

# Equivalencia de superficies de figuras planas. Un estudio de caso sobre conocimiento del profesorado de Séptimo año de Enseñanza Básica.

Trabajo para optar al grado de Magíster en Didáctica de la Matemática  
Universidad Alberto Hurtado

Autor: Tomás Pablo Toro Teutsch

Profesora Guía: Dra. Noemí Pizarro

Santiago, marzo de 2021

## Agradecimientos

La intención de seguir creciendo profesionalmente no siempre es una tarea simple de realizar. Generalmente, estas decisiones llevan consigo una gran carga física, emocional que no es fácil de llevar sin dejar de lado todas aquellas situaciones de complicación e incertidumbre por lograr el objetivo establecido.

Pese a todo esto, espero con esta pequeña contribución, poder aportar a este maravilloso mundo que considera la docencia, en particular la escolar.

En primera instancia feliz de la familia en la que tuve la fortuna de aparecer. Agradezco a José y Mónica, mis padres, quienes a su modo y tiempos me han acompañado a lo largo de la vida en todo momento aportando siempre contención y amor en cantidades inconmensurables. Les agradezco enormemente el inculcarme la búsqueda constante de aprendizaje y perfeccionamiento en pro de mejores oportunidades de las que ellos tuvieron.

A mi hermana Tamara, quien desde su posición de única hermana me ha acompañado aportando su experiencia, amor y búsqueda del crecimiento personal en miras de un desarrollo integral. A mi hermano Diego, que con su serenidad, imparcialidad y asertividad y búsqueda de siempre querer aprender más y más lo cual admiro a cabalidad. A mi hermano pequeño, Isaac, el concho de la familia. Genio lleno de habilidades académicas y sociales que le permitirán lograr lo que se proponga.

A Noemí, mi profesora guía, quien me ha acompañado durante estos poco más de tres años en la travesía que me di la tarea de iniciar, aportando su sabiduría, contención, apoyo, preocupación y amistad sin esperar nada a cambio mas que el lograr el cometido.

A mi pareja, María José, quien me instó junto con mi familia, a dar término a la tarea iniciada. Mujer que me inspira día a día a crecer y darme la oportunidad de equivocarme, levantarme e intentarlo las veces que sea necesario apoyándome desde su visión de mundo y de vida. Me llenaste de alegrías desde el primer día y hoy me bendices con mi sueño más grande: la oportunidad de ser padre. Te agradezco enormemente la oportunidad de poder amarte y crecer contigo no solo en lo profesional y académico, si no en lo sentimental, espiritual y familiar.

A mi querido hijo José Tomás. Te amo desde el primer día y te espero con ansias.

No podían estar ausentes mis amigos, Rolf, Jorge y Catalina junto al pequeño Oliver a quien espero pronto conocer, Tozho, Tamara, Carlitos quienes han estado siempre presentes en este camino aportando su alegría y contención en la adversidad.

Solo quiero abrazarlos y decir: lo logré. Gracias infinitas a todos.

## Índice

Agradecimientos .....	1
Resumen.....	4
Introducción.....	5
Capítulo 1 – Antecedentes.....	6
1.1 Formulación del problema y pregunta de investigación .....	17
1.2 Objetivo General .....	17
1.3    Objetivos específicos .....	18
1.4 Objeto Matemático.....	18
Capítulo 2 – Marco de referencia.....	20
2.1 Conocimiento Matemático (MK): Subdominios .....	21
2.2 Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK): Subdominios .....	23
2.2.3 Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)..	25
Capítulo 3 – Marco Metodológico .....	26
3.1 Enfoque metodológico .....	26
3.2 Población de estudio .....	27
3.3 Diseño del instrumento .....	27
3.4 Detalle de las preguntas del instrumento.....	29
3.5 Secuencia de clases.....	35
3.6 Recolección de datos .....	36
Capítulo 3 – Análisis de datos.....	67
Conocimiento Matemático (MK).....	67
Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) .....	73
Lectura General del modelo.....	76
Capítulo 4 – Conclusiones .....	78
4.1 Conclusiones y reflexiones respecto al objetivo de investigación.....	78
4.2 Sugerencias para la formación de profesores. ....	85
4.3 Debilidades de la Investigación .....	86
4.4 Proyecciones .....	86
<b>Referencias .....</b>	<b>88</b>
Anexos .....	90
Nombre: .....	90
Aprendizajes esperados – Geometría (1).....	90

Orientaciones Didácticas – MINEDUC (2).....	91
Acerca de los Objetivos de Aprendizaje (3) .....	92
Acerca de los conocimientos previos (4) .....	93
Acerca de los indicadores de evaluación (5) .....	94
Acerca de los inicios de la propuesta (6).....	95
Acerca de la fórmula para calcular el área de triángulos (7) .....	96
Acerca de la fórmula para el cálculo de áreas de paralelogramos (8).....	97
Acerca de la fórmula para el cálculo del área de trapecios (9) .....	98
Acerca de la secuencia de clases (10) .....	99
Anexos .....	108

## Resumen

Este trabajo tiene por finalidad indagar respecto a los conocimientos específicos que debe tener el docente de Matemática para el trabajo con el objetivo de aprendizaje: “Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios” (MINEDUC, 2016, p.52).

El nivel escogido para este estudio de caso corresponde a 7° año de Enseñanza Básica siguiendo los lineamientos entregados a través del programa de estudio de MINEDUC, así como el texto del estudiante de 2019. Para esto, se presentan inicialmente los antecedentes del estudio luego de una revisión bibliográfica del programa y el texto escolar en contraste con investigaciones y/o estudios relacionados con el concepto de área. Esta revisión se contrasta con la lectura realizada por dos docentes con distinto grado de especialización que realizan clases en el nivel mencionado respecto a dos instancias. La primera de ellas es una revisión conjunta de los instrumentos ministeriales a través de preguntas abiertas para posteriormente, realizar una propuesta de clase, con la finalidad de hacer un levantamiento de los conocimientos específicos que consideran presentes en el objetivo de aprendizaje descrito anteriormente para luego realizar una caracterización del conocimiento específico del docente de Matemática respecto a la presencia del concepto de equivalencia de superficies de figuras planas en el desarrollo de las fórmulas para el cálculo del área de triángulos, paralelogramos y trapecios. Esta caracterización será realizada bajo la mirada del *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (conocimiento especializado del profesor de Matemática) conocido como MTSK.

Finalmente se presentan los resultados de esta caracterización con de poder aportar a futuras investigaciones relacionadas con el nivel y tema con la intención de evidenciar aspectos que pudiesen verse identificados.

## Introducción

Uno de los aspectos relevantes de la labor docente radica en el desarrollo de conocimientos y competencias específicas del área es el logro de los aprendizajes significativos por parte de los estudiantes.

El Marco para la Buena Enseñanza "...reconoce la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje y los variados contextos culturales en que éstos ocurren, tomando en cuenta las necesidades de desarrollo de conocimientos y competencias por parte de los docentes, tanto en materias a ser aprendidas como en estrategias para enseñarlas; la generación de ambientes propicios para el aprendizaje de todos sus alumnos; como la responsabilidad de los docentes sobre el mejoramiento de los logros estudiantiles" (MINEDUC, 2008, p. 7).

El trabajo con geometría tiene sus orígenes en la resolución de problemas de la vida cotidiana, he ahí su nombre que significa "medida de la tierra".

A lo largo del curriculum escolar, la geometría no ha estado exenta de dificultades como son las dificultades propias de este eje, sobre todo en la educación escolar.

## Capítulo 1 – Antecedentes

Durante observaciones de práctica docente de Matemática en la sala de clases, se aprecia un escaso desarrollo del concepto de equivalencia de figuras planas al momento de introducir las fórmulas para el cálculo de áreas en algunas figuras planas en nivel de 7° año de Enseñanza Básica.

En particular esta investigación se enfoca en el Objetivo de Aprendizaje número 13 (desde ahora en adelante OA13): Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios.

<b>OA 13</b> Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios.	<ul style="list-style-type: none"><li>› Dibujan cuadriláteros a partir de un triángulo dado.</li><li>› Reconocen que el área de un triángulo se obtiene por dividir un cuadrilátero por una de sus diagonales.</li><li>› Transforman paralelogramos en rectángulos de la misma altura por medio de recortes o dibujos, reconociendo que se mantiene la medida del área.</li><li>› Formulan verbal y simbólicamente la regla para calcular el área de paralelogramos.</li><li>› Descomponen concreta o pictóricamente un paralelogramo en dos triángulos con el mismo contenido, verificando que el área de un triángulo se calcula como medio paralelogramo con la misma base y altura.</li><li>› Recortan o dibujan dos trapecios iguales y confeccionan o dibujan un paralelogramo con la misma altura y el doble del área, obteniendo la fórmula del área de un trapecio.</li><li>› Resuelven problemas geométricos y de la vida cotidiana, cuya resolución requiere calcular áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios.</li></ul>
--	---

Fig. 1: OA13 7° año de Enseñanza Básica. Programa de estudio 7° Básico, MINEDUC

Se realiza una revisión de los programas de estudio entregados por el Ministerio de Educación (desde ahora en adelante MINEDUC) desde el nivel de 4° a 6° de Enseñanza Básica en búsqueda del concepto de equivalencia y su progresión con la finalidad de poder entender la articulación del concepto con el OA13.

NIVEL 4º BÁSICO	NIVEL 5º BÁSICO	NIVEL 6º BÁSICO
<p>Identificar, escribir y representar fracciones propias y los números mixtos hasta el número 5, de manera concreta, pictórica, simbólica, en el contexto de la resolución de problemas.</p>	<p>Demostrar que comprenden las fracciones impropias de uso común de denominadores 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 y los números mixtos asociados:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>› usando material concreto y pictórico para representarlas, de manera manual y/o con software educativo</li> <li>› identificando y determinando <u>equivalencias</u> entre fracciones impropias y números mixtos</li> <li>› representando estas fracciones y estos números mixtos en la recta numérica</li> </ul>	<p>Demostrar que comprenden las fracciones y los números mixtos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>› identificando y determinando <u>equivalencias</u> entre fracciones impropias y números mixtos, usando material concreto y representaciones pictóricas de manera manual y/o con software educativo</li> <li>› representando estos números en la recta numérica</li> </ul>

Fig. 2: Secuenciación contenidos: *Concepto de equivalencia en el Programa de Estudio del MINEDUC (4B)*

Como se puede apreciar, el concepto de equivalencia se encuentra utilizado en el campo numérico para el trabajo con el concepto de fracciones equivalentes. Por este motivo, será necesario ampliar la búsqueda y comenzar a revisar la secuenciación de contenidos respecto al trabajo con el concepto de área en los programas de estudio entregados por MINEDUC.

NIVEL 4º BÁSICO	NIVEL 5º BÁSICO	NIVEL 6º BÁSICO
<p>Demostrar que comprenden el concepto de área de un rectángulo y de un cuadrado:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>› reconociendo que el área de una superficie se mide en unidades cuadradas</li> <li>› seleccionando y justificando la elección de la unidad estandarizada (<math>\text{cm}^2</math> y <math>\text{m}^2</math>)</li> <li>› determinando y registrando el área en <math>\text{cm}^2</math> y <math>\text{m}^2</math> en contextos cercanos</li> <li>› construyendo diferentes rectángulos para una área dada (<math>\text{cm}^2</math> y <math>\text{m}^2</math>) para mostrar que distintos rectángulos pueden tener la misma área</li> <li>› usando software geométrico</li> </ul>	<p>Diseñar y construir diferentes rectángulos, dados el perímetro, el área o ambos, y sacar conclusiones.</p> <hr/> <p>Calcular áreas de triángulos, de paralelogramos y de trapecios, y estimar áreas de figuras irregulares, aplicando las siguientes estrategias:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>› conteo de cuadrículas</li> <li>› comparación con el área de un rectángulo</li> <li>› completar figuras por traslación</li> </ul>	<p>Construir y comparar triángulos de acuerdo a la medida de sus lados y/o sus ángulos con instrumentos geométricos o software geométrico.</p> <hr/> <p>Demostrar que comprenden el concepto de área de una superficie en cubos y paralelepípedos, calculando el área de sus redes (plantillas) asociadas.</p>

Fig. 3: Secuenciación contenidos: *Concepto de área en el Programa de Estudio del MINEDUC (4B)*

Respecto al concepto de área, se aprecia que la secuenciación de contenidos, en el nivel de 5° año de enseñanza básica, ya se realiza un primer acercamiento al cálculo de área de triángulos, paralelogramos y trapecios utilizando como estrategia la completación de figuras por traslación, comparación entre otras.

Finalmente, en función de la revisión de los conceptos mencionados anteriormente, se puede visualizar que no existe una relación con el concepto de equivalencia y el trabajo con el concepto de área. Tal como propone Olmo, Moreno y Gil, (1989) “las propuestas de enseñanza tradicionalmente implementadas en las instituciones educativas no tienen en cuenta los variados matices en que se desarrolla el área y no suelen poner de manifiesto su conexión con otras partes de la matemática escolar”.

La adquisición del concepto de área se encuentra remitido a el cálculo de esta, utilizando las fórmulas tradicionalmente conocidas.

Para graficar esta aseveración, se presenta la secuencia de aprendizaje presentada en el Texto del Estudiante de 7° Básico entregado por el Ministerio de Educación, Editorial SM, año 2019 respecto a la construcción de las fórmulas para el cálculo del área de triángulos, paralelogramos y trapecios.

Se inicia presentando una situación donde Josefa necesita calcular el área de un terreno de forma irregular:

**¿Cómo calcular el área de algunos polígonos?**

Josefa necesita organizar el cultivo de un nuevo terreno, para ello debe calcular el **área** total de este.

Ha dibujado el siguiente esquema del terreno y realizado las mediciones necesarias.

El diagrama muestra un terreno irregular dividido en tres parcelas. Parcela 1 es un triángulo púrpura con una base de 6 m y una altura de 3 m. Parcela 2 es un trapecio amarillo con una base superior de 7 m, una base inferior de 6 m y una altura de 3 m. Parcela 3 es un triángulo azul con una base de 2 m y una altura de 3 m. Las mediciones de los lados y alturas están indicadas con líneas y flechas.

Fig. 4: Texto del estudiante 7° Básico: Situación problema cálculo de área, p. 186.

Esta actividad se encuentra enmarcada dentro de la lección 27 que tiene por propósito “Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios.

Se puede visualizar que la situación planteada, acompañada por la representación del terreno correspondiente, trae una división establecida para el terreno que concuerda con las figuras descritas en el OA13 para las cuales se busca desarrollar y aplicar la fórmula.

Esta representación del espacio a calcular viene acompañada de este texto que explica por qué se puede dividir el terreno (no explica por qué en estos polígonos particulares).

¿Para qué?  
Cuando un maestro necesita cubrir el patio de una casa con cerámica o baldosas necesita calcular cuál será el área total en la cual trabajará. Como los patios poseen diferentes formas, puede dividir el área total en polígonos con el fin de saber cuánta cerámica y pegamento es necesario comprar para poder terminar el trabajo.

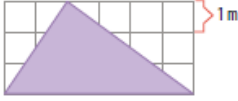
Fig. 5: Texto del estudiante 7° Básico: ¿Para qué?, p. 186.

La primera figura para la cual se espera desarrollar la fórmula es el triángulo, en este caso se presenta la siguiente secuencia:

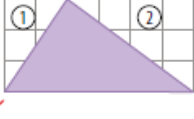
**Situación 1** Calcular el área de un triángulo

Josefa calcula primero el área de la parcela 1.

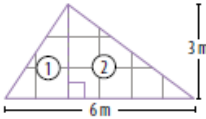
**Paso 1** Inscribe el triángulo en un rectángulo con la medida que muestra la imagen de la parcela, teniendo en cuenta que la **base** del triángulo coincide con la base del rectángulo y la **altura** del triángulo es igual al ancho del rectángulo.



**Paso 2** Recorta el triángulo central. El papel sobrante tendrá la forma de dos triángulos rectángulos.



**Paso 3** Superpon los triángulos rectángulos 1 y 2 en el central (morado).



Observa que al unir los dos triángulos se forma otro con la misma altura y la misma base, por lo tanto tiene la misma superficie que el triángulo inicial.

Así, el rectángulo se puede descomponer en dos triángulos que tienen la misma superficie; entonces la superficie del rectángulo es el doble de la superficie del triángulo.

**Paso 4** Calcula el **área de un triángulo (A)** que equivale a calcular el área de un rectángulo y dividir por 2 este resultado.

$$A = \frac{6 \cdot 3}{2} = \square = \square$$

Luego, el área de la parcela 1 es \_\_\_\_\_ m<sup>2</sup>.

En general, para calcular el área de un triángulo (A), se multiplica la longitud de un lado (b) por la altura correspondiente (h) y el resultado se divide en 2.

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Fig. 6: Texto del estudiante 7° Básico: Calcular el área de un triángulo, p. 186.

Se evidencia en esta primera situación, que el desarrollo de la fórmula es a partir de las estrategias de recorte y superposición. Esta secuencia se encuentra bajo una estructura rígida que requiere aspectos necesarios como la inscripción del triángulo en un rectángulo, para finalmente, con las estrategias mencionadas al inicio, justificar la fórmula declarada.

En el paso 4 se indica que el área de un triángulo equivaldría a calcular el área de un rectángulo y dividir el resultado en 2.

Por primera vez en esta secuencia de desarrollo de contenido se presenta el concepto de equivalencia relacionado netamente al procedimiento aritmético que este cálculo conlleva.

Cabe la pena mencionar que el texto declara: En general, para calcular el área de un triángulo (A), se multiplica la longitud de un lado (b) por la altura correspondiente (h) y el resultado se divide en 2. Esta aseveración permitiría declarar que existirían


casos en que el área de triángulos no se calcularía con este procedimiento o fórmula.

La segunda figura con la que se trabaja para desarrollar su fórmula corresponde a un paralelogramo:


**Situación 2** Calcular el área de un paralelogramo

Luego, Josefa calcula el área de la parcela 2, que tiene forma de paralelogramo.

**Paso 1** Dibuja un paralelogramo sobre un papel cuadriculado, con las medidas que muestra la imagen de la parcela.




**Paso 2** Traza desde un vértice la altura del paralelogramo.



**Paso 3** Recorta el triángulo formado y lo traslada como indica la imagen.

La altura del paralelogramo coincide con el ancho del rectángulo.



Observa que al recortar las figuras y unir las se ha formado un rectángulo.

**Paso 4** Calcula el área del paralelogramo (A), que equivale a calcular el área de este rectángulo.

$$A = 7 \cdot 3 = \square$$

Luego, el área de la parcela 2 es \_\_\_\_\_ m<sup>2</sup>

En general, para calcular el área de un paralelogramo (A) se multiplica la medida de un lado (b) por la altura correspondiente (h).

$$A = b \cdot h$$

¿Qué características tiene un paralelogramo? ¿Cómo se llama el de la imagen?

¿Servirá esta fórmula para calcular el área de un rombo?, ¿por qué? Justifica con un ejemplo o contraejemplo.

Fig. 7: Texto del estudiante 7° Básico: Calcular el área de un paralelogramo, p. 187.

En esta segunda situación, la estrategia utilizada corresponde a recorte y completación de figura por traslación formando un rectángulo (indicando que ya se conoce la fórmula para el cálculo respectivo).

En el paso 4 se indica que calcular el área del paralelogramo presentado equivaldría a calcular el área del rectángulo formado mediante recorte y completación.

Al igual que la situación anterior “En general” se calcularía el área de un paralelogramo con la fórmula indicada.

Nuevamente el concepto de equivalencia se centra en el aspecto numérico sin reconocer la conservación de superficie.

La última figura a trabajar para desarrollar la fórmula del cálculo de área corresponde al trapecio:

**Situación 3** Área de un trapecio

Finalmente calculará el área de la parcela 3, la que tiene forma de trapecio.

**Paso 1** Dibuja dos trapecios congruentes de distinto color, teniendo presente que cada cuadrado representa 1 m<sup>2</sup>.

¿Qué diferencia a los trapecios de los paralelogramos?

Fig. 8: Texto del estudiante 7° Básico: Calcular el área de un trapecio, p. 187.

**Paso 2** Recorta en uno de los trapecios, dos triángulos rectángulos y un rectángulo. Luego, con estas partes y el otro trapecio forma un rectángulo.

Observa que se ha formado un rectángulo, cuyo ancho coincide con la altura del trapecio (3 m) y el largo corresponde a la suma de sus bases, en este caso  $6 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$ .

**Paso 3** Para calcular el área de un trapecio (A), calcula el área del rectángulo que se ha formado y este resultado lo divide en dos, ya que la superficie del rectángulo equivale al doble de la superficie del trapecio.

$$A = \frac{6+2}{2} \cdot 3 = \square$$

Luego, el área de la parcela 3 es \_\_\_\_\_ m<sup>2</sup>.

En general, para calcular el área de un trapecio (A), se suman las medidas de sus bases (B y b) y este resultado se multiplica por la altura del trapecio (h), luego se divide por 2.

$$A = \frac{B+b}{2} \cdot h$$

Fig. 9: Texto del estudiante 7° Básico: Calcular el área de un trapecio, p. 188.

En esta tercera situación, la construcción de la fórmula sería mediante una construcción auxiliar (hay que dibujar un segundo trapecio), recorte y completación mediante traslación.

En el paso 3, y por primera vez en esta secuencia de situaciones, se declara que existe equivalencia de superficies, aunque no se explique a que corresponde esa aseveración.

Al igual que las 2 situaciones anteriores, la fórmula desarrollada mediante la secuencia descrita sería pertinente para la mayoría de las situaciones, es decir, existirían casos en los que no se podría determinar el área de un trapecio mediante el uso de esta.

Respecto a la equivalencia de superficies, Chamorro (2006) declara: *“La determinación de la equivalencia de dos superficies supone la utilización de métodos que van de la superposición a la equidescomposición o a la equicomplementariedad. La utilización de tales métodos necesita conocimientos que pertenecen tanto al dominio del espacio como de la geometría y no son simples”* (pág. 255).

El desarrollo de las fórmulas del área mediante composición y descomposición de figuras (equivalencia) en este nivel no tiene una fundamentación respecto al porque es posible realizar dichos procedimientos. Tal como se desprende de Chamorro (2006) el conocimiento respecto a la equivalencia de superficies requiere de un tipo de enseñanza específica y no puede dejarse en manos de los estudiantes. Existen muchos contenidos que se encuentran implícitos en poder reconocer la equivalencia de superficies y que son importantes, por lo que este concepto debería constituir un objeto a enseñar.

Debido a esto, se realiza una revisión del contenido trabajado en el nivel de 5° año de enseñanza básica donde se trabaja la el cálculo de áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios.

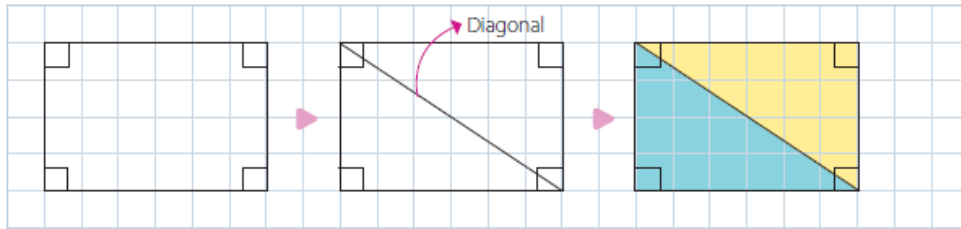
La finalidad de esta revisión radica en poder esclarecer la presencia del trabajo respecto a la equivalencia de superficie para el posterior desarrollo de las fórmulas para el cálculo del área de las figuras mencionadas.

En este nivel, el objetivo al presentar estos procedimientos es el de “Deducir una expresión matemática para el cálculo del área de un triángulo”.

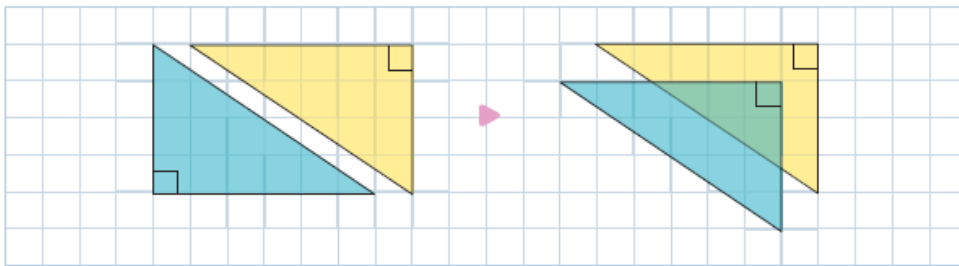
## Aprendo

**Objetivo:** Deducir una expresión matemática para el cálculo del área de un triángulo.

► Dibuja un rectángulo en una cuadrícula y traza una de sus diagonales. Luego, pinta de diferente color los dos triángulos formados en él.



Recorta los triángulos y pon uno sobre el otro para verificar que coinciden exactamente.



El área de cada triángulo obtenido será la mitad del área del rectángulo original. Es decir, si  $l$  representa el largo del rectángulo y  $b$  su ancho, tienes lo siguiente:

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{A_{\text{Rectángulo}}}{2} = \frac{l \cdot b}{2}$$

Puedes llamar base ( $b$ ) a cualquiera de los lados del triángulo. La distancia perpendicular de la base al vértice opuesto del triángulo es la altura ( $h$ ). Entonces, la expresión que permite calcular el **área ( $A$ ) de un triángulo** es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

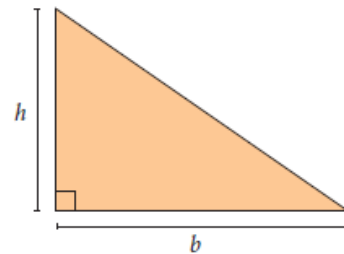


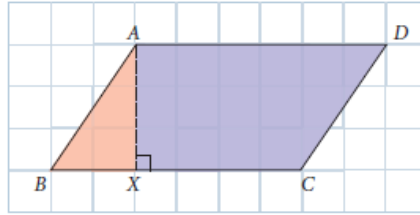
Fig. 10: Texto del estudiante 5° Básico: Dedución fórmula área de un triángulo, p. 146.

En el texto del estudiante se evidencia un procedimiento casi idéntico al realizado en el texto de 7° año de Enseñanza Básica. Se utiliza el procedimiento de recorte y superposición para evidenciar la relación entre el área de un rectángulo y la del triángulo junto con el trabajo con la cuadrícula para facilitar la construcción de las figuras.

## Aprendo

**Objetivo:** Deducir una expresión matemática para el cálculo del área de un paralelogramo.

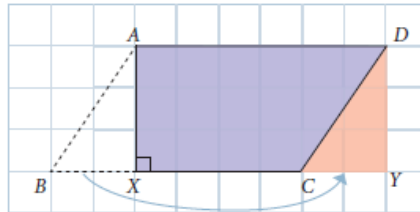
► Dibuja el paralelogramo  $ABCD$ , de base  $\overline{BC}$  y altura  $\overline{AX}$ .



### Atención

Los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos.

Recorta el triángulo  $ABX$  y lo trasladas de modo que  $\overline{AB}$  se junte con  $\overline{DC}$  y se forme el rectángulo  $AXYD$ .



El área del paralelogramo  $ABCD$  es igual al área del rectángulo  $AXYD$ . La base  $\overline{XY}$  del rectángulo tiene la misma longitud que la base  $\overline{BC}$  del paralelogramo. El ancho  $\overline{AX}$  del rectángulo coincide con la altura del paralelogramo. Por lo tanto, para calcular el área ( $A$ ) puedes multiplicar la medida de la base por la medida de la altura.

Puedes llamar base ( $b$ ) a cualquiera de los lados del paralelogramo. La distancia perpendicular de la base al vértice opuesto del paralelogramo es la altura ( $h$ ).

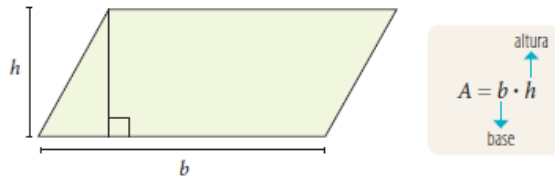


Fig. 11: Texto del estudiante 5° Básico: Dedución fórmula área de un paralelogramo, p. 150.

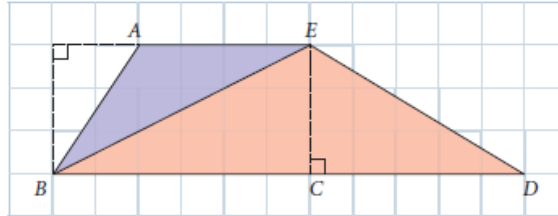
Se aprecia claramente que el procedimiento para deducir la fórmula que permite calcular el área del paralelogramo es exactamente el mismo que en el nivel de 7° año de Enseñanza Básica donde se busca “deducir” la fórmula.

Se evidencia que no existe una clara lectura de lo que se espera lograr utilizando el mismo procedimiento para dos objetivos distintos en ambos niveles.

## Aprendo

**Objetivo:** Deducir una expresión matemática para el cálculo del área de un trapecio.

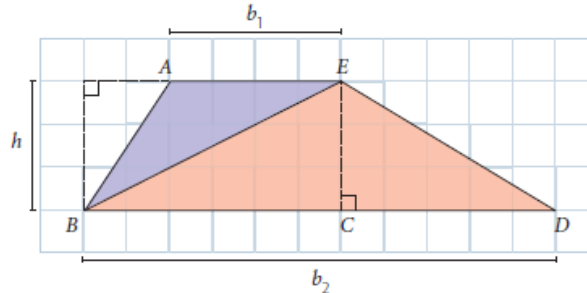
► En el trapecio  $ABDE$  sus bases son  $\overline{AE}$  y  $\overline{BD}$ , y su altura es  $\overline{EC}$ .



La diagonal  $\overline{BE}$  divide el trapecio en dos triángulos de igual altura. Por lo tanto, el área del trapecio la puedes calcular como:

$$A_{\text{trapecio}} = A_{\triangle} + A_{\triangle}$$

Los lados paralelos de un trapecio son las bases. Por lo general, se denominan  $b_1$  y  $b_2$ . La distancia perpendicular entre las bases es la altura del trapecio y la puedes llamar  $h$ .



Entonces, el área del trapecio la puedes expresar como:

$$A_{\text{trapecio}} = A_{\triangle} + A_{\triangle} = \frac{b_1 \cdot h}{2} + \frac{b_2 \cdot h}{2} = \frac{h \cdot (b_1 + b_2)}{2}$$

Fig. 12: Texto del estudiante 5° Básico: Dedución fórmula área de un trapecio, p. 151.

En este caso, se aprecia la deducción de la fórmula del trapecio utilizando como estrategia la división de la figura en dos conocidas conservando el área de la figura original (equivalencia), concepto que se encuentra implícito, pero no es declarada.

Al igual que en el nivel de 7° año de Enseñanza Básica, se utilizan procedimientos y estrategias que contienen muchos otros conceptos de manera implícita y que no son tratados, lo que no permite un desarrollo consistente de las fórmulas para el cálculo de áreas.

De lo que se desprende de Marmolejo y González 2014 el trabajo con la conservación de área se ha declarado como paso preliminar para comprender el concepto de área. El corte, traslación, rotación de superficies o reorganización de las partes de una figura generando una superficie equivalente promueven la conservación de área. De todas maneras, esto no se profundiza en el nivel.

## 1.1 Formulación del problema y pregunta de investigación

Tal como se presentó en los antecedentes, el Programa de Estudio, así como el Texto del Estudiante, pretenden desarrollar las fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios yendo de manera mecánica desde una situación problema hasta la fórmula, no dan espacio al desarrollo del concepto de equivalencia de superficies, buscando solo llegar a aplicar la fórmula y obtener un resultado. La presencia del término equivalencia o equivalente se encuentra remitido solo al ámbito numérico.

El desarrollo de las fórmulas para el cálculo del área de triángulos, paralelogramos y trapecios (declarado en el objetivo de aprendizaje) está enfocado netamente en un procedimiento mecánico para justificar la necesidad de la fórmula. Tal como plantea Chamorro (2006) *“La algoritmización de procedimientos matemáticos generan un sentido de transacción entre lo que se enseña y el saber a saber”*.

Olmo *et.al.* (1989; parafraseado por Marmolejo y González (2014)) afirmando que generalmente se asume que los estudiantes son capaces de descubrir por si mismos el concepto de área yendo directamente a la medida se está restringiendo la atención netamente en la parte aritmética dejando de lado su naturaleza.

La enseñanza de magnitudes como el área y su medida requiere de conceptos y procedimientos como la conservación de magnitudes, seleccionar unidades de medida, entre otros aspectos (Zapata. pág.2).

En función a esto, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

*¿Qué conocimiento especializado debe movilizar el profesor de matemática para lograr el desarrollo de las fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios?*

Se espera responder a esta interrogante planteando el siguiente objetivo general:

## 1.2 Objetivo General

Caracterizar conocimiento especializado del Profesor de Matemática para propiciar el desarrollo de las fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios. En otras palabras, lo que se busca es levantar las categorías del MTSK que emergen del discurso de los participantes de la investigación con la finalidad de determinar el conocimiento que poseen para lograr desarrollar las fórmulas para el cálculo de áreas.

Para el logro del objetivo general, se elaboran los siguientes objetivos específicos:

### 1.3 Objetivos específicos

- Identificar los conceptos implícitos y explícitos para el desarrollo de las fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios por parte de los docentes.
- Describir conocimiento movilizado por profesores para el desarrollo y aplicación de las fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios.
- Determinar conocimiento especializado del Profesor de Matemática para un logro adecuado del desarrollo de las fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios.

### 1.4 Objeto Matemático

#### *1.4.1 Ideas del contenido matemático desde su epistemología*

De lo que se desprende de Arceo (1999), se señala que el origen de la geometría radica en la necesidad de resolver problemas de la vida cotidiana. Los historiadores comentan que esta necesidad recae en problemas prácticos como la construcción o la división de terrenos. El poder resolver este tipo de problemas llevó a la necesidad de estudiar las propiedades relacionadas con superficies, así como las formas en que estas podrían medirse.

González (2016) comenta que las primeras apariciones del cálculo de áreas de superficies se encuentran presentes en el papiro de Moscú.

El Papiro de Rhind, muestra fórmulas para determinar áreas de diversos polígonos utilizando la subdivisión de estos en triángulos, puesto que el procedimiento para calcular áreas en ellos, ya se encontraba demostrada. Este procedimiento es similar (por no decir el mismo) en que, para determinar el área de una superficie desconocida, se dividen en superficies conocidas de las cuales se sabe determinar la medida de su área.

Este procedimiento fomentaba una conversión de figuras complejas a otras más simples o “conocidas” para poder efectuar dichos cálculos. Este paso se considera fundamental para la demostración formal, utilizada hasta el día de hoy.

Arceo (1999) indica “Por otra parte, es frecuente escuchar que nuestro medio está constituido por infinidad de figuras y cuerpos en los que pueden identificarse formas geométricas, y puesto que el niño está rodeado de ellos es muy fácil aprender la geometría en la escuela. Sin embargo, en la enseñanza, nos hemos olvidado de la

manera como ésta surgió. Las formas geométricas no están presentes en la realidad sin más, sino que son producto de una abstracción y para que el niño pueda realizar estas abstracciones hay un largo camino que recorrer” (p. 25).

#### 1.4.2 Estatus actual del objeto matemático

De acuerdo a la revisión de la literatura existente, las relaciones de equivalencia corresponden a un objeto matemático estudiado a lo largo del tiempo. En función de esto utilizaremos lo expuesto Chamorro y Belmonte respecto a los aspectos disciplinares presentes en la equivalencia de superficies. Los autores indican los siguientes aspectos relevantes a mencionar.

Para formalizar el concepto de área partimos de la equivalencia de polígonos. Para ello vamos a dar unas definiciones.

Llamaremos *descomposición de un polígono P* en polígonos  $P_1, P_2, \dots, P_n$  y escribiremos  $P = P_1 \oplus \dots \oplus P_n$ , si se verifica que  $P = P_1 \cup \dots \cup P_n$  y cada  $P_1, \dots, P_n$  son no solapados con los restantes (no existe ningún triángulo contenido en la intersección).

*Equivalencia.* El polígono P es equivalente al Q ( $P = Q$ ) si admiten descomposiciones en polígonos convexos.

$$P = P_1 \oplus \dots \oplus P_n ; Q = Q_1 \oplus \dots \oplus Q_m$$

Que verifiquen que  $m = n$  y que  $P_i = Q_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

La idea de esta definición es que, si cortamos de cierto modo la figura P en un número finito de partes, con ellas podemos componer la figura Q.

Algunos autores llaman a esta propiedad equicomposición, y dicen que las figuras P y Q son equicompuestas.

Esta condición equivale a que dos polígonos son equivalentes si adjuntándoles a ambos un mismo polígono, no solapado con ellos, obtenemos figuras congruentes (esta propiedad se conoce como equiadición).

La equivalencia de polígonos es una relación de equivalencia, a cada clase de equivalencia se le llama polígono general. Los notaremos por  $p, q, \dots$

Dados dos polígonos generales, p y q, existen *polígonos consecutivos*, P y Q, tales que  $[P] = p$  y  $[Q] = q$ , lo cual permite definir la suma de dos polígonos generales

$$p + q = [P] + [Q] = [P \cup Q]$$

## Capítulo 2 – Marco de referencia

A grandes rasgos, este estudio busca levantar aspectos relevantes que los docentes de Matemática debieran manejar al momento de trabajar con el programa de estudio de 7° año de Enseñanza Básica, en particular con el OA13: Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios. Necesarios para la enseñanza, tales aspectos no corresponden solamente al ámbito disciplinar, sino también a lo que respecta a la didáctica del contenido. Con base en lo anterior, este estudio toma como utiliza del modelo conocido como “Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas”, de ahora en adelante MTSK (*Mathematics Teacher’s Specialized Knowledge*). Desarrollado en la Universidad de Huelva, el modelo MTSK es de carácter analítico – descriptivo y, como sintetiza Yáñez (2016), está orientado al análisis desde un punto de vista integral el dominio disciplinar del docente hasta el hasta la didáctica específica que requiere.

La construcción del MTSK es propicia para poder interpretar el conocimiento que posee el profesor de matemática de forma especializada de manera integral, considerando los aspectos de la propia matemática, así como aquellos referentes al dominio didáctico de la misma, considerando también lo que respecta a las creencias y concepciones propias del ejercicio de la docencia en el área (Escudero, et al. 2015). Aquí se pone en manifiesto un tema no menor, asociado con las competencias que posee el docente al momento de enseñar un contenido. En esta investigación en particular, asociada al trabajo con áreas, en la cual de manera general se remite a una repetición sin sentido para el docente de la secuencia de contenidos y una reiteración de algoritmos memorizados para la resolución de problemas descontextualizados para el caso de los estudiantes que quieren aprender dicho contenido.

Como plantea Montes (2015, pp. 34-35)

La idea fundamental que subyace a los cambios, reestructuraciones, y redefiniciones realizadas es la de que un profesor de matemáticas, para llevar a cabo una buena práctica, necesita conocer las matemáticas de diferentes formas, así como las diferentes interacciones que puedan tener tanto los alumnos como él mismo con la propia matemática durante el desarrollo de una clase.

El MTSK está formado por dos grandes dominios: el primero, referente al conocimiento matemático (*Mathematical Knowledge*, de ahora en adelante MK) y, segundo, el conocimiento didáctico del contenido (*Pedagogical Content Knowledge*, visto desde ahora como PCK). De acuerdo a Yáñez (2016), el subdominio MK está centrado en el análisis del conocimiento disciplinar que posee el docente, mientras que el subdominio PCK, relacionado al ámbito de la enseñanza-aprendizaje, alude al conocimiento didáctico del contenido. Cabe añadir, a su vez, que cada uno de

estos dos dominios está compuesto por tres subdominios, lo que queda expresado en la figura 13.

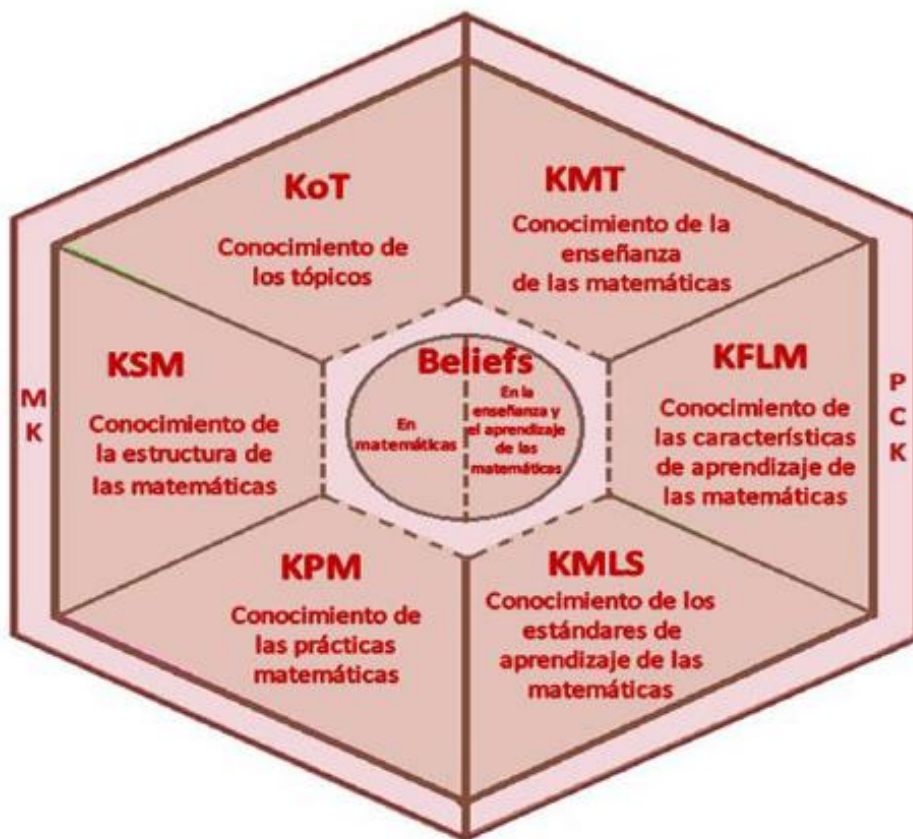


Fig. 13: *Mathematics teacher's specialised knowledge*. Carrillo (2014)

A continuación, se presenta una síntesis de los subdominios del modelo del MTSK. Se dará inicio con aquellos que corresponden al conocimiento matemático.

### 2.1 Conocimiento Matemático (MK): Subdominios

Según plantea Yañez (2016), uno "(...) de los elementos de carácter fundamental al momento de enseñar es el conocimiento del docente sobre la disciplina que enseña". Dentro de este dominio se encuentra y aprecia de lo expuesto por Montes (2015), a decir, un primer subdominio a considerar desde la mirada de la MTSK es la relacionada al "Conocimiento de los Tópicos" (KoT en su sigla en inglés).

### 2.1.1 Conocimiento de los tópicos (KoT)

“Saber matemáticas para enseñar no implica solamente saber matemáticas en el sentido de saber reproducir las matemáticas que se conocen, sino que, desde nuestra perspectiva, hay que saber hacer matemáticas. Es la diferencia entre construir el cuerpo de conocimiento por reproducción de razonamientos conocidos que ir un paso más allá, y saber cómo y por qué esos razonamientos son válidos, y usarlos en los contextos que se usan es adecuado” (Montes, 2015, p. 41).

El subdominio KoT corresponde a los contenidos que provienen de la diferenciación tradicional existente en matemática: números, álgebra geometría, medida, análisis de datos y probabilidad (Escudero *et al.*, 2015). No obstante, este conocimiento incluye a la matemática escolar. De esta manera, este subdominio corresponde a lo que el docente de matemática conoce respecto a los temas que enseñará suponiendo que sabe la fundamentación de los contenidos matemáticos (Carrillo *et al.*, 2016). Para este subdominio, correspondiente al conocimiento de los temas, se consideran: los significados que se relacionan con el contenido, la fenomenología, que da cuenta de su relación con su origen o, por otra parte, aplicaciones, ya sea en la matemática misma u otras áreas. Las definiciones, que corresponden al conjunto de propiedades que permiten definir un objeto (Yáñez, 2016), de las propiedades y su respectiva fundamentación, así como las representaciones del contenido y los procedimientos (Carrillo *et al.*, 2016).

Respecto a este subdominio, se espera que el profesor demuestre el conocimiento de los temas al momento de realizar las justificaciones respectivas para la construcción del concepto de área, utilizando propiedades como disección, entre otras.

### 2.1.2 Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)

El KSM hace referencia a las relaciones que establece el docente entre contenidos matemáticos diferentes, siendo éstos relativos a distintos niveles educativos, así como del mismo nivel. En este ámbito se consideran aquellas conexiones interconceptuales entre contenidos, así como otras de carácter temporal (Escudero, *et al.*, 2015). Siguiendo a Yáñez (2016), el “(...) modelo propone cuatro categorías para analizar el conocimiento que corresponde al profesor de matemáticas sobre estas conexiones, estas son: Conexiones de Complejización, Conexiones de Simplificación, Conexiones de Contenidos Transversales, Conexiones Auxiliares” (p. 16).

En este apartado, la relación con la investigación se centra en que el profesor posea conocimiento respecto a estrategias para simplificar o complejizar el contenido relativo al área para propiciar su comprensión. De la misma manera presentar aquellos conceptos que se relacionan de manera transversal al momento de trabajar con el concepto de área.

### 2.1.3 Conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM)

Este subdominio alude al conocimiento que debe poseer el docente de matemática respecto a cómo son las reglas de sintaxis de la disciplina, junto con el saber acerca del cómo se genera conocimiento matemático. El KPM comprende: saber definir, hacer la diferenciación respectiva entre una demostración, una prueba, o cuando se realiza una comprobación.

“Hemos de aclarar que la práctica a la que se refiere este subdominio es la práctica matemática, no la práctica de la enseñanza de la matemática; y las formas de proceder se refieren a las formas de proceder en matemáticas (conocimiento de heurísticos para resolver problemas, conocimiento de las situaciones que requieren de un uso de pensamiento inductivo o de pensamiento deductivo), y no a saber utilizar los procedimientos con objetos matemáticos (lo cual está contemplado en el conocimiento del tema)” (Carrillo *et al.*, 2016, p. 212).

Finalmente, la relación de este subdominio con la investigación, se refiere a que el profesor pueda mostrar conocimiento al momento de desarrollar las fórmulas para el cálculo del área en triángulos, paralelogramos y trapecios.

## 2.2 Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK): Subdominios

Este dominio corresponde al propio de la labor de enseñanza del profesor, en el cual se encuentran 3 subdominios donde el contenido condiciona la enseñanza. Tales subdominios corresponden a: que el docente conozca cómo enseñar un contenido (KMT), sepa cómo se aprende dicho contenido (KFLM) y, finalmente, conocer el curriculum donde se encuentra presente dicho contenido, es decir, conocer de manera general cual es el objetivo a lograr.

### 2.2.1 Conocimiento de Enseñanza de las Matemáticas (KMT)

El subdominio denominado “Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática” (KMT), tiene que ver con la forma de presentar un contenido, sus recursos, materiales, potencial y el uso de adecuados ejemplos para los distintos contenidos con la intención de lograr aprendizaje por parte de los estudiantes.

En este dominio existen tres categorías (Yáñez, 2016): en primer lugar, las teorías personales o institucionalizadas de enseñanza, relativas al conocimiento que puede tener un docente respecto a estrategias didácticas, y uso de ciertas actividades; segundo, los recursos materiales y virtuales, relacionados con saber utilizar diversas herramientas para la enseñanza, considerando los beneficios y dificultades de su uso; y, finalmente, las actividades, tareas, ejemplos, y ayudas, las que se relacionan con el conocimiento del docente para saber en qué momento apoyar, entregar ejemplos, entre otras, con la finalidad de potenciar la clase.

La relación de este subdominio con la investigación, o lo que se espera evidenciar, es que el profesor manifieste tener conocimiento de como enseñar de manera adecuada, procurando la comprensión de sus estudiantes, el desarrollo de la fórmula del área, así como escoger buenas actividades y ejemplos que propicien esta apropiación del objeto.

### *2.2.2 Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)*

Conforme lo expuesto por Pizarro (2015), este subdominio pone en foco la mirada al contenido matemático desde la perspectiva del aprendizaje sin poner la atención en el estudiante en sí mismo, sino más bien en el cómo aprende. Según tal premisa, se espera que el docente sea capaz de anticiparse respecto al cómo el estudiante interactuará con el contenido, que aspectos podrían ser considerados como fortalezas o dificultades en el proceso de aprendizaje o qué concepciones podrían tener respecto al contenido que pudiesen influir de cierta manera en el aprendizaje.

Este subdominio posee cuatro categorías: la primera, corresponde a las formas de aprendizaje del estudiante; en segundo lugar, fortalezas y dificultades asociadas al proceso de aprendizaje; en tercer lugar, a las formas en que los estudiantes interactúan con el contenido; y, por último, a las concepciones de los estudiantes sobre matemática. A continuación, se explicarán brevemente cada una de estas categorías.

#### *2.2.2.1 Formas de aprendizaje*

Corresponde al conocimiento de cómo se estructura o cuales son las teorías personales o institucionales sobre el aprendizaje de la matemática, tanto de manera general como particular (Yáñez, 2016).

#### *2.2.2.2 Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje*

En este ámbito, el enfoque está centrado en el conocimiento de los errores, obstáculos/ dificultades que se encuentran asociados a la matemática en general o también, a temas específicos.

#### *2.2.2.3 Formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático.*

Esta categoría corresponde al conocimiento que debe tener el docente respecto a las estrategias o procesos que los estudiantes utilizan en el área, los cuáles pueden ser típicos o no. Por otra parte, incorpora también al lenguaje o vocabulario que emplean los estudiantes para resolver cierta tarea.

#### *2.2.2.4 Concepciones de los estudiantes sobre matemáticas.*

Esta última categoría corresponde al conocimiento del docente respecto a los intereses y expectativas que tienen los estudiantes por la matemática.

En este subdominio, relacionado con la investigación, se espera que el profesor posea conocimiento respecto a los errores frecuentes al trabajar con el concepto de área, tales como confundirla con el perímetro, entre otros.

**2.2.3 Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)**  
Este subdominio corresponde al de los contenidos propuestos según las normativas curriculares para conocer lo que se espera que los estudiantes aprendan en las distintas etapas de su trayecto por la educación escolar. Dentro de este subdominio hay tres categorías: los contenidos matemáticos que se requieren enseñar, el conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado, y la secuenciación de diversos temas.

*2.2.3.1 Contenidos Matemáticos que se requieren para Enseñar*

Es el conocimiento del profesor respecto a los contenidos que debe enseñar en determinado nivel (curso), el cual puede ser obtenido a través de los documentos oficiales entregados por MINEDUC, o por medio de la elaboración de programas de estudio propios.

*2.2.3.2 Conocimiento del Nivel de Desarrollo Conceptual y Procedimental Esperado.*

Es el conocimiento referente al contenido en el respectivo momento del nivel escolar. Dicho de otra forma, consiste en conocer hasta qué punto debe llegar el contenido.

*2.2.3.3 Secuenciación de diversos Temas.*

Este conocimiento atiende a la interrogante sobre cuáles son los conocimientos previos necesarios para trabajar algún contenido, o aquellos posteriores al logro de cierto tema en particular.

## Capítulo 3 – Marco Metodológico

Este capítulo se centra en el diseño metodológico del estudio. Los componentes de este capítulo son el enfoque metodológico, la población de estudio, el diseño del instrumento y la recolección de datos.

### 3.1 Enfoque metodológico

A grandes rasgos, esta investigación consiste en un estudio de casos de tipo cualitativo-interpretativo. Como método de investigación para el análisis de la realidad, el estudio de casos ha tenido y tiene una gran importancia en el desarrollo de las ciencias sociales. La historia está llena de “casos” relevantes o “rupturas conceptuales” que han surgido del estudio de casos (Latorre et al., 1996).

Como expone Latorre *et al.* (1996), el estudio de casos constituye la manera más pertinente para las investigaciones de tipo cualitativa. El real potencial se encuentra enmarcado en la capacidad de poder generar: hipótesis, descubrimientos entre otros independiente del centro de interés (sea un individuo, institución, evento, entre otros). La investigación cualitativa tiene una orientación hacia estudiar los significados de las acciones de la vida social y humana. Este tipo de investigación utiliza la metodología interpretativa. Por otra parte, el paradigma interpretativo, también conocido como *cualitativo, fenomenológico, naturalista, humanista o etnográfico* engloba un gran número de corrientes humanistas-interpretativas con la finalidad de estudiar los significados de acciones humanas, así como la vida social.

Algunas características del paradigma interpretativo son:

- Esta perspectiva pretende sustituir las nociones científicas de explicación, predicción y control del paradigma positivista por las nociones de comprensión, significado y acción (Latorre *et al.*, 1996, p. 42).
- Se interioriza en los sujetos respecto a como interpretan situaciones, que significado pueden darle. Busca ser objetivo.
- Se constituye como alternativa a la visión positivista. Pone énfasis en comprender e interpretar la realidad educativa desde la comprensión e interpretación de la realidad educativa desde las creencias, intenciones, motivaciones entre otros aspectos no observables o susceptibles a experimentación de las personas involucradas en este entorno.

Esta investigación se enmarca dentro de una investigación exploratoria de tipo descriptiva ya que se busca poder obtener información con un primer acercamiento para apoyar futuras investigaciones en el área.

### 3.2 Población de estudio

El enfoque de la investigación está centrado en la formación continua del profesorado, ya que, desde la formación inicial de los mismos, no se entregan las herramientas suficientes para poder desempeñar de la manera idónea su labor, y terminan aprendiendo a enseñar producto de la práctica misma. Para objetos de la investigación, el grupo al que se apunta abordar son:

- Ser profesor(a) de Educación Básica, mención Matemática e impartir clases en el nivel de 7° año de Enseñanza Básica.
- Ser profesor(a) de Educación Media, mención Matemática.
- Cualquier profesional con un área relacionada con Matemática con especialización docente mediante algún programa de Pedagogía para Profesionales.

### 3.3 Diseño del instrumento

Considerando el tipo de estudio, se diseñó una entrevista semiestructurada de pregunta y respuesta abierta, la cual constó de dos partes. La primera parte consideró un total de 9 preguntas generales, relacionadas con concepciones, puntos de vista, entre otros aspectos respecto a dos instrumentos: el programa de estudio de 7° año de Enseñanza Básica y el texto del estudiante, ambos insumos entregados por MINEDUC. La finalidad de estas preguntas es la de recoger información respecto a la equivalencia de superficies para el desarrollo de las fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios en el discurso del docente. La intención de no estructurar completamente la encuesta es con el fin de no forzar la utilización del concepto de equivalencia. A grandes rasgos, esta primera parte se relaciona de manera más directa con los subdominios del Conocimiento Matemático (MK) del MTSK.

La segunda parte de la entrevista, consta de la elaboración de una secuencia de clases (planificación) por parte del docente, quien debía escoger uno de las 3 figuras geométricas presentes en este Objetivo de Aprendizaje.

El formato de la planificación del docente, tiene dos aspectos involucrados. El primero corresponde a la Planificación a la Inversa (Understanding by Design) de Wiggins y Mc Tighe, el cual cambia la forma en que se estructura una clase. Desde esta perspectiva, el profesor debería preguntarse ¿qué espero que logren mis estudiantes? ¿Cómo evidenciaré el logro de mis estudiantes? y ¿cuáles son las actividades que deben realizar para lograr ese objetivo?

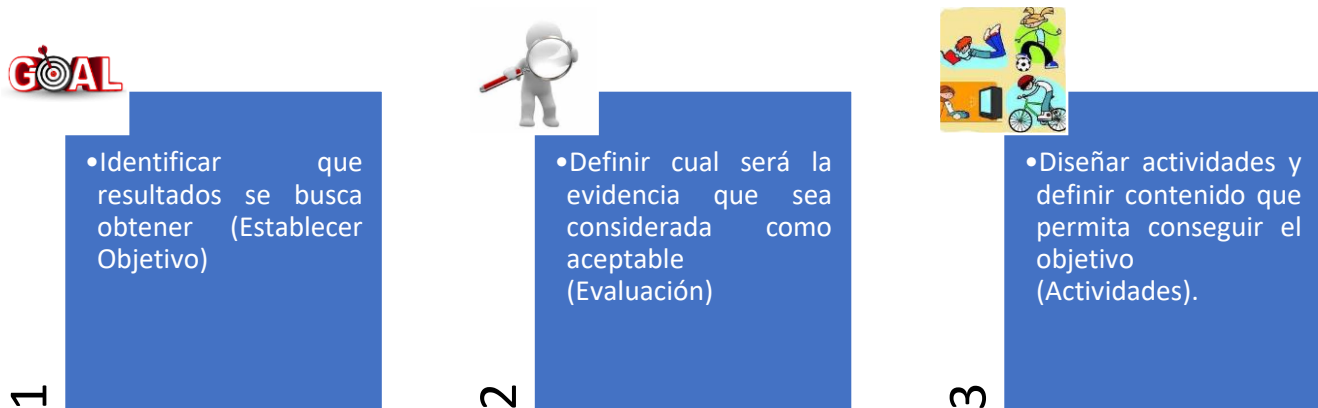


Fig. 14: Adaptación de Wiggins y Mc Tighe (1998), Understanding by

El segundo aspecto que se encuentra presente, es el modelo de Planificación en Cinco Pasos de Bambrick-Santoyo que considera dentro de estas instancias la incorporación del Understanding by Design.

Los 5 momentos de la clase contienen preguntas orientadoras con la finalidad de preparar de mejor manera la preparación de cada momento de la planificación de clase:

- Apertura.
- Nuevo contenido.
- Modelaje.
- Práctica independiente.
- Cierre.

El detalle de cada uno de estos momentos se presentará en el apartado exclusivo para la muestra del instrumento.

Esta segunda etapa de la entrevista, se relaciona de manera más directa con los subdominios del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK).

Esta entrevista tiene como base los objetivos específicos entregados en los antecedentes:

- OE 1: Identificar los conceptos implícitos y explícitos para el desarrollo de las fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios por parte de los docentes.

- OE 2: Describir conocimiento movilizado por profesores para el desarrollo y aplicación de las fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios.

OE 3: Determinar conocimiento especializado del Profesor de Matemática para un logro adecuado del desarrollo de las fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios

A continuación, se presentan las preguntas del cuestionario entregado a los docentes. El instrumento, tal como lo recibieron los docentes al momento de la entrevista, se encuentra en los anexos.

### 3.4 Detalle de las preguntas del instrumento.

La forma en que las preguntas confeccionadas para el instrumento y los objetivos específicos se relacionan de la siguiente manera:

	OE1: Identificar los conceptos implícitos y explícitos para el desarrollo de las fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios por parte de los docentes.	OE2: Describir conocimiento movilizado por profesores para el desarrollo y aplicación de las fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios.	OE3: Determinar conocimiento especializado del Profesor de Matemática para un logro adecuado del desarrollo de las fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios.
P1			x
P2	x		
P3	x	x	x
P4	x		x
P5		x	
P6		x	x
P7	x	x	x
P8	x	x	x
P9	x	x	x

Tabla 1: Relación entre preguntas y objetivos.

#### 3.4.1 Pregunta 1

Se presentan a los docentes los aprendizajes esperados para el eje de Geometría en 7° año de Enseñanza Básica.

Respecto a este contenido se plantea la siguiente interrogante:

**En torno a los aprendizajes esperados para el eje de Geometría, ¿Consideras necesaria hacer alguna observación? Para el caso de sí o no, me gustaría que argumentaras tu respuesta.**

#### 3.4.2 Pregunta 2

Se presentan a los docentes las Orientaciones Didácticas entregadas por MINEDUC para el nivel de 7° año de Enseñanza Básica.

**En relación a las orientaciones didácticas que propone el MINEDUC, ¿harías alguna observación? ¿Algo que consideres importante? ¿Algo que esté o no presente?**

#### 3.4.3 Pregunta 3

Se presentan los objetivos de aprendizaje para el Eje de Geometría y se hace énfasis en el OA 13: Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios.

Respecto la información entregada se plantea la interrogante:

**En relación al OA a trabajar, ¿qué entiendes tú por “Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios?”**

#### 3.4.4 Pregunta 4

Se presentan los conocimientos previos definidos por MINEDUC respecto al eje de Geometría para el nivel de 7° año de Enseñanza Básica.

**En relación a esta propuesta: ¿Harías alguna observación en torno a estos conocimientos previos? En caso de ser así, ¿cuál sería esa observación?**

#### 3.4.5 Pregunta 5

Se presentan los indicadores de evaluación para el OA 13: Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios.

Respecto a estos se plantea:

**Al igual que en el apartado anterior: ¿Harías alguna observación en torno a estos indicadores de evaluación para el logro del OA? En caso de ser así, fundamenta el porqué de tu elección.**

### 3.4.6 Pregunta 6

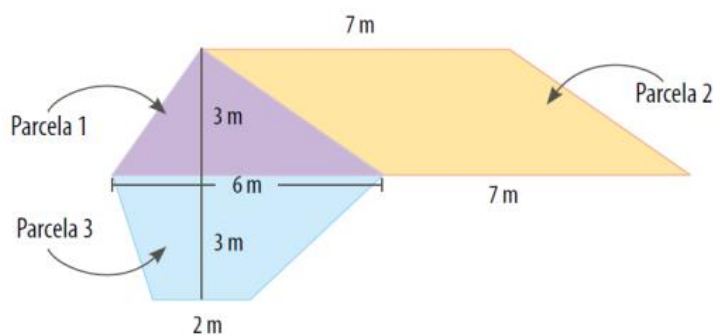
A contar de esta pregunta se moviliza la aplicación de la entrevista a una lectura del texto del estudiante.

Al inicio del trabajo con el OA 13, se presenta la siguiente situación problema para el estudiante.

## ¿Cómo calcular el área de algunos polígonos?

Josefa necesita organizar el cultivo de un nuevo terreno, para ello debe calcular el **área** total de este.

Ha dibujado el siguiente esquema del terreno y realizado las mediciones necesarias.



Frente a esto se plantea la interrogante.

**¿Qué observaciones considerarías tú en la situación planteada, siendo esta la inicial para el logro de este OA?**

**Esta pregunta apunta a que si tu consideras pertinente la situación presentada para dar inicio al trabajo con el cálculo de áreas.**

### 3.4.7 Pregunta 7

En la siguiente página, se presenta la propuesta para dar respuesta a la situación planteada. Parte con una situación acerca de cómo se calcula el área de un triángulo.

#### Palabras clave

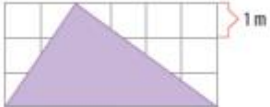
Área  
Base  
Altura  
Área de triángulo  
Área de paralelogramo  
Área de trapecio

¿Qué observaciones incorporarías en las palabras clave propuestas?

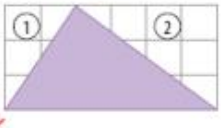
**Situación 1** Calcular el área de un triángulo

Josefa calcula primero el área de la parcela 1.

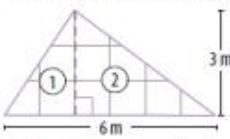
**Paso 1** Inscribe el triángulo en un rectángulo con la medida que muestra la imagen de la parcela, teniendo en cuenta que la **base** del triángulo coincide con la base del rectángulo y la **altura** del triángulo es igual al ancho del rectángulo.



**Paso 2** Recorta el triángulo central. El papel sobrante tendrá la forma de dos triángulos rectángulos.



**Paso 3** Superpon los triángulos rectángulos 1 y 2 en el central (morado).



Observa que al unir los dos triángulos se forma otro con la misma altura y la misma base, por lo tanto tiene la misma superficie que el triángulo inicial.

Así, el rectángulo se puede descomponer en dos triángulos que tienen la misma superficie; entonces la superficie del rectángulo es el doble de la superficie del triángulo.

**Paso 4** Calcula el **área de un triángulo (A)** que equivale a calcular el área de un rectángulo y dividir por 2 este resultado.

$$A = \frac{6 \cdot 3}{2} = \square = \square$$

Luego, el área de la parcela 1 es \_\_\_\_\_ m<sup>2</sup>.

En general, para calcular el área de un triángulo (A), se multiplica la longitud de un lado (b) por la altura correspondiente (h) y el resultado se divide en 2.

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Posterior a presentar esta situación, se plantean las siguientes interrogantes y aclaraciones:

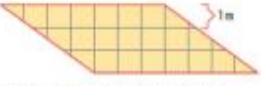
**En relación a esta situación: ¿Qué elementos, conceptos y justificaciones se encuentran presentes en el desarrollo de la fórmula para el cálculo de áreas de triángulos? Indique estos para cada uno de los pasos propuestos.**

En cada uno de los pasos presentados, en caso de considerarlo necesario, realice las modificaciones respectivas a la propuesta dada.

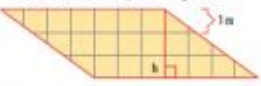
**Situación 2** Calcular el área de un paralelogramo

Luego, Josefa calcula el área de la parcela 2, que tiene forma de paralelogramo.

**Paso 1:** Dibuja un paralelogramo sobre un papel cuadrículado, con las medidas que muestra la imagen de la parcela.

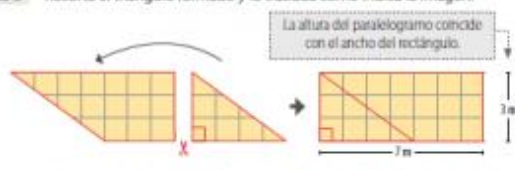


**Paso 2:** Traza desde un vértice la altura del paralelogramo.



**Paso 3:** Recorta el triángulo formado y lo traslada como indica la imagen.

La altura del paralelogramo coincide con el ancho del rectángulo.



Observa que al recortar las figuras y unir las se ha formado un rectángulo.

**Paso 4:** Calcula el área del paralelogramo (A), que equivale a calcular el área de este rectángulo.

$$A = 7 \cdot 3 = \square$$

Luego, el área de la parcela 2 es \_\_\_\_\_ m<sup>2</sup>

En general, para calcular el área de un paralelogramo (A) se multiplica la medida de un lado (b) por la altura correspondiente (h).

$$A = b \cdot h$$

¿Servirá esta fórmula para calcular el área de un rombo?, ¿por qué? Justifica con un ejemplo o contraejemplo.

**Entrevistador: Sólo para recapitular, la intención es desarrollar las fórmulas para el cálculo de áreas, en este caso la del triángulo.**

### 3.4.8 Pregunta 8

Se presenta a continuación una secuencia que permite obtener la fórmula para el cálculo del área de paralelogramos.

**¿Qué elementos, conceptos y justificaciones se encuentran presentes en el desarrollo de la fórmula para el cálculo de áreas de paralelogramos? Indique estos para cada uno de los pasos propuestos. En cada uno de los pasos presentados, en caso de considerarlo necesario, realice las modificaciones respectivas.**

### 3.4.9 Pregunta 9

Se presenta a continuación una secuencia que permite obtener la fórmula para el cálculo del área de trapecios

**Situación 3** Área de un trapecio

Finalmente calculará el área de la parcela 3, la que tiene forma de trapecio.

**Paso 1** Dibuja dos trapecios congruentes de distinto color, teniendo presente que cada cuadrado representa 1 m<sup>2</sup>.

¿Qué diferencia a los trapecios de los paralelogramos?

**Paso 2** Recorta en uno de los trapecios, dos triángulos rectángulos y un rectángulo. Luego, con estas partes y el otro trapecio forma un rectángulo.

Observa que se ha formado un rectángulo, cuyo ancho coincide con la altura del trapecio (3 m) y el largo corresponde a la suma de sus bases, en este caso  $6 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$ .

**Paso 3** Para calcular el área de un trapecio (A), calcula el área del rectángulo que se ha formado y este resultado lo divide en dos, ya que la superficie del rectángulo equivale al doble de la superficie del trapecio.

$$A = \frac{6+2}{2} \cdot 3 = \square$$

Luego, el área de la parcela 3 es \_\_\_\_\_ m<sup>2</sup>.

En general, para calcular el **área de un trapecio (A)**, se suman las medidas de sus bases (B y b) y este resultado se multiplica por la altura del trapecio (h), luego se divide por 2.

$$A = \frac{B+b}{2} \cdot h$$

### 3.5 Secuencia de clases

Con la finalidad de observar aspectos del PCK, se solicita al profesor que elabore una planificación de clase que considere algunas interrogantes. Esta situación se plantea de la siguiente manera:

En virtud de la secuencia de trabajo propuesta en el Texto del Estudiante de Séptimo Año de Enseñanza Básica, lo invitamos a desarrollar una planificación de clase. Esta debe considerar los siguientes momentos, los cuales serán indicados a continuación:

#### 3.5.1 *Apertura:*

¿Cómo comunicará lo que está a punto de suceder? ¿Cómo comunicará el cómo sucederá? ¿Cómo comunicará su importancia? ¿Cómo comunicará las conexiones con las clases previas? ¿Cómo comprometerá a sus estudiantes y captará su interés?

#### 3.5.2 *Nuevo Contenido*

¿Cómo explicará / demostrará todos los conocimientos / habilidades necesarias del objetivo? ¿Qué potenciales malentendidos anticipa? ¿Cómo los mitigará proactivamente? ¿Cómo / cuándo chequeará la comprensión? ¿Cómo enfrentará los malentendidos? ¿Qué estarán haciendo los estudiantes mientras usted explica?

#### 3.5.3 *Modelaje*

¿Cómo practicarán los estudiantes todos los conocimientos / habilidades requeridas del objetivo? ¿Cómo asegurará que los estudiantes tendrán múltiples oportunidades de practicar, con ejercicios que van de fácil a difícil? ¿Cómo / cuándo realizará una representación para revisar la comprensión? ¿Cómo enfrentará los malentendidos?

#### 3.5.4 *Práctica independiente*

¿Cómo demostrarán los estudiantes el dominio independiente de todo el conocimiento y/o habilidades requeridos del objetivo? ¿Cómo dará oportunidades de refuerzo y extensión? ¿Con qué estrategia realizará el monitoreo? (Si la práctica independiente es una guía, adjúntela incluyendo la respuesta ejemplar.)

### 3.6 Recolección de datos

Para la recolección de datos se realizaron nos propusimos buscar docentes que de la especialidad de matemática que cumpliesen las siguientes características:

- Ser profesor(a) de Educación Básica, mención Matemática e impartir clases en el nivel de 7° año de Enseñanza Básica.
- Ser profesor(a) de Educación Media, mención Matemática.
- Cualquier profesional con un área relacionada con Matemática con especialización docente mediante algún programa de Pedagogía para Profesionales.

Ante estas características pudimos contar con la participación de 2 participantes quienes resultaron ser de 2 de los 3 grupos propuestos para el estudio: Una profesora de Educación Básica, mención Matemática y un profesor que obtuvo su grado mediante un programa de Pedagogía para Profesionales.

Ambos profesores forman parte del Colegio Victoria Prieto, ubicado en la comuna de Santiago.

La entrevista para ambos profesores fue realizada bajo las mismas condiciones. Se les entregó la secuencia de enseñanza (adjunta en los anexos de este estudio) de manera impresa.

La aplicación de la entrevista se realizó en dos partes. La primera de ellas corresponde al trabajo con las 9 preguntas iniciales, las cuales fueron grabadas y posteriormente transcritas a este esta investigación. La locación de estas entrevistas fue una cafetería cercana a las inmediaciones del establecimiento.

Esta sugerencia se obtuvo de lo expuesto por Rodríguez G. *et al* (1999) "... recomienda la elección de un lugar tranquilo, libre de interrupciones.

La recolección de los datos relativos a la planificación se hizo mediante escritura a puño y letra de los participantes por lo que su exposición será a través de las imágenes de los escritos elaborados.

Para identificar a ambos participantes en la medida que se presenten las respuestas, serán descritos como profesor y profesora dado que al ser de distinto sexo nos permite diferenciarlos de manera más simple.

El promedio de trabajo con los docentes fue de alrededor de una hora y 30 minutos de manera continuada.

A continuación, se presentan las respuestas 9 preguntas planteadas respecto al Programa de Estudios entregado por MINEDUC, así como el Texto del Estudiante.

La primera parte de las preguntas corresponde a la revisión del Programa de estudio para el nivel de 7° año de Enseñanza Básica, entregado por MINEDUC.

3.6.1 *Pregunta 1.* En torno a los aprendizajes esperados para el eje de Geometría, ¿Consideras necesaria hacer alguna observación? Para el caso de sí o no, me gustaría que argumentaras tu respuesta.

<p>Profesor:</p> <p>Es una observación en cuanto al contenido. No estoy del todo seguro, si es que se hace necesario presentar las razones trigonométricas como tal, porque siento que aún no debiesen tener un manejo algebraico como para manejar sin problemas la función, aunque creo que, en la práctica, la razón trigonométrica debería usarse más como una relación entre los lados, más que la función como tal. Me imagino que apunta a eso, o que en la práctica debiese hacerse así. No me imagino a un Séptimo utilizando la función seno y coseno aplicada a algunos ángulos.</p>	<p>Profesora</p> <p>Yo creo que está bien, porque primero te hablan del rol espacial. Hay una parte de traspasar de figura de 2D a 3D, va a ser necesario. Y hay una parte que vi de uso del plano cartesiano, lo que también me parece adecuado porque en este OA hay mucho de trasladar, reflejar figuras para formar nuevas figuras. Si no sabe reflejar o trasladar no va a poder armar nuevas figuras. Eso es lo que me pude dar cuenta, y habla de polígonos y cuerpos conocidos, considerando la realidad en general de los estudiantes o al menos de los míos, siempre es necesario iniciar recordando una clase de estos polígonos y estos cuerpos que para nosotros son conocidos porque en el fondo los que ellos mas recuerdan son: el triángulo, el rectángulo, el cuadrado, pero aquí usan harto el trapecio y figuras que ellos han ido como olvidando o dejando atrás. Lo que agregaría tal vez, sería el tema de las transformaciones isométricas, pero no con todas, porque por ejemplo la rotación no sirve mucho, tal vez, aunque si tu vas rotando una figura la puedes ir descomponiendo por partes y al ir descomponiendo por partes y el descomponerlas a ellos los ayuda bastante. Y si o si el trasladar, porque así van separando y van juntando figuras y van calculando las áreas por partes.</p>
---	--

3.6.2 *Pregunta 2.* En relación a las orientaciones didácticas que propone el MINEDUC, ¿harías alguna observación? ¿Algo que consideres importante? ¿Algo que esté o no presente?

<p>Profesor:</p> <p>O sea, tiene que ver con más cosas que considero importantes o notables.</p> <p>Por ejemplo, esta frase que dice: que promueva la comprensión de conceptos matemáticos y la no mera repetición y mecanización de algoritmos, eso creo que es algo muy importante desde la orientación, porque eso lleva a no detenerte como en puro contexto. Por ejemplo, yo se calcular el área de triángulos y después se calcular sólo el área de triángulos y nada más. Entonces, creo que como la orientación es a no repetir el algoritmo, es mejor.</p> <p>Un triángulo puede ser encontrado en un rectángulo, o pueden encontrarse figuras intermedias dentro de este cuadrado. Por ejemplo, dentro de un cuadrado hay dos triángulos, entonces, si quiero conocer el área del triángulo supongo que hay un cuadrado y después parto la cantidad de veces que me falta y cosas así, y entonces por eso no solo es importante y ... ya.</p> <p>Esto que, para mí no es del todo claro que los tránsitos siempre sean siempre desde lo concreto a lo simbólico. Creo que a veces, trabajar desde lo simbólico hacia lo concreto también logra buenas conexiones, a pesar de que es mucho más cercano partir de algo concreto, mi pequeña experiencia como que de repente me hace sentir que, partir desde un ejemplo concreto no logra divisar bien el objetivo hacia lo simbólico, como que de eso me da la sensación a veces. Entonces es como una buena sugerencia o una orientación buena, pero también creo</p>	<p>Profesora</p> <p>Lo principal, y estoy totalmente de acuerdo, con que la matemática debe despertar en los estudiantes la curiosidad y la capacidad de elaborar conceptos, porque yo también he intentado, porque en el aula es mas difícil llevarlo a cabo, trabajar desde la experiencia de ellos. Cuando tu trabajas desde la experiencia de ellos se vuelve inmediatamente mas significativo el aprendizaje, porque ellos van ligando estas situaciones a su diario vivir, a su experiencia y lo hace automáticamente mas significativo, porque ellos van adquiriendo este nuevo aprendizaje, con sus experiencias previas, y logran tener como un aprendizaje que ya está más concreto, mas conectado y eso automáticamente les despierta mas el interés y la curiosidad y porque ellos se sienten parte de este proceso. Yo soy muy amiga del tema del aprendizaje significativo, y ahí sí o sí tengo que ligarlo a la experiencia y ahí voy creando un nuevo aprendizaje.</p> <p>Con otra parte que estoy completamente de acuerdo es con el aprender haciendo y desde ahí partir de lo concreto a lo simbólico. Siempre lo concreto al entender, al comprender al concretar, al trabajar con material concreto, también hace que para ellos se vuelva mas cercano y al volverse mas cercano es mucho más fácil que ellos puedan comprender lo que ellos van a trabajar. Una vez que ya dominan bastante la parte concreta, después lo representas de manera pictórica y ellos mismos van concluyendo desde estas representaciones pictóricas, entonces</p>
---	--

<p>que para el otro lado también se pueden conseguir cosas como efectivas, pero no veo como que una u otra sea mejor, si no que siento, como de cierta forma, que limita un poco el campo y creo que transitando en los dos, podría ser bueno, porque al final no es solo lo simbólico, creo que el tránsito en realidad es lo importante de ahí, pero siento que está esta traba de yo sólo tránsito hacia lo simbólico, como estableciendo este paradigma de que al final lo más importante es cuando tu llevas los problemas a fórmulas, o lenguaje matemático, siendo que de repente no es necesario transformar a lenguaje matemático porque el problema en el fondo no lo requiere.</p>	<p>ya uno después formaliza con lo simbólico, que es con un lenguaje más técnico, entonces ya no es tan aislado y comienzan a hacer asociaciones. Estas asociaciones hacen que todo lo que tu intentaste, planificaste, llegue a ser significativo. Ahí va de la mano con el tema de planificar, porque para que tu puedas llevar a cabo todas estas cosas o toda esta intencionalidad que uno tiene para una clase, tiene que haber una planificación.</p> <p>Si no está la planificación, uno comienza a improvisar y no todo va a llevar como uno espera. De partida, el no llegar con un material concreto va a hacer que todo este camino que tu estás tratando de guiar no funcione de la manera correcta, entonces como que de acuerdo a este apartado de Orientaciones Didácticas, desde mi modo de ver, es como el ideal, porque es como una matemática bien constructivista. Ahora, dentro de la sala, como te digo, cuesta llevarla a cabo, porque nosotros tendemos a trabajar de un modo mas conductista, que muchas veces nos impide el trabajo tan concreto, pero, es como la matemática soñada. Yo creo que de aquí hay ciertas cosas que se hacen realidad y otras no.</p>
---	---

*3.6.3 Pregunta 3. En relación al OA a trabajar, ¿qué entiendes tú por “Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios?”*

<p>Profesor:</p> <p>Bueno, por desarrollar yo entiendo, que, en cierta forma, es deducir la fórmula.</p> <p>Yo tengo esta concepción de la palabra desarrollar, pero no es deducir como intuitivamente, sino que es como ver un par de casos y de repente encontrar alguna conexión para poder dar una fórmula y esta podría cambiar con los</p>	<p>Profesora</p> <p>Primero, entiendo que: comprender cada una de estas figuras. Ir desarrollándola para mi va de la mano con ir comprendiendo la figura, cuales son sus componentes, como están formadas, el caso del trapecio ir descomponiéndolo, usar harto la descomposición y ya cuando ellos tengan bien interiorizada, cuando hayan hecho hipótesis de como</p>
--	---

<p>nombres, pero tiene un punto que es como clave, que es que la fórmula no aparece de la nada, sino que previo a un trabajo aparece, por eso siento que se desarrolla, no es como que puf! aparece delante tuyo y la sabes, si no que intentaste hacerlo, encontraste un par de construcciones auxiliares quizá y con estas construcciones auxiliares te diste cuenta de que el patrón siempre se repite, que base por altura medios y el tema de aplicar es una vez que ya tienes la fórmula, empezar a aplicar áreas de distintos triángulos, hasta que ya puedas hacerlo para cualquiera, incluso imaginando ciertas condiciones. Me imagino algo como: considera el paralelogramo que es paralelo, o que una de sus rectas en particular es paralelo este cuadrado o congruente al lado de este cuadrado y después calcula el área, que es como un objeto, que es el mismo, pero que está construido en base a otro, que requiere un mayor esfuerzo mental creo yo.</p>	<p>calcular, recién formalizas al aplicar la fórmula de área, después que ellos la conocen.</p> <p>Desarrollar la fórmula es ir tu encontrándola, como construyéndola, como ahí va del aprender haciendo. Por ejemplo, en el caso del trapecio, tú puedes ir descomponiéndolo en dos triángulos, te encuentras con un rectángulo al medio, entonces, ahí vas asociando con su aprendizaje previo y vas llegando a una conclusión de como desarrollas la fórmula del área del trapecio. O como en el caso del triángulo, por ejemplo, ahí tienes que ir desarrollando como encontrar la altura, porque la vas a necesitar si o si para aplicar la fórmula, entonces como que ahí vas desarrollando como por partes el como llegar al área y después como aplicarla. Así lo entiendo yo.</p>
--	--

3.6.4 *Pregunta 4.* En relación a los conocimientos previos propuestos: ¿Harías alguna observación en torno a estos conocimientos previos? En caso de ser así, ¿cuál sería esa observación?

<p>Profesor:</p> <p>Me parece un poco extraño que hablemos de cubos y paralelepípedos porque son cuerpos, no son planos, entonces el triángulo es un objetivo plano, como que siento que el tránsito da dos pasos. Si bien estas formas se relacionan con el triángulo, porque está en cada una de las caras, eso es cuando tomas el objeto 3D y lo montas sobre un plano o lo proyectas en el plano, entonces ese proceso de proyección siento que le agrega una carga, yo como qué pensaría en áreas de cuadrados y rectángulos, más que en cubos y paralelepípedos. Lo otro me</p>	<p>Profesora</p> <p>Haría en el área de superficie de cubos y paralelepípedos, yo creo que antes yo le agregaría la distinción entre figuras 2D y 3D mas explícitamente, que desde ahí ellos comprendan como está formado un cubo, un paralelepípedo, las áreas de estas figuras 2D para recién llegar al área del cubo y del paralelepípedo.</p> <p>Haría esa distinción, porque antes de tomar un OA así, igual hay que reforzar estos conocimientos previos, que se supone que están adquiridos, pero que muchas veces hay que reforzar, entonces yo ahí haría esta separación.</p>
---	--

<p>parece adecuado. Es solo ese comentario, siento que le agrega una dimensión al tránsito o al tipo de deducción que imagino que se quiere hacer.</p>	<p>En la construcción de triángulos no haría mayor modificación, porque en el fondo sería reforzar. Lo que sí o sí, lo que yo tomaría sería reforzar estos contenidos si es que no fueron vistos en el nivel, como partir con las primeras clases dándole como reforzamiento a estos contenidos y así te vas a asegurar que el aprendizaje que viene después va a ser mas exitoso porque va a ser mas asociado a lo que ellos recién reforzaron. Entonces al ser un aprendizaje que en años anteriores ya estuvo adquirido, tu se los vas a recordar, entonces ahí es mas fácil la asociación con el nuevo aprendizaje que tu quieres lograr.</p>
--	---

Con la finalidad de profundizar en la respuesta, surgió la siguiente pregunta.

*3.6.4.1 Pregunta 4.1.* ¿Alguno que hubiese que agregar o no? ¿Algún otro conocimiento previo para el logro del OA? ¿Algo que deba considerarse como conocimiento previo?

<p>Profesor:</p> <p>No. Creo que no. Me da la impresión que no se necesita nada más.</p>	<p>Profesora</p> <p>Sin observaciones.</p>
--	--

Para cerrar las preguntas respecto a los conocimientos previos, se plantea otra pregunta que no se encontraba previamente establecida.

*3.6.4.2 Pregunta 4.2.* Finalmente, ¿Cómo tú presentarías estos conocimientos previos considerando tu observación? ¿Cuáles serían los conocimientos previos para el logro de este OA?

<p>Profesor:</p> <p>Serían:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Construcción de triángulos.</li> <li>• Área de superficie de un cuadrado y rectángulo.</li> <li>• Traslaciones, reflexiones y rotaciones.</li> </ul>	<p>Profesora</p> <p>Haría bien la distinción entre figuras 2D y 3D como recalando el área de las figuras 2D. Si recalcas como obtener el área de las figuras 2D va a ser más fácil trabajar el área de la superficie de cubos y paralelepípedos, porque ahí puedes usar nuevamente la descomposición. Vas tomando que está</p>
---	--

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ángulos agudos, obtusos, rectos extendidos y completos.</li> <li>• Suma de los ángulos interiores de un triángulo.</li> <li>• Suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero.</li> </ul> <p>De hecho, acá me suena algo más. Como que hablamos de ángulos, pero de figuras que no tienen que ver con el tema del área. Cómo que mi impresión me hizo tirarme muy en contra de este tema de que los objetos sean en 3D, como que mi cabeza visualiza toda esa construcción en 2D y creo que lo que está ahí, salvo el cambio del objeto está bien, incluso, podría sobrar, pero tampoco tengo claro que vaya a sobrar. No agregaría nada más extra como punto.</p>	<p>compuesto por tantas caras, que figura tiene esa cara. Los estudiantes automáticamente van diciendo “el área del cuadrado se saca así, entonces el cubo tiene 6 caras, multiplicando el área de una cara por 6. Haciendo esa separación va a ser mucho más sencillo.</p>
---	---

3.6.5 *Pregunta 5.* Al igual que en el apartado anterior: ¿Harías alguna observación en torno a estos indicadores de evaluación para el logro del OA? En caso de ser así, fundamenta el porqué de tu elección.

<p>Profesor:</p> <p>Ya. Aquí hay uno que siento que está un poco repetido:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Transforman paralelogramos en rectángulos de la misma altura por medio de recortes o dibujos, reconociendo que se mantiene la medida del área.</li> </ul> <p>Y:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Descomponen concreta o pictóricamente un paralelogramo en dos triángulos con el mismo contenido, verificando que el área de un triángulo se calcula</li> </ul>	<p>Profesora</p> <p>No, yo no haría ninguna modificación porque considero que todos los indicadores que están dispuestos a evaluar van totalmente asociados a la propuesta del OA y también van totalmente relacionados a lo que se espera de conocimientos previos. Creo que si ellos son capaces de desarrollar todos estos indicadores a cabalidad, podríamos hablar de un aprendizaje que podría estar siendo logrado.</p>
---	--

<p>como medio paralelogramo con la misma base y altura.</p> <p>Siento que, en la práctica, es lo mismo que esta transformación. Claro que este descomponer y este transformar, están demasiado de la mano, siento que son dos indicadores que apuntan a lo mismo y eso va un poquito en desmedro como en conteo de indicadores, como que deja un poco atrás la parte de la deducción de la parte del trapecio, pero también se ve un orden lógico dentro de la escala de deducción: el triángulo como figura básica de la geometría para extenderla a un cuadrado y luego ya del cuadrado que pasa si este cuadrado está achatado, para ver qué sucede con el paralelogramo y darte cuenta que al final va a ocurrir lo mismo y poder hacer esta igualación con las áreas y luego ya hiciste dos veces este proceso, entonces el escalamiento es cuando ya te presentan un trapecio tú dices como: esto ya lo he hecho dos veces, como no va a ser parecido.</p> <p>De todas maneras, a pesar de que existe esto, siento que el peso se carga mucho a la parte del paralelogramo, cuando me da la impresión de que hay indicadores que están repetidos, o que apuntan mucho a lo mismo, como que siento que estos dos indicadores, a pesar de que no son de la misma reacción, miden lo mismo.</p>	
--	--

La siguiente pregunta se presente a modo de profundización de lo relativo a los indicadores de evaluación:

3.6.5.1 *Pregunta 5.1.* Entonces, si tuvieras que escoger uno de los dos o juntar ambos en un nuevo indicador: ¿Cómo sería?

<p>Profesor:</p> <p>Profesor: Yo lo que haría, sería borrar el que dice transforma y quedarme con el otro, con el de descomponen porque, bueno como que ataca todo, aunque siento es un indicador un poco largo, ataca como todo, porque descomponer esto, de alguna manera, ver que estos dos triángulos van a ser iguales, que tienen el mismo contenido en el fondo, y que esas áreas van a poder calcularse como la mitad del paralelogramo, que en el fondo hacen representar de un lado para otro, el doble del triángulo o la mitad del paralelogramo. Al final la relación, ese salto no es tan fuerte. Y en el otro, en el que dice: recortan o dibujan... ese lo separaría, lo dejaría hasta el doble del área, y de manera similar al que dice: formulan verbal ... Haría formulan verbal y simbólicamente la regla para calcular el área de un trapecio.</p>	<p>Profesora</p> <p>Sin observaciones.</p>
--	--

El siguiente grupo de preguntas se enfoca en la secuencia propuesta en el Texto del Estudiante para el logro del Objetivo de Aprendizaje n° 13 *“Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios”*.

3.6.6 *Pregunta 6.* ¿Qué observaciones considerarías tú en la situación planteada, siendo esta la inicial para el logro de este OA? Esta pregunta apunta a que si tu consideras pertinente la situación presentada para dar inicio al trabajo con el cálculo de áreas.

<p>Profesor:</p> <p>La verdad es que a mí me parece buena, porque en el fondo lo que te presenta la situación, tiene todos los elementos que tú quieres enseñar al final. Es como un gran problema para</p>	<p>Profesora</p> <p>Se supone que esto es el inicio del OA en el texto. Yo creo que para ser el inicio del OA, es complejo, porque estás hablando “altiro” de descomponer figuras, pero también es desafiante, y al</p>
---	---

<p>partir. Porque yo igual asumo que en esta parte lo niños debiesen saber que es cada elemento. Ahora que lo pienso, no sé si esa parte estaba en los conocimientos previos, quizá podría agregar esa parte porque no está en el listado.</p> <p><b>Entrevistador: Lee conocimientos previos.</b></p> <p>Profesor: Ahora mirando esto, me da la impresión que en esa parte hubiera agregado también como conocer que son estos tres objetos. Quizá recordar, si es que ya las hubiese trabajado, porque claro, están las figuras pero, me da la impresión de que si no las conoce es ¿cómo va a identificar las figuras? Y diga: mira este es un paralelogramo, este es un trapecio y este es un triángulo. Yo me imagino que lo que uno espera como respuesta es: yo puedo descomponer este cuerpo en estos tres que yo conozco y después decir ¿cómo es el área de esto? Claro, puedo recordar el área del triángulo porque es algo que se hace usualmente, pero la pregunta que debiese aparecer es ¿cómo es el área de este paralelogramo o este trapecio?</p>	<p>ser desafiante genera mas interés en los estudiantes, porque aquí, ellos en un primer instante van a decir “yo no entiendo”, pero luego que vayan observando, van a ir haciendo este trabajo de descomponer figuras y van a ir llegando a los resultados totales. Ahora, si es como desafío, perfecto, pero como un desafío que yo volvería a colocar una vez que ya tengan el aprendizaje adquirido, como para comparar al inicio cuanto sabía o cuanto logré generar la hipótesis, y al final, comparar como “ahora si lo sé resolver y como lo hice”. Ellos mismos van como aprendiendo el camino a como llegar a resolver este ejercicio.</p>
---	--

Pregunta de profundización.

*3.6.6.1 Pregunta 6.1. ¿Alguna observación acerca de este problema?*

<p>Profesor:</p> <p>Por los tonos en los que está impresa, me parece que este viene en 3 colores diferentes. Bueno, es que en realidad no se me ocurre una forma de ocultar esta intención de que estén las figuras y que ellos las completen. Quizá, así como intentando dificultarlo un poco, yo</p>	<p>Profesora</p> <p>No tengo observaciones. Lo encuentro complejo y a la vez desafiante, solo eso.</p>
--	--

borraría las líneas del medio, como que mi cabeza me dice “está demasiado sugerida la figura”, hago un poco más interesante el que se les ocurra, entonces borraría las dos líneas que configuran el triángulo y de todas las que tiene la figura y las dejaría marcadas con colores, pero más bien parecidos, como para que además de decir “están estas figuras” decir “si yo tomo el campo, y lo descompongo en estas figuras. Los colores marcan mucho a mi gusto que hay tres figuras, como por el propósito de cumplir esta descomposición, siento que está muy marcada la descomposición. Yo en verdad, habría pintado todo en verde, puesto algunos choclos o algo de ese estilo, cosa de que nuestro problema fuese: ¿Qué pasa si completo esta línea de aquí a acá? Pensando en la base de este trapecio o la base mayor. Yo eso le agregaría, no pensando en aumentar la dificultad, si no que un elemento más, porque creo que es algo totalmente razonable en la cabeza de un niño.

3.6.7 *Pregunta 7.* En relación a esta situación: ¿Qué elementos, conceptos y justificaciones se encuentran presentes en el desarrollo de la fórmula para el cálculo de áreas de triángulos? Indique estos para cada uno de los pasos propuestos.

En cada uno de los pasos presentados, en caso de considerarlo necesario, realice las modificaciones respectivas a la propuesta dada.

Entrevistador: Sólo para recapitular, la intención es desarrollar las fórmulas para el cálculo de áreas, en este caso la del triángulo.

<p>Profesor:</p> <p>¿Es en relación sólo a la representación?</p> <p><b>Entrevistador: A como está propuesto. Cada uno de estos pasos justifica la fórmula, que es lo que buscamos al inicio. Tal como hablábamos al inicio, hay un procedimiento que me lleva a.</b></p> <p>Profesor: Lo que se me ocurre, ocuparía dos páginas, porque aquí hay un texto que dice: “así el cuadro se puede descomponer...”</p> <p>El texto lo conservaría, pero cuando dice “tienen igual superficie”, agregaría un “porque un triángulo está encima del otro” como para argumentar mucho más de porque son la misma superficie, y no es como “es la misma superficie” y no estas enhebrando el porqué, no estás dando el argumento completo, si no quedándome solo la conclusión.</p> <p>Y por otro lado, ese entonces yo lo cambiaría por un: de esto podríamos deducir que como estos dos triángulos pueden conformarse en la figura del rectángulo, vamos decir que el área del rectángulo es igual a la unión de todos estos triángulos, que corresponden a dos veces el triángulo original e inmediatamente agregaría un esquema bien sencillo donde dijera un dos,</p>	<p>Profesora</p> <p>En el paso 1 se incorpora el trabajo con cuadrículas. Obtener las medidas resulta más fácil cuando estás trabajando con cuadrículas y te dan la medida de las cuadrículas.</p> <p>En el paso 2, en recortar el triángulo central, ellos mismo aquí, manteniendo el uso de la cuadrícula, van a descomponer la figura. Al descomponer la figura van a llegar a darse cuenta que van a tener tres triángulos y que ellos mismos van guiando el paso para poder descubrir la fórmula.</p> <p>Ya en el paso 3, al superponer los triángulos, se van a poder dar cuenta que dentro de este rectángulo inicial tienen dos triángulos de la misma medida, lo que va a hacer mas sencillo que puedan inferir cual es el área. Y veo aquí también que si los juntas, hay un trabajo claramente que, si yo llevara esto mismo impreso como material concreto, tengo trabajo con material concreto. Tengo trabajo pictórico. Y finalmente voy a pasar lo simbólico cuando se va a concretar la fórmula.</p> <p>Desde mi opinión, este planteamiento me gusta, porque va desde lo concreto, pictórico, simbólico, puedo trabajar con los dos, puedo generar/ levantar hipótesis, puedo inferir lo que va a ser ya la parte mas simbólica, puedo hacer que los estudiantes vayan ellos mismos dialogando y creando sus propias</p>
---	---

representando a los dos triángulos, o quizá podría el triángulo sombreado más el triángulo en cuadros y lo igualaría a la cuadrícula del rectángulo y de ahí diría: como las áreas de estos dos son iguales (aludiendo a los triángulos), los voy a dejar como un puro dibujo pero le voy a agregar el dos, porque son dos veces este dibujo o el área de este dibujo igual al área de lo otro y luego, haría la deducción que se hace en el cuadro siguiente que es como: calcular el área de un triángulo (A) que equivale a...porque siento que eso no se conecta tanto con la secuencia de dibujos y argumentos anteriores, entonces, de este nuevo dibujo que yo agrego, dejaría el dos, el dibujo de este triángulo, reemplazaría la cuadrícula por la expresión del área, que sería  $6 \cdot 3$ , quizá agregaría una línea donde dice "como el ancho y el largo del rectángulo es "este y este" entonces el área es  $6 \cdot 3$ , procedería a operar, y ahí dejaría que el área del triángulo es igual a  $6 \cdot 3 / 2$  como un cálculo final, obteniendo el resultado final que tiene que ser 9.

Luego, me parece súper interesante este tema de que dan la regla general, pero no conectan más allá del texto que dicen: del área un triángulo se multiplica por la longitud del lado B... yo volvería a hacer toda la esquemática pero recalando que ahora: supón que esto es cualquier triángulo y esto es cualquier rectángulo y vamos a repetir el proceso, pero ahora los lados serían este B y este h y haría quizá la repetición de la parte anterior con el triángulo y el rectángulo en particular, pero con B y h y ahí haría la deducción de la fórmula y quizá podría mantener el texto que está, pero luego del dibujo, porque siento que, claro, están todos los argumentos y la línea lógica que

respuestas y después yo simplemente se las formalizo.

<p>acabo de decir, pero siento que no aparece mágicamente eso si es que no está demasiado claro.</p> <p>Claro, ya que estamos haciendo la presentación, no guardemos presentaciones. Ahí va la línea de mi observación al libro.</p>	
--	--

Pregunta de profundización

3.6.7.1 *Pregunta 7.1.* En relación a la pregunta como la planteo al inicio: ¿Qué elementos, conceptos y justificaciones se encuentran presentes en el desarrollo de la fórmula para el cálculo de áreas de triángulos? Indique estos para cada uno de los pasos propuestos. Me gustaría que pudiera decirme que está presente de manera implícita o explícita me indique porque este procedimiento es válido, ya que hasta ahora tenemos según la propuesta que se corta una figura, se superpone sobre otra y esto es suficiente para la justificación.

<p>Profesor:</p> <p>Lo primero, es que aquí está muy presente son las rotaciones y traslaciones, porque todas estas figuras las tomas, las cortas, las manipulas, las superpones y como se supone que esto es una experiencia en concreto va una sobre otra pero no estás pensando en que estás trasladando el triángulo desde la parte del arriba del rectángulo hacia abajo y además lo estás rotando para dejarlo en la posición que tú quieres o lo estás reflejando para que quede en la orientación que necesitas, pero basta rotarlo. Aunque estén las tres transformaciones, y eso está muy implícito no se dice: lo roto, lo traslado, sino más bien, lo corto, lo superpongo que eso es que está fácil de imaginar.</p> <p>Lo otro que está muy presente es el concepto de igualdad. Falta ser un poco más explícito en que es “la igualdad de los objetos”, porque uno se superpone encima del otro, porque tú tomas las</p>	<p>Profesora</p> <p>Descomponer figuras, el ir moviendo figuras, podría usar la traslación nuevamente, porque voy trasladando mis figuras hasta superponerlas en otras, trabajo con cuadrículas. Creo que es lo principal que yo veo en esto.</p> <p>También refuerzo el concepto de operaciones: multiplicación y división. Creo que lo simplifica bastante, y que le da harta libertad al estudiante para llegar a su resultado.</p>
---	--

partes y las pones encima de la otra, por lo tanto, tienen que ocupar los mismos espacios del universo para decir que son las mismas áreas.

Hay otra cosa más que es como de justificación de la fórmula, es que como porque tú puedes operar estos números siendo que yo hablo de dibujos o acá están hablando de una  $A$  extraña que representa el área y usualmente tú cuando tienes expresiones así, son como ecuaciones, el concepto que está detrás es en realidad si estás despejando de cierta forma una ecuación, pero no una ecuación con un elemento  $x$  que es un número que tú quieres conocer, sino que la representación a través de esta  $A$  como concepto, que es un número pero que representa otra cosa, que es la cantidad de superficie que ocupa este objeto en este plano o universo, que es 2D, que yo siento que eso también está como bien oculto. Lo otro, igual me gusta esta parte que dice: teniendo en cuenta que la base del rectángulo coincide con la del triángulo y al revés, la altura del triángulo es igual al ancho del rectángulo, me gusta eso porque parte como de la hipótesis de porque va a funcionar esta construcción auxiliar, pero siento que no le da suficiente énfasis a la parte de la hipótesis, o sea, esto si tiene que ver con mucho con una parte personal, si lo haces con otras medidas no va a funcionar, pero como está presentado no estás diciendo “necesitamos que el área de esto y esto sean iguales, porque si no la construcción no funciona, porque, me carga decir “es así”, pero tiene que ser así porque si no, la representación no nos sirve, la forma de demostrar no nos va a servir para nuestro propósito, porque “a lo mejor existe algún tipo de triángulo con rectángulo...”. Entonces,

<p>yo creo que es muy enriquecedor que esté esa parte como argumental de la hipótesis, pero siento que adolece de la parte de la importancia de la hipótesis, es muy importante que se cumpla esto, porque si no, no funciona.</p> <p>Ahora, en la práctica, para un triángulo, no van a volver a hacer la construcción una vez conocida la fórmula, pero por la parte de poder justificar bien, siento que yo le daría esa importancia pesar de que no es el foco, como de esa cosa que va más atrás de justificar en matemática.</p>	
--	--

Pregunta de profundización

<p>3.6.7.2 <i>Pregunta 7.2.</i> ¿Harías alguna modificación en torno al orden?</p>	
<p>Profesor:</p> <p>No. El orden no. Siento que los cambios que estoy sugiriendo respetan mucho el orden, porque me gusta. Además, es la parte de un libro que es para que ellos lean una representación, siento que, para usarlo así, como elemento libro, está bien.</p> <p>Ahora si me preguntas a mí, quizá yo partiría la clase al revés un poco, si lo hiciera de una manera más práctica, que sería: hoy vamos a deducir la fórmula de esto, la vamos a desarrollar, presentaría la fórmula, esta es la base, esta es la altura y les propondría hacer la construcción y a través de preguntas con las que ellos logren tal vez, hacer la deducción, pero siento que así, como para usar el libro así, sin tener la disponibilidad de material o tiempo, siento que es una muy buena secuencia.</p>	<p>Profesora</p>

3.6.8 *Pregunta 8.* ¿Qué elementos, conceptos y justificaciones se encuentran presentes en el desarrollo de la fórmula para el cálculo de áreas de paralelogramos? Indique estos para cada uno de los pasos propuestos. En cada uno de los pasos presentados, en caso de considerarlo necesario, realice las modificaciones respectivas.

<p>Profesor:</p> <p>Bueno. Lo primero ahí es que el paralelogramo está puesto, al igual que el anterior, de manera horizontal. Eso no me parece tan limitante, pero como que ahora me está queriendo sonar que yo lo hubiese puesto ladeado, pero de todas maneras encuentro que está bien. El primer paso es mas que nada una instrucción: ubiquémonos así, lo mediremos así.</p> <p>En el siguiente paso yo creo que está este concepto de que la figura se puede descomponer en sub-figuras, en este caso ese sería el corte.</p> <p>Y en el paso tres, ahora se hace explicito esta cosa de la traslación, a diferencia de lo anterior que había una rotación que estaba involucrada y acá indican explícitamente que se traslada, y algo que encuentro que es, quizá como bonito, es que se muestra la transformación del objeto, que es algo que no estaba apareciendo antes con el tema de los triángulos. Muestran lo primero: lo desarman, y no vuelven a hacer la igualdad por separado. En este caso te dicen: lo trasladas y ¡mira, aquí aparece el rectángulo, está el objeto! Como que aquí refuerzan esta idea de que hay una igualdad en estos dos objetos.</p> <p>Claro, ahí de nuevo dicen “esta es la base, esta es la altura”.</p> <p>Y en el paso cuatro, está un poco hecho arriba, pero de nuevo yo habría hecho este tema de: el área del paralelogramo es igual al área de este triángulo que tiene la misma altura y misma base, como que le hubiera puesto como dibujos, como un igual. Hubiera</p>	<p>Profesora</p> <p>Creo que este es muy similar al caso anterior. Solo que cambia la figura. Nuevamente nos encontramos con la cuadrícula, aquí ya se hace mas explícita la palabra traslación, que lo dije anteriormente sin que apareciera. Deja bien claro el concepto de altura, que no aparece como definición, que ellos mismos se van dando cuenta que acá hay algo que es la altura, van asociando el descomponer figuras y armar nuevas figuras, nuevamente trabajan con material concreto, y ellos mismos van armando desde una figura inicial llegan a otra figura que para ellos es más conocida.</p> <p>Acá también aparece el trazar la diagonal, entonces ahí también ellos van viendo que al trazar la diagonal puedo obtener dos figuras que son similares y también lo podría asociar a una reflexión, porque en la parte de abajo, en el paso 3, hay una parte donde traza una diagonal y obtengo dos figuras iguales, entonces también puedo trabajar acá con eso y reforzar ese contenido.</p> <p>Yo creo que eso es lo que aparece. Siento que es lo mismo que lo anterior, solo que acá va cambiando la figura, porque va usando las mismas cosas: altura, cuadrícula, traslación. Si quisiera buscar mas conceptos, acá podría usar: la reflexión, la diagonal, y voy agregando mas información. En el fondo es la misma forma.</p> <p>Antes de presentar la secuencia como viene propuesta, yo llevaría, antes de que vieran el dibujo, estas imágenes</p>
--	--

<p>reforzado con el dibujo este tema de que “no es una flecha que se transforma, pero también significa que por esa transformación ahora estos dos objetos son iguales. Eso lo hubiera reforzado.</p> <p>Para el siguiente tema de la deducción creo que es bastante similar. A mi gusto personal, hubiera puesto un dibujo, el otro, esta fórmula la conozco, pongo los números que yo conozco de la fórmula anterior, hago el despeje porque estoy buscando la incógnita como representación del área de este objeto que dibujé, no como una incógnita “x” que solo busca un número, si no que ahora representa un concepto, igual es una letra, pero ahora es un concepto, no es solo un número, es ambas.</p>	<p>impresas, entonces antes de ver el paso a paso, yo iría guiando la parte concreta y después iría formalizando el paso a paso, entonces así pasaría realmente de lo concreto, a lo pictórico y a lo simbólico, porque acá lo primero que yo veo son los dibujos, entonces lo primero que están viendo es lo pictórico.</p> <p>Después se están yendo a lo concreto. Si yo llevara estas figuras impresas y ellos las comienzan a descomponer y todo, ahí si me iría primero desde lo concreto y ellos irían armando su secuencia desde lo que ellos trabajaron.</p> <p>Esto se puede llevar a cabo, pero ellos primero ven la imagen, ven la presentación que está acá, en cambio si tu les llevas la figura lista y van desde lo concreto, va a ser mucho mas sencillo que lo logren entender.</p> <p>Agregaría solo al inicio un trabajo con material concreto. Haría que, con lo concreto, guiar este mismo paso a paso, tal vez sin que ellos lo vean. Después ellos lo ven acá posterior a haberlo trabajado y después ellos obtienen sus conclusiones y llegamos a formalizar el área.</p>
---	--

Pregunta de profundización

3.6.8.1 *Pregunta 8.1* ¿Harías alguna observación en relación a eso? Por ejemplo, en el paso 3, si un estudiante hubiese dijera “Profesor: no entiendo por qué puedo hacer eso”

<p>Profesor:</p> <p>Claro, es una pregunta bien difícil de ¿Por qué? Porque es muy intuitivo de que tu puedes tomar los objetos y trasladarlos, y armar. En ese caso yo volvería a esta idea de que si lo puedes hacer con material concreto la pregunta se muere, porque es como: mira, mueve dos fichas. Si no, es volver al</p>	
--	--

<p>concepto de que los cuerpos geométricos se pueden componer y descomponer, porque puedes armar, no sé, pirámides con un cuadrado cada una y puedes reconfigurar la pirámide y en este caso es eso lo que estamos haciendo con el cuerpo, reconfigurar el cuerpo ubicando cada una de las sub-figuras en otra parte. Afortunadamente, armamos una figura auxiliar que es una reconfiguración que nos ayuda. Ahí puede aparecer nuevamente esta idea de que transformas un objeto en otro y como esta base de “licuar” las cosas geométricamente en figuras más chicas.</p>	
---	--

#### Pregunta de profundización

##### 3.6.8.2 Pregunta 8.2 ¿Alguna modificación que agregarías adicional a lo anterior?

<p>Profesor:</p> <p>Ahora. Si me preguntas, una modificación grande. No es como una modificación, si no que sería una re-propuesta, sería que yo modificaría esto como una actividad para el aula. De nuevo para hacerlo mas práctico. Porque en mi experiencia me dice que estas ideas se asientan mejor cuando el estudiante toma en sus manos el objeto. Por ejemplo, cuando un estudiante me dice “¿por qué puedo hacer esto?” Cuando el estudiante toma la parte, la recorta, la mueve y la ve, no se va a preguntar el porque lo puede hacer porque lo acaba de hacer con las manos. Claro, va a perder esta parte mas profunda quizá del concepto matemático, pero no es el foco quizá. Quizá ese es un foco que estuvo mucho mas atrás que no se alcanzó en su momento o tal vez olvidado.</p>	<p>Profesora:</p> <p>Haría la propuesta, pero guiándola desde un ámbito mas concreto. Después de aplicarla, haría esta presentación más pictórica para después llegar a la conclusión simbólica. Y tal vez lo otro que haría, no plantearía en el paso 4 el área , para hacerlo mas desafiante, si no que llegaría a una conclusión con ellos , que ellos vayan dando sus ideas o lo que han visto, y desde ahí, entre todos, generar la fórmula del área. Así se sienten participativos, ellos llegaron a su resultado, y ahí tu puedes ir haciendo intervenciones porque ahí ellos se sentirán creadores de su propio aprendizaje.</p>
--	--

3.6.9 *Pregunta 9.* ¿Qué elementos, concepto y justificaciones se encuentran presentes en el desarrollo de la fórmula para el cálculo de áreas de trapecios? Indique estos para cada uno de los pasos propuestos.

En cada uno de los pasos presentados, en caso de considerarlo necesario, realice las modificaciones respectivas.

<p>Profesor:</p> <p>Esto no está bien. No en el sentido de que no sea correcto. No es el indicador que está en el curriculum. El libro en ese sentido está mal, porque el libro dice que va a armar el paralelogramo... (docente lee nuevamente el indicador). Claro, el rectángulo es un paralelogramo, pero todas las construcciones se centran en el rectángulo. Como que lo que yo tenía en la cabeza cuando lo leí es que tu puedes tomar este trapecio, rotarlo en 180°, juntarlo por este lado y armas el paralelogramo. Entonces tú haces la cadena de deducción de cada una de las áreas: el triángulo con el rectángulo, ahora el paralelogramo con el rectángulo y los triángulos a la vez, y ahora, que tu sabes ocupar paralelogramos, podemos saltar a los trapecios y acá estás construyendo nuevamente un rectángulo.</p> <p>Siento que aquí se pega un pequeño tropezón, no es lo que yo había imaginado, pero de todas formas la construcción es correcta. No es una construcción que sea incorrecta, que no te haga llegar a la fórmula. En ese sentido, solo por correctitud lo mencioné: ok, el curriculum dice algo, el libro no está haciendo lo que dice el curriculum. Ahora no tiene por que ser idéntico a los indicadores del curriculum y a como se hace cada cosa.</p> <p>Una cosa tiene que ver con la forma, es que el nuevo objeto está reconfigurado de una manera extraña. Lo miro y no siento que sea tan intuitivo de armar la figura o las dos figuras. Igual tiene que ver porque, la primera idea que tuve yo</p>	<p>Profesora:</p> <p>Yo creo que, de partida, esta es más compleja si o si y cuesta mucho mas que los niños la puedan comprender, porque acá es donde ellos olvidan y les cuesta, es que ellos deben entender que deben sumar las dos bases. Esa parte la dejan bastante atrás y genera como harta controversia. Ese es el primer punto. Yo creo que ahí podría poner mas explicito, en alguna parte, por qué ellos deben sumar las dos bases, que quede como mas claro. No sé si descomponer, no sé si el material concreto me pueda llevar, por ejemplo, a que ellos mismos pudieran formular su hipótesis de obtener el área total del trapecio. Yo creo que aquí queda un poco más débil, en el tránsito de lo concreto a lo simbólico. Acá yo creo que habría que tener como algo mas de por medio.</p> <p>Acá veo lo mismo que en los casos anteriores. Las 3 situaciones siguen la misma forma de abordar, de trabajar con el material concreto, de descomponer la figura y al final formalizar la fórmula, de trabajar nuevamente con las cuadrículas, de trabajar nuevamente con el concepto de altura, con la traslación, de usar figuras que para ellos puedan ser conocidas para poder llegar a una figura mas compleja. Si o si me parece que el trapecio es una figura mas compleja que tal vez requiere algo mas que plantear esta situación 3 para que pueda ser comprendida a cabalidad y que sea mas allá de que ellos puedan descubrir su aprendizaje.</p>
---	---

para armar el paralelogramo, pero siento que es mucho más intuitivo tomar las dos, girar una y decir "oh, es un paralelogramo". Pero fuera de eso no hay nada mas en mi cabeza que lo haga "no intuitivo" no se me ocurriría recortar así el trapecio. A pesar de que, si yo fuera siguiendo el texto, lo mismo que podría ser aplicable para el paralelogramo, podrías decir "por que no lo haces dos veces para los cachos". Ahora la pregunta que me sale en la cabeza es ¿Por qué los dos cortes? Y ahí quizá yo entraría a justificar un poco, a justificar los cortes.

Porque tu cortas una figura e intentas hacer lo mismo que con el trapecio y te das cuenta que las inclinaciones, es decir los ángulos que tienen las dos rectas que no horizontales, no son la misma, por lo tanto, esas piezas no pueden encajar para formar el rectángulo, a diferencia del caso anterior, que las pendientes eran las mismas entonces las figuras o las líneas de las pendientes diagonales encajaban bien y armaban este rectángulo. Ahí diría: es necesario hacer estos dos cortes pues las pendientes no encajan y así, con estas pendientes que son iguales, cuando tomemos la segunda figura de trapecio y lo rotemos, vamos a poder tener las mismas inclinaciones y así formar figuras completas.

Lo otro que me parecería interesante quizá, es que yo recuerdo, es que esto se podía hacer con la distancia media, como con la mediana del trapecio, pero eso considero que quizá es un poco mas avanzado. Quizá ese corte no tiene mucho que ver mucho con esto.

Pero, así como está, yo justificaría un poco más de como corto.

Acá de nuevo siento que, al igual que la parte anterior, decir que tu estas trasladando, rotando para armar la

Tal vez acá le podría agregar, que no sé si se puede, algún apoyo visual.

Acá, además de todo esto, del uso de material y todo, le agregaría un apoyo visual. Tal vez alguien que vaya modelando, después que ellos lo intentaron que vaya modelando esta figura, pero que esté listo, algo visual, como un video, imágenes, mas que imágenes, un video, algo que me ayude a que puedan entender por qué se formalizó abajo que las dos bases por la altura y se divide en dos. Creo que está mucho mas en el aire por ser una figura mucho mas compleja.

En el caso de que algún estudiante me preguntara el porqué, le diría que solo el ir trasladando le permite ir formando una nueva figura que para él sea más conocida que lo ayude a entender que la descomposición de la figura que el ya conoce lo puede llevar a obtener figuras pequeñas, porque el conoce este rectángulo. Que al descomponer esta figura y al ir trabajando su área por partes, puede obtener una nueva figura, que en el fondo es la suma de las dos figuras que por eso van las dos bases. De todas maneras, creo que puede generar una complicación.

Desde mi experiencia personal, fue rápido avanzar con las otras dos estrategias, cuando trabajé este OA, pero es mas difícil este, porque independiente de que ellos lo descompongan y lo trabajen, ellos tienden al olvidar el que tienen que sumar las dos bases, porque les cuesta esto de darse cuenta que hay dos figuras dentro de una misma figura, y en este caso, por ejemplo, dos figuras que ellos las descompusieron, en algún momento te pueden decir "acá hay una, dos, tres, cuatro figuras" y desde ahí les cuesta un poco mas armar. Acá yo tomaría mas tiempo. Tal vez haría un

figura nueva y que esta nueva ocupa dos veces la original porque ocupaste dos trapecios para construirla. Entonces ahí hablaría un poco que estás rotando y transformando.

Porque tu podrías decir “esto lo estoy transformando” y yo podría decir “¿pero ¿cómo lo estás transformando si yo en la figura anterior veo que lo recortaste?” y de repente veo aparecer la figura y otras figuras extra, entonces quizá ahí diría “ocupando el trapecio anterior y rotando y trasladando algunas de las otras figuras armo este trapecio”.

También está la idea de “lo recorto así porque los ángulos van a encajar bien cuando yo arme las piezas. Y de nuevo este tema, que yo siento que falta un refuerzo visual de la conceptualización de la igualdad de áreas. Como que siento que igual es importante porque, creo que es muy fuerte el tránsito desde lo pictórico a algo que tu lees y va a estar solo en tu cabeza. Siento que ese refuerzo pictórico va a ser bueno a la hora de poner la ecuación.

Y lo otro es que, para apoyar netamente mi apreciación primera, cuando dicen como se escribe la fórmula en general, yo no me termino de explicar por qué porque es  $b + h$ . Creo que con la construcción que doy yo se explica de inmediato o agregaría una línea acá diciendo: se suman pues la base de la construcción auxiliar va a ser la base mayor mas la base menor del trapecio.

paso a paso más grande o mostraría imágenes distintas donde a una le agregue una parte primero, después le agregué la otra. Como más largo.

Ahí le agregaría un apoyo visual. Se puede preparar un video con el paso a paso de como realmente la compusiste. De la propuesta que trae el texto, agregaría pasos intermedios: pasos cuando fui agregando figuras hasta llegar a la grande.

A continuación, se presentan los escritos realizados por ambos docentes respecto a la planificación de clase.

### 3.6.10 Planificación profesor:

#### 3.6.10.1 Objetivo de clase

A continuación, desarrolle una secuencia de clases siguiendo la estructura planteada al inicio incorporando las observaciones realizadas.

Comprender la relación entre el área de un triángulo y rectángulo de misma base y altura

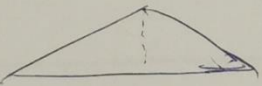
OBJETIVO ¿Cuál es su objetivo?	PUNTOS CLAVE
Desarrollar la fórmula de área de un triángulo.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Área rectángulo -</li> <li>•</li> <li>•</li> </ul>

Fig. 15: Objetivo de clase. Planificación profesor.

#### 3.6.10.2 Evaluación (Evidencia)

**EVALUACIÓN**  
 Describir, brevemente, lo que harán los estudiantes para demostrar que han dominado el objetivo.  
 (Adjuntar TICKET DE SALIDA completo e incluir la respuesta ejemplar.)

Desee conocer la medida del área del triángulo



¿Puede derecho a una pista, excepto el área del triángulo mismo ¿qué pista pediría? ¿Por qué esta pista?

Fig. 16: Evaluación. Planificación profesor.

### 3.6.10.3 Apertura:

4. APERTURA (MINUTOS) ¿Cómo comunicará lo <u>que</u> está a punto de suceder? ¿Cómo comunicará el <u>cómo</u> sucederá? ¿Cómo comunicará su <u>importancia</u> ? ¿Cómo comunicará las <u>conexiones</u> con las clases previas? ¿Cómo comprometerá a sus estudiantes y captará su interés?	MATERIALES
<p>- Nosotros conocemos el área del rectángulo, pero no conocemos el área del triángulo. Surge ¿cómo es el área <math>\Delta</math>?</p> <p>- Vamos a relacionar el área de ambos y así conoceremos por extensión la segunda.</p> <p>- Importancia: Conoceremos un poco más una de las figuras básicas o fundamentales de la geometría plana.</p>	<p>¿Cómo es a pista lo ayuda a resolver el problema?</p> <p>- la aplicación de embudo</p> <p>• conocimiento previo</p> <p>- rectángulo</p> <p>- el concepto/porque.</p>

Fig. 17: Apertura. Planificación profesor.

### 3.6.10.4 Introducción al nuevo contenido

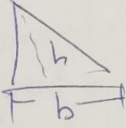
3. INTRODUCCIÓN DEL CONTENIDO NUEVO (YO HAGO) (MINUTOS) ¿Cómo explicará / demostrará todos los conocimientos / habilidades necesarias del objetivo? ¿Qué potenciales malentendidos anticipa? ¿Cómo los mitigará proactivamente? ¿Cómo / cuándo chequeará la comprensión? ¿Cómo enfrentará los malentendidos? ¿Qué estarán haciendo los estudiantes mientras usted explica?
<p>• Enunciación: la fórmula del área de un triángulo será:</p> $\frac{b \cdot h}{2}$ <p>donde </p> <p>Esta es nuestra meta y la alcanzaremos relacionando el área de <math>\square</math> con <math>\Delta</math>.</p>

Fig. 18: Introducción al nuevo contenido. Planificación profesor.

### 3.6.10.5.1 Práctica guiada

<b>2. PRACTICA GUIADA (NOSOTROS HACEMOS) (MINUTOS)</b> ¿Cómo practicarán los estudiantes todos los conocimientos / habilidades requeridos del objetivo? ¿Cómo asegurará que los estudiantes tendrán múltiples oportunidades de practicar, con ejercicios que van de fácil a difícil? ¿Cómo / cuándo realizará una representación para revisar la comprensión? ¿Cómo enfrentará los malentendidos?	
<p>• <u>Guía de construcción:</u></p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. Elabore un triángulo</li><li>2. Necesite <del>un</del> rectángulo de base y altura <math>\geq</math> igual a los del triángulo que elaboro.</li><li>3. Coloque <del>un</del> triángulo sobre el rectángulo, verificando que coincidan la base y altura. Luego <del>re</del> marque los bordes del <del>triángulo</del> en el rectángulo, y corte sobre las marcas.</li><li>4. Intente <del>colocar</del> <u>re</u>llevar uno de los triángulos obtenidos con los otros dos ¿cómo lo consiguió?</li></ol>	

Fig. 19: Práctica guiada. Planificación profesor.

### 3.6.10.5.2 Práctica guiada

5. Considere el triángulo inicial.  
¿Cuántas veces este contenido en el  
rectángulo que construyo en 2.?

6. ~~¿Cuántas ve~~ ¿Cómo será el área del triángulo  
~~con~~ respecto a la del rectángulo? ¿Por qué?

---

Resumen: de 4, 5 y 6.

↳ Lo fuerte es que los resultados  
son iguales para distintos triángulos.

↳ esto es verdad siempre  
y la relación es.

$2 \cdot \text{Área } \Delta = \text{Área } \square$

Siempre  $b$  y  $h$  iguales.

Consideremos  $\Delta$  de base  $b$  y altura  $h$ .

$2 \cdot \Delta = \text{Área } \square$   $\rightarrow$   $b \cdot h$   $\rightarrow$   $\frac{b \cdot h}{2}$

$\Delta = \frac{b \cdot h}{2}$

Fig. 20: Práctica guiada. Segunda parte. Planificación profesor.

### 3.6.10.6 Práctica independiente

**1. PRÁCTICA INDEPENDIENTE (TÚ HACES) (MINUTOS)**  
 ¿Cómo demostrarán los estudiantes el dominio independiente de todo el conocimiento y/o habilidades requeridos del objetivo? ¿Cómo dará oportunidades refuerzo y extensión? ¿Con qué estrategia realizará el monitoreo? (Si la práctica independiente es una guía, adjúntela incluyendo la respuesta ejemplar.)

¿Cuál es el área del  $\Delta$  inscrito?

¿Cuál es el área de  $\square$  que lo inscribe?

Fig. 21: Práctica independiente. Planificación profesor.

### 3.6.10.7 Cierre

**5. CIERRE (MINUTOS)**  
 ¿Cómo resumirán y establecerán los estudiantes la importancia de lo que aprendieron? ¿Qué reflexiones podemos hacer acerca de lo aprendido? (Considere tiempo para la realización del TICKET DE SALIDA y el cierre.)

o Relación  $A^{\Delta}$  y  $A^{\square}$ .

o fórmula  $A^{\Delta}$

Fig. 22: Cierre. Planificación profesor.

### 3.6.11 Planificación profesora

#### 3.6.11.1 Objetivo

OBJETIVO
¿Cuál es su objetivo?
DESARROLLAR Y APLICAR LA FORMULA DEL AREA DE PARALELOGRAMO
EVALUACIÓN

Fig. 23: Objetivo. Planificación Profesora

#### 3.6.11.2 Evaluación (evidencia)

EVALUACIÓN
Describir, brevemente, lo que harán los estudiantes para demostrar que han dominado el objetivo. (Adjuntar TICKET DE SALIDA completo e incluir la respuesta ejemplar.)
⊕ Calcular ÁREAS de PARALELOGRAMOS UTILIZANDO MATERIAL CONCRETO.
⊕ RESOLVER EJERCICIOS DE CÁLCULO DE ÁREAS
⊕ COMUNICAR VERBALMENTE EL ¿CÓMO LO HICIERON?
⊕ RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Fig. 24: Evaluación. Planificación Profesora

#### 3.6.11.3 Apertura

4. APERTURA (MINUTOS)
¿Cómo comunicará lo <u>que</u> está a punto de suceder? ¿Cómo comunicará el <u>cómo</u> sucederá? ¿Cómo comunicará su <u>importancia</u> ? ¿Cómo comunicará las <u>conexiones</u> con las clases previas? ¿Cómo comprometerá a sus estudiantes y captará su interés?
⊕ ACTIVACIÓN CONOCIMIENTOS PREVIOS CON CONCEPTOS DE PARALELOGRAMOS, TIPOS DE PARALELOGRAMOS, CONCEPTO DE BASE, ALTURA.
⊕ ASOCIACIÓN DE LOS PARALELOGRAMOS EN SU VIDA ¿DÓNDE LOS HAN VISTO? ¿LOS HAN UTILIZADO? ¿EN QUÉ? ETC.
⊕ ¿POR QUÉ CREEN VDS RECIBEN EL NOMBRE DE PARALELOGRAMOS? ETC.

Fig. 25: Apertura. Planificación Profesora

### 3.6.11.4 Introducción al nuevo contenido

<p>3. INTRODUCCIÓN DEL CONTENIDO NUEVO (YO HAGO) (MINUTOS) ¿Cómo explicará / demostrará todos los conocimientos / habilidades necesarias del objetivo? ¿Qué potenciales malentendidos anticipa? ¿Cómo los mitigará proactivamente? ¿Cómo / cuándo chequeará la comprensión? ¿Cómo enfrentará los malentendidos? ¿Qué estarán haciendo los estudiantes mientras usted explica?</p>	
<p>⊕ A PARTIR DE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS, IDEAS Y EXPERIENCIA DE LOS ESTUDIANTE (COMO PROFESOR IR RECOGIENDO SUS IDEAS E IR COMPLEMENTANDOLAS, INTENTANDO QUE ELLOS SEAN LOS PRINCIPALES CONSTRUCTORES DE SU APRENDIZAJE) IR FORMALIZANDO CONTENIDOS E IR REGISTRANDO CON LA FINALIDAD DE LOGRAR LA PARTICIPACIÓN DE LA TOTALIDAD DE LOS ESTUDIANTES.</p>	
<p>⊕ UTILIZAN HABILIDADES COMO COMUNICAR Y ARGUMENTAR, RESOLVER PROBLEMAS Y REFLEXIONAR</p>	
<p>⊕ EN LOS POSIBLES MALENTENDIDOS, UTILIZARLOS PARA DESDE ALLÍ, LLEGAR A LO CORRECTO (TRABAJAR DESDE EL ERROR). Y QUE OTROS ESTUDIANTES PLANTEEN LO CORRECTO. (FOMENTAN PARTICIPACIÓN CON PREGUNTAS DIRIGIDAS PARA RESOLVER EL ERROR)</p>	
<p>⊕ CHEQUEAR EL APRENDIZAJE CON PREGUNTAS DIRIGIDAS, COMENTARIOS, REFUERZO O EXTENSIONES DEPENDIENDO DE LAS NECESIDADES</p>	

Fig. 26: Introducción al nuevo contenido. Planificación Profesora

### 3.6.11.5 Práctica guiada.

<b>2. PRÁCTICA GUIADA (NOSOTROS HACEMOS) (MINUTOS)</b> ¿Cómo practicarán los estudiantes todos los conocimientos / habilidades requeridos del objetivo? ¿Cómo asegurará que los estudiantes tendrán múltiples oportunidades de practicar, con ejercicios que van de fácil a difícil? ¿Cómo / cuándo realizará una representación para revisar la comprensión? ¿Cómo enfrentará los malentendidos?
<ul style="list-style-type: none"><li>⊕ Practicaron el resolver ejercicios de cálculo de área</li><li>⊕ Resolución de problemas</li><li>⊕ Participación en plenarios con uso de guías de preguntas</li><li>⊕ Preguntas dirigidas</li><li>⊕ Exposiciones de argumentos y conclusiones ¿Cómo se hace? ¿Por qué así? ¿Y si ocurre esto o lo otro? ETC.</li><li>⊕ Propuestas de profus.</li></ul>

Fig. 27: Práctica guiada. Planificación Profesora

### 3.6.11.6 Práctica independiente

<p><b>1. PRÁCTICA INDEPENDIENTE (TÚ HACES) (MINUTOS)</b>          ¿Cómo demostrarán los estudiantes el dominio independiente de todo el conocimiento y/o habilidades requeridos del objetivo? ¿Cómo dará oportunidades refuerzo y extensión? ¿Con qué estrategia realizará el monitoreo? (Si la práctica independiente es una guía, adjúntela incluyendo la respuesta ejemplar.)</p>	
<p>④ Trabajo independiente en guía, cuaderno o libro del ministerio.</p> <p>④ Monitoreo.</p> <p>④ Tiempo para el trabajo independiente</p> <p>④ Entregando herramientas para facilitar la comprensión en otro tipo de ejercicios similares, dominando dificultad, guiado mediante preguntas para que ellos lleguen y descubriendo y entendiendo como hacerlo etc</p> <p>④ En caso de extensión agregar al problema o ejercicios nuevos ejercicios con datos más complejos o cambiando la situación ¿y si le agrega esto? ¿y si cambia el número por este? etc con la intención de fomentar aún más su participación y habilidades.</p>	

Fig. 28: Práctica independiente. Planificación Profesora

### 3.6.11.7 Cierre

<p><b>5. CIERRE (MINUTOS)</b>          ¿Cómo resumirán y establecerán los estudiantes la importancia de lo que aprendieron? ¿Qué reflexiones podemos hacer acerca de lo aprendido? (Considere tiempo para la realización del TICKET DE SALIDA y el cierre.)</p>	
<p>④ Ploteando ejercicios con errores.</p> <p>④ Resolviendo ejercicios</p> <p>④ Realizar plenarios</p> <p>④ comentar aprendizajes con recursos visuales con preguntas guiadas. Utilizar herramientas que faciliten que como profesor podamos recoger la información cualitativa del aprendizaje</p>	

Fig. 29: Cierre. Planificación Profesora

## Capítulo 3 – Análisis de datos

El conocimiento del Profesor de Matemática es de carácter integral. Este conocimiento contempla varias aristas, dentro de las cuales se encuentran aquellas propias de la disciplina (lo que corresponde directamente al ámbito de la teoría), los relacionados directamente con la didáctica del contenido a enseñar y en conjunto con estos dos hemisferios, convive lo que representan las creencias del profesor.

Dentro de las entrevistas realizadas y las respuestas entregadas por los docentes participantes, así como de la evidencia encontrada en las planificaciones elaboradas en la segunda etapa de la entrevista, se lograron identificar elementos importantes de este dominio.

A continuación, se procede a presentar el análisis de la información recopilada desde las entrevistas realizadas a los profesores del área. En este análisis se hará una mirada global de las respuestas en contraste con el marco del MTSK.

Se busca evidenciar la presencia de categorías de la teoría y presentar la forma en que se articulan a lo largo de las entrevistas realizadas.

Se dará inicio a este capítulo comenzando con uno de los dos dominios que presenta el MTSK: El Conocimiento Matemático (MK)

Uno de los elementos fundamentales del quehacer docente es el referente a lo que este debe conocer de la disciplina que imparte. Por esta razón es importante y necesario determinar qué/cómo y cuánto conoce el Profesor de Matemática.

### Conocimiento Matemático (MK)

El conocimiento Matemático (MK) contempla 3 sub áreas importantes: conocer los temas matemáticos, la estructura que posee la disciplina y la práctica de la matemática, entendiendo esta última como el conocimiento del profesor respecto a los métodos de validación, demostración, elementos suficientes/ necesarios para la elaboración de definiciones entre otros.

Las respuestas entregadas evidencian que los profesores consideran importantes los usos que se dan a los conceptos utilizados en la construcción de conocimiento. Respecto a esto, emerge la primera categoría del modelo referente a la fenomenología. Esta categoría se refiere, en uno de sus dos aspectos, al conocimiento del profesor respecto a los usos y aplicaciones de un tema. En este ítem emerge al momento de trabajar con los aprendizajes esperados por los estudiantes, presentes en el Programa de Estudio para 7° año de Enseñanza Básica, entregado por MINEDUC. A este respecto, uno de los docentes menciona “... en la práctica, la razón trigonométrica debería usarse más como una relación entre los lados más que la función...”, evidenciando de esta manera la presencia de una de las categorías del KoT.

De manera adicional, otra de las categorías que puede evidenciarse en este discurso es la que corresponde a las “Conexiones de Contenidos Transversales”. Esta categoría corresponde a las relaciones que se pueden establecer mediante una cualidad en común que, en este caso, sería el de las relaciones entre los lados. Este subdominio corresponde al conocimiento del profesor de matemática respecto a conocer los contenidos y sus significados y la fundamentación que respecta presente en todos los ejes tradicionalmente estudiados como son: números, álgebra, geometría, entre otros.

Esta categoría emerge de la misma manera en el desarrollo de la planificación de clase, al momento de plantear el objetivo de clase:

A continuación, desarrolle una secuencia de clases siguiendo la estructura planteada al inicio incorporando las observaciones realizadas.

*Comprender la relación entre el área de un triángulo y rectángulo de misma base y altura*

OBJETIVO ¿Cuál es su objetivo?	PUNTOS CLAVE
<i>Desarrollar la fórmula de área de un triángulo.</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Área rectángulo -</li> <li>•</li> <li>•</li> </ul>

Fig. 30: Conexión de contenidos transversales. Planificación Profesor

El profesor establece una relación de comparación entre las áreas de triángulo y rectángulo, estableciendo esta “conexión de contenidos” en función de este objeto.

Según esta misma perspectiva, las respuestas entregadas al momento de hablar de tópicos como los objetos en cuestión, ambos docentes consideran importante la presencia de las representaciones y el aprendizaje de las mismas en pro de una construcción significativa por parte de los estudiantes. Es en esta línea que, por parte de la docente, se evidencia la categoría referente a los registros de representaciones, en este caso, de las figuras. De lo que expone en función de las orientaciones didácticas, menciona: “Una vez que ya dominan bastante la parte concreta, después lo representas de manera pictórica y ellos mismos van construyendo desde estas representaciones pictóricas, entonces ya uno después formaliza con lo simbólico...”.

Lo anterior da cuenta de la presencia de esta categoría como parte de su conocimiento. En esta categoría y de la mano de la misma profesora, se evidencia un aspecto relacionado con el segundo dominio del modelo, el Conocimiento Didáctico de Contenido, dominio en el cual profundizaremos en la medida que se presente el análisis. En esta misma instancia, la profesora menciona: “Con otra parte que estoy completamente de acuerdo es con el aprender haciendo y desde ahí partir de lo concreto a lo simbólico”. En esta respuesta breve emerge una nueva

categoría relacionada con la didáctica del contenido, la que corresponde al Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática.

En este subdominio, se espera que el profesor posea conocimiento respecto a cómo enseñar, a conocer la potencialidad de escoger ciertas actividades, estrategias didácticas con el fin de propiciar el aprendizaje. La categoría que enmarca la respuesta de la profesora, corresponde al conocimiento de teorías de enseñanza. Aquí se aprecia la directa relación entre dos categorías que corresponden a distintos dominios pero que se articulan de buena manera.

Continuando con la línea del Conocimiento Matemático, y avanzando en estas entrevistas, se evidencia la presencia y necesidad en justificar los procedimientos a realizar para garantizar el logro de los objetivos de aprendizaje.

Como se presentó en los antecedentes, el objetivo a trabajar en esta investigación corresponde a “Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios”. Este ámbito se relaciona directamente con el tercer subdominio de modelo del MTSK, el que corresponde al Conocimiento de la Práctica Matemática.

Como se mencionó al inicio de este apartado, este conocimiento no es el relativo al ejercicio de la docencia, sino que se relaciona con los procesos de validación, generación de definiciones entre otros. A diferencia de los casos anteriores, se evidencia una clara diferencia entre las respuestas de los profesores.

Esta diferencia radica en la concepción del término “desarrollar”, mostrando aquí la presencia de las concepciones o “creencias” del profesor respecto a la matemática en este caso. Para el profesor el desarrollar las fórmulas es equivalente al proceso de deducción, mientras que, para la profesora, corresponde a la comprensión y construcción de la misma de manera gradual. Según la evidencia, esta diferencia radicaría en la experiencia de la práctica de la disciplina, conectando este subdominio del MK con el subdominio del PCK, el que corresponde al conocimiento de la enseñanza.

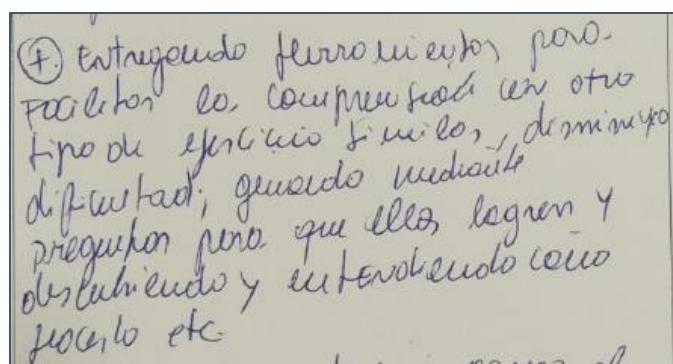
Producto de la experiencia, ambos profesores realizarían el desarrollo de las fórmulas desde las creencias que ambos tienen respecto a cómo entienden el concepto, evidenciando por segunda vez, una conexión directa entre ambos dominios: El Conocimiento de la Matemática y el relativo a la Didáctica.

Es importante mencionar que constantemente forman parte del conocimiento en ambos dominios las creencias de los profesores respecto a las diversas temáticas que conforman el conocimiento especializado. Esto lo podemos evidenciar, por ejemplo, en la siguiente aseveración: “Esto que, para mí no es del todo claro, que los tránsitos siempre sean desde lo concreto a lo simbólico. Creo que a veces, trabajar desde lo simbólico hacia lo concreto también logra buenas conexiones, a pesar de que es mucho más cercano partir de algo concreto. Mi pequeña experiencia como que de repente me hace sentir que partir de un ejemplo concreto ni logra divisar bien el objetivo hacia lo simbólico...”.

En esta declaración, tal como se mencionó anteriormente, ambos profesores demuestran conocimiento respecto a las representaciones del objeto como se levantó en la categoría relacionada con este ítem. No obstante, y a diferencia de la profesora, el docente presenta un argumento construido en base a sus creencias en conjunto a la poca experiencia que posee haciendo emerger una categoría que no se había presentado con anterioridad. Esta categoría, que pertenece al subdominio del Conocimiento de la Estructura” se denomina “Conexión de Complejización” relacionando conceptos básicos (como sería el caso de lo concreto por ser más cercano al estudiante) con la representación simbólica (más abstracta) en busca de dar un mayor sentido al objeto. En este sentido, se refuerza la idea planteada inicialmente respecto a la constante dualidad entre lo relativo al conocimiento y la didáctica junto a las creencias de cada dominio.

Continuando con el levantamiento de categorías del MTSK, emerge una categoría relacionada con el KSM (Conocimiento de la estructura). Esta categoría, denominada “Conexión de Simplificación”, al conocimiento de las relaciones con contenido previo. En particular, esta conexión se evidencia en el discurso de la profesora al momento de hablar sobre la propuesta curricular acerca de los conocimientos previos. En sus palabras indica: “... yo creo que antes le agregaría la distinción entre figuras 2D y 3D, más explícitamente, que desde ahí ellos comprendan cómo está formado un cubo, un paralelepípedo...”. Esta aseveración deja ver claramente la necesidad de realizar una relación con contenido previo con la finalidad de propiciar la comprensión por parte de los estudiantes.

Esta necesidad de establecer una conexión de simplificación se evidencia en uno de los apartados de la práctica independiente de la profesora, donde indica que se hará una disminución del grado de dificultad.



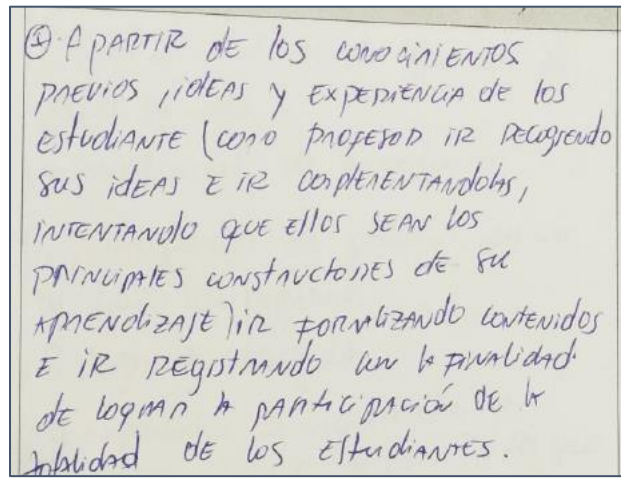
④ entregando herramientas para facilitar la comprensión en otro tipo de ejercicio similares, disminuyo dificultad, guiso mediante preguntas para que ellos lean y descubran y entendiendo como hacerlo etc

Fig. 31: Conexión de simplificación. Planificación Profesora

Tal como se ha visto anteriormente, este modelo de análisis sobre el conocimiento del profesor resulta ser de una lógica dinámica, donde constantemente se pueden convivir categorías pertenecientes a otros subdominios, en este caso, con una categoría que pertenece al dominio del PCK. La categoría con la cual se relaciona este discurso, correspondiente al dominio del KMLS, es la que se centra en el conocimiento de secuenciación de los temas, la que corresponde al conocimiento sobre aquellos contenidos previos, así como capacidades de los estudiantes y poder

realizar una secuenciación correcta de contenidos. De manera implícita, la categoría levantada se relaciona con otra del dominio del PCK, perteneciente al subdominio del conocimiento de las formas de aprender un contenido. La categoría que se levanta y relaciona también con lo anterior es la denominada “Conocimiento de las Formas de Aprendizaje”. Este conocimiento corresponde a aquel propio de la práctica y ejercicio docente, así como el entregado por las instituciones rectoras indicado en las orientaciones didácticas, por ejemplo.

Una evidencia respecto a esta categoría sobre las formas de aprendizaje, se aprecia en la planificación de la profesora al momento de introducir el contenido.



⊕ A PARTIR DE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS, IDEAS Y EXPERIENCIA DE LOS ESTUDIANTE (COMO PROFESOR IR RECOGIENDO SUS IDEAS E IR COMPLEMENTANDOLAS, INTENTANDO QUE ELLOS SEAN LOS PRINCIPALES CONSTRUCCIONES DE SU APRENDIZAJE) IR FORJANDO CONTENIDOS E IR REGISTRANDO CON LA FINALIDAD DE LOGRAR LA PARTICIPACIÓN DE LA INTELIGENCIA DE LOS ESTUDIANTES.

Fig. 32: Conocimiento de las formas de aprendizaje. Planificación Profesora

Esta secuencia de activación de conocimientos previos, se encuentra enmarcada dentro de los lineamientos presentados en las orientaciones didácticas del programa de estudio.

Finalmente, la última categoría de los subdominios del MK que emerge desde las entrevistas de los profesores, corresponde al “Conocimiento de los Procedimientos”. En esta categoría se encuentran presentes los algoritmos de carácter convencional, así como alternativos y sus respectivos fundamentos. Junto con esto se encuentran las características que tendrá este objeto en cuestión, para nuestro caso el área de algunas figuras planas. La identificación de esta categoría se aprecia en el siguiente extracto: “Un triángulo puede ser encontrado en un rectángulo, o pueden encontrarse figuras intermedias dentro de este cuadrado. Por ejemplo, dentro de un cuadrado hay dos triángulos, entonces, si quiero conocer el área de un triángulo supongo que hay un cuadrado y después parto la cantidad de veces que me falta y cosas así...”.

Es en este sentido sé que evidencia el surgimiento de esta categoría. No obstante, si bien la categoría puede relacionarse con la cita descrita, esta se encuentra enmarcada en las creencias del profesor respecto a la justificación implícita de su construcción, ya que no menciona (quizá no considera necesario) hacer alguna observación respecto a que sustenta la construcción mencionada.

Respecto al análisis de las respuestas entregadas por los docentes, la evidencia muestra una relación directa entre tipo de experiencia en docencia (práctica del ejercicio docente) y el grado de justificación respecto a algún procedimiento o justificación a realizar. Mientras que el profesor con menos experiencia basa fundamentalmente las justificaciones en bases “que se asumen obvias” o “bajo la premisa que considera pertinente” la profesora agrega al proceso de justificación la variable de “contar con la experiencia realizando docencia en este nivel para complementar sus argumentos.

Respecto a las categorías que emergen desde las respuestas en contraste con el modelo, podemos resumir principalmente en el siguiente cuadro:

Categorías identificadas en la labor docente.

MK		
KoT	KSM	KPM
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fenomenología</li> <li>• Representaciones</li> <li>• Procedimientos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Conexión de Complejización</li> <li>• Conexión de Simplificación</li> <li>• Conexión de Contenido Transversal</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Formas de hacer y proceder.</li> </ul>

Tabla 2: Categorías identificadas en la labor docente (MK). Elaboración propia.

Desde este punto, merece la pena mencionar, aquellas categorías que se esperaban encontrar, pero no forman parte del discurso docente:

1. Respecto al KoT:

- a) Propiedades y sus Fundamentos: La esperanza de encontrar esta categoría radica en uno de los conceptos implícitos en el logro del objetivo de clase escogido, el que corresponde a la equivalencia de superficies. Este concepto permitiría el desarrollo adecuado de las fórmulas para calcular áreas en figuras planas, dado que justifica el procedimiento de recortes y superposición utilizado tan trivialmente.

Como mencionaba Olmo, *et al.* (1989), las propuestas, en este caso de MINEDUC, no contemplan los matices sobre los que se construye el concepto de área. En este sentido, se deja de lado la necesidad de considerar trabajar la equivalencia de superficies. Chamorro (2006) menciona que la equivalencia de superficies requiere de un tipo de enseñanza específico, sin esperar que los estudiantes lo aprendan solos. Este concepto debiera constituir un objeto a enseñar. Es por esto que se esperaba encontrar dentro

del discurso docente la necesidad de incorporarlo en el trabajo o al menos recurrir a él al momento de justificar algún procedimiento.

De esta misma manera, se esperaba encontrar dentro de los aspectos alusivos a esta categoría, propiedades como la de disección e igualdad que en conjunto con el concepto de equivalencia de superficies, permitirían un desarrollo adecuado del área en este nivel.

b) Definiciones: Esta categoría se encuentra de manera implícita dentro del discurso docente. Se esperaba encontrar aspectos específicos como:

- Definir qué se entendería como área.
- Definiciones de las habilidades: En este caso, a la habilidad de desarrollar las fórmulas. En este aspecto el profesor posee una definición propia, relacionándola con la deducción. No obstante, estas habilidades son distintas desde el punto de vista matemático.

## 2. Respecto al KSM

En función a este subdominio, las categorías que no se identificaron son:

a) Conexiones Auxiliares:

- Estas conexiones corresponden a aquellas donde un concepto utiliza a otro dentro de sus procedimientos. En este caso, se esperaba ver emerger el concepto de equivalencia de superficies siendo utilizado por el concepto de área al momento de realizar la construcción de las fórmulas para el cálculo de área en triángulos, paralelogramos y trapecios.

## Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

Continuando con el análisis, ahora es momento de levantar las categorías correspondientes al Dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido.

Este conocimiento, tal como indica su nombre, es el conocimiento propio de la labor docente. En otros términos, puede ser entendido como “el conocimiento de cómo se enseña un contenido”.

Al igual que el dominio anterior, el PCK cuenta con 3 subdominios, los cuales corresponden a: el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), el conocimiento de la enseñanza de la matemática (KTM) y el conocimiento de los estándares de aprendizaje (KMLS).

Bajo la mirada de este dominio, parece pertinente analizar la siguiente aseveración: “... siempre es necesario iniciar recordando una clase de estos polígonos y estoy cuerpos que para nosotros son conocidos porque en el fondo los que ellos más recuerdan son: el triángulo, el rectángulo y el cuadrado...”. Desde esta afirmación,

emerge una categoría correspondiente al KFLM, la que corresponde al “Conocimiento de las formas de interacción de los alumnos con el contenido”. Esta categoría corresponde al conocimiento de los procesos y estrategias de los alumnos. Además, esta categoría emerge de la mano de otro aspecto importante, el cual corresponde a la segunda categoría del KMLS, que corresponde al “Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado”. En esta categoría, se espera que el profesor posea conocimiento respecto a qué contenido corresponde utilizar y en qué momento, así como el tener presente que es lo que sabe el estudiante y lo que debiese conocer.

Al igual que el apartado inicial de este capítulo, las creencias del profesor respecto al escoger un tipo de estrategia a utilizar o conocimiento a utilizar se ve directamente relacionado con el nivel de especialización que tenga, ya sea respecto a la disciplina misma y las teorías que la conforman, como a la experiencia adquirida tras años de ejercicio.

Dentro de las tareas propias del ejercicio de la docencia, se encuentran aquellas relacionadas directamente con el saber determinar qué tipo de actividades se utilizarán y cuál es su finalidad. La evidencia encontrada en las entrevistas muestra que los docentes en general consideran que ciertas actividades tienen un fin en particular para lograr el objetivo establecido. Tal caso se evidencia en la siguiente afirmación:

“Yo creo que para el inicio de OA, es complejo, porque estás hablando “altiro” de descomponer figuras, pero también es desafiante...”. Esta afirmación se encuentra bajo el marco de la pregunta 6 de la entrevista, donde se pregunta respecto a observaciones para la situación problema que da inicio al trabajo con áreas en el nivel. Desde esta respuesta emerge una de las categorías del KMT que corresponde al “conocimiento de actividades, tareas, ejemplos y ayudas”. El conocimiento de estos elementos se relaciona con la intención de aplicar cierta actividad, en qué momento, así como el tipo de ayuda a prestar para el estudiante.

Esta afirmación evoca otra categoría que complementa a la anterior. Esta nueva categoría que emerge es la denominada “conocimiento de las concepciones de los estudiantes sobre matemática”. Esta categoría corresponde al conocimiento del docente respecto a los intereses y expectativas que tiene el alumno respecto a la asignatura. En este sentido la profesora menciona sobre “lo desafiante” que podría resultar para el estudiante al verse enfrentado a una situación de este tipo. La afirmación anterior se complementa con otra afirmación de la profesora: “...al ser desafiante genera más interés en los estudiantes, porque aquí, ellos en primer instante van a decir “yo no entiendo”, pero luego van a ir haciendo este trabajo...” confirmando así la presencia de esta categoría que contempla lo que espera el estudiante.

Uno de los aspectos importantes en docencia quizá de los más relevantes, es aquel que corresponde al saber que enseñar, es decir, conocer cuales son los lineamientos curriculares que indican que contenido corresponde trabajar. Este tema corresponde al KMLS denominado “Conocimiento de los estándares de

aprendizaje”. La primera categoría de este subdominio del PCK, es la que se relaciona sobre el conocimiento respecto a lo que se debe enseñar respecto al nivel en el que se encuentra el estudiante.

Esta categoría denominada “Contenidos matemáticos que se requieren enseñar” se plasman en la siguiente afirmación: “Yo creo que está bien, porque primero te hablan del rol espacial. Hay una parte de traspasar de figuras de 2D a 3D, va a ser necesario”. Esta afirmación fue realizada por la profesora al momento de mencionar sus observaciones al momento de revisar los aprendizajes esperados declarados en el programa de estudio de 7° año de Enseñanza Básica, otorgado por MINEDUC. Este conocimiento se encuentra directamente relacionado con el que respecta al conocimiento del profesor sobre enseñanza, considerando las potencialidades, actividades y estrategias, entre otros aspectos a considerar. Este conocimiento denominado “Conocimiento de las teorías personales o institucionalizadas de enseñanza” corresponde a la primera categoría del KMT, subdominio relativo a la enseñanza. En esta oportunidad, su presencia se evidencia en la afirmación: “... que promueva la comprensión de conceptos matemáticos y la no mera repetición y mecanización de algoritmos, ..., porque eso lleva a no detenerte como en puro contexto”. esta afirmación realizada por el profesor, se pone en manifiesto al momento de revisar las orientaciones didácticas presentes en el programa de estudio, constituyendo de esta forma, una teoría de enseñanza de carácter institucional.

Finalmente, la última categoría que emerge de este dominio del conocimiento, es la denominada “Recursos materiales y virtuales”, perteneciente al KMT.

Esta categoría se refiere al conocimiento del profesor sobre qué recursos, tanto materiales como virtuales, son pertinentes para la enseñanza de la matemática. Esta categoría se evidencia en la afirmación: “Antes de presentar la secuencia como viene propuesta, yo llevaría, antes de que vieran el dibujo, estas imágenes impresas”. haciendo referencia a la necesidad de trabajar con material concreto para hacer un tránsito hacia lo pictórico (que es como se presenta en el texto del estudiante).

Respecto a las categorías que emergen desde las respuestas en contraste con el modelo, podemos resumir principalmente en el siguiente cuadro:

Categorías identificadas en la labor docente.

PCK		
KFLM	KMT	KMLS
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Conocimiento de las formas de interacción de los alumnos con el</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Teorías personales o institucionalizadas de enseñanza.</li> <li>• Recursos materiales y virtuales.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Contenidos matemáticos que se requieren enseñar.</li> </ul>

<p>contenido matemático.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Conocimiento de las concepciones de los estudiantes sobre matemática.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Actividades, tareas, ejemplos, ayudas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado.</li> <li>• Secuenciación de diversos temas.</li> </ul>
--	--	---

Tabla 3: Categorías identificadas en la labor docente (PCK). Elaboración propia.

Desde este punto, merece la pena mencionar, aquellas categorías que se esperaban encontrar, pero no forman parte del discurso docente:

#### 1. Respecto al KFLM

- Conocimiento sobre formas de Aprendizaje: Este conocimiento se esperaba poder evidenciar al momento de trabajar con las orientaciones didácticas. En este ítem, se buscaba evidenciar cómo el docente manifiesta el conocimiento de cómo el estudiante aprende.
- Conocimiento de fortalezas y dificultades: En esta categoría, se espera que el profesor muestre conocimiento acerca de errores, obstáculos y dificultades propias del trabajo con áreas (en este caso). Este conocimiento se esperaba evidenciar en aspectos como los que indican que “los estudiantes suelen confundir el área con el perímetro”, entre otras dificultades comúnmente evidenciadas en la práctica.

#### Lectura General del modelo

El MTSK está orientado a poder analizar el conocimiento especializado del profesor de matemática desde dos aristas: lo teórico (referente a la disciplina) y lo didáctico (relacionado al quehacer de la profesión).

Posterior a este capítulo de análisis donde emergen categorías de ambos dominios y se evidencia la presencia de estas tanto en el discurso hablado como escrito (en el caso de las planificaciones) por parte de los docentes, podemos afirmar lo siguiente:

El MTSK es un modelo de análisis bastante completo. Permite considerar aspectos tanto disciplinares como didácticos en forma simultánea, permitiendo una articulación entre lo referente al contenido propiamente tal y lo didáctico.

No obstante, y según la evidencia presentada, este modelo no es lo suficientemente específico para levantar o identificar todos los aspectos relacionados a sus dominios y categorías. En esta investigación se aprecia claramente una tendencia a

reconocer de manera más fácil los aspectos relacionados a la didáctica de la matemática, más que a el conocimiento del contenido.

Esta aseveración se encuentra basada en que no se pudo determinar la presencia de la categoría referente a las propiedades y fundamentos, así como de las definiciones pertenecientes al subdominio del KoT.

En este sentido, el profesor declara: “Falta ser un poco más explícito en que es “la igualdad de los objetos”, porque uno se superpone encima del otro...”. De este ejemplo (podemos evidenciar más a lo largo de la entrevista), podríamos considerar la presencia de una o ambas de las categorías descritas como no presentes en el análisis realizando una suerte de “lectura entre líneas” realizando interpretaciones como: “quizá el profesor se refiere a la igualdad de superficies, pero también puede ser a la igualdad de las fórmulas”. La poca precisión del discurso por parte del profesor no permite declarar una presencia clara de estas categorías.

Dejando estas salvedades de lado, el modelo ofrece la oportunidad de poder determinar/ identificar aquellos aspectos/ categorías en que el profesor requiere profundizar. Desde esta perspectiva y lo levantado del proceso de análisis, podemos declarar que los profesores participantes requieren potenciar el desarrollo del conocimiento respecto al primer dominio del MTSK.

La necesidad imperativa de considerar contenido previo a la introducción de las fórmulas para el cálculo de áreas, tal como se presentó en los antecedentes, en lo que respecta al concepto de equivalencia de superficies, ya que es un concepto implícito y utilizado de manera descontextualizada para justificar el uso de la fórmula y orientar el trabajo hacia el cálculo.

Este análisis evidencia la necesidad de fortalecer aspectos del MK durante la formación de profesores, así como de ofrecer oportunidades para quienes se desempeñan como profesores en este nivel, la opción de subsanar estos problemas.

La gran tendencia identificada a poder reconocer aspectos del PCK más que de MK, se interpreta como el constante trabajo de “ensayo y error” practicado habitualmente por los profesores en pro de conseguir resultados académicos por parte de sus estudiantes dejando de lado aquello relativo a la disciplina que permite crear un sentido para el estudiante sobre lo aprendido. Esta prueba de la experiencia por sobre el conocimiento se evidencia en las justificaciones dadas por ambos profesores al momento de exponer sus pareceres en las distintas etapas de la entrevista.

## Capítulo 4 – Conclusiones

En el presente capítulo se procede a presentar las conclusiones, sugerencias y perspectivas del estudio de caso realizado. Los apartados serán los siguientes:

- Conclusiones y reflexiones respecto al objetivo de investigación.
- Sugerencias para la formación de profesores.

### 4.1 Conclusiones y reflexiones respecto al objetivo de investigación

Para esta sección, recordaremos los objetivos planteados en el capítulo 2 de este documento. El objetivo general de la investigación es “Caracterizar conocimiento especializado del Profesor de Matemática para propiciar el desarrollo de las fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios”. Los objetivos específicos definidos para el logro de este objetivo son:

- OE 1: Identificar los conceptos implícitos y explícitos para el desarrollo de las fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios por parte de los docentes.
- OE 2: Describir conocimiento movilizado por profesores para el desarrollo y aplicación de las fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios.
- OE 3: Determinar conocimiento especializado del Profesor de Matemática para un logro adecuado del desarrollo de las fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios

#### 4.1.1 Conclusiones OE 1

Respecto a este objetivo específico presentaremos primero una conclusión general y luego otra en particular para cada participante de esta investigación:

##### 4.1.1.1 Conclusiones generales

Una vez realizadas las entrevistas a los docentes participantes y analizadas en contraste con los antecedentes presentados no se logra apreciar la presencia

declarada del concepto de equivalencia de superficie para logro del objetivo de aprendizaje planteado para el nivel.

La evidencia presentada en los antecedentes indica que es necesario realizar un tratamiento de la equivalencia de superficies como objeto de estudio por su utilidad para dar sentido al trabajo con el área, pero esta no se utiliza al momento de realizar un análisis conjunto de la documentación entregada por MINEDUC ni al elaborar una propuesta de clase.

No obstante, luego del estudio de casos, se declara que:

Los conceptos implícitos y explícitos identificados son:

Triángulos	Transformación
Paralelogramos	Hipótesis
Trapecios	Medida
Composición	Concreto
Descomposición	Pictórico
Desarrollar	Simbólico
Diagonal	Desarrollar
Comprender	Aplicar
Igualdad de áreas	Relacionar
Ángulos	Recta
Rotación	Traslación
Área	Aplicar
Simbólico	Concreto

**Cuadro resumen** – Conceptos implícitos y explícitos en el discurso de profesores en el estudio

#### *4.1.1.2 Conclusiones particulares*

Respecto a las conclusiones por cada participante de estudio respecto al OE1, se mencionan:

##### *4.1.1.2.1 Profesor*

En general, los conceptos más utilizados a lo largo de la investigación corresponden a:

- Igualdad de áreas
- Comprender
- Relacionar
- Composición
- Descomposición
- Traslación
- Ángulos
- Recta
- Transformación
- Área

##### *4.1.1.2.2 Profesora*

En general, los conceptos más utilizados a lo largo de la investigación corresponden a:

- Traslación
- Rotación
- Transformación
- Área
- Calcular
- Aplicar
- Desarrollar
- Composición
- Descomposición
- Diagonal
- Pictórico
- Simbólico
- Concreto

#### 4.1.2 Conclusiones OE 2

Al igual que en el apartado anterior, se presentará una conclusión general para posteriormente presentar los resultados particulares de cada participante del estudio.

##### 4.1.2.1 Conclusiones generales

El conocimiento movilizado por los profesores para el desarrollo de las fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios considera, desde la perspectiva del MTSK, principalmente dos dominios: el relacionado con el conocimiento del contenido y el que corresponde al conocimiento didáctico del contenido.

Lo que se pudo determinar posterior a la experiencia de las entrevistas respecto al conocimiento que movilizan, principalmente corresponde a:

- Conocimiento de los temas matemáticos, evidenciado principalmente en el uso de distintos tipos de representación de un concepto, fenomenología y procedimientos. Estos aspectos se enmarcan dentro del KoT.
- Conexiones de complejización y simplificación para tratar los contenidos, así como conexiones de contenido transversal. Estas categorías corresponden al KSM.
- Conocimiento de las formas de interacción del alumno con el contenido, presente en el KFLM.
- Respecto al KMT, principalmente se movilizan teorías personales respecto a enseñanza y la escogencia intencionada de actividades, tareas y ejemplos.

Por otra parte, este estudio de caso evidenció dos aspectos relevantes: la experiencia y el nivel de especialización juegan un rol fundamental al momento de determinar el tipo de conocimiento que moviliza un profesor.

El modelo del MTSK, según la evidencia recogida, no es lo suficientemente específico para levantar o identificar todos los aspectos relacionados a sus dominios y categorías. En esta investigación se aprecia claramente una tendencia a reconocer de manera más fácil los aspectos relacionados a la didáctica de la matemática, más que a el conocimiento del contenido.

Esta aseveración se encuentra fundamentada en que, en proporción sobre detección de categorías de ambos dominios, el relativo a MK presentó una menor presencia en el análisis de respuestas entregadas por los docentes participantes.

De manera adicional, se declara que el modelo es poco específico o entrega pocas luces para determinar aspectos tan específicos como los relativos a las categorías de propiedades y fundamentación, así como las definiciones. El lograr reconocer la existencia de estas categorías, al menos en esta investigación, requiere de una

tarea de interpretación y lectura sobre el discurso intencionando la presencia de alguna de estas.

Por otra parte, el estudio revela que una mayor experiencia de cátedra en el nivel (en 7° año de enseñanza básica para nuestro caso) enfatiza el conocimiento hacia el lado didáctico del conocimiento, propiciando actividades que consideren al estudiante como parte activa de la clase, considerando fortalezas y debilidades, considerar el error entre otras y, por otra parte, fuertemente influenciado por los estándares institucionales (en este caso MINEDUC). Las clases y las visiones del aprendizaje están bastante orientadas hacia “lo que se espera que aprendan en el nivel” según lo que se declare en los programas de estudio y los textos escolares. En su contraparte, a un mayor nivel de especialización, se busca profundizar en los aspectos teóricos que dan sustento al conocimiento que se busca movilizar. Suele utilizarse un lenguaje mucho más técnico y las habilidades a desarrollar tienden a ser de orden superior (no se estancan en propuestas enfocadas en la aplicación). Este desarrollo se encuentra fuertemente influenciado por el aspecto teórico como rector y director de la secuencia de aprendizaje a trabajar.

A modo de síntesis se presentan los cuadros resúmenes respecto a las categorías que emergen de esta investigación:

#### 4.1.2.1.1 Conocimiento Matemático (MK)

MK		
KoT	KSM	KPM
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fenomenología</li> <li>• Representaciones</li> <li>• Procedimientos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Conexión de Complejización</li> <li>• Conexión de Simplificación</li> <li>• Conexión de Contenido Transversal</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Formas de hacer y proceder.</li> </ul>

#### 4.1.2.1.2 Conocimiento Didáctico del contenido (PCK)

PCK		
KFLM	KMT	KMLS
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Conocimiento de las formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Teorías personales o institucionalizadas de enseñanza.</li> <li>• Recursos materiales y virtuales.</li> <li>• Actividades, tareas, ejemplos, ayudas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Contenidos matemáticos que se requieren enseñar.</li> <li>• Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y</li> </ul>

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Conocimiento de las concepciones de los estudiantes sobre matemática.</li> </ul>		<p>procedimental esperado.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Secuenciación de diversos temas.</li> </ul>
---	--	---

#### 4.1.2.2 Conclusiones particulares

Respecto a las conclusiones por cada participante de estudio respecto al OE2, se mencionan:

##### 4.1.2.2.1 Profesor

De manera generalizada, el conocimiento movilizado por el docente se encuentra enmarcado dentro del conocimiento del contenido (MK).

Posterior al análisis de las entrevistas, se aprecia una clara tendencia a utilizar este dominio del modelo (no necesariamente de manera consciente) para la elaboración de secuencias de aprendizaje, justificaciones, entre otros aspectos buscando desarrollar habilidades de orden superior como es el caso de la habilidad de “comprender”.

Se encuentran presentes, aunque de manera menor en cuanto a presencia, aspectos relacionados con el conocimiento de la didáctica del contenido. La creencia respecto a esta tendencia es por no contar con la experiencia en el nivel impartiendo en contenido por lo que la abstracción del objetivo se hace desde una perspectiva un poco menos cercana. Esta tendencia se encuentra fuertemente influenciada por las creencias del profesor respecto a como debiese tratarse el contenido en este nivel.

Se requiere iniciar un trabajo hacia la movilización de conocimiento de tipo didáctico para potenciar el desarrollo integral del estudiante.

##### 4.1.2.2.2 Profesora

De manera más generalizada, la profesora presenta una tendencia mayor a movilizar conocimiento desde la arista del conocimiento didáctico del contenido.

Esta generalización viene dada por la experiencia en aula con el nivel escogido junto con el contenido a trabajar. El conocimiento movilizado tiende a considerar aspectos como las dificultades que tienen históricamente los estudiantes (identificadas a lo

largo de la práctica) así como las concepciones que tengan respecto al contenido. De manera adicional, consideran que los lineamientos entregados por las instituciones directoras (en este caso MINEDUC) son rectores de las secuencias de trabajo y suelen seguirse a cabalidad sin contemplar la necesidad de ahondar en aspectos donde se desarrollen otro tipo de habilidades que no sean netamente aritméticas (al menos eso es lo que se evidencia en este estudio de casos).

El nivel de experiencia que se tiene, tiene directa relación en el cómo se efectúa el proceso de planificación e implementación de una secuencia de clases dado que ya “se sabe” lo que resulta y lo que no.

Términos como “en mi experiencia”, “lo que he visto”, entre otras, suelen justificar la escogencia de procesos, uso de términos entre otros para el logro de objetivos de aprendizaje.

Se requiere buscar instancias que permitan profundizar en aspectos teóricos más profundos con la finalidad de proponer e implementar secuencias de aprendizaje ricas en fundamentos sólidos y teorizados que permitan hacer una construcción significativa para el estudiante.

#### 4.1.3 Conclusiones OE 3

El estudio de caso permitió evidenciar que el parte del conocimiento especializado del profesor de matemática que permitirá un logro adecuado del OA 13 corresponde al concepto de equivalencia de superficies como contenido previo al desarrollo de las fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios.

La revisión de los antecedentes, así como del análisis de entrevistas y secuencias de clase, evidencian la presencia de manera implícita del concepto en las estrategias de recorte y superposición, traslación y rotación, así como composición y descomposición de figuras planas. Se requiere incorporar como contenido el trabajo con axiomas y propiedades que permitan, desde la teoría, poder dar sustento a las estrategias mencionadas.

Se propone que las dos propiedades a trabajar correspondan a aquellas presentadas en el apartado del objeto matemático, que corresponden a:

- **Propiedad de la congruencia:** Si una región  $R$  es congruente con otra región  $S$  entonces ambas regiones tienen la misma área:  $\text{área}(R) = \text{área}(S)$ .
- **Propiedad de disección:** Si una región  $R$  se descompone en varias subregiones disjuntas,  $A, B, \dots, F$ , entonces el área de  $R$  es la suma de las áreas de las subregiones:  $\text{área}(R) = \text{área}(A) + \text{área}(B) + \dots + \text{área}(F)$ .

#### *4.1.4 Conclusiones respecto al Objetivo General*

Respecto al objetivo general, se puede declarar que:

El conocimiento especializado que debe tener el profesor de matemática debe contemplar la incorporación de manera equitativa de los dos dominios pertenecientes al MTSK: el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido.

La necesidad de contar con ambos tipos de conocimientos respecta a:

Contar con las herramientas teóricas suficientes que permitan elaborar una secuencia de aprendizaje que contemple los aspectos basales fundamentales que permiten su construcción, como es en este caso, aquellos que permiten desarrollar la fórmula para el cálculo de área de figuras planas. En esta misma línea, se requiere contar con conocimiento de definiciones, diferentes tipos de representación, así como de conocimiento de conexiones de simplificación y complejización.

En contra parte, se requiere contar con conocimiento de carácter didáctico, es decir, manejar los lineamientos institucionales rectores, los que definen las metas a lograr. Dentro de este mismo dominio, considerar aspectos como dificultades propias del contenido a trabajar, concepciones de los estudiantes, entre otros aspectos.

#### 4.2 Sugerencias para la formación de profesores.

Se sugiere profundizar en los aspectos evidenciados en esta investigación considerando la implementación de unidades de contenido, seminarios entre otros en la formación de profesores que permitan construir de manera sólida y teóricamente fundamentada el concepto de área.

La correcta construcción de este concepto permitirá un logro adecuado de contenidos posteriores de niveles de educación secundaria y universitaria que requieran del manejo de las fórmulas para el cálculo de áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios, como es el caso de la medida de la superficie en cuerpos geométricos como prismas, entre otros.

Se espera que esta investigación aporte como una base por la cual comenzar a profundizar sobre los aspectos que como docentes debemos procurar subsanar en pro de un aprendizaje significativo de los estudiantes.

### 4.3 Debilidades de la Investigación

Lo que se presentará a continuación, corresponden a las debilidades que se consideran desde el punto de vista de esta investigación:

#### *4.3.1 Escolarización del concepto de equivalencia.*

El contenido con el cual se relaciona esta investigación se encuentra “demasiado escolarizado”, es decir, la mayoría de las investigaciones, trabajos, entre otros, se llevan a cabo dentro del mundo escolar, por lo que la búsqueda de investigaciones de carácter más teórico no se encuentra disponibles.

#### *4.3.2 Baja muestra.*

La investigación solo fue realizada bajo la mirada de dos profesores del área en el contexto escolar. Las dificultades en un mayor número de participantes se deben a encontrarse la implementación de las encuestas en un contexto de situaciones país que dificultaron la investigación.

#### *4.3.3 Falta de referentes en la formación inicial.*

Inicialmente se esperaba poder contar con a participación de profesionales del área de formación inicial o de postgrado con la intención de establecer categorías “ideales” o “esperadas” por parte de los entrevistados.

### 4.4 Proyecciones

Dentro de las proyecciones de la investigación se encuentran el establecer un punto de partida para futuras investigaciones en el ámbito de la formación inicial y continua sobre la continuidad de los saberes sabios y la transposición didáctica del contenido en las aulas escolares. La idea central es determinar si existen carencias al momento de recibir la instrucción inicial (al momento de la formación de pregrado) en las instituciones de educación superior, o existe algún fenómeno posterior que produce un deterioro de los contenidos aprendidos en pregrado que afectan la sucesión de contenidos en el contexto escolar, pasando por alto aquellos temas que debiesen ser tratados y que permiten un correcto tránsito entre los conceptos matemáticos para la construcción de aprendizajes significativos en los distintos niveles de la educación matemática.



## Referencias

- MINEDUC (2008). *Marco para la Buena Enseñanza*. Santiago, Chile
- MINEDUC (2013). *Programa de estudio Cuarto Año Básico*. Santiago, Chile
- Merino, Muñoz, Pérez, Rupin (2019). *Texto del Estudiante 7° Básico*, Chile, Editorial SM
- Ho Kheong, Kee Soon, Ramakrishnan (2019), *Texto del Estudiante 5° Básico*, Chile, Editorial Santillana
- Olmo, Moreno y Gil (1989). *Superficies y volumen ¿Algo más que el trabajo con fórmulas? Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Madrid. España: Editorial Síntesis
- Chamorro (2006). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Madrid. España: Editorial Pearsons.
- Belmonte y Chamorro (1988). *El problema de la medida*. Madrid. España: Síntesis
- Marmolejo y González (2014). *El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. Estado de la cuestión*. Salamanca
- Arceo (1999). *¿Problemas de geometría o problemas con la geometría?* Aguas Calientes, México. Grupo Editorial Iberoamérica
- González (2016). *La construcción del concepto de área de figuras planas en un aula inclusiva de grado décimo*. Bogotá, Colombia: Tesis de Magíster, Universidad Nacional de Colombia
- Olmo, Moreno y Gil (1989). *Superficies y volumen ¿Algo más que el trabajo con fórmulas? Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Madrid. España: Editorial Síntesis
- Castro, Flores y Segovia, (1997). *Relatividad de las fórmulas de cálculo de la superficie de figuras planas*. Granada. España: Editorial Researchgate
- Pizarro (2015). *Estimación de medida: el conocimiento didáctico del contenido de los maestros de primaria*. Barcelona. España: Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona
- Montes (2015). *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito: un estudio de caso*. Huelva. España: Tesis Doctoral, Universidad de Huelva

Yáñez (2016). *El conocimiento especializado del profesor de matemática sobre la resolución de problemas de optimización de funciones aplicando el concepto de derivada. Una investigación – acción*. Valparaíso, Chile: Tesis de Magíster, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Duval (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia. Editorial Peterlang S.A.

González (2016). *La construcción del concepto de área de figuras planas en un aula inclusiva de grado décimo*. Bogotá, Colombia: Tesis de Magíster, Universidad Nacional de Colombia.

Arceo (1999). *¿Problemas de geometría o problemas con la geometría?* Aguas Calientes, México. Grupo Editorial Iberoamérica.

D.I. Escudero, et.al (2015) *El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas,0020*

Carrillo, et al. (2016). *El papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los espacios de Trabajo Matemático*, Bolema, Río Claro, Brasil.

Latorre, Arnal, Rincón. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa*, El Masnou, Barcelona. Ediciones Experiencia S. L.

Rodríguez, Gil, García (1999), *Metodología de la investigación cualitativa*, Archidona, Málaga. Ediciones Aljibe.

# Secuencia Didáctica

## Séptimo Año de Enseñanza Básica

### Eje Temático- Geometría

---

Nombre:

Aprendizajes esperados – Geometría (1)

Según la propuesta del MINEDUC, en torno al eje de Geometría se espera:

En este eje, se espera que los estudiantes desarrollen sus capacidades espaciales y la comprensión del espacio y sus formas. Para ello, comparan, miden y estiman magnitudes, y analizan propiedades y características de diferentes figuras geométricas de dos y tres dimensiones. En este eje, la habilidad de representar juega un rol especial.

Los estudiantes deben describir posiciones y movimientos, usando coordenadas y vectores, y tienen que obtener conclusiones respecto de las propiedades y las características de lugares geométricos, de polígonos y cuerpos conocidos, por medio de representaciones. Deben transitar desde un ámbito bidimensional a uno tridimensional por medio de caras, bases, secciones, sombras y redes de puntos.

Los estudiantes aprenderán a calcular perímetros, áreas y volúmenes al resolver problemas técnicos y cotidianos. Al final de este ciclo, deberán ser capaces de apreciar y utilizar las propiedades y relaciones geométricas de manera adecuada y precisa, tendrán que ser competentes en mediciones geométricas y deberán poder relacionar la geometría con los números y el álgebra de manera armoniosa y concreta. Este eje presenta por primera vez las razones trigonométricas para que los estudiantes tengan más herramientas para resolver problemas. Más aun, propone que comprendan las representaciones de coordenadas en el plano cartesiano y usen destrezas de visualización espacial. En este proceso, tienen que usar diferentes instrumentos de medida para visualizar ciertas figuras 2D o 3D; se recomienda tanto las construcciones manuales como las tecnológicas.

Entrevistador: En torno a los aprendizajes esperados para el eje de Geometría, ¿Consideras necesaria hacer alguna observación? Para el caso de sí o no, me gustaría que argumentaras tu respuesta.

Entrevistador: Lo segundo, es o referente a las orientaciones didácticas, propuestas por el MINEDUC.

#### Orientaciones Didácticas – MINEDUC (2)

La formación matemática en este nivel requiere que los estudiantes den sentido a los contenidos matemáticos. Deben construir y aprender su propio significado para desarrollar una base sólida y lograr una comprensión profunda de los conceptos y procedimientos que utilizarán más adelante. En este contexto, se espera que el profesor utilice un modelo pedagógico que promueva la comprensión de conceptos matemáticos y no la mera repetición y mecanización de algoritmos, definiciones y fórmulas. Para esto, debe planificar cuidadosamente situaciones de aprendizaje en las que los estudiantes logren establecer vínculos entre los conceptos y las habilidades matemáticas y puedan demostrar la comprensión por sobre la mecanización.

Para aprender matemática, se necesita comprender conceptos y encontrar relaciones, lo que supone la abstracción de acciones del medio y la habilidad para “hablar”, “escribir” y “leer” en lenguaje cotidiano y en lenguaje matemático. En esta propuesta, igual que en la de enseñanza básica, se plantea el aprendizaje de matemática como un tránsito desde lo concreto a lo pictórico para luego llegar a lo simbólico. Esto significa que el estudiante adquiere conocimientos mediante el “aprender haciendo” en situaciones concretas, que luego traduce a un nivel gráfico y después expresa en símbolos matemáticos.

Se debe considerar al estudiante como protagonista de su aprendizaje, capaz de aprender y generar representaciones que surgen de una acción.

En esta propuesta se enfatiza el uso de representaciones, analogías y metáforas para una mayor comprensión. En este sentido, los estudiantes pueden resolver problemas en distintos niveles de abstracción, transitando en ambos sentidos desde representaciones reales, concretas, hasta las representaciones simbólicas y viceversa. Esta es la esencia del modelo concreto, pictórico y simbólico.

La búsqueda de nuevos conocimientos, así como del desarrollo de habilidades y de una comprensión más profunda de la matemática, ha llevado a los docentes a proponer variados lineamientos didácticos y numerosas metodologías de enseñanza. La literatura reciente indica que el éxito es posible en la medida en que el profesor sea capaz de establecer situaciones de aprendizaje que promuevan el

diálogo, la discusión matemática y el desarrollo de habilidades matemáticas respecto de los contenidos. A su vez, estas situaciones de aprendizaje deben despertar en los estudiantes la curiosidad y la capacidad de elaborar conceptos que permitan conectar la matemática con la vida diaria y las diferentes áreas del conocimiento.

Entrevistador: En relación a las orientaciones didácticas que propone el MINEDUC, ¿harías alguna observación? ¿Algo que consideres importante? ¿Algo que esté o no presente?

Entrevistador: Ahora, el MINEDUC propone para el nivel de Séptimo básico, en el eje de geometría, los siguientes objetivos de aprendizajes:

Acerca de los Objetivos de Aprendizaje (3)

Los Objetivos de Aprendizaje propuestos por el MINEDUC para el nivel de Séptimo Año de Enseñanza Básica en torno al eje de Geometría son los siguientes:

### **Geometría**

**(10)** Descubrir relaciones que involucran ángulos exteriores o interiores de diferentes polígonos.

**(11)** Mostrar que comprenden el círculo:

- Describiendo las relaciones entre el radio, el diámetro y el perímetro del círculo.
- Estimando de manera intuitiva el perímetro y el área de un círculo.
- Aplicando las aproximaciones del perímetro y del área en la resolución de problemas.
- Geométricos de otras asignaturas y de la vida diaria.
- Identificándolo como lugar geométrico.

**(12)** Construir objetos geométricos de manera manual y/o con *software* educativo:

- Líneas, como las perpendiculares, las paralelas, las bisectrices y alturas en triángulos y cuadriláteros.
- Puntos, como el punto medio de un segmento, el centro de gravedad, el centro del círculo inscrito y del circunscrito de un triángulo.
- Triángulos y cuadriláteros congruentes.

**(13)** Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios.

**(14)** Identificar puntos en el plano cartesiano, usando pares ordenados y vectores de forma concreta (juegos) y pictórica.

De estos aprendizajes propuestos para el Eje de Geometría, nos centraremos en el correspondiente al Objetivo de Aprendizaje (desde ahora OA) **(13)**:

***Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios.***

**Entrevistador:** En relación al OA a trabajar, ¿qué entiendes tú por “*Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios?*”

A continuación, revisaremos la propuesta efectuada por el MINEDUC, presentada en el texto escolar para el desarrollo de la unidad y del OA escogido.

Acerca de los conocimientos previos (4)

El MINEDUC propone los siguientes conocimientos previos necesarios para el logro los aprendizajes del Eje de Geometría:

- Construcción de triángulos.
- Área de superficie de cubos y paralelepípedos.
- Traslaciones, reflexiones y rotaciones.
- Ángulos agudos, obtusos, rectos extendidos y completos.
- Suma de los ángulos interiores de un triángulo.
- Suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero.

Entrevistador: En relación a los conocimientos previos propuestos: ¿Harías alguna observación en torno a estos conocimientos previos? En caso de ser así, ¿cuál sería esa observación?

Entrevistador: ¿Alguno que hubiese que agregar o no? ¿Algún otro conocimiento previo para el logro del OA? ¿Algo que deba considerarse como conocimiento previo?

Entrevistador: Finalmente, ¿Cómo tú presentarías estos conocimientos previos considerando tu observación? ¿Cuáles serían los conocimientos previos para el logro de este OA?

Entrevistador: Para este OA, se proponen los siguientes indicadores de evaluación:

Acerca de los indicadores de evaluación (5)

Los indicadores de evaluación propuestos para el OA 13: “**Desarrollar y aplicar la fórmula área de triángulos, paralelogramos y trapecios**” son los siguientes:

- Dibujan cuadriláteros a partir de un triángulo dado.
- Reconocen que el área de un triángulo se obtiene por dividir un cuadrilátero por una de sus diagonales.
- Transforman paralelogramos en rectángulos de la misma altura por medio de recortes o dibujos, reconociendo que se mantiene la medida del área.
- Formulan verbal y simbólicamente la regla para calcular el área de paralelogramos.
- Descomponen concreta o pictóricamente un paralelogramo en dos triángulos con el mismo contenido, verificando que el área de un triángulo se calcula como medio paralelogramo con la misma base y altura.
- Recortan o dibujan dos trapecios iguales y confeccionan o dibujan un paralelogramo con la misma altura y el doble del área, obteniendo la fórmula del área de un trapecio.
- Resuelven problemas geométricos y de la vida cotidiana, cuya resolución requiere calcular áreas de triángulos, paralelogramos y trapecios.

Entrevistador: Al igual que en el apartado anterior: ¿Harías alguna observación en torno a estos indicadores de evaluación para el logro del OA? En caso de ser así, fundamenta el porqué de tu elección.

Entrevistador: Entonces, si tuvieras que escoger uno de los dos o juntar ambos en un nuevo indicador: ¿Cómo sería?

Entrevistador: En la siguiente página, nos trasladamos ahora al texto del estudiante. Esto corresponde al inicio de la propuesta que se encuentra en el texto de 7mo básico, el cual propone una situación problema, que dice:

Acerca de los inicios de la propuesta (6)

La propuesta de MINEDUC en torno al trabajo con el cálculo de áreas en el texto del estudiante, inicia con lo siguiente:

**¿Cómo calcular el área de algunos polígonos?**

Josefa necesita organizar el cultivo de un nuevo terreno, para ello debe calcular el **área** total de este.

Ha dibujado el siguiente esquema del terreno y realizado las mediciones necesarias.

El diagrama muestra un terreno dividido en tres parcelas. Parcela 1 es un triángulo púrpura con una base de 6 m y una altura de 3 m. Parcela 2 es un trapecio amarillo con una base superior de 7 m, una base inferior de 6 m y una altura de 3 m. Parcela 3 es un triángulo azul con una base de 2 m y una altura de 3 m. Las mediciones de 7 m y 6 m se refieren a las longitudes horizontales de las parcelas superior e inferior, respectivamente.

Entrevistador: ¿Qué observaciones considerarías tú en la situación planteada, siendo esta la inicial para el logro de este OA?

Esta pregunta apunta a que si tu consideras pertinente la situación presentada para dar inicio al trabajo con el cálculo de áreas.

Entrevistador: ¿Alguna observación acerca de este problema?

Entrevistador: En la siguiente página, se presenta la propuesta para dar respuesta a la situación planteada. Parte con una situación acerca de cómo se calcula el área de un triángulo.

Se lee la propuesta del texto del estudiante.

## Acerca de la fórmula para calcular el área de triángulos (7)

El texto del estudiante para Séptimo Año de Enseñanza Básica entregado por el MINEDUC propone la siguiente secuencia para el desarrollo del OA propuesto y palabras clave:

Palabras clave

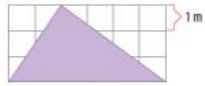
Área  
Base  
Altura  
Área de triángulo  
Área de paralelogramo  
Área de trapecio

¿Qué observaciones incorporarías en las palabras clave propuestas?

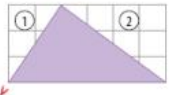
**Situación 1** Calcular el área de un triángulo

Josefa calcula primero el área de la parcela 1.

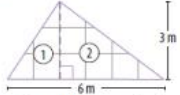
**Paso 1** Inscribe el triángulo en un rectángulo con la medida que muestra la imagen de la parcela, teniendo en cuenta que la **base** del triángulo coincide con la base del rectángulo y la **altura** del triángulo es igual al ancho del rectángulo.



**Paso 2** Recorta el triángulo central. El papel sobrante tendrá la forma de dos triángulos rectángulos.



**Paso 3** Superpon los triángulos rectángulos 1 y 2 en el central (morado).



Observa que al unir los dos triángulos se forma otro con la misma altura y la misma base, por lo tanto tiene la misma superficie que el triángulo inicial.

Así, el rectángulo se puede descomponer en dos triángulos que tienen la misma superficie; entonces la superficie del rectángulo es el doble de la superficie del triángulo.

**Paso 4** Calcula el **área de un triángulo (A)** que equivale a calcular el área de un rectángulo y dividir por 2 este resultado.

$$A = \frac{6 \cdot 3}{2} = \square = \square$$

Luego, el área de la parcela 1 es \_\_\_\_\_ m<sup>2</sup>.

En general, para calcular el área de un triángulo (A), se multiplica la longitud de un lado (b) por la altura correspondiente (h) y el resultado se divide en 2.

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

En relación a esta situación: ¿Qué elementos, conceptos y justificaciones se encuentran presentes en el desarrollo de la fórmula para el cálculo de áreas de triángulos? Indique estos para cada uno de los pasos propuestos.

En cada uno de los pasos presentados, en caso de considerarlo necesario, realice las modificaciones respectivas a la propuesta dada.

Entrevistador: Sólo para recapitular, la intención es desarrollar las fórmulas para el cálculo de áreas, en este caso la del triángulo.

Entrevistador: En relación a la pregunta como la planteo al inicio: ¿Qué elementos, conceptos y justificaciones se encuentran presentes en el desarrollo de la fórmula para el cálculo de áreas de triángulos? Indique estos para cada uno de los pasos propuestos. Me gustaría que pudiera decirme que está presente de manera implícita o explícita me indique porque este procedimiento es válido, ya que hasta ahora tenemos según la propuesta que se corta una figura, se superpone sobre otra y esto es suficiente para la justificación.


Entrevistador: ¿Harías alguna modificación en torno al orden?

Acerca de la fórmula para el cálculo de áreas de paralelogramos (8)


**Situación 2** Calcular el área de un paralelogramo

Luego, Josefa calcula el área de la parcela 2, que tiene forma de paralelogramo.

**Paso 1** Dibuja un paralelogramo sobre un papel cuadrículado, con las medidas que muestra la imagen de la parcela.

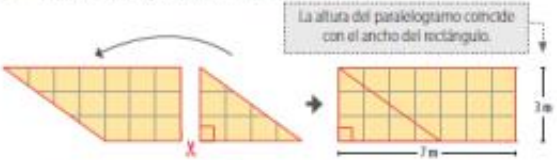


**Paso 2** Traza desde un vértice la altura del paralelogramo.



**Paso 3** Recorta el triángulo formado y lo traslada como indica la imagen.

La altura del paralelogramo coincide con el ancho del rectángulo.



Observa que al recortar las figuras y unir las se ha formado un rectángulo.

**Paso 4** Calcula el área del paralelogramo (A), que equivale a calcular el área de este rectángulo.

$$A = 7 \cdot 3 = \square$$

Luego, el área de la parcela 2 es \_\_\_\_\_ m<sup>2</sup>

En general, para calcular el área de un paralelogramo (A) se multiplica la medida de un lado (b) por la altura correspondiente (h).

$$A = b \cdot h$$

¿Servirá esta fórmula para calcular el área de un rombo?, ¿por qué? Justifica con un ejemplo o contraejemplo.

¿Qué elementos, conceptos y justificaciones se encuentran presentes en el desarrollo de la fórmula para el cálculo de áreas de paralelogramos? Indique estos para cada uno de los pasos propuestos.

En cada uno de los pasos presentados, en caso de considerarlo necesario, realice las modificaciones respectivas.

Acerca de la fórmula para el cálculo del área de trapecios (9)

**Situación 3** Área de un trapecio

Finalmente calculará el área de la parcela 3, la que tiene forma de trapecio.

**Paso 1** Dibuja dos trapecios congruentes de distinto color, teniendo presente que cada cuadrado representa 1 m<sup>2</sup>.

¿Qué diferencia a los trapecios de los paralelogramos?

**Paso 2** Recorta en uno de los trapecios, dos triángulos rectángulos y un rectángulo. Luego, con estas partes y el otro trapecio forma un rectángulo.

Observa que se ha formado un rectángulo, cuyo ancho coincide con la altura del trapecio (3 m) y el largo corresponde a la suma de sus bases, en este caso  $6 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$ .

**Paso 3** Para calcular el área de un trapecio (A), calcula el área del rectángulo que se ha formado y este resultado lo divide en dos, ya que la superficie del rectángulo equivale al doble de la superficie del trapecio.

$$A = \frac{6+2}{2} \cdot 3 = \square$$

Luego, el área de la parcela 3 es \_\_\_\_\_ m<sup>2</sup>.

En general, para calcular el **área de un trapecio (A)**, se suman las medidas de sus bases (B y b) y este resultado se multiplica por la altura del trapecio (h), luego se divide por 2.

$$A = \frac{B+b}{2} \cdot h$$

¿Qué elementos, conceptos y justificaciones se encuentran presentes en el desarrollo de la fórmula para el cálculo de áreas de trapecios? Indique estos para cada uno de los pasos propuestos.

En cada uno de los pasos presentados, en caso de considerarlo necesario, realice las modificaciones respectivas.

Acerca de la secuencia de clases (10)

En virtud de la secuencia de trabajo propuesta en el Texto del Estudiante de Séptimo Año de Enseñanza Básica, lo invitamos a desarrollar una planificación de clase. Esta debe considerar los siguientes momentos, los cuales serán indicados a continuación:

### **Apertura:**

¿Cómo comunicará lo que está a punto de suceder? ¿Cómo comunicará el cómo sucederá? ¿Cómo comunicará su importancia? ¿Cómo comunicará las conexiones con las clases previas? ¿Cómo comprometerá a sus estudiantes y captará su interés?

### **Nuevo Contenido**

¿Cómo explicará / demostrará todos los conocimientos / habilidades necesarias del objetivo? ¿Qué potenciales malentendidos anticipa? ¿Cómo los mitigará proactivamente? ¿Cómo / cuándo chequeará la comprensión? ¿Cómo enfrentará los malentendidos? ¿Qué estarán haciendo los estudiantes mientras usted explica?

### **Modelaje**

¿Cómo practicarán los estudiantes todos los conocimientos / habilidades requeridos del objetivo? ¿Cómo asegurará que los estudiantes tendrán múltiples oportunidades de practicar, con ejercicios que van de fácil a difícil? ¿Cómo / cuándo realizará una representación para revisar la comprensión? ¿Cómo enfrentará los malentendidos?

### **Practica independiente**

¿Cómo demostrarán los estudiantes el dominio independiente de todo el conocimiento y/o habilidades requeridos del objetivo? ¿Cómo dará oportunidades de refuerzo y extensión? ¿Con qué estrategia realizará el monitoreo? (Si la práctica independiente es una guía, adjúntela incluyendo la respuesta ejemplar.)

## **Cierre**

¿Cómo resumirán y establecerán los estudiantes la importancia de lo que aprendieron? ¿Qué reflexiones podemos hacer acerca de lo aprendido? (Considere tiempo para la realización del TICKET DE SALIDA y el cierre.)

A continuación, desarrolle una secuencia de clases siguiendo la estructura planteada al inicio incorporando las observaciones realizadas.

<b>OBJETIVO</b> ¿Cuál es su objetivo?	<b>PUNTOS CLAVE</b>
<b>EVALUACIÓN</b> Describir, brevemente, lo que harán los estudiantes para demostrar que han dominado el objetivo. (Adjuntar TICKET DE SALIDA completo e incluir la respuesta ejemplar.)	

<b>4. APERTURA (MINUTOS)</b> ¿Cómo comunicará lo <u>que</u> está a punto de suceder? ¿Cómo comunicará el <u>cómo</u> sucederá? ¿Cómo comunicará su <u>importancia</u> ? ¿Cómo comunicará las <u>conexiones</u> con las clases previas? ¿Cómo comprometerá a sus estudiantes y captará su interés?	<b>MATERIALES</b>

**3. INTRODUCCIÓN DEL CONTENIDO NUEVO (YO HAGO) (MINUTOS)**

¿Cómo explicará / demostrará todos los conocimientos / habilidades necesarias del objetivo? ¿Qué potenciales malentendidos anticipa? ¿Cómo los mitigará proactivamente? ¿Cómo / cuándo chequeará la comprensión? ¿Cómo enfrentará los malentendidos? ¿Qué estarán haciendo los estudiantes mientras usted explica?

--	--

**2. PRÁCTICA GUIADA (NOSOTROS HACEMOS)  
(MINUTOS)**

¿Cómo practicarán los estudiantes todos los conocimientos / habilidades requeridos del objetivo?  
¿Cómo asegurará que los estudiantes tendrán múltiples oportunidades de practicar, con ejercicios que van de fácil a difícil? ¿Cómo / cuándo realizará una representación para revisar la comprensión? ¿Cómo enfrentará los malentendidos?

--	--

<p><b>1. PRÁCTICA INDEPENDIENTE (TÚ HACES) (MINUTOS)</b></p> <p>¿Cómo demostrarán los estudiantes el dominio independiente de todo el conocimiento y/o habilidades requeridos del objetivo? ¿Cómo dará oportunidades refuerzo y extensión? ¿Con qué estrategia realizará el monitoreo? (Si la práctica independiente es una guía, adjúntela incluyendo la respuesta ejemplar.)</p>	

<b>5. CIERRE (MINUTOS)</b> ¿Cómo resumirán y establecerán los estudiantes la importancia de lo que aprendieron? ¿Qué reflexiones podemos hacer acerca de lo aprendido? (Considere tiempo para la realización del TICKET DE SALIDA y el cierre.)	

## Anexos

Considere este espacio para poder realizar anotaciones en caso de ser necesario.