi, M., Godino, J., Lasa, A. (2014). *Significados conflictivos de ecuación y función en estudiantes de profesorado de secundaria.* En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII (pp. 573-582). Salamanca: SEIEM.

Yuste, P. (2008). *Ecuaciones cuadráticas y procedimientos algorítmicos: Diofanto y las matemáticas en Mesopotamia*. Revista internacional de teoría, historia y fundamentos de la ciencia.

ANEXOS.

<table>
<tr><th colspan="5">Plan de clases</th></tr>
<tr><td>Eje temático</td><td>Álgebra y funciones</td><td>Unidad o tema</td><td>Unidad 2: Funciones cuadráticas, ecuaciones cuadráticas y la inversa de una función.</td><td>Sesión
N°1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo general de unidad</td><td colspan="3">Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica, o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones de la forma:
● $ax^2 = b$
● $(ax + b)^2 = c$
● $ax^2 + bx = 0$
● $ax^2 + bx = c$
(a, b, c son números racionales, $a \neq 0$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Meta(s) u objetivo de aprendizaje</td><td colspan="3">Identificar y plantear ecuaciones cuadráticas y sus componentes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Habilidad</td><td colspan="3">OAH d
Describir relaciones y situaciones matemáticas, usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actitud</td><td colspan="3">OAA A</td></tr>
</table>

		● Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas. ● Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.		
Momentos de la clase	**Actividades de aprendizaje**	**Intervención Docente**	**Recursos de aprendizaje**	**Tiempo estimado**
Inicio	**Activación de conocimientos previos:** ¿Cómo se representa algebraicamente una función cuadrática? ¿Cómo se calcula el área de un cuadrilátero?	El docente inicia la clase saludando a las estudiantes y escribe en la pizarra la representación de una función cuadrática. El docente representa en la pizarra un cuadrilátero, escribe la expresión para calcular su área y realiza un ejemplo.	● Herramientas TIC (PPT) ● Pizarra ● Cuaderno ● Lápices	15 min
Desarrollo	**Situación problema:** El patio de José tiene forma rectangular, el largo mide 6 metros más que su ancho y el área total es de $16m^2$.	El docente presenta el problema a las estudiantes y asigna 15 minutos para su desarrollo, transcurrido el tiempo solicita a una estudiante escribir su desarrollo en la pizarra.		45 min

	Representa gráficamente el patio de José y señala las medidas de sus lados. ¿Mediante qué ecuación se puede calcular la medida de los lados del patio de José? ¿Cuáles serían los posibles valores que satisfacen la ecuación? Si el patio de José tuviera la forma de un cuadrado y su área es de 16 m^2 ¿Cuál ecuación representa el área del patio?	El docente escribe en la pizarra la expresión algebraica que representa una ecuación cuadrática e indica cuando la ecuación se encuentra completa e incompleta.		
Cierre	**Actividad de cierre:** Clasifica las siguientes ecuaciones cuadráticas como completas o incompletas: 1. $3x^2 + x + 2$ 2. $-x^2 = 0$ 3. $5x^2 + 7x = 4$ 4. $-2x^2 + 6x = 0$	El docente presenta la actividad de cierre y asigna 15 minutos para su desarrollo, transcurrido el tiempo solicita a algunas estudiantes desarrollar el ejercicio en la pizarra para poder corroborar que todas tengan el mismo resultado.		30 min

	5. $-9x^2 + 1 + 3x = 0$			

Plan de clases				
Eje temático	Álgebra y funciones	**Unidad o tema**	Unidad 2: Funciones cuadráticas, ecuaciones cuadráticas y la inversa de una función.	**Sesión** N°2
Objetivo general de unidad		Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica, o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones de la forma: • $ax^2 = b$ • $(ax+b)^2 = c$ • $ax^2 + bx = 0$ • $ax^2 + bx = c$ (a, b, c son números racionales, $a \neq 0$)		
Meta(s) u objetivo de aprendizaje		Analizar y resolver una ecuación cuadrática utilizando el método de resolución por factorización		
Habilidad		OAH a Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes:		

		• Simplificar el problema y estimar el resultado. • Descomponer el problema en subproblemas más sencillos. • Buscar patrones • Usar herramientas computacionales.		
Actitud		OAA A • Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas. • Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.		
Momentos de la clase	**Actividades de aprendizaje**	**Intervención Docente**	**Recursos de aprendizaje**	**Tiempo estimado**
Inicio	**Activación de conocimientos previos:** Opere o factorice las siguientes expresiones cuando corresponda: $1)\ (x-1)(x-2)=0$ ¿Qué se puede observar respecto a los coeficientes resultantes? $2)\ x^2-81=0$	El docente comienza la clase saludando a sus estudiantes, presenta la actividad de inicio y asigna 20 minutos para el desarrollo, transcurrido el tiempo el docente solicita a las estudiantes sus respuestas.	• Herramientas TIC (PPT) • Pizarra. • Cuaderno • Lápices	20 min

	¿Es posible factorizar el binomio del primer miembro de la ecuación?, ¿Cómo?			
Desarrollo	**Situación problema:** 1. Carlos es tres años mayor que Lucía y la suma de los cuadrados de ambas edades es 89. ¿Cuál es la edad de Carlos y Lucía? 2. Hallar la ecuación cuadrática cuyas soluciones sean -5 y 6.	El docente presenta la actividad 1 y asigna 20 minutos para el desarrollo, transcurrido el tiempo el docente solicita a algunas estudiantes escribir el desarrollo en la pizarra. El docente institucionaliza el método de factorización y recuerda la propiedad: $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ Además, indica las características que poseen los coeficientes mencionando que en general si $(x + S)(x + R) = x^2 + Bx + C$ Entonces se cumplirá lo siguiente: $S \cdot R = C \wedge S + R = B$.		50 min

		El docente presenta la actividad 2 y dispone de 10 minutos para su desarrollo, transcurrido el tiempo solicitará a una estudiante escribir su desarrollo en la pizarra.		
Cierre	**Actividad de cierre:** Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas e indica sus soluciones. 1.$x^2 + 5x - 24 = 0$ 2. $s^2 - s = 6$ 3. $a^2 - 1 = 0$ 4. $r^2 + 8r = -16$	El docente presenta la actividad y asigna 15 minutos para su desarrollo, transcurrido el tiempo solicita a algunas estudiantes escribir su desarrollo en la pizarra.		20 min

Plan de clases				
Eje temático	Álgebra y funciones	**Unidad o tema**	Unidad 2: Funciones cuadráticas, ecuaciones cuadráticas y la inversa de una	**Sesión** N°3

			función.	
Objetivo general de unidad		Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica, o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones de la forma: ● $ax^2 = b$ ● $(ax + b)^2 = c$ ● $ax^2 + bx = 0$ ● $ax^2 + bx = c$ (a, b, c son números racionales, $a \neq 0$)		
Meta(s) u objetivo de aprendizaje		Resolver problemas contextualizados relacionados con la ecuación problema utilizando el método de factorización.		
Habilidad		OAH d Describir relaciones y situaciones matemáticas, usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos.		
Actitud		OAA D Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando		
Momentos de la clase	**Actividades de aprendizaje**	**Intervención Docente**	**Recursos de aprendizaje**	**Tiempo estimado**
Inicio	Activación de conocimientos previos:	El docente comienza la clase saludando a las estudiantes,	● Herramienta s TIC (PPT	20 min

	1. Determinar las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización: 1. $3x^2 - 9x = 0$ 2. $s^2 - 4 = 0$ 3. $x^2 + 10x + 25 = 0$ 2. Martín tiene 3 años más que Carlos y el cuadrado de la edad de Martín aumentado en el cuadrado de la edad de Carlos equivale a 317. ¿Qué ecuación representa dicho problema?	presenta la actividad 1, asigna 10 minutos para el desarrollo, transcurrido el tiempo el docente solicita a las estudiantes sus respuestas. Luego, presenta la actividad 2 y asigna 10 minutos para su desarrollo, durante este momento el docente transita por la sala respondiendo dudas en caso que surjan, transcurrido el tiempo el docente solicita a las estudiantes sus respuestas.	y Kahoot) ● Pizarra ● Cuaderno ● Lápices	
Desarrollo	**Situación problema 1:** Paula y Josefa son hermanas, las edades de Paula y Josefa suman 11 años y el producto de sus edades es de 18 años. Encuentra las edades de Paula y Josefa.	El profesor indica las características que poseen los coeficientes mencionando que en general si $(x+S)(x+R) = x^2 + Bx + C$ Entonces se cumplirá lo siguiente:		40 min

	Situación problema 2: Tomás necesita saber las medidas de los lados de un rectángulo, sabe que el largo es 4 metros más que el ancho y que el área es $21m^2$ ¿Cuánto mide cada lado del rectángulo? Determina e interpreta las soluciones en el contexto del problema.	$S \cdot R = C \ \wedge$ $S + R = B$. Una propiedad vista durante las clases anteriores a la unidad de ecuaciones cuadráticas. Continúa presentando dos problemas para que las estudiantes desarrollen en parejas, para ello dispondrán de 15 minutos para resolver cada uno y luego el docente solicitará a algunas estudiantes escribir el desarrollo en la pizarra.		
Cierre	**Actividad de Cierre:** Para la actividad de cierre se realizará un kahoot que tiene las siguientes preguntas: Justificar su desarrollo cuando sea necesario. 1. ¿Cuál es la factorización del primer miembro de la ecuación $x^2 - 4 = 0$?	Para el cierre de la clase el docente utilizará la plataforma Kahoot en la cual se presentarán 9 preguntas, se disponen de 20 minutos para el desarrollo de estas.		30 min

	a. $(x-2)(x-2)=0$ b. $(x-2)(x+2)=0$ c. $(x+4)(x-4)=0$ d. $(x-4)(x-4)=0$ 2. En general, si $(x+S)(x+R)=x^2+Bx+C$ Entonces se cumplirá lo siguiente: $S\cdot R=C$ y $S+R=B$. a. Verdadero b. Falso 3. ¿Cuál es la factorización del primer miembro de la ecuación $x^2-25=0$? a. $(x-20)(x-5)=0$ b. $(x-5)(x+5)=0$ c. $(x+15)(x-10)=0$ d. $(x-25)(x-1)=0$ 4. ¿Qué producto notable se puede utilizar para factorizar el primer miembro de la ecuación $x^2-8x+16=0$? a. Cuadrado de binomio b. Suma por diferencia			

	c. Factorización por término común. d. No se puede factorizar 5. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$? a. $x_1 = -2\ y\ x_2 = -1$ b. $x_1 = 2\ y\ x_2 = -1$ c. $x_1 = 2\ y\ x_2 = 1$ d. $x_1 = -2\ y\ x_2 = 1$ 6. ¿Cuál es la factorización de la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$? a. $(x-3)(x-2) = 0$ b. $(x+3)(x+2) = 0$ c. $(x-3)(x+2) = 0$ d. $(x+3)(x-2) = 0$ 7. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 - 9 = 0$? a. $x_1 = -3\ y\ x_2 = 3$ b. $x_1 = 9\ y\ x_2 = 1$ c. $x_1 = 5\ y\ x_2 = 4$ d. $x_1 = -9\ y\ x_2 = -1$ 8. ¿Cuál es la factorización de la ecuación $x^2 + 6x + 9 = 0$?			

	a. $(x-3)^2=0$ b. $(x+3)(x-3)=0$ c. $(x+3)^2=0$ d. No se puede factorizar. 9. ¿Cuál es la factorización de la ecuación $x^2+2x=40-x$? e. $(x-8)(x+5)=0$ f. $(x+20)(x+2)=0$ g. $(x+8)(x-5)=0$ h. $(x-20)(x-2)=0$			

Plan de clases				
Eje temático	Álgebra y funciones	**Unidad o tema**	Unidad 2: Funciones cuadráticas, ecuaciones cuadráticas y la inversa de una función.	**Sesión** N°4
Objetivo general de unidad		Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica, o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones de la forma: • $ax^2=b$ • $(ax+b)^2=c$		

		• $ax^2 + bx = 0$ • $ax^2 + bx = c$ (a, b, c son números racionales, $a \neq 0$)		
Meta(s) u objetivo de aprendizaje		Resolver guía de aprendizaje N°1 de ecuación cuadrática relacionada al método de factorización.		
Habilidad		OAH a Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes: -Simplificar el problema y estimar el resultado. -Descomponer el problema en subproblemas más sencillos. -Buscar patrones. -Usar herramientas computacionales. OAH d Describir relaciones y situaciones matemáticas, usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos. OAH h Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.		
Actitud		OAA D Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.		
Momentos	**Actividades de aprendizaje**	**Intervención Docente**	**Recursos de**	**Tiempo**

de la clase			aprendizaje	estimado
Inicio	**Actividad 1:** Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización. 1. $x^2 + 16x + 28 = 0$ 2. $a^2 - a - 2 = 0$ 3. $s^2 + 7s = 30$	El docente inicia la clase saludando al grupo de curso, les indica que se reúnan en parejas y entrega la guía de aprendizaje N°1. El profesor transita por toda la sala monitoreando que todas las estudiantes se encuentren trabajando y responde dudas en caso de ser necesario. Se debe limitar a solamente responder dudas relacionadas con el enunciado, con la finalidad de no dar indicios de cómo resolver el problema.	➢ Pizarra ➢ Guía de trabajo ➢ Plumón ➢ Cuaderno ➢ Lápices	15 min.
Desarrollo	**Actividad 2:** Hallar la ecuación cuadrática cuyas raíces sean $\frac{1}{2}$ y 3. **Actividad 3:** Resolver utilizando el método de factorización la siguiente ecuación cuadrática: $2(x-1)^2 = 8$ ¿Cuáles son sus soluciones?			15 min.
Cierre	**Situación problema:** 1. El largo de un cuadro es 5 metros mayor que su ancho, si el área es $150m^2$. Determinar sus			15 min.

	dimensiones.			

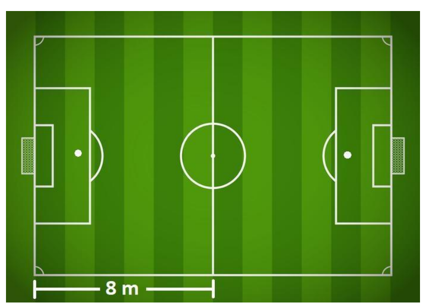
Plan de clases				
Eje temático	Álgebra y funciones	**Unidad o tema**	Unidad 2: Funciones cuadráticas, ecuaciones cuadráticas y la inversa de una función.	**Sesión** N°5
Objetivo general de unidad		Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica, o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones de la forma: • $ax^2 = b$ • $(ax + b)^2 = c$ • $ax^2 + bx = 0$ • $ax^2 + bx = c$ (a, b, c son números racionales, $a \neq 0$)		
Meta(s) u objetivo de aprendizaje		Analizar y resolver problemas que involucren ecuaciones cuadráticas utilizando el método de resolución de Po-Shen Loh.		
Habilidad		OAH b Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático.		

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">OAH f
Fundamentar conjeturas usando lenguaje algebraico para comprobar o descartar la validez de los enunciados.

OAH h
Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actitud</td><td colspan="3">OAA A
Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas.</td></tr>
<tr><td>Momentos de la clase</td><td>Actividades de aprendizaje</td><td>Intervención Docente</td><td>Recursos de aprendizaje</td><td>Tiempo estimado</td></tr>
<tr><td>Inicio</td><td>Actividad inicial:

1. ¿Qué producto notable sirve para factorizar el primer miembro de la siguiente ecuación cuadrática $x^2 - 16 = 0$?
2. Resuelve la siguiente ecuación: $a^2 - 15a - 1584 = 0$</td><td>El profesor inicia la clase saludando a las estudiantes y les solicita sacar sus materiales para iniciar la clase.

Se comienza con la activación de conocimientos previos, para ello se presenta la actividad 1 y se asignan 5 minutos para su desarrollo, posteriormente se le solicitará a una estudiante</td><td>➢ Herramienta TIC (PPT)
➢ Pizarra
➢ Plumón
➢ Cuaderno
➢ Lápices</td><td>25 min.</td></tr>
</table>

		salir a la pizarra a escribir y explicar cómo lo hizo. Luego se presentará la actividad 2 y se asignan 10 minutos para su desarrollo.		
Desarrollo	**Situación problema 1:** Necesitamos encontrar una ecuación cuadrática cuyo coeficiente c es igual a 28. Si una persona se para en el punto de penal y otra persona en el otro punto de penal deberán caminar la misma distancia para llegar a la mitad de la cancha.  ¿Cómo representarías en la figura y algebraicamente la distancia del inicio de la cancha a cada punto	Se presenta la situación problema 1, para ello se designarán 20 minutos. El docente transita por toda la sala monitoreando cómo trabajan las estudiantes, transcurrido el tiempo les solicitará a dos estudiantes salir a la pizarra para que realicen el desarrollo del ejercicio y se puedan comparar los pasos realizados. Luego, el docente institucionalizará el método de Po-Shen Loh.		40 min.

	penal? Considere que la distancia desde el inicio de la cancha a cada punto penal, representa una solución de la ecuación ($x_1 \ y \ x_2$) y se cumplirá la siguiente propiedad: $x_1 \cdot x_2 = c$ ¿Cuál es la ecuación y cuáles son sus soluciones?			
Cierre	**Ejercitación:** Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método de Po-Shen Loh: 1. $x^2 + 6x - 135 = 0$ 2. $x^2 - 14x + 49 = 0$ 3. $x^2 + 2x - 63 = 0$ 4. $x^2 + 8x + 7 = 0$ 5. $x^2 + 5x - 14 = 0$	El profesor presenta la ejercitación y asigna 15 minutos para el desarrollo de la actividad, transcurrido el tiempo solicitará a cinco estudiantes salir a la pizarra a escribir su desarrollo y verificar que todas las estudiantes tengan lo mismo.		25 min.

<table>
<tr><th colspan="5">Plan de clases</th></tr>
<tr><td>Eje temático</td><td>Álgebra y funciones</td><td>Unidad o tema</td><td>Unidad 2: Funciones cuadráticas, ecuaciones cuadráticas y la inversa de una función.</td><td>Sesión
N°6</td></tr>
<tr><td colspan="3">Objetivo general de unidad</td><td colspan="2">Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica, o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones de la forma:
● $ax^2 = b$
● $(ax + b)^2 = c$
● $ax^2 + bx = 0$
● $ax^2 + bx = c$
(a, b, c son números racionales, $a \neq 0$)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Meta(s) u objetivo de aprendizaje</td><td colspan="2">Resolver problemas contextualizados relacionados con la ecuación cuadrática utilizando el método de Po-Shen Loh.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Habilidad</td><td colspan="2">OAH b
Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático.

OAH c
Utilizar lenguaje matemático para identificar sus propias ideas o respuestas.

OAH e</td></tr>
</table>

		Explicar: -Soluciones propias y los procedimientos utilizados. -Demostraciones de resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas. -Generalizaciones por medio de conectores lógicos y cuantificadores utilizándolos apropiadamente. OAH h Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.		
Actitud		OAA A Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas.		
Momentos de la clase	**Actividades de aprendizaje**	**Intervención Docente**	**Recursos de aprendizaje**	**Tiempo estimado**
Inicio	**Ejercitación inicial:** Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método de Po-Shen Loh. 1. $x^2 + 6x + 5 = 0$ 2. $x^2 - x - 56 = 0$	El profesor inicia la clase saludando a las estudiantes y les solicita sacar sus materiales para iniciar la clase. Se comienza con la ejercitación inicial, se asignan 10 minutos para su desarrollo, durante este momento el docente transita por toda la sala monitoreando cómo	➢ Herramienta TIC (PPT) ➢ Pizarra ➢ Plumón ➢ Cuaderno ➢ Lápices	15 min.

		trabajan las estudiantes, transcurrido el tiempo les solicitará a dos alumnas salir a la pizarra para que realicen el desarrollo del ejercicio y puedan comparar los resultados.		
Desarrollo	**Situación problema 1:** Un abuelo tiene 67 años y sus dos nietos tienen 3 y 4 años. ¿En cuántos años más, la edad del abuelo será igual al producto de las edades de ambos nietos? **Situación problema 2:** La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 17 cm y las medidas de los catetos tienen 7 cm de diferencia. Determinar las medidas de los catetos.	El profesor presenta la situación problema 1 y 2 y asigna 15 minutos para el desarrollo de cada una. Durante este momento el docente transita por toda la sala monitoreando cómo trabajan las estudiantes y responde solamente dudas relacionadas con el enunciado. Transcurrido el tiempo les solicitará a dos alumnas salir a la pizarra para que realicen y expliquen el desarrollo del problema 1 y 2 respectivamente, el docente preguntará si alguien tiene un desarrollo distinto y en caso de ser así solicitará a la o las		50 min.

		estudiantes presentar su desarrollo.		
Cierre	**Situación problema:** La suma de las edades de dos hermanos es 12. Si dentro de 6 años el producto de estas será 143, ¿cuáles son las edades de cada uno?	El docente presenta la situación problema y les indica a las estudiantes que disponen de 15 minutos para el desarrollo.. Transcurrido el tiempo el docente solicitará a dos estudiantes escribir sus desarrollos y explicar cómo lo hicieron a sus compañeras.		25 min.

Plan de clases				
Eje temático	Álgebra y funciones	**Unidad o tema**	Unidad 2: Funciones cuadráticas, ecuaciones cuadráticas y la inversa de una función.	**Sesión** N° 7
Objetivo general de unidad		Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica, o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones de la forma:		

	• $ax^2 = b$ • $(ax + b)^2 = c$ • $ax^2 + bx = 0$ • $ax^2 + bx = c$ (a, b, c son números racionales, $a \neq 0$)
Meta(s) u objetivo de aprendizaje	Resolver guía de aprendizaje N°2 de ecuación cuadrática relacionada al método de Po-Shen Loh.
Habilidad	OAH a Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes: -Simplificar el problema y estimar el resultado. -Descomponer el problema en subproblemas más sencillos. -Buscar patrones. -Usar herramientas computacionales. OAH d Describir relaciones y situaciones matemáticas, usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos. OAH h Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.
Actitud	OAA D Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.

<table>
<tr><th>Momentos de la clase</th><th>Actividades de aprendizaje</th><th>Intervención Docente</th><th>Recursos de aprendizaje</th><th>Tiempo estimado</th></tr>
<tr><td>Inicio</td><td>Actividad 1:
Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método de Po-Shen Loh.
1. $x^2 - x - 1 = 0$</td><td rowspan="3">El docente inicia la clase saludando al grupo de curso, les indica que se reúnan con su grupo de trabajo y entrega la guía de aprendizaje N°2.

El profesor transita por toda la sala monitoreando que todas las estudiantes se encuentren trabajando y responde dudas en caso de ser necesario.

Se debe limitar a solamente responder dudas relacionadas con el enunciado, con la finalidad de no dar indicios de cómo resolver el problema.</td><td rowspan="3">➢ Pizarra
➢ Guía de trabajo
➢ Plumón
➢ Cuaderno
➢ Lápices</td><td>5 min.</td></tr>
<tr><td>Desarrollo</td><td>2. $a^2 + 10a + 16 = 0$
3. $s^2 - 14s = -24$
4. $r^2 - 8r + 17 = 0$</td><td>15 min.</td></tr>
<tr><td>Cierre</td><td>Situación problema:

Un curso organiza un asado de fin de año, para el cual una persona se encarga de las compras y gasta \$45.000, dinero que será devuelto mediante una cuota que pagará cada participante del asado. Pero seis personas que habían dicho que no irían, cambiaron de opinión y asisten al asado. Entonces la cuota por persona disminuye \$250. ¿Cuántas personas asistieron al asado?</td><td>25 min.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="5">Plan de clases</th></tr>
<tr><td>Eje temático</td><td>Álgebra y funciones</td><td>Unidad o tema</td><td>Unidad 2: Funciones cuadráticas, ecuaciones cuadráticas y la inversa de una función.</td><td>Sesión
N°8</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo general de unidad</td><td colspan="3">Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica, o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones de la forma:
• $ax^2 = b$
• $(ax + b)^2 = c$
• $ax^2 + bx = 0$
• $ax^2 + bx = c$
(a, b, c son números racionales, $a \neq 0$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Meta(s) u objetivo de aprendizaje</td><td colspan="3">Analizar y resolver problemas que involucren ecuaciones cuadráticas utilizando el método de resolución de completación de cuadrados.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Habilidad</td><td colspan="3">OAH a
Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes: -Simplificar el problema y estimar el resultado. -Descomponer el problema en subproblemas más sencillos. -Buscar patrones. -Usar herramientas computacionales.

OAH c
Utilizar lenguaje matemático para identificar sus propias ideas o</td></tr>
</table>

	respuestas. OAH d Describir relaciones y situaciones matemáticas, usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos OAH e Explicar: -Soluciones propias y los procedimientos utilizados. -Demostraciones de resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas. -Generalizaciones por medio de conectores lógicos y cuantificadores utilizándolos apropiadamente OAH h Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.
Actitud	OAA A Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas.

Momentos de la clase	**Actividades de aprendizaje**	**Intervención Docente**	**Recursos de aprendizaje**	**Tiempo estimado**
Inicio	**Activación de conocimientos previos:** 1. Factoriza el siguiente trinomio:	El profesor inicia la clase saludando a las estudiantes y les solicita sacar sus materiales para iniciar la clase.	➢ Herramienta TIC (PPT) ➢ Pizarra	15 min.

	$x^2 + 6x + 9$ 2. ¿Qué le deberíamos hacer a la ecuación $x^2 + 8x + 15 = 0$ para que el primer miembro sea un cuadrado de binomio?	Se comienza con la activación de conocimientos previos, se asignan 15 minutos para su desarrollo, durante este momento el docente transita por toda la sala monitoreando cómo trabajan las estudiantes, transcurrido el tiempo les solicitará a tres alumnas salir a la pizarra para que realicen el desarrollo del ejercicio y puedan comparar los resultados.	➢ Plumón ➢ Cuaderno ➢ Lápices	
Desarrollo	**Situación problema 1:** El marco de una pintura mide 18 cm por 14 cm. La pintura ocupa $192\ cm^2$. Encontrar el ancho del marco.	Se presenta la situación problema 1, para ello se designarán 20 minutos. El docente transita por toda la sala monitoreando cómo trabajan las estudiantes, transcurrido el tiempo les solicitará a una estudiante salir a la pizarra para que realice el desarrollo del problema y se puedan comparar los pasos realizados con los del resto de sus compañeras.		55 min.

		Luego, el docente institucionalizará el método de completación de cuadrados.		
Cierre	**Ejercicios:** Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas. 1. $x^2 + 22x + 21 = 0$ 2. $n^2 - 22n + 102 = 0$ 3. $s^2 + 8s + 15 = 0$ 4. $t^2 + 7t - 2 = 0$	El docente presenta los ejercicios y asigna 15 minutos para su desarrollo, en todo este tiempo él transita por toda la sala monitoreando que todas las estudiantes estén trabajando y responder las dudas en caso de que surjan. Transcurrido el tiempo el docente solicitará a cuatro estudiantes escribir y explicar su desarrollo en la pizarra con la finalidad de verificar que todas hayan entendido y desarrollado el problema.		20 min.

Plan de clases

Eje temático	Álgebra y funciones	Unidad o tema	Unidad 2: Funciones cuadráticas, ecuaciones cuadráticas y la inversa de una función.	Sesión N°9

Objetivo general de unidad	Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica, o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones de la forma: ● $ax^2 = b$ ● $(ax + b)^2 = c$ ● $ax^2 + bx = 0$ ● $ax^2 + bx = c$ (a, b, c son números racionales, $a \neq 0$)
Meta(s) u objetivo de aprendizaje	Resolver guía de aprendizaje N°3 de ecuación cuadrática relacionada al método de completación de cuadrados.
Habilidad	OAH a Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes: -Simplificar el problema y estimar el resultado. -Descomponer el problema en subproblemas más sencillos. -Buscar patrones. -Usar herramientas computacionales. OAH d Describir relaciones y situaciones matemáticas, usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos. OAH h

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actitud</td><td colspan="3">OAA D
Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.</td></tr>
<tr><th>Momentos de la clase</th><th>Actividades de aprendizaje</th><th>Intervención Docente</th><th>Recursos de aprendizaje</th><th>Tiempo estimado</th></tr>
<tr><td>Inicio</td><td>Ejercicios:

1. Determinar las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método de completación de cuadrados:

1) $x^2 - 3x - 28 = 0$
2) $a^2 - 6a - 16 = 0$
3) $y^2 - 2y - 3 = 0$
4) $h^2 + 10h - 24 = 0$</td><td rowspan="2">El docente inicia la clase saludando al grupo de curso, les indica que se reúnan con su grupo de trabajo y entrega la guía de aprendizaje N°3.

El profesor transita por toda la sala monitoreando que todas las estudiantes se encuentren trabajando y responde dudas en caso de ser necesario.

Se debe limitar a solamente responder dudas relacionadas con el enunciado, con la</td><td rowspan="2">➢ Pizarra
➢ Guía de trabajo
➢ Plumón
➢ Cuaderno
➢ Lápices</td><td>35 min</td></tr>
<tr><td>Desarrollo</td><td>Situación problema 1:</td><td>30 min.</td></tr>
</table>

	Hallar el lado de un cuadrado cuya diagonal mide 3 cm más que un lado.	finalidad de no dar indicios de cómo resolver el problema.		
Cierre	**Situación problema 2:** La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 cm. Un cateto mide 4 cm más que el otro. Encontrar la longitud de los catetos.			25 min.

Plan de clases				
Eje temático	Álgebra y funciones	**Unidad o tema**	Unidad 2: Funciones cuadráticas, ecuaciones cuadráticas y la inversa de una función.	**Sesión** N°10
Objetivo general de unidad		Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica, o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones de la forma: • $ax^2 = b$ • $(ax + b)^2 = c$ • $ax^2 + bx = 0$ • $ax^2 + bx = c$ (a, b, c son números racionales, $a \neq 0$)		

Meta(s) u objetivo de aprendizaje	Analizar y resolver problemas que involucren ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general. Utilizar discriminante para encontrar el número de soluciones de una ecuación cuadrática.
Habilidad	OAH b Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático. OAH c Utilizar lenguaje matemático para identificar sus propias ideas o respuestas. OAH d Describir relaciones y situaciones matemáticas, usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos. OAH h Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.
Actitud	OAA A Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas.

Momentos de la clase	**Actividades de aprendizaje**	**Intervención Docente**	**Recursos de aprendizaje**	**Tiempo estimado**

Inicio	**Pregunta de inicio:** ¿Cómo resolverías la ecuación $5x^2 - 8x = -3$?	El profesor inicia la clase saludando a las estudiantes y les solicita sacar sus materiales para iniciar la clase. Se comienza con la pregunta de inicio, se asignan 10 minutos para que las estudiantes la analicen individualmente, transcurrido el tiempo les solicitará a las alumnas que comenten sus ideas.	➢ Herramienta TIC (PPT) ➢ Pizarra ➢ Plumón ➢ Cuaderno ➢ Lápices	15 min
Desarrollo	**Situación problema:** La suma de los cuadrados de tres números pares consecutivos es 596. Determinar el mayor entero del trío. **Ejercicios:** 1. Determinar las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general: 1) $-7x^2 - 25x + 12 = 0$	El profesor propone la situación problema y asigna 15 minutos para su desarrollo, transcurrido el tiempo les preguntará a las estudiantes cómo lo hicieron dejando un registro en la pizarra. El docente institucionaliza el método de resolución de la ecuación cuadrática utilizando la fórmula general haciendo énfasis en que este método sirve para aquellas ecuaciones que tienen el coeficiente a		55 min.

	2) $12a^2 + 2a = a + 19a$ 3) $7h^2 - 7h + \frac{10}{7} = 0$ 4) $2j^2 + 14j + 12 = 0$	distinto de 0. Luego, presenta los ejercicios y asigna 20 minutos para su desarrollo, durante este tiempo el docente transita por toda la sala respondiendo dudas conceptuales. Se recordará que es discriminante.		
Cierre	**Actividad de cierre:** Determina el valor de *m* para que las siguientes ecuaciones cuadráticas cumplan con las condiciones pedidas: 1. $4x^2 + 4x + m = 0$ 2. $2x^2 + m^2 = 3mx$ 3. $2mx^2 - 3mx + 7 = 0$ a. No tenga solución b. Tenga dos soluciones reales e iguales c. Tenga dos soluciones reales y distintas	El docente presenta la actividad de cierre y asigna 15 minutos para su desarrollo, durante este tiempo él transita por toda la sala respondiendo dudas relacionadas al enunciado.		20 min.

Plan de clases				
Eje temático	Álgebra y funciones	**Unidad o tema**	Unidad 2: Funciones cuadráticas, ecuaciones cuadráticas y la inversa de una función.	**Sesión** N°11
Objetivo general de unidad		Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica, o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones de la forma: • $ax^2 = b$ • $(ax + b)^2 = c$ • $ax^2 + bx = 0$ • $ax^2 + bx = c$ (a, b, c son números racionales, $a \neq 0$)		
Meta(s) u objetivo de aprendizaje		Resolver guía de aprendizaje N°4 de ecuación cuadrática relacionada a la fórmula general y discriminante.		
Habilidad		OAH a Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes: -Simplificar el problema y estimar el resultado. -Descomponer el problema en subproblemas más sencillos. -Buscar patrones. -Usar herramientas computacionales. OAH c Utilizar lenguaje matemático para identificar sus propias ideas o respuestas.		

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">OAH h
Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actitud</td><td colspan="3">OAA D
Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.</td></tr>
<tr><th>Momentos de la clase</th><th>Actividades de aprendizaje</th><th>Intervención Docente</th><th>Recursos de aprendizaje</th><th>Tiempo estimado</th></tr>
<tr><td>Inicio</td><td>Ejercicios:

1. Determinar las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general:

1) $4x^2 + 12x = 7$
2) $3y^2 - 7y + 4 = 0$
3) $5t^2 = 80$
4) $h^2 + 7h = 18$
5) $4a^2 = 100$</td><td rowspan="2">El docente inicia la clase saludando al grupo de curso, les indica que se reúnan con su grupo de trabajo y entrega la guía de aprendizaje N°4.

El profesor transita por toda la sala monitoreando que todas las estudiantes se encuentren trabajando y responde dudas en caso de ser necesario.

Se debe limitar a responder solamente dudas relacionadas</td><td rowspan="2">➢ Pizarra
➢ Guía de trabajo
➢ Plumón
➢ Cuaderno
➢ Lápices</td><td>20 min</td></tr>
<tr><td>Desarrollo</td><td>Ejercicios:</td><td>50 min</td></tr>
</table>

	2. Encontrar el valor del discriminante y determinar cuántas soluciones reales tiene cada ecuación cuadrática. 1) $4x^2 + 4x = 1$ 2) $3z^2 + 4z + 2 = 0$ 3) $2a^2 + 2a + 3 = 0$ 4) $2y^2 = 4y - 2$ 5) $j^2 + 2j - 2 = 0$	con el enunciado, con la finalidad de no dar indicios de cómo resolver el problema.		
Cierre	**Situación problema 1:** El liceo Paulina Von Mallinckrodt busca fomentar la natación en sus estudiantes, para ello instalará una piscina cuyo largo es de $20\ m$ y cuyo ancho es de $16\ m$. El liceo compró un total de $160\ m^2$ de pasto sintético que se pondrá alrededor de la piscina. Si se desea utilizar todo el material disponible ¿Cuál es el ancho que debe tener el pasto que rodeará la piscina para			20 min

	que quede repartido uniformemente?			

<table>
<tr><th colspan="5">Plan de clases</th></tr>
<tr><td>Eje temático</td><td>Álgebra y funciones</td><td>Unidad o tema</td><td>Unidad 2: Funciones cuadráticas, ecuaciones cuadráticas y la inversa de una función.</td><td>Sesión
N°12</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo general de unidad</td><td colspan="3">Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica, o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones de la forma:
● $ax^2 = b$
● $(ax + b)^2 = c$
● $ax^2 + bx = 0$
● $ax^2 + bx = c$
(a, b, c son números racionales, $a \neq 0$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Meta(s) u objetivo de aprendizaje</td><td colspan="3">Analizar y resolver un problema contextualizado sobre ecuación cuadrática utilizando los distintos métodos de resolución.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Habilidad</td><td colspan="3">OAH a
Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes:
● Simplificar el problema y estimar el resultado.
● Descomponer el problema en subproblemas más sencillos.
● Buscar patrones.</td></tr>
</table>

	• Usar herramientas computacionales. OAH b Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático. OAH c Utilizar lenguaje matemático para identificar sus propias ideas o respuestas. OAH h Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad. OAH j Ajustar modelos, eligiendo los parámetros adecuados para que se acerquen más a la realidad
Actitud	OAA A Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas. OAA D Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.

Momentos de la clase	Actividades de aprendizaje	Intervención Docente	Recursos de aprendizaje	Tiempo estimado
Inicio	**Situación problema:** Carla vende chocolates en el kiosco de un liceo. Compra una cantidad de cajas de chocolate por $40.000. El día lunes fue a comprar como normalmente lo hace y se dio cuenta que se instaló una nueva distribuidora de confites, decidió ir a preguntar por el valor de las cajas de chocolate y está feliz, pues en la primera distribuidora, ese dinero le alcanza para 5 cajas menos porque cuestan $400 más. ¿Cuánto cuesta cada caja de chocolate en cada local?	El profesor inicia la clase, saluda al grupo de curso y entrega la guía de trabajo que contiene la situación problema. Indica las instrucciones para el desarrollo de la actividad y enfatiza en que esta comienza con una etapa individual. Designa unos minutos para que las estudiantes lean el problema y escriban o subrayen información que consideren importante. Transcurrido el tiempo el docente indica que deben analizar la información que aporta el problema y proponer distintas estrategias para su solución dejando registro en su cuaderno.	➢ Pizarra ➢ Plumón ➢ Cuaderno ➢ Lápices	15 min
Desarrollo		Las estudiantes trabajan individualmente en la solución		50 min.

		del problema. Cuando el docente observe que la mayoría de las estudiantes ha propuesto algún desarrollo les indicará que deben juntarse en grupos de a lo más 3 estudiantes y compartir sus estrategias. Cuando el docente observe que los grupos terminaron de discutir sus ideas les solicitará a ciertas estudiantes compartir sus estrategias y resultados con el curso. Durante todo el desarrollo de la actividad el docente transitará por la sala respondiendo únicamente dudas respecto al enunciado del problema.		
Cierre		El docente junto a las estudiantes ordenan las ideas y sacan conclusiones respecto a la situación problemática para dar una respuesta final e institucionalizar el contenido.		25 min.