



UNIVERSIDAD
ALBERTO HURTADO

Facultad de Educación

Departamento de Pedagogía Media y Didácticas Específicas

Programa de Magíster en Didáctica de la Matemática

**CONCEPTUALIZACIONES QUE PERMITEN ORGANIZAR LA
CONSTRUCCIÓN DEL LÍMITE, EN ESTUDIANTES DE 16 A 17 AÑOS.**

Informe de Trabajo Final para optar al grado de Magíster en Didáctica de la Matemática.

Por Felipe Antonio Neira Carrasco

Profesor Guía: Mg. Alberto Leyton

Profesor Informante: Mg. Cecilia Rojas Pardo

Santiago, Chile

2021

Dedicatoria

Este trabajo está dedicado a mi pareja Valeria y a mi pequeña hija Elena, por motivarme e incentivar-me a dar el paso para ingresar al magíster y, por todo el apoyo y energías que me han entregado para completar este proyecto tan importante en mi vida y desarrollo profesional.

Agradecimientos

Quiero agradecer mediante este trabajo a mis profesores de magíster por su compromiso en el proceso. A todos mis compañeros de magíster, por el apoyo y unión como grupo, en especial a Andrés, por acompañarme en el proceso, trabajos y conversaciones. Agradecer especialmente a mi profesor guía, Alberto Leyton, por el compromiso y dedicación para con el proyecto, por su responsabilidad y por cada uno de sus aportes para finalizar este proceso.

índice

Dedicatoria.....	2
Tabla de Ilustraciones	6
1. Introducción	8
2. Antecedentes y Objetivos de Investigación	11
2.1. Estudios Relacionados	12
2.2. Textos de estudios chilenos	15
2.3. Programa de estudio Límites, derivadas e integrales. Para formación diferenciada 15	
2.4. Primero y Segundo Medio	16
2.5. Problema de Investigación.....	23
2.6. Objetivo General.....	23
2.7. Objetivos Específicos	24
3. Objeto Matemático	25
3.1. Límite.....	26
3.1.1. La antigüedad (época griega)	26
3.1.2. Siglo XVII y XVIII	27
3.1.3. Siglo XIX y principios del XX.....	28
4. Marco Referencial.....	29
4.1. Teoría de los Campos Conceptuales de G. Vergnaud	30
5. Marco Metodológico.....	33
5.1. Enfoque y Alcance.....	34
5.2. Selección de la Muestra	34
5.2.1. Muestra	35
5.3. Recolección de Datos.....	35
5.4. Cuestionario, Justificación de la actividad y alcance de las preguntas.....	36
5.5. Justificación de las actividades.	38
6. Análisis, Resultados y Conclusiones	39
6.1. Categorización para el Análisis	40
6.1.1. Conceptualización del infinito.....	40
6.1.2. Tipo de Registro utilizado	42

6.1.3. Justificación	43
6.2. Análisis General	44
6.2.1. Sistema de Representación	44
6.2.2. Conceptualización del infinito	45
6.2.3. Justificaciones	46
6.3. Análisis por tarea	47
6.3.1. Actividad 1	47
6.3.2. Actividad 2	52
6.3.3. Actividad 3	55
6.3.4. Actividad 4	57
6.3.5. Actividad 5	61
6.3.6. Actividad 6	64
6.4. Conclusiones	68
6.5. Proyecciones	75
Bibliografía	76
7. ANEXOS	78
7.1. ANEXO 1: Respuesta Cuestionarios	79
7.1.1. Cuestionario A1	79
7.1.2. Cuestionario A2	81
7.1.3. Cuestionario A3	84
7.1.4. Cuestionario A4	86
7.1.5. Cuestionario A5	89
7.1.6. Cuestionario A6	91
7.1.7. Cuestionario A7	94
7.1.8. Cuestionario A8	96
7.1.9. Cuestionario A9	98
7.1.10. Cuestionario A10	101
7.1.11. Cuestionario A11	103
7.1.12. Cuestionario A12	106
7.1.13. Cuestionario A13	108

Tabla de Ilustraciones

Ilustración 1: Diagrama de números racionales. 1°Medio, 2019.....	17
Ilustración 2: Adición y sustracción de números racionales. 1°Medio, 2019.....	17
Ilustración 3: Texto del Estudiante 1°Medio, 2019	18
Ilustración 4: Texto del estudiante 1°Medio, 2019	19
Ilustración 5: Texto del estudiante 2°Medio, 2019	20
Ilustración 6: Texto del estudiante 2°Medio, 2019	21
Ilustración 7: Texto del estudiante 2°Medio 2019.....	22
Ilustración 8: Actividad 1 - A2	48
Ilustración 9: Actividad 1 - A4	49
Ilustración 10: Actividad 1 - A9	49
Ilustración 11: Actividad 1 - A1	50
Ilustración 12: Actividad 1 - A8	51
Ilustración 13: Actividad 2 - A8	53
Ilustración 14: Actividad 2 - A5	53
Ilustración 15: Actividad 2 - A6	54
Ilustración 16: Actividad 3 - A3	56
Ilustración 17: Actividad 3 - A3	56
Ilustración 18:Actividad 3 - A8	57
Ilustración 19: Actividad 4 - A4	58
Ilustración 20: Actividad 4 - A1	59
Ilustración 21: Actividad 4 - A5	59
Ilustración 22: Actividad 4 - A7	59

Ilustración 23: Actividad 4 - A9	60
Ilustración 24: Actividad 5 - A5	61
Ilustración 25: Actividad 5 - A1	62
Ilustración 26: Actividad 5 - A4	63
Ilustración 27: Actividad 6 - A1	64
Ilustración 28: Actividad 6 - A4	65
Ilustración 29: Actividad 6 - A8	66

1. Introducción

Una de las metas que se propone la educación chilena es el desarrollo de competencias y la entrega de herramientas que permitan a los estudiantes desenvolverse en una sociedad compleja y cambiante. Para esto el área de electividad en matemática busca ofrecer una oportunidad de profundizar en los conceptos matemáticos y ofrecer una primera aproximación a los currículos universitarios mediante el programa de “Límites, Derivadas e integrales” (Ministerio de Educación, 2019).

Los estudios a nivel Universitario sobre el cálculo dan cuenta que la principal dificultad se encuentra la comprensión del límite. Vergnaud (1990), en su Teoría de los Campos Conceptuales, indica que la construcción de un concepto, o mejor dicho la conceptualización de este, se produce de manera progresiva, en la medida que las situaciones a las que nos enfrentamos permitan generar filiaciones o rupturas en la construcción de conceptos. Por su parte la epistemología, da cuenta que la conceptualización del infinito jugó un rol primordial en la construcción del Límite, en conjunto a distintos ejes de la matemática, como el numérico, geométrico y el algebraico. Por esto nos proponemos indagar en aquellas conceptualizaciones que aportan a la comprensión del concepto de límite.

La siguiente investigación es del tipo cualitativa-descriptiva y tiene como finalidad generar conocimientos para la escogencia de las actividades que se proponen a los estudiantes considerando aquellas filiaciones y rupturas que están presentes en su desarrollo académico y aportan a la conceptualización del Límite.

El siguiente trabajo se conforma por 5 secciones que se describen a continuación:

- Antecedentes y Objetivo de Investigación

En este apartado se presentan otras investigaciones referidas a conceptos asociados a la conceptualización del cálculo y límites, mostrando los obstáculos que enfrentan los estudiantes en la enseñanza superior. En base a lo anterior, se analizan los textos escolares de primero y segundo año de enseñanza media, en relación con los conceptos que aportan a la conceptualización de límite en cuanto a sus representaciones, filiaciones y rupturas. Estos antecedentes dan forma a la pregunta de investigación y los objetivos de esta.

- Objeto Matemático

Se hace referencia a la construcción histórica epistemológica del límite, para identificar aquellas concepciones que están presentes en los matemáticos de los distintos periodos de la matemática.

- Marco Referencial

Se da a conocer una reseña de la teoría de los Campos Conceptuales de Gerard Vergnaud, principalmente se describen algunos de los componentes de la teoría y nos permitirán llevar a cabo nuestro análisis de las producciones realizadas por los estudiantes.

- Marco Metodológico

Se expone y explica el tipo y diseño de estudio. Comenzando por la elaboración del instrumento, la elección de la muestra y posteriormente los análisis y producciones de los estudiantes.

- Análisis, Resultados y Conclusiones

Finalmente, se presenta un análisis detallado por pregunta para dar a conocer las conceptualizaciones que se presentan en cada una de ellas y se da respuesta a la pregunta de investigación mediante los objetivos de la investigación.

- Referencias Bibliográficas

En esta sección se presentan las referencias bibliográficas utilizadas para esta investigación.

2. Antecedentes y Objetivos de Investigación

En este apartado se dan a conocer los antecedentes que sustentan y dan sentido a la investigación. Para esto, se presentan estudios relacionados a la conceptualización del límite, además se describen los textos escolares entregados por el Ministerio de educación (MINEDUC), para posteriormente describir el problema de investigación y los objetivos de estudio.

2.1. Estudios Relacionados

Se ha identificado que los alumnos de nivel medio utilizan la idea de límite asociada a ideas del lenguaje común desde un punto de vista geográfico, como algo que no debe o no puede ser sobrepasado. En estas nociones primitivas del límite, la expresión “tender hacia” no forma parte del vocabulario del estudiante, dificultando la construcción de oraciones como “Un color tiende a otro”, coartando la extrapolación al contexto matemático, teniendo como consecuencia que para el estudiante el Límite no tiene como significante ideas de variación de aproximación de este límite (Cornu, 1981).

De esta manera damos cuenta de una dualidad entre “límite” y “tender hacia”, provenientes del lenguaje cotidiano, por una parte “límite” es usado para designar algo preciso, mientras que “tender hacia” es algo más ambiguo. Pero es la noción de infinito quien está detrás de ambas. Estas ideas intuitivas tienen que ver con que la noción de límite no es alcanzada, este error parece provenir del debate filosófico entre el infinito potencial y el actual (Hitt, 2003).

En general, existe una desvinculación entre la conceptualización de los estudiantes y el concepto de límite, donde las definiciones formales no parecen estar al alcance de los

estudiantes de enseñanza media y no les es posible crear un vínculo entre una definición y sus representaciones (Tall & Vinner, 1981).

Por otra parte, en la construcción misma del límite se pueden identificar cuatro pilares principales en su estructura: los sistemas numéricos, las funciones, los procesos infinitos y las sucesiones, los cuales estructuran su construcción conceptual (Bustos, Naranjo, Pisco, Torres, & Romero, 2016). Las dificultades que se presentan en estos pilares se manifiestan fuertemente cuando los estudiantes ingresan a la educación superior y se enfrentan al estudio del cálculo. Particularmente en Chile, los docentes universitarios declaran que sus estudiantes presentan complicaciones para el trabajo con funciones, algebra básica, subconjuntos reales y, en menor medida, sucesiones y series (Irazoqui Becerra & Medina Rivilla, 2013).

Los estudios relacionados a la construcción de los conjuntos numéricos en la enseñanza dan cuenta que los estudiantes no visualizan de manera clara la relación que existen entre los distintos conjuntos que comprenden a los reales, ni su relación con la recta numérica (Artigue, 1995). Aunque no existe una relación conceptual entre los conjuntos si se observa un manejo de sus definiciones y propiedades, esto debido a la existencia de conflictos entre las diversas conceptualizaciones que poseen de números, los conjuntos y el infinito que dificultan la correcta conceptualización del límite (Lestón, 2009).

Cuando hablamos de las dificultades relacionadas con las funciones, estas distan de ser solucionadas cuando comienza la enseñanza del cálculo, Artigue (1995) deja de manifiesto la existencia de cuatro tipos de dificultades:

- la primera, se relaciona directamente con la *conceptualización de función* por parte de los estudiantes y su definición formal, mostrando que la existencia de una brecha entre ellas.

- La dificultad de visualizar a las *funciones como un proceso*, dificulta la conceptualización de conceptos claves en el cálculo, como el límite, al encapsular a las funciones en un estatus estructural, estático.
- También se han identificado dificultades en la *articulación entre distintos registros*, debido a la predominancia del registro algebraico por sobre otros que podrían jugar un rol importante en la comprensión del cálculo, en particular del límite.
- La última dificultad, pero no menor, radica en la dificultad para considerar a las funciones como una herramienta valiosa para el *cambio de cuadros*, específicamente para transformar en funciones aquellas tareas que se disponen en otros cuadros o registros.

En una primera aproximación a los procesos infinitos, encontramos que la expresión “tender hacia” no se relaciona de manera intuitiva con el proceso del límite por parte de los estudiantes, evidenciado en que se dirá que la sucesión $0.9, 0.99, 0.999\dots$ “tiene por límite 1” o “tiende a $0.9999\dots$ ”. (Hitt, 2003).

La notación $0.9999\dots$ induce a los estudiantes a pensar en un proceso infinito no terminado (infinito potencial), tan cercano a 1 como se desee, como una distancia infinitamente pequeña que falta por recorrer (infinitesimal), pero no se ve al 1 como la representación del proceso terminado (infinito actual), trabajable matemáticamente (Hitt, 2003).

2.2. Textos de estudios chilenos

Esta segunda parte de los antecedentes buscar contrastar la información de las investigaciones en la enseñanza del límite con las propuestas educativas explicitadas en los textos escolares chilenos. En primera instancia se revisa el programa de estudio del electivo “*límites, derivadas e integrales*”, para identificar la progresión de conocimientos y los distintos registros utilizados, y en segundo lugar se revisan los textos escolares de primero y segundo medio con la finalidad de mostrar la transición de los contenidos y ver su correspondencia con las necesidades cognitivas para enfrentar el plan de estudio del plan electivo.

2.3. Programa de estudio Límites, derivadas e integrales. Para formación diferenciada

Es necesario identificar la progresión de los conceptos que se presenta en el programa de estudio del electivo “*Límites, derivadas e integrales*” propuesto por el Ministerio de Educación (MINEDUC), con la finalidad de evidenciar si esta permite la transición de conocimientos, generando esquemas adecuados, para eludir el obstáculo cognitivo que se presenta en el pensamiento al transitar del infinito potencial al infinito actual, en post de la conceptualización del límite.

En la primera unidad del programa se presentan las funciones, donde los conceptos que la organizan propician la comprensión del límite, como son lo variacional y el uso de distintos tipos situaciones, acompañado de diversos registros, como el natural, el gráfico y el simbólico (MINEDUC, 2020).

La unidad dos da lugar a la conceptualización del infinito y, a través de este, del límite, buscando el tránsito cognitivo desde el pensamiento potencial al actual, mediante el uso de procesos infinitos geométricos, de ordenamiento y situaciones concretas. Se aborda también desde una perspectiva numérica acompañada de la ampliación de conceptos como continuidad, divergencia y convergencia. Se propone además el debate filosófico a través de la paradoja de Zenón, y argumentando la noción de límite en diversos contextos con la finalidad de propiciar una aproximación intuitiva, haciendo uso de diversos tipos de registros y representaciones (MINEDUC, 2020).

2.4. Primero y Segundo Medio

Los textos de primero y segundo medio, dispuesto MINEDUC para este año 2020, disponen en cuatro unidades: Números, Álgebra y Funciones, Geometría y finalmente probabilidad y estadística.

En la primera unidad de números para primero medio, el foco de trabajo está en ampliar los conjuntos numéricos presentando al conjunto de los racionales, con el objetivo principal de la operatoria, si bien se utilizan distintas tareas para su enseñanza, se observa la predominancia del registro simbólico. Si bien en esta parte de la unidad se hace alusión al concepto de infinito, como se muestra en la siguiente *ilustración*.

Conceptos

- ▶ Los **números naturales** (\mathbb{N}) se representan por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- ▶ Los **números enteros** (\mathbb{Z}) se representan por $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- ▶ Los **números racionales** (\mathbb{Q}) se representan por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ tal que } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

- ▶ El siguiente diagrama te ayudará a comprender el conjunto de los números racionales.



Simbólicamente se tiene que: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, es decir, todo número natural es un número entero y todo número entero puede ser representado como un número racional.

Ilustración 1: Diagrama de números racionales. 1ºMedio, 2019

En el desarrollo de la unidad no se evidencia intencionalidad de profundizar en este concepto, priorizando la operatoria numérica, como se muestra en la siguiente *ilustración* del algoritmo para la adición y sustracción, ocurriendo de igual manera para la multiplicación y división de números racionales.

Conceptos

Para resolver una **adición** o **sustracción de números racionales**, considera lo siguiente:

- ▶ Si están representados como **números decimales**, los ordenas de manera vertical, con la condición de que la coma decimal quede alineada, y resuelves.
- ▶ Si están representados como **fracciones**, simbólicamente resuelves:

$$\text{Adición: } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\text{Sustracción: } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$$

Donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0, d \neq 0$.

- ▶ En el caso que los números sean enteros, utilizas los procedimientos que ya has estudiado.

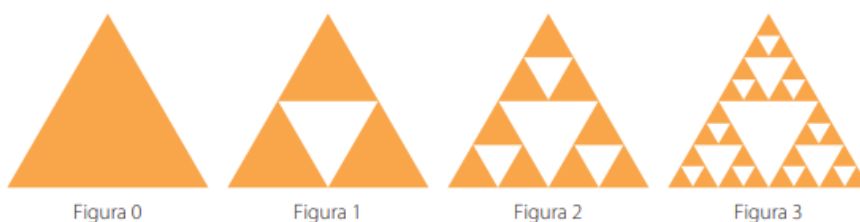
Ilustración 2: Adición y sustracción de números racionales. 1ºMedio, 2019

Dentro de la primera unidad, también se amplían los conocimientos sobre potencias. Destacamos una tarea con base en el triángulo de Sierpinski, como un proceso infinito, pero que no es tratado como tal, sino que es un medio para reforzar las nociones de potencias, como se muestra en la *ilustración 1*, sin incurrir a ideas de convergencia o características geométricas de este que podrían servir como peldaño para la construcción del límite.

Potencias de base racional y exponente entero

El **triángulo de Sierpinski** es una estructura que se genera por un proceso recursivo a partir de un triángulo del cual se extraen triángulos de menor tamaño. La secuencia de la construcción es la siguiente:

- 1° La figura original es un triángulo (Figura 0).
- 2° La figura siguiente se genera dibujando triángulos con vértices en los puntos medios de los lados y extrayendo el triángulo central.
- 3° Se repite este proceso en cada triángulo no extraído.



Trabaja y comenta las siguientes preguntas con tus compañeros, considerando que el triángulo usado anteriormente es equilátero.

- Si la medida de los lados del triángulo inicial es 1 cm, ¿cuánto miden los lados de los triángulos más pequeños de las figuras 1, 2 y 3?

- Escriban los resultados anteriores usando potencias.

Ilustración 3: Texto del Estudiante 1°Medio, 2019

En la unidad de algebra y funciones, se presentan los productos notables en primera instancia, para luego dar paso al trabajo de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 y a las funciones, a pesar de que se realiza un trabajo conjunto entre los sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 y las funciones, estas últimas actúan como un medio para la enseñanza de la primera, *ilustración 4*, y donde finalmente predomina lo operacional y el registro simbólico. Posteriormente se trabajan las funciones lineales con dos variables en las actividades no se logra distinguir a las funciones como un proceso dinámico.

Ejemplo 1 Resuelve utilizando el método de igualación el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ 5x - 3y = 7 \end{cases}$$

Luego representala gráficamente identificando el punto de intersección.

- De ambas ecuaciones, "despejas" y :
 - $3x - 5y = 3 \rightarrow y = \frac{3}{5}x - \frac{3}{5}$
 - $5x - 3y = 7 \rightarrow y = \frac{5}{3}x - \frac{7}{3}$
- Al igualar y resolver las ecuaciones **1** y **2** obtienes:

$$\frac{3}{5}x - \frac{3}{5} = \frac{5}{3}x - \frac{7}{3} \quad / \cdot 15 \quad \rightarrow \quad 9x - 9 = 25x - 35 \quad \rightarrow \quad x = \frac{13}{8}$$
- Para calcular el valor de y reemplazas $x = \frac{13}{8}$ en la ecuación **1** o **2**, y luego resuelves.

$$y = \frac{3}{5} \left(\frac{13}{8} \right) - \frac{3}{5} \quad \rightarrow \quad y = \frac{39}{40} - \frac{3}{5} \quad \rightarrow \quad y = \frac{3}{8}$$
- Compruebas las soluciones reemplazando las soluciones en las ecuaciones iniciales.

En $3x - 5y = 3$ se tiene: $3 \left(\frac{13}{8} \right) - 5 \left(\frac{3}{8} \right) = \frac{39}{8} - \frac{15}{8} = \frac{24}{8} = 3$, se mantiene la igualdad.

En $5x - 3y = 7$ se tiene: $5 \left(\frac{13}{8} \right) - 3 \left(\frac{3}{8} \right) = \frac{65}{8} - \frac{9}{8} = \frac{56}{8} = 7$, se mantiene la igualdad.

Respuesta: La solución al sistema de ecuaciones es $x = \frac{13}{8}$, $y = \frac{3}{8}$. Su representación gráfica es

Ilustración 4: Texto del estudiante 1°Medio, 2019

Para el texto de segundo medio, en la unidad de números, se amplían los conjuntos numéricos con el conjunto de los irracionales y posteriormente se formaliza el conjunto de los números reales, si bien se utilizan distintos registros, predomina el simbólico, debido a que el foco está en la operatoria de números, como se muestra en la síntesis del conjunto real en la *ilustración 2*.

El conjunto de los números reales, con la adición y la multiplicación, cumple las propiedades de clausura, conmutatividad, asociatividad, distributividad de la multiplicación respecto de la adición, existencia del elemento neutro para la adición y para la multiplicación, así como del elemento opuesto aditivo y el inverso multiplicativo.

Ilustración 5: Texto del estudiante 2°Medio, 2019

Para la unidad de álgebra y funciones, se pretende ampliar el conocimiento integrando el comportamiento cuadrático, aunque el programa pretende que se relacione con actividades cotidianas para su comprensión, en el texto escolar predomina el registro simbólico y en menor medida el registro gráfico-tabular. Si bien se presentan distintas tareas para la conceptualización de los conceptos, estas recaen en el llenado de cuadrículas cuyo objetivo final es el operacional en lugar del conceptual, como se muestra en la *ilustración 4*.

1. Dadas las siguientes ecuaciones cuadráticas, identifica sus coeficientes y resuélvelas aplicando la fórmula general.

Ecuación cuadrática	Coeficientes			Fórmula general	Soluciones	
	a	b	c		x_1	x_2
$x^2 + 6x + 8 = 0$						
$x^2 - x - 2 = 0$						
$2x^2 - 5x - 3 = 0$						
$4x^2 + 8x + 3 = 0$						
$x^2 - 10x + 20 = 0$						

Ilustración 6: Texto del estudiante 2°Medio, 2019

Posteriormente el trabajo con la función cuadrática tiene como foco principal la determinación de elementos geométricos-cartesianos, mediante el trabajo algebraico, como se muestra en la ilustración siguiente.

Actividades de proceso

1. Ya que la parábola tiene ciertas características gráficas, es posible esbozar su gráfica a partir de algunos puntos principales que se pueden calcular a partir de los coeficientes de la función. Por ejemplo, para graficar $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$, podemos buscar los puntos de intersección con los ejes, y el vértice.

a. ¿En qué punto la función interseca el eje Y?

Para calcular el punto de intersección con el eje Y, se reemplaza en la función el valor asociado de x .

Entonces, $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 6 = \boxed{}$
 Luego, el punto es $(0, \boxed{})$

b. ¿En qué punto la función interseca el eje X?

Para calcular el o los puntos de intersección con el eje X, se iguala la función a cero y se resuelve la ecuación correspondiente.

Entonces de la ecuación $2x^2 - 8x + 6 = 0$ se obtienen las soluciones $x_1 = \boxed{}$
 y $x_2 = \boxed{}$. Luego, los puntos son $(\boxed{}, 0)$ y $(\boxed{}, 0)$.

c. ¿En qué punto se encuentra el vértice de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$?

El vértice se puede obtener a partir de sus coeficientes a , b y c como el punto $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a})$.

Los coeficientes de $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ son $a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$ y $c = \boxed{}$, y se reemplazan en $-\frac{b}{2a} = \boxed{}$ y $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = \boxed{}$.

Luego, el vértice es el punto $(\boxed{}, \boxed{})$.

d. Ubica todos los puntos calculados en el siguiente gráfico. Luego, únelos a mano alzada para obtener la gráfica de la función.

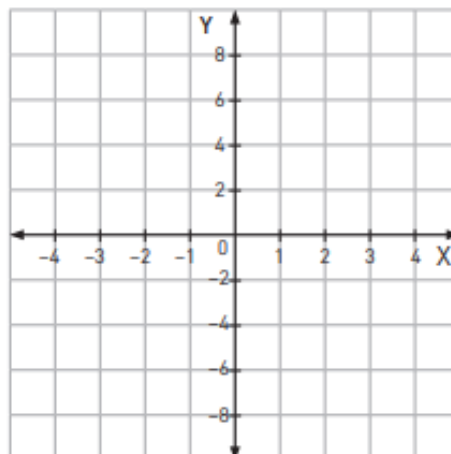


Ilustración 7: Texto del estudiante 2°Medio 2019

2.5. Problema de Investigación

En Chile, se implementa en 2020 las nuevas bases curriculares para tercero y cuarto medio, donde se propone, como parte de la electividad la asignatura “Límites, derivadas e integrales”, como un acercamiento al cálculo universitario, para aquellos alumnos que deseen ingresar a carreras cuyo eje central sean las matemáticas. De los antecedentes, destacamos a la noción de límite como uno de los focos de dificultad en la enseñanza y aprendizaje del cálculo (Artigue, 1995), esta dificultad está estrechamente asociada a la comprensión del infinito (Hitt, 2003).

En el marco de la implementación de la electividad, es necesario indagar como los estudiantes, en el proceso de enseñanza previo a la toma del curso, han conceptualizado algunos conceptos, que representan pilares para su comprensión. Para llevar a cabo la investigación analizaremos las producciones de los estudiantes desde teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990) que nos permitirá el análisis de los esquemas presentes al enfrentar tareas que involucran conceptos de infinito y variación. Surge entonces, la siguiente pregunta de investigación, ¿Cuál es la conceptualización del límite que poseen los estudiantes previos a su enseñanza formal en educación media?

2.6. Objetivo General

De acuerdo con la pregunta de investigación se plantea como objetivo general para la investigación:

- Analizar las conceptualizaciones del infinito que organizan la construcción del concepto límite, en estudiantes entre 16 y 17 años.

2.7. Objetivos Específicos

- Determinar cuáles son las conceptualizaciones que permiten la construcción del límite, desde la componente histórica/epistemológica del concepto.
- Caracterizar las producciones de los estudiantes al resolver tareas que involucran los conceptos que organizan la construcción del límite.
- Analizar las características que presentan los esquemas desarrollados por los estudiantes al resolver tareas que involucran los conceptos que organizan la construcción del límite.

3. Objeto Matemático

El objetivo principal es indagar sobre las conceptualizaciones que manifiestan los estudiantes sobre el límite, específicamente de aquellas nociones que sostienen su construcción. Caracterizar las características epistemológicas de su construcción nos guiará en la búsqueda de los esquemas que se presentan en bajo un determinado tipo de tarea que enfrentará el estudiante. El proceso de la construcción del límite como objeto matemático, fue lento y tardío, comenzando con nociones intuitivas de lo infinito para finalmente asentarse al alero de la construcción del cálculo (Medina, 2001).

3.1. Límite

Se destacan tres etapas en la construcción del límite, donde se construyen las distintas concepciones que dan vida al concepto, cada periodo caracteriza a la noción en función a sus necesidades socioculturales y a debates filosóficos de las distintas ideas asociadas al infinito (Vigo & Abalos, 2010).

3.1.1. La antigüedad (época griega)

Esta época se caracteriza por el trabajo puramente geométrico-estático desarrollado por los griegos, en el cálculo de áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos geométricos, se destaca el trabajo de Eudoxo (408-355 a.C.) quien mediante el método de exhaustión presenta de manera implícita el concepto de límite. Zenón (480 a.C.) se aventura al infinito en su paradoja donde visualiza al espacio como la suma de infinitos instantes, esta paradoja llevó a los griegos a aferrarse a la geometría estática para evitar el infinito (horror al infinito) lo

que se debe a la no existencia del conjunto real y al escuálido concepto de función que manejaban (Vigo & Abalos, 2010).

En la época del renacimiento, en la presencia del horror al infinito, la noción de límite se trabaja como una aproximación “finita”, al tomar “una” cantidad que sea la mejor aproximación al límite, impidiendo ver la “aproximación” como un proceso que llega a un resultado, el límite (Medina, 2001).

3.1.2. Siglo XVII y XVIII

Gracias al desarrollo al desarrollo previo del concepto de función, sus representaciones y su vínculo con la geometría analítica, el estudio de la variación infinitesimal permite a los matemáticos la construcción del infinito actual y aproximarse de manera implícita a la noción de límite, mediante el estudio de los fenómenos físicos (Vigo & Abalos, 2010).

Los trabajos de Newton y Leibniz, en relación a lo infinitamente pequeño (infinitesimal) en el estudio de las curvas y sus expresiones analíticas, acompañado del paso del concepto de variable al de función, con la finalidad de resolver problemas en situaciones de movimiento los llevaron al trabajo implícito del límite como un valor tan pequeño como se quisiera, con una mirada “actualista potencial”, ya que su visión aún era estática pero admitía la posibilidad de un resultado final (Medina, 2001).

En este periodo destacamos a D’Alembert, por ser uno de los primeros matemáticos que busca definir el límite, tomando los trabajos de Newton, como:

Se dice que una cantidad es límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, sin que, no obstante, la cantidad que se aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se

aproxima de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente insignificante. Citado en (Blázquez & del Rincón, 2002).

3.1.3. Siglo XIX y principios del XX

Esta etapa se sustenta principalmente por los trabajos de Cauchy y Weierstrass. Cauchy, es el primero en trabajar el límite como un objeto matemático y no como una noción instrumental (Medina, 2001), y define continuidad de funciones, convergencia de series, derivadas e integrales en función de este. Aunque su trabajo no es bien aceptado por la comunidad matemática por el uso ambiguo de la terminología “se aproximan indefinidamente...” y la rigurosidad matemática de sus publicaciones (Vigo & Abalos, 2010). Su trabajo converge en nociones de límites dinámicas como fronteras a veces alcanzables y a veces inalcanzables (Medina, 2001).

Weierstrass, por su parte, también trabaja con el límite como un objeto estático, en un esfuerzo por evitar ideas de tiempo y movimiento, para trabajar puramente desde lo matemático, es así, que formula la definición de límite que utilizamos hoy en día (Vigo & Abalos, 2010).

Si dado cualquier ε positivo, existe un δ tal que para $0 < n < \delta$, la diferencia $f(x_0 \pm n) = L$ es menor en valor absoluto que ε , entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$

Así nos encontramos con la cristalización del conocimiento matemático, es aquí, con Weierstrass que se destierran del límite las ideas de variable continua, de aproximación e infinitesimal constante o variable (Medina, 2001).

4. Marco Referencial

4.1. Teoría de los Campos Conceptuales de G. Vergnaud

La Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) de Vergnaud (1990), nos permite localizar y estudiar la conceptualización de los conceptos, desde un aspecto cognitivo del aprendizaje, considerando su continuidad y sus rupturas. Esto nos permite dilucidar la construcción del límite desde un punto de vista conceptual. Hemos dado cuenta de las dificultades que se presentan al momento de enfrentar el límite, específicamente de aquellos conceptos que suponen una dificultad para su conceptualización. Es por esto por lo que tomamos como referente a la TCC, particularmente a sus ideas de Campo conceptual, concepto, situación, conceptualización y esquema.

Vergnaud (1990), define **campo conceptual** como un conjunto de situaciones cuyo dominio requiere, a su vez, el dominio de varios conceptos de naturaleza distinta. En este sentido hablaremos del campo conceptual del límite y del conjunto de los distintos dominios para el desarrollo de un conjunto de situaciones (Vergnaud, 1990). Del desarrollo epistemológico del límite identificamos situaciones del contexto geométrico, algebraico, numérico y analítico en que se desarrolla el concepto de límite.

Un **concepto**, se define como un triplete de conjuntos, distintos pero relacionados necesariamente, el conjunto de situaciones -Sentido-, el conjunto de las invariantes operatorias -Significado- y finalmente el conjunto de las representaciones -Significante- (Moreira, 2002). En educación, el concepto adquiere sentido para los estudiantes a través de las tareas que se le proponen, y como estas, a través de las filiaciones y rupturas, permiten su conceptualización de manera progresiva, en este sentido, un concepto no puede ser estudiado de manera aislada, sino como parte de un sistema de conceptos. (Vergnaud G. , 2016). Así, debemos entender no podemos reducir el estudio del límite a su definición, ni tampoco a su

propio concepto, sino que también es necesario estudiar los conceptos próximos que forman parte de un sistema.

En relación con lo visto en el capítulo 2, del objeto matemático, se logra identificar que los conceptos de infinito, continuidad y variable forman parte del sistema que permite organizar la construcción conceptual del límite. Dentro de nuestro contexto investigativo, y teniendo en cuenta que la conceptualización es un proceso que se prolonga durante un periodo extenso de la vida, es importante indagar sobre el estado que estos han alcanzado en los primeros dos años de enseñanza media por parte de los estudiantes, es decir, como están siendo conceptualizados por ellos.

La situación, entendida de manera distinta por Vergnaud a la situación didáctica, es toda tarea o combinación de ellas, las cuales tendrán dificultades propias, que implican acciones por parte del estudiante (Moreira 2004). Se definen dos tipos de tareas, la primera es aquella donde el estudiante dispone de los medios, esquemas y competencias, para afrontarlo, y el segundo tipo de tarea, es donde no dispone de los esquemas para resolverlo y debe buscar estrategias nuevas creando esquemas nuevos (Vergnaud, 1990).

Entendemos **esquema** a la “la organización invariante del comportamiento para una determinada clase de situaciones” (Vergnaud, 1990). Esta organización “invariante” no hace referencia a los algoritmos de resolución para las situaciones, sino a la estructura del pensamiento que permite el uso del algoritmo. Para poder comprender la estructura del pensamiento es necesario el acoplamiento teórico esquema/situación, pues serán las tareas quienes se adapten para la generación de esquemas. Los esquemas no son estáticos, pues a través de filiaciones y rupturas de conocimientos, pueden ser modificados (Vergnaud G. , 2016), y estos cambios en los esquemas también son vistos en el desarrollo epistemológico del saber, en nuestro caso del límite. Son diversos los esquemas que se presentan en la

epistemología del límite y como se menciona anteriormente estos van acoplados a las situaciones que afrontaron los matemáticos en los distintos periodos.

Estos esquemas se componen por los siguientes ingredientes:

Metas y anticipaciones: Un esquema se enmarca siempre en una clase de situación, donde el estudiante descubre la finalidad de su actividad, pudiendo aparecer otras submetas (Moreira, 2002).

Invariantes operatorias: Compuesto por los teoremas en acto y conceptos en acto, son los elementos que orientan al individuo en la selección de la información pertinente para el caso (Moreira, 2002).

Reglas de acción: Componente de los esquemas que permiten la generación y continuidad de la secuencia de acción por parte del individuo (Moreira, 2002). Aquí se sitúan los procesos y la validación de estos mediante sus resultados, en una acción lógica de implicancia secuenciada del accionar.

Inferencias o razonamiento: Razonamiento que se efectúa con los tres puntos anteriores durante la actividad frente a una situación, permitiéndole realizar generalizaciones o ejemplificar en el mismo nivel de situación (Moreira, 2002).

Es en los esquemas donde centramos la investigación, pues como se menciona con anterioridad es aquí donde habita la conceptualización del límite, específicamente en los conceptos en acto, pues en estos aparecen de manera explícita la organización invariante del pensamiento, y de manera implícita los teoremas en acto que dan vida al pensamiento siendo el medio para inferir los objetivos y reglas de acción (Vergnaud G. , 2016).

5. Marco Metodológico

5.1. Enfoque y Alcance

La investigación se aborda desde una perspectiva cualitativa descriptiva. El enfoque cualitativo desde su acepción más integral busca dar respuesta al *qualis* (cuál, qué) de la naturaleza y esencia de algo, dando respuesta a través del conjunto de cualidades de este. De esta manera, la investigación cualitativa busca evidenciar la naturaleza profunda de las realidades, en aquellas cualidades que dan razón a su manifestación (Martínez, 2006).

El alcance del estudio es de **tipo casos**, ya que se pretende extraer información en profundidad de un grupo de participantes (Hernández-Sampieri & Torres, 2018). En este sentido, se analizan en profundidad los esquemas presentes en los estudiantes en situaciones que involucran el concepto de límite. Si bien, este tipo de estudio no busca generalizar la información obtenida nos permite aproximarnos al estado de las conceptualizaciones presentes.

5.2. Selección de la Muestra

Los diversos métodos cualitativos, tienen sus propios parámetros para la escogencia de la muestra, que a su vez le ofrece la información necesaria para la investigación. Por lo general, la muestra no puede estar compuesta por elementos descontextualizados, sino por un grupo con vida propia (persona, institución, grupo, etnia, etc.). De esta manera se desprecia la cantidad de la muestra en beneficio de la calidad o la profundidad de esta, explicitando los criterios de escogencia, según la relevancia para los objetivos de estudio, que a su vez sostiene su credibilidad (Martínez, 2006).

Por esto, diremos que la muestra es del **tipo intencionada**, elegida por los criterios que permitan obtener resultados fidedignos y pertinentes al objetivo investigativo. Se busca que esta muestra sea equilibrada, es decir, considere los casos negativos o divergentes, pero haciendo énfasis en los casos más representativos. En otras palabras, el investigador juega el rol de fotógrafo de la realidad, buscando el mejor ángulo que permita capturar la riqueza que tiene delante (Martínez, 2006).

5.2.1. Muestra

Se selecciona como muestra a un grupo de ocho estudiantes que ya cursaron los primeros dos años de enseñanza media, es decir se encuentran cursando 3° Medio. El criterio para su selección es el rango etario de 16 y 17 años, sin considerar rendimiento académico o preferencia por la toma del electivo en cuarto medio, con la condición de que su enseñanza se haya llevado a cabo con los libros dispuestos por el ministerio de educación.

De esta manera, decimos que la investigación se basa en identificar posibles situaciones problemas, desde lo cognitivo apoyado de la TCC, que se encuentren en los estudiantes, referente a aquellos conceptos que permiten la conceptualización del límite y disponer de una base para el investigador y otros docentes que se enfrenten a dictar este electivo.

5.3. Recolección de Datos

La recolección de información se obtendrá mediante la aplicación de un cuestionario de preguntas abierta, aplicado de manera remota. El cuestionario consta de seis actividades que tienen justificación en el desarrollo histórico del concepto de límite. Se les solicita a los

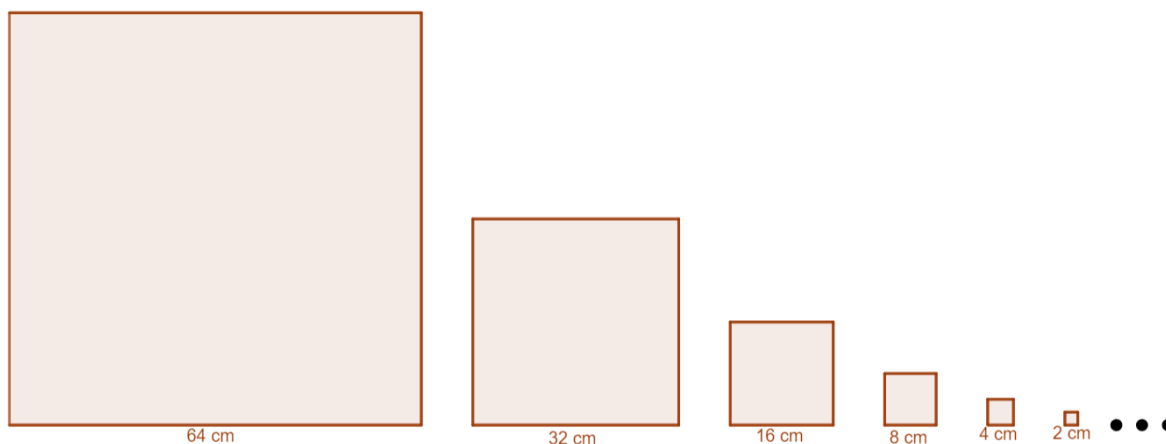
estudiantes analizar las tareas propuestas de tal manera que permitan evidenciar el estado de la conceptualización del infinito, en primera instancia, y además vislumbrar los teoremas en acto y los conceptos en acto utilizados en los diferentes ejes del trabajo.

5.4. Cuestionario, Justificación de la actividad y alcance de las preguntas

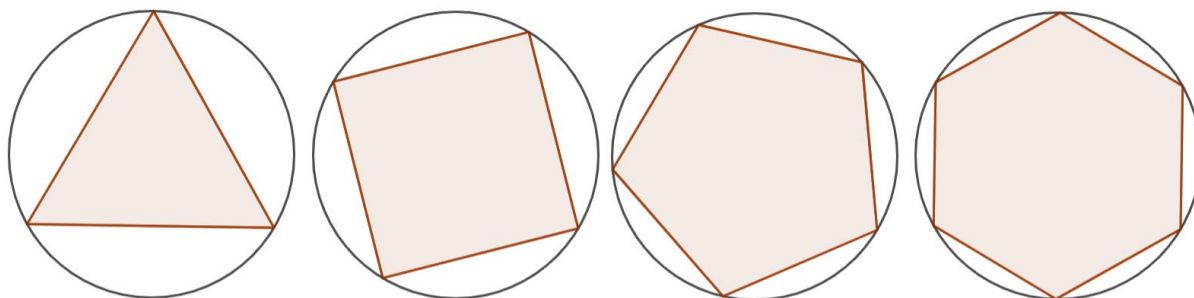
El cuestionario está compuesto de 6 actividades con preguntas orientadoras, donde se espera que el estudiante pueda responder justificadamente cada una de ellas, si bien el cuestionario prioriza el registro natural-escrito, se sugiere a los estudiantes utilizar otros de ser necesario para justificar sus respuestas, de tal manera que permita el análisis posterior mediante su categorización.

Para el diseño del cuestionario se toma como principal referente el desarrollo histórico del mismo y los distintos problemas que enfrentaron los matemáticos según la época.

1. En el siguiente patrón se muestra un cuadrado cuyo lado se reduce cada vez a la mitad.
 - a. ¿existe un último elemento?
 - b. ¿se puede ordenar desde la figura menor a la mayor? Explica.



2. Se tiene un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia, y se genera la siguiente secuencia al aumentar el número de lados del polígono. ¿Qué observas en el patrón? ¿En algún momento el polígono cubrirá totalmente al círculo? Explica.



3. Responde la siguiente pregunta teniendo en cuenta el decimal $0,999\dots$ (periódico). ¿Cuántos decimales tiene? ¿Cuál es el número que le sigue y que tan cerca están? Explica.
4. Imagina que por el borde de tu mesa camina una pequeña hormiga comenzando desde una esquina y cada cierto tiempo recorre la mitad del espacio que le falta para llegar a la otra punta.
- ¿La Hormiga llegará en algún instante de tiempo a la otra esquina?
 - ¿Cuántos instantes tardará? Explica.
5. Dada la función $f(x) = -\frac{1}{x} + 2$, ¿Qué ocurre con el valor de la función a medida que aumentamos el valor de x ?
6. Grafica la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ y comenta que ocurre en el punto $(2,4)$

5.5. Justificación de las actividades.

Las primeras dos actividades se desarrollan en un contexto geométrico y las ilustraciones fueron generadas por el autor de este trabajo, teniendo su justificación en el primer periodo del desarrollo del límite, donde el trabajo se realiza a través del infinito y diversos trabajos filosóficos y geométricos, particularmente la segunda actividad está basada en el método de exhaustión que consisten en la aproximación de áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos a través de otras ya conocidas.

La tercera, quinta y sexta actividad son tomadas y modificadas del artículo presentado por Hitt (2003). La tercera se cita desde Tall y Schwarzenberger (1978), donde en su investigación se presenta a los estudiantes la pregunta *¿Es 0.999... igual a uno, o menor a uno?*, y se modifica con la intención de no forzar la aparición explícita del valor 1 como límite, sino más bien para pretender evidenciar un proceso que lo genere cognitivamente. La quinta y sexta actividad tienen por objetivo dilucidar sobre concepciones del límite en un entorno funcional, particularmente en lo que hace referencia a teoremas en acto de tendencia.

La cuarta actividad, se justifica en la paradoja de Zenón, esta actividad fue extraída del programa de estudio del electivo “Límites, Derivadas e integrales”.

6. Análisis, Resultados y Conclusiones

6.1. Categorización para el Análisis

6.1.1. Conceptualización del infinito

De acuerdo con Vergnaud, en la TCC, para estudiar la conceptualización de las cosas es necesario indagar en los esquemas, pues aquí es donde esta se manifiesta. Es por esto, se hace necesario caracterizar sus ingredientes: **Metas y anticipaciones, invariantes operatorias, reglas de acción e inferencias o razonamiento.** Estos ingredientes estarán presentes en las respuestas que den los estudiantes al cuestionario.

De esta manera, se utilizará la categorización apriorista como medio para el análisis de la información recogida de los cuestionarios. Como es el investigador quien interpreta la información en la investigación cualitativa, es importante la elaboración y distinción de tópicos a partir de los que se recoge y analiza la información (Cisterna,2005).

La categorización tiene sustento en el desarrollo histórico-epistémico del límite, es decir considera aspectos del desarrollo matemático como los obstáculos que surgieron a través de este. Para ello se construye la siguiente categorización para los conceptos en acto utilizados.

- NI: No se evidencian conceptos asociados al infinito.

Esto no quiere decir que el estudiante no resuelva la situación, sino que al hacerlo no se presentan conceptualizaciones del infinito.

- Hr1: Horror al infinito-dinámico (Infinito Potencial)

Esta categorización representa a las respuestas donde se presenta el infinito en su carácter potencial, es decir, se observa como un proceso sin fin y por lo tanto imposibilita el trabajo matemático.

- Hr2: Horror al infinito-estático

Al igual que en el proceso anterior, se observa el infinito como un proceso interminable, pero para trabajar con él, se selecciona “un momento” de este como la mejor aproximación.

- IE: Infinitesimal-estático

Aquí se observa el uso del infinito, pero se considera como una pequeña diferencia (número) que falta por recorrer, tanto como se desee.

- ID: Infinitesimal-dinámico

Se considera una diferencia dinámica que falta por recorrer, lo que conlleva a despreciarla.

- IA: Infinito Actual

Se considera al infinito como un objeto estático trabajable en un entorno matemático.

Esta categorización da cuenta del concepto en acto que se pone en marcha al resolver cada actividad propuesta, el uso de los conceptos pueden ser únicos o transitar en relación al desarrollo o reflexión del estudiante en cada una de las actividades. por otra parte, los teoremas en acto, que son la manifestación explícita, quedan determinados por la actividad misma y el tipo de respuesta solicitada, por ejemplo, para el registro natural-escrito, queda en evidencia por las palabras utilizadas y la secuencia gramatical por la cual representa sus ideas. Tanto los conceptos como los teoremas en acto serán analizados en cada una de las actividades propuestas.

Por otra parte, las **metas y anticipaciones**, determinadas por los pasos requeridos por el estudiante para completar la actividad, serán analizadas en las actividades cinco y seis, debido a que se requiere de un procedimiento y el uso de distintos registros para ser completadas, aunque no se descarta ser analizada en algún participante particular si estas aparecen de manera explícita.

Las **reglas de acción** están determinadas la capacidad de generar una secuencia lógica y organizada de la actividad, además de la validación mediante resultados. Podemos caracterizar de esta manera las justificaciones utilizadas por los estudiantes, en un registro particular o un contexto determinado.

Finalmente, las **inferencias** serán evidenciadas en el análisis por estudiante, debido a que están determinadas por la capacidad de ejemplificar o generalizar las situaciones.

6.1.2. Tipo de Registro utilizado

Se proponen 3 categorizaciones para el sistema de representación utilizado por los estudiantes en cada tarea, estos son:

Verbal Escrita (VE): Para aquellas que utilizan el sistema verbal escrito para responder a la tarea.

Numérico-Escrito (NE): Se dirá que la respuesta es del tipo NE, a aquellas del sistema verbal donde se incluyen datos numéricos, pero solo a modo de ejemplificación, sin utilizar cálculos o tablas.

Numérico (N): Para aquellas respuestas donde se utilizan cálculos numéricos y tablas para la tarea.

Algebraico (A): Para aquellas representaciones del tipo algebraicos.

Geométrico (G): Cuando es utilizado un sistema de representación en el plano cartesiano.

6.1.3. Justificación

Para dar cuenta de la presencia de justificación para la actividad y la estructura de esta se proponen en esta investigación las siguientes categorías:

Se denotará por **0**, la no justificación en la respuesta.

Reflexiva Cotidiana (JRC): En el caso que el estudiante justifique su respuesta mediante la reflexión basada en un contexto cotidiano sin conceptos matemáticos de por medio.

Reflexiva Numérica (JRN): Si el estudiante justifica su respuesta extrapolando contexto cotidiano con conceptos matemáticos.

Numérica 1 (JN1): Si justifica solo por medio de los conceptos matemáticos, sin utilizar sus representaciones numéricas.

Numérica 2 (JN2): Si justifica utilizando representaciones numéricas.

Algebraica 1 (JA1): Si justifica solo por medio de los conceptos algebraicos, sin utilizar alguna de sus representaciones.

Algebraica 2 (JA2): Si justifica por medio de conceptos algebraicos mediante el cálculo de estos.

Geométrica 1 (JG1): Si justifica mediante el registro verbal escrito solo utilizando conceptos geométricos.

Geométrica 2 (JG2): Si justifica por medio de conceptos geométricos y sus representaciones.

6.2. Análisis General

6.2.1. Sistema de Representación

Tabla 1

Tipo de representación utilizada al resolver cada tarea

Estudiante	T1	T2	T3	T4	T5	T6
A1	VN	VE/G	VN	VE	VE/A	A
A2	VN	VE	VN	VE/G	VN	VE/G
A3	VE/N	VE	VE	VN	N	0
A4	VN/G	VE	VN	VE/G	A	G
A5	VE	VE	VN	VE	VN	G
A6	VN/G	VN/G	VN	VN	N	G
A7	VE	VE	VE	VE	VE	0
A8	VE/N	VE	VN	VE	VE/N	VE/N/A/G
A9	VE/G	VE	VN	VE	VE	VN/A/G
A10	VE	VE	VN	VN	VE	0
A11	VE	VE	VE	VE/G	VE/A	G
A12	VE	VE	VN	VN	VE	VE
A13	VE/G	VE/G	VN	VE/G	A/N/VE	VE/A/G

Observamos en el cuadro de representaciones que el 86% del total de respuestas corresponde al registro verbal escrito o verbal numérico, por otra parte, el 37% del total de respuestas presentan otro tipo de registro, utilizado para representar o realizar un tratamiento posterior. Esto da cuenta que los estudiantes utilizan o manejan conceptos que pueden ser puestos en juego en cada actividad, pero con un tratamiento escaso.

6.2.2. Conceptualización del infinito

Tabla 2

Tipo de conceptualización del infinito presente en desarrollo de la tarea

Estudiante	T1	T2	T3	T4	T5	T6
A1	HrD/HrE	NI	HrD/ID	HrD	HrD	NI
A2	NI	HrD	HrD	HrD	NI	NI
A3	HrD	ID	IE	HrD	NI	0
A4	NI	ID	NI	HrD	NI	NI
A5	HrD/ID	HrD	NI	HrD	IA	NI
A6	HrD/HrE	HrE	ID	HrD	NI	NI
A7	HrD/HrE	HrD	HrD	HrD	NI	0
A8	HrD	NI	IE	HrD	NI	NI
A9	NI	NI	IE	NI	NI	NI
A10	HrD/IA	NI	NI	HrD	NI	0
A11	HrE	HrD	NI	HrD	NI	NI
A12	HrE	ID	HrD	HrD	NI	NI
A13	HrD	ID	HrD	HrD	NI	NI

De manera general en el tipo de conceptualización del infinito que predomina el “Horror al infinito” en las respuestas de los estudiantes, con un 42% de presencia en el total de respuestas obtenidas de los cuestionarios, principalmente el dinámico. Para las preguntas cinco y seis, no se logran apreciar respuestas que involucren conceptualizaciones del infinito, menos del 1%.

6.2.3. Justificaciones

Tabla 3

Tipo de justificación utilizada al resolver cada tarea

Estudiante	T1	T2	T3	T4	T5	T6
A1	JN2	JG2/JN1	JN1	JRC/JRN	JA1	JA2
A2	JN1	JG1/JN1	JRN	JRC/JG2	JN2	JG2
A3	JN2	JG1/JN1	JN2	JN2	JN2	0
A4	JN2/JG2	JG1/JN1	JN1/JRN	JRN	JA2	JG2
A5	JN1	JG1/JRC	JN1	JRC/JG1	JN2	JG2
A6	JN2/JG2	JG2	JN2	JN2	JA2	JG2
A7	JN1	JG1	JN1	JRC	JA1	0
A8	JN2	JG1	JN2	JN1	JN2/JA2	JN2/JA2/JG2
A9	JN1	JG1	JN2	JN1	JN1	JA2/JG2
A10	JN1	JG1	JN1	JN1	JA1	0
A11	JN1	JG1	JN1	JG2	JA2	JG2
A12	JN1	JG1	JN1	JN1	JA2	JG1
A13	JN1	JG1	JN1	JN1	JN2	JG2

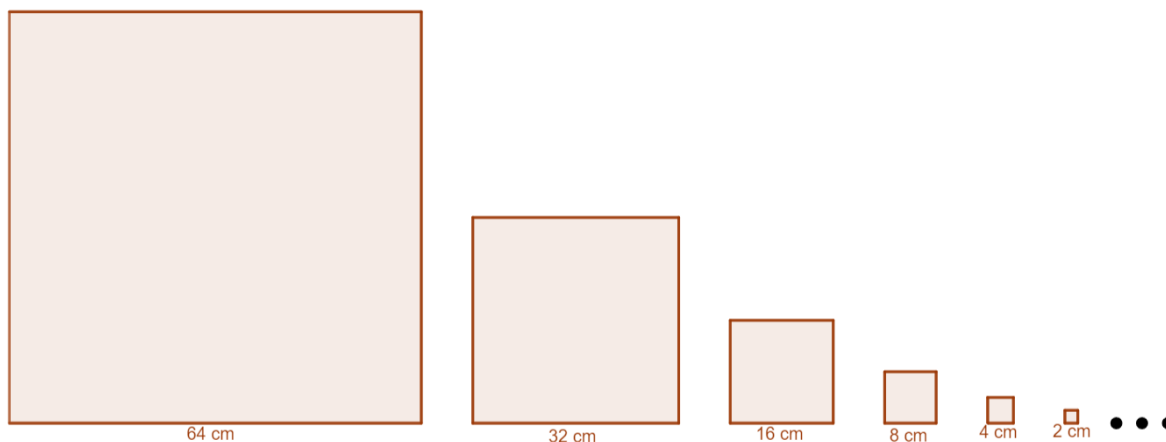
Al analizar el tipo de justificación presente en el desarrollo de actividad se identifica que aproximadamente el 50% de los estudiantes solo utilizan *significados* de los conceptos asociados, mediante el registro verbal, para resolver y reflexionar en torno a la actividad, mientras que el otro 50% utiliza algún tipo de tratamiento haciendo uso de los *significantes* para apoyarse en la reflexión y establecer conclusiones en las actividades.

6.3. Análisis por tarea

Para el análisis de cada actividad consideramos tres grandes ideas; la primera, es que los esquemas, como lo señala Vergnaud, se configuran de manera distinta según la experiencia que se tiene; lo segundo, que los esquemas que se han configurado de manera previa o durante el desarrollo mismo de la actividad se ven influenciados por la epistemología, pues es la actividad quien evoca un determinado esquema; y la tercera, se considera que los estudiantes cuentan con las herramientas, conceptos, necesarios para el desarrollo, pero posiblemente no han desarrollado esquemas para enfrentarlos, lo que significa que estos se estructuran a medida que abordan cada una de las actividades. Con esto podemos identificar puntos en común en las respuestas de los participantes, que pueden ser evidentes o no.

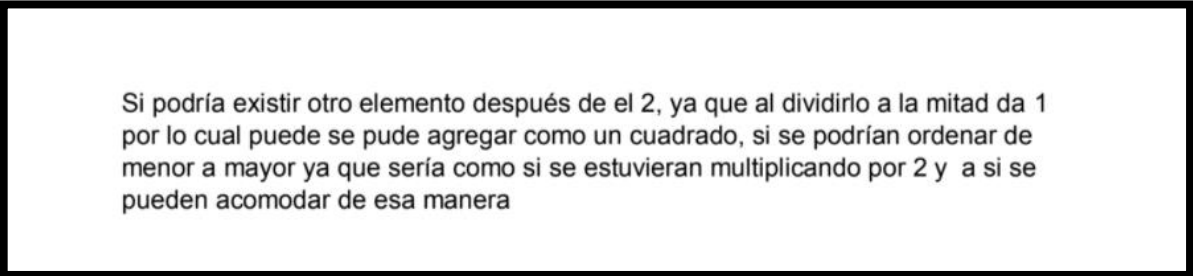
6.3.1. Actividad 1

En el siguiente patrón se muestra un cuadrado cuyo lado se reduce cada vez a la mitad. ¿existe un último elemento? ¿se puede ordenar desde la figura menor a la mayor? Explica.



Esta primera actividad, tiene como objetivo evidenciar conceptualizaciones del infinito en una situación que se presenta mediante representaciones geométricas-numéricas, por medio del enfrentamiento con una sucesión infinita de cuadrados cuyas dimensiones tienden a cero cuando la sucesión tiende a infinito, o bien podemos decir cuyo límite es cero. En este sentido, se espera que el estudiante determine como meta la no existe un último elemento debido al carácter infinito, pero que infiera en el ordenamiento la posibilidad de que exista una cota, en este caso, inferior, como un *límite*. Se prevé que los estudiantes utilicen conocimientos (*invariantes operatorias*) relacionados a conceptos geométricos-numéricos para el cálculo de áreas o longitudes que permitan la continuidad del razonamiento (*reglas de acción-Posibles inferencias*).

En esta actividad se identifica que 3 de los 13 estudiantes no logran identificar como *meta* y *posibles inferencias* de la actividad la reflexión de la situación en el contexto de infinito o reflexionar sobre ideas primitivas del límite, como vemos en el caso de los estudiantes A2, A4 y A9, quienes no interpretan de la manera esperada el enunciado ni la representación de los puntos suspensivos en alusión de una sucesión infinita.



Si podría existir otro elemento después de el 2, ya que al dividirlo a la mitad da 1 por lo cual puede se pude agregar como un cuadrado, si se podrían ordenar de menor a mayor ya que sería como si se estuvieran multiplicando por 2 y a si se pueden acomodar de esa manera

Ilustración 8: Actividad 1 - A2

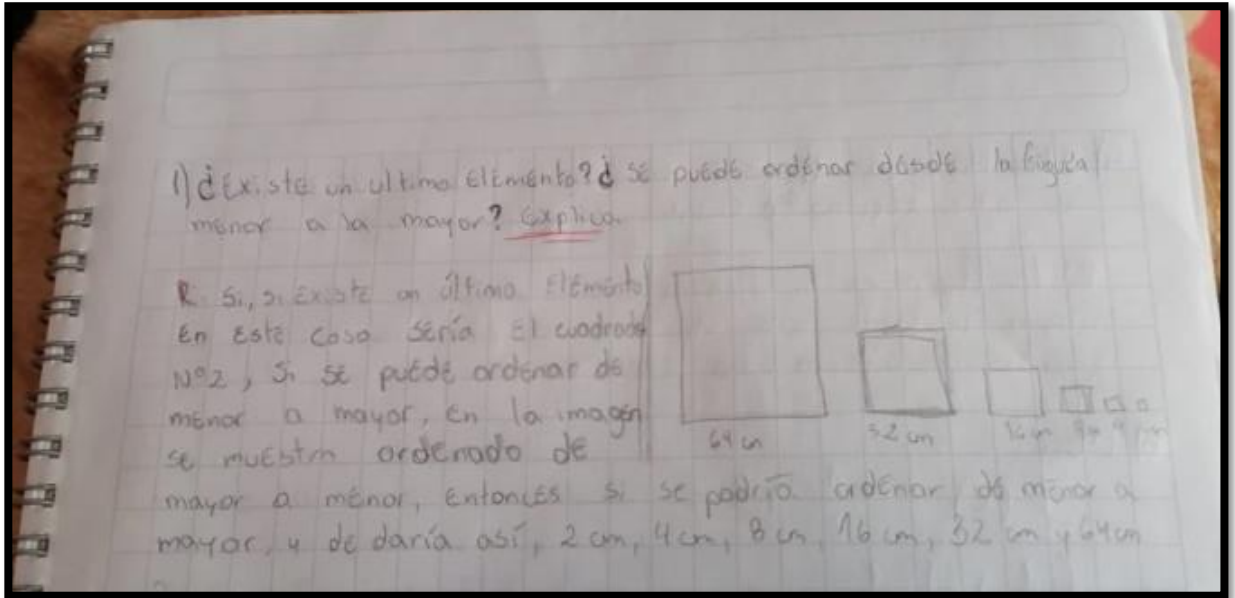


Ilustración 9: Actividad 1 - A4

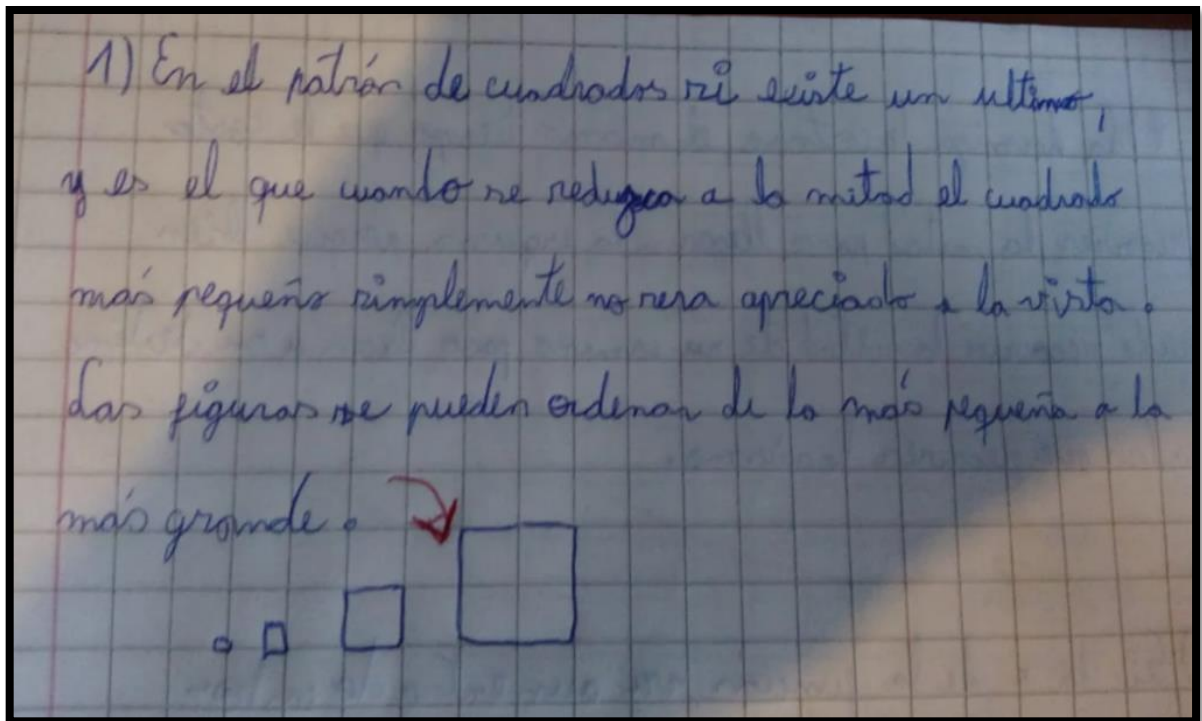
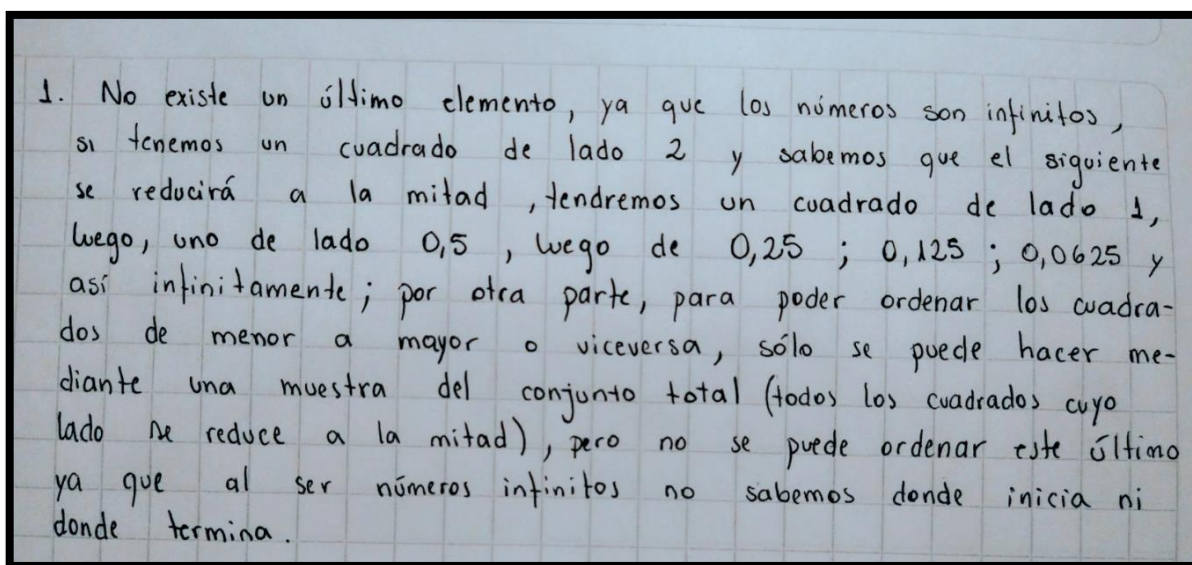


Ilustración 10: Actividad 1 - A9

Los otros 10 estudiantes identifican como *meta* de la actividad la *reflexión* o análisis sobre el infinito. Los invariantes operatorios evidencian una conceptualización donde predomina

el “horror al infinito” en sus dos variantes descritas en este estudio, es más, aparecen de forma dual en 4 de estos estudiantes, a causa de una contraposición entre las ideas primitivas y los conocimientos institucionales que poseen del campo numérico, como se muestra en la respuesta de A1, quien se apoya en el “horror al infinito dinámico” para determinar que no existe un último elemento, pero acude al “horror al infinito estático”, escogiendo un elemento del infinito que le permita ordenar la secuencia. Si bien, los estudiantes identifican como meta la reflexión al infinito, los *invariantes operatorios* que presentan en sus esquemas no les permiten establecer una cota o límite de la sucesión para establecer un fin hipotético de la sucesión y en consecuencia proponer un posible ordenamiento esperado bajo la mirada del límite o una conceptualización actualista del infinito.



1. No existe un último elemento, ya que los números son infinitos, si tenemos un cuadrado de lado 2 y sabemos que el siguiente se reducirá a la mitad, tendremos un cuadrado de lado 1, luego, uno de lado 0,5, luego de 0,25; 0,125; 0,0625 y así infinitamente; por otra parte, para poder ordenar los cuadrados de menor a mayor o viceversa, sólo se puede hacer mediante una muestra del conjunto total (todos los cuadrados cuyo lado se reduce a la mitad), pero no se puede ordenar este último ya que al ser números infinitos no sabemos donde inicia ni donde termina.

Ilustración 11: Actividad 1 - A1

Por otra parte, el estudiante A8, analiza la situación haciendo uso del registro y tratamiento numérico para establecer una conclusión, como se muestra en la siguiente ilustración.

1

$$\frac{2}{2} = 1 \rightarrow \frac{1}{2} = 0,5 \rightarrow \frac{0,5}{2} = 0,125$$

$$\frac{0,125}{2} = 0,0625 \rightarrow \frac{0,0625}{2} = 0,03125$$

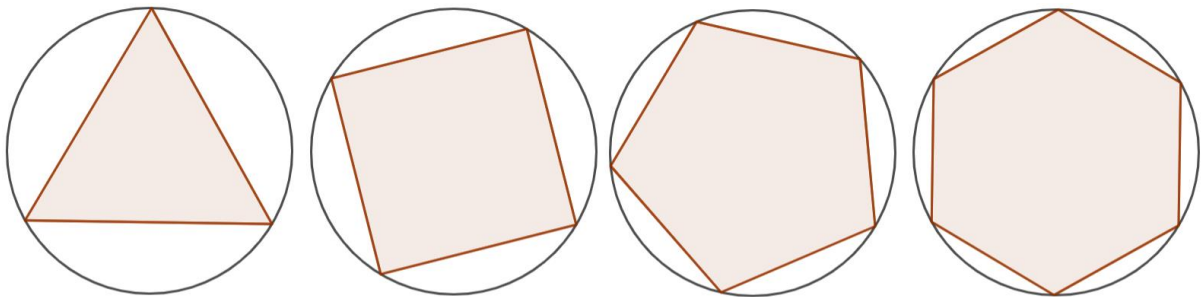
CONCLUSIÓN No existe un último elemento. Por esta razón, no se puede ordenar de menor a mayor.

Ilustración 12: Actividad 1 - A8

En el análisis de esta actividad, se observa que aparecen fuertemente conceptos y teoremas en acto relacionados a ejes numéricos para el cálculo de longitudes o áreas, y se deja de lado los conceptos y representaciones geométricos, esto se debe posiblemente a la explicitación numéricas de las longitudes de las figuras en cuestión. Ponemos en contraste este análisis con lo que sucede en la actividad 2, donde se realiza un trabajo geométrico sin un apoyo explícito de representaciones numéricas, lo que generó un trabajo bajo conceptos geométricos.

6.3.2. Actividad 2

Se tiene un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia, y se genera la siguiente secuencia al aumentar el número de lados del polígono. ¿Qué observas en el patrón? ¿En algún momento el polígono cubrirá totalmente al círculo? Explica.



Esta actividad tiene como finalidad vislumbrar la conceptualización del infinito en una situación geométrica. Al igual que la actividad anterior, tenemos como respuesta ideal aquella asociada al límite, donde diremos que el espacio comprendido entre la circunferencia y el polígono tiende a cero cuando el número de lados del polígono tiende a infinito, o bien diremos que el límite de dicha sucesión es cero.

Además, este ejercicio al ser formulado bajo las ideas del método de exhaustión, se espera también que aparezcan ideas del “horror al infinito estático”, debido a que la actividad evoca esquemas del pensamiento presentes en la epistemología, donde se opta por escoger una mejor aproximación, es decir, que al tomar un polígono con la suficiente cantidad de lados, podríamos proponer que el área del polígono se parecerá a la del círculo que encierra la circunferencia, o bien, ideas infinitesimales, debido a que explícitamente se insta a la reflexión mediante la diferencia o lo que falta por completar.

Identificamos en las respuestas, que en los estudiantes A1, A8, A9 y A10 no se identifican conceptualizaciones asociadas al infinito en sus respuestas, particularmente el estudiante A8, acude a la justificación o reglas de acción asociadas conceptos geométricos y sus definiciones, el uso de estos invariantes operatorios geométricos, en particular aquellos que refieren a los lados de un polígono regular y la circunferencia, evidencian una contradicción con la posibilidad de acotar completamente el área del polígono a la circunferencia, tomando a esta última como límite.

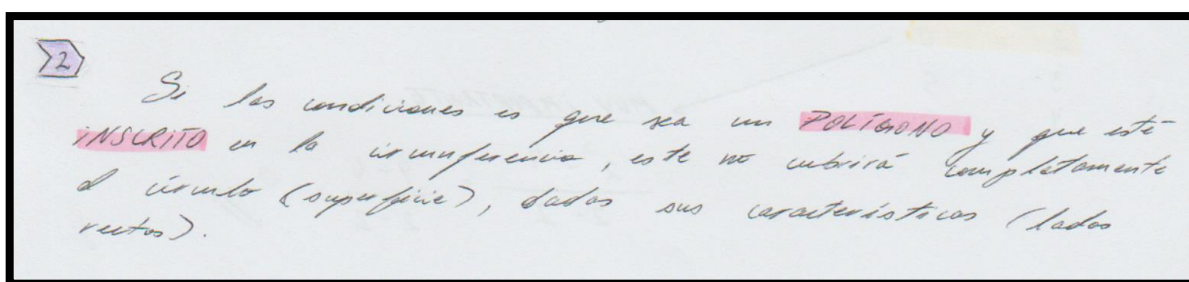


Ilustración 13: Actividad 2 - A8

Por otra parte, los estudiantes acuden con más frecuencias a conceptualizaciones dinámicas del infinito y lo infinitesimal para dar respuesta a la tarea, como se muestra de los estudiantes A2, A5, A7 y A11 donde se evidencian conceptualizaciones asociadas al “horror al infinito dinámico”, lo que posiciona estos esquemas más próximos al concepto de límite, por su parte A5 pone en juego conceptos geométricos de volumen, y justificando mediante creencias.

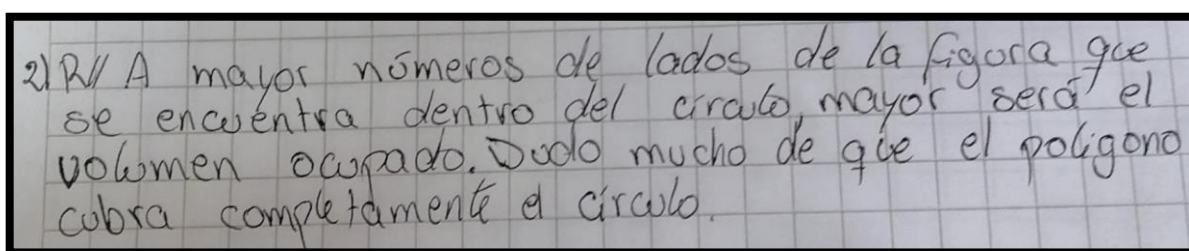


Ilustración 14: Actividad 2 - A5

Solamente el estudiante A6, acude mediante los conceptos que pone en juego a la conceptualización asociada al “horror al infinito estático”, escogiendo un polígono de 100 lados para determinar que se parecerá a la circunferencia pero que le faltará un espacio por llenar, como se muestra en la siguiente ilustración.

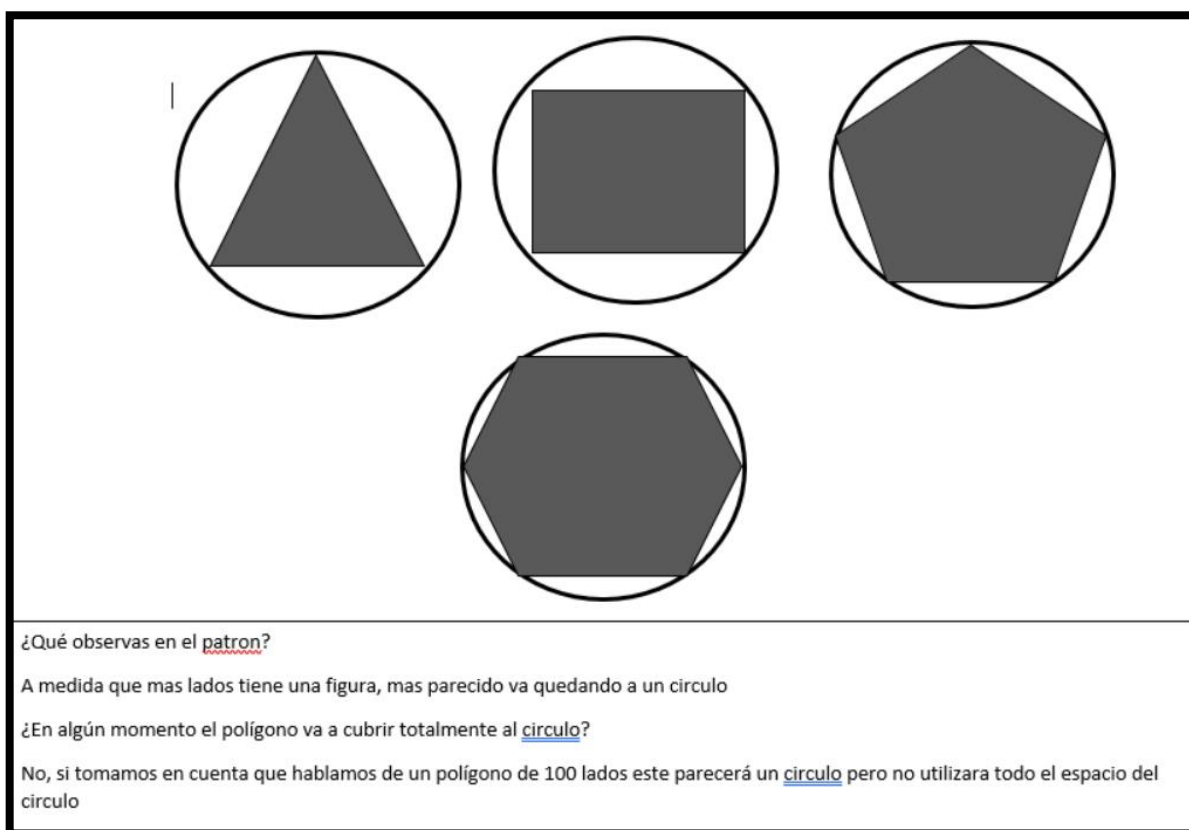


Ilustración 15: Actividad 2 - A6

De lo anteriormente señalado, se identifica de manera general, y en contraste a la actividad 1, que las *reglas de acciones y metas* son abordadas mediante teoremas y conceptos en acto del campo geométrico. Este contraste con la actividad 1 se debe posiblemente a la no explicitación de dimensiones en el problema. Esto puede aportarnos nociones sobre el comportamiento de los esquemas en relación con la información que se entrega en la situación.

Esta actividad posiciona los nuevos esquemas en un punto más próximo a la conceptualización del límite a través del infinito. Recordando que un concepto cobra sentido (se conceptualiza) para el aprendiz en medida que las situaciones permiten la filiación o ruptura de los esquemas construidos previamente, además, apoyado en los campos conceptuales y representaciones que configuran el concepto.

6.3.3. Actividad 3

Responde la siguiente pregunta teniendo en cuenta el decimal $0,999\dots$ (periódico). ¿Cuántos decimales tiene? ¿Cuál es el número que le sigue y que tan cerca están? Explica.

Esta tarea tiene como objetivo determinar las características de la conceptualización del infinito en un entorno numérico, en este caso asociado a lo infinitesimal. En primera instancia se pregunta por la cantidad de decimales, para evidenciar el carácter infinito de las cifras decimales y con la siguiente pregunta se pretende generar una ruptura o filiación de los esquemas construidos con anterioridad. Con esto se pretende evidenciar en los invariantes operatorios, cuáles son los conceptos y teoremas en acto utilizados por los estudiantes, y asociarlos a una determinada conceptualización del infinito.

Como en la mayoría de las actividades volvemos a encontrar el registro verbal escrito como el predominante para el trabajo, donde 6 de los 13 estudiantes lo utilizan acompañado de registros numéricos. Los estudiantes en su totalidad acuden a ideas primitivas de límite, como cercanía, diferencia o proximidad para justificar su respuesta, los estudiantes A2, A3, A4, A5, A6, A8, A9, A12 y A13 concluyen que el número que se encuentra más cercano al

$0,\bar{9}$ es el 1, por otra parte, A2, A4, A5 y A6 ponen en juego teoremas y conceptos en actos asociados a la aproximación por redondeo, en algunos casos ejemplificando mediante situaciones cotidianas, como se muestra en la siguiente ilustración.

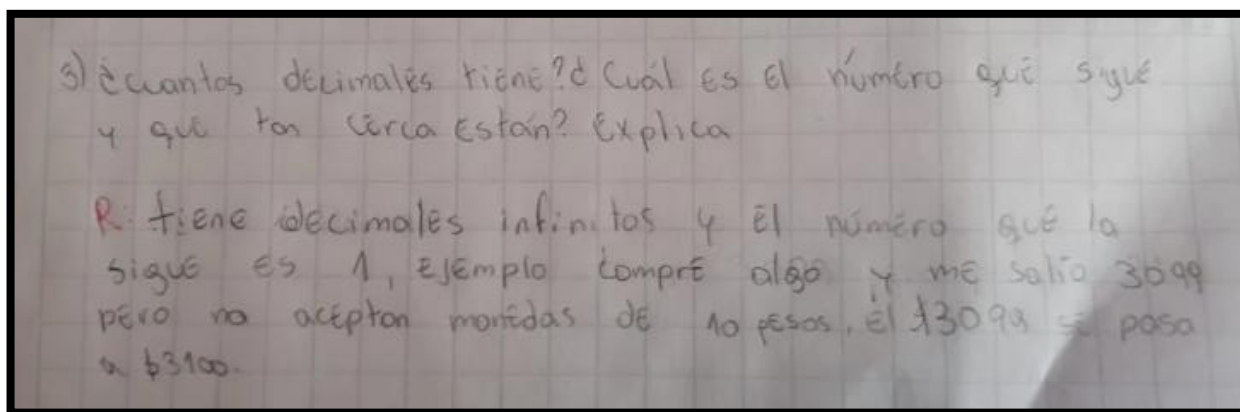


Ilustración 16: Actividad 3 - A3

Los estudiantes A3, A8, A9, A12 y A13 quienes también concluyen que el número más cercano es el 1, lo hacen utilizando conceptualizaciones asociadas a lo infinitesimal, acudiendo a la existencia de una pequeña diferencia que existe entre ambos, como se muestra en las siguientes ilustraciones.

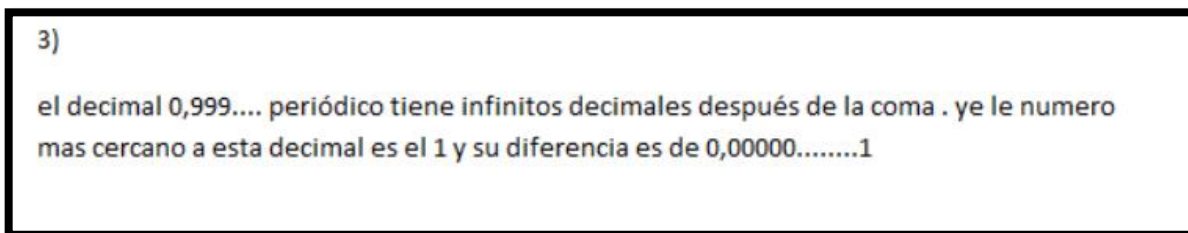


Ilustración 17: Actividad 3 - A3

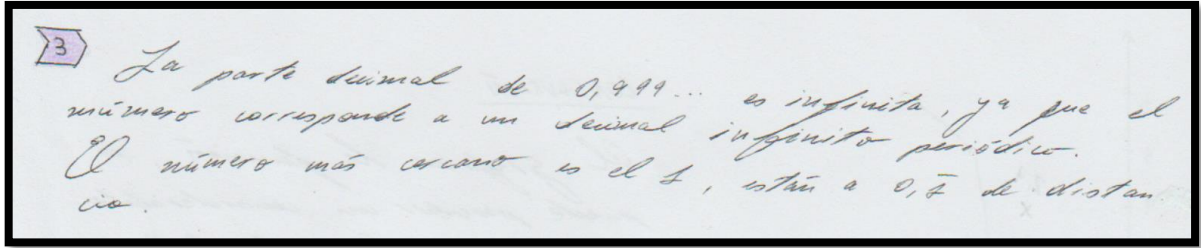


Ilustración 18: Actividad 3 - A8

El estudiante A8, establece una secuencia de acción que le permite alcanzar como meta la reflexión en torno a lo infinitesimal y el límite, presenta *invariantes operatorias* errados el procedimiento, asociados a esquemas que implican al concepto de decimal, al establecer la diferencia como $0, \bar{1}$.

6.3.4. Actividad 4

Imagina que por el borde de tu mesa camina una pequeña hormiga comenzando desde una esquina y cada cierto tiempo recorre la mitad del espacio que le falta para llegar a la otra punta. ¿La Hormiga llegará en algún instante de tiempo a la otra esquina? ¿Cuántos instantes tardará? Explica.

Esta tarea, tiene sus bases en la paradoja de Zenón, tiene como objetivo el analizar la conceptualización del infinito planteado en una situación de movimiento, donde, si consideramos infinitos intervalos de tiempo la distancia recorrida tiende a la de la mesa o bien que su límite es la longitud de la mesa. En las actividades presentadas anteriormente el límite o fin de la situación no es alcanzado más que de manera hipotética o conceptual

mediante el límite, en esta paradoja el infinito debe coincidir con la realidad lo que genera la paradoja.

Al revisar las respuestas de los estudiantes observamos que todos ellos acuden al registro verbal escrito, además, los estudiantes A2, A4 y A13, se apoyan del registro gráfico, como se muestra en la respuesta de A4 en la siguiente ilustración.

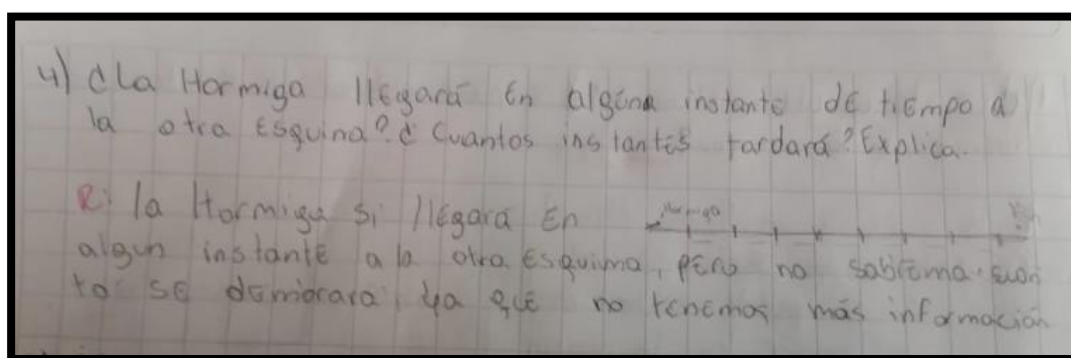


Ilustración 19: Actividad 4 - A4

Como consecuencia del planteamiento de la actividad los 13 estudiantes presentan esquemas asociados al horror al infinito dinámico, donde 5 de ellos utilizan justificaciones basadas en la experiencia cotidiana, particularmente el estudiante A1 compara en primera instancia la actividad con las anteriores para determinar que no puede llegar al otro extremo, pero especifica que al hacer la prueba -entendemos que empírica- la hormiga si llegará en un momento determinado pero incierto de tiempo al otro extremo.

4. Si hacemos la comparación con el primer ejercicio siempre nos faltará una mitad, por lo que "matemáticamente" no llegará, pero si hacemos la prueba nos damos cuenta que luego de un tiempo la hormiga habrá cruzado el punto de inicio, y esto dado que no sabemos cual es el inicio ni cual es el final de la mesa, por lo que tampoco sabremos cuánto tardará.

Ilustración 20: Actividad 4 - A1

De manera similar responden los estudiantes A2, A4, A5 y A7, quienes realizan una reflexión de la situación basada en la intuición o la experiencia propia, como se muestra en las respuestas de A5 y A7 en las siguientes ilustraciones.

4) R// La hormiga si puede llegar al otro lado, ya que mirado de la forma técnica, la mesa jamás se alarga desde el lado matemático, llegaría en un tiempo indefinido, ya que siempre avanza la mitad del espacio faltante dejando en cuenta que su recorrido se alarga solo por perspectiva de hormiga.

Ilustración 21: Actividad 4 - A5

4. Nunca llegara, se demorará mucho

Ilustración 22: Actividad 4 - A7

Debemos destacar la respuesta a la actividad del alumno A9, quien reflexiona que la hormiga debe recorrer la segunda mitad de la mesa en el mismo tiempo que tarda en recorrer la primera mitad, esta reflexión se destaca debido a que predomina el pensamiento lógico de lo tangible por sobre el razonamiento matemático, y es un primer paso para comprender la paradoja de Zenón, como se muestra en la siguiente ilustración.

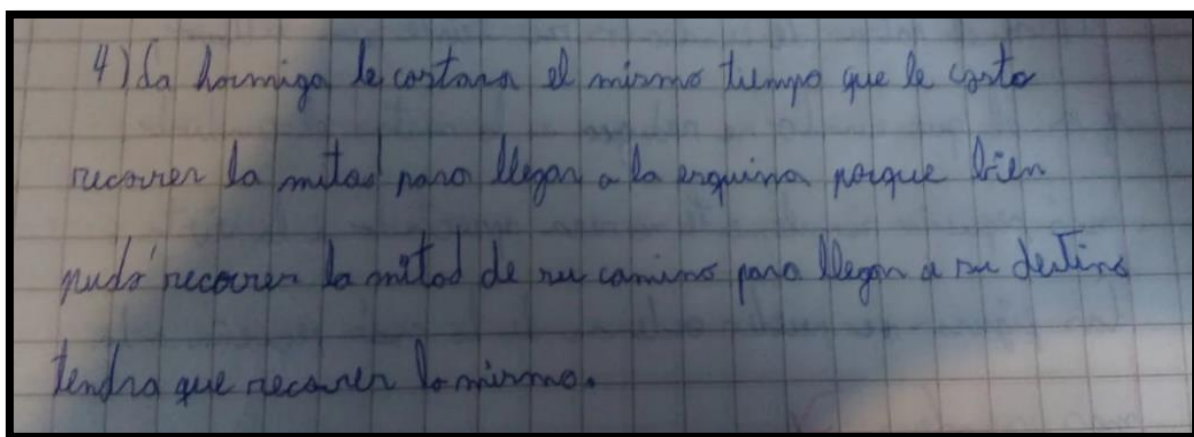


Ilustración 23: Actividad 4 - A9

En el desarrollo de esta actividad se presentan conceptualizaciones asociadas al infinito dinámico, aunque sigue formando parte del fenómeno del “horror al infinito”, es una interpretación de este próxima a la conceptualización actualista del infinito que da paso al concepto del límite, epistemológicamente hablando. Se observa que los esquemas presentados por los estudiantes, al desarrollar la actividad, propician la reflexión en torno al infinito pero que no se genera una contraposición reflexiva con la realidad, esto manifiesta una predominancia de los conceptos y teoremas en acto entregados por la institución sobre los que se puedan general de la entorno real.

6.3.5. Actividad 5

Dada la función $f(x) = -\frac{1}{x} + 2$, ¿Qué ocurre con el valor de la función a medida que aumentamos el valor de x ?

Esta tarea tiene como finalidad caracterizar la conceptualización de los estudiantes sobre el infinito en un entorno algebraico-funcional. Se espera que los estudiantes anticipen en consecuencia de las actividades anteriores el carácter infinito de la variable x , si bien en la forma gráfica de la función encontramos dos asíntotas, a priori esperamos que solo caractericen la correspondiente a la recta $x = 2$, esperando que determinen y grafiquen los puntos para $x \geq 0$. De esta manera, esperamos encontrarnos con el uso de registro numérico-tabular, gráfico y algebraico a modo de tratamiento y conversión. Finalmente, como respuesta ideal el estudiante debería concluir sobre el carácter infinito de la variable x y de que la función tiende o se aproxima al valor 2, o bien decir que el límite de la función es 2.

En contraste con las tareas anteriores, aquí dejamos de ver la predominancia del registro verbal escrito, y 8 de los 13 estudiantes utilizan registros algebraicos y numéricos para resolver la actividad. Sin embargo, solo en el estudiante A5 observamos evidencias de conceptualizaciones del infinito, concluyendo que la función se aproxima al 2 pero sin llegar a tocarlo, como se muestra en la siguiente ilustración.

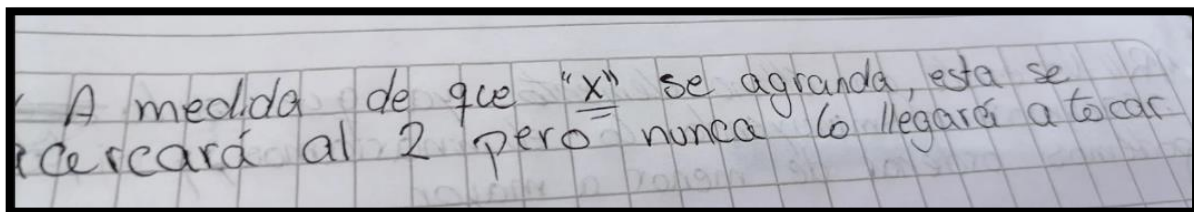


Ilustración 24: Actividad 5 - A5

Si bien el estudiante A5, concluye en torno a una conceptualización del infinito, es decir comprende el carácter infinito en la actividad identificándola como su meta, no evidenciamos submetas asociadas al cálculo de la variable para justificar, pero si en los conceptos que utiliza, específicamente al mencionar “se agranda” y “acercara”, denotando el carácter variable y de tendencia respectivamente. El estudiante A1, reflexiona de manera similar, pero responde de manera genérica en base a los conceptos de función que maneja, aseverando que la función “puede aumentar o disminuir”, pero sin identificar una meta en la actividad, como se muestra en la siguiente ilustración.

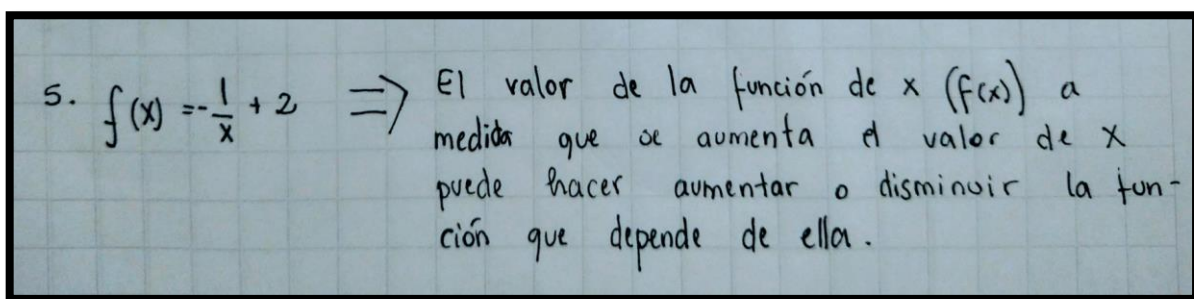


Ilustración 25: Actividad 5 - A1

El resto de los estudiantes no logra identificar como meta el carácter infinito de la actividad, sin reflexionar o concluir sobre este, como es el caso de A4, quien realiza un tratamiento mediante el registro algebraico.

b) ~~3/2x~~
 $f(x) = -\frac{1}{2} + 2 =$
 $\left(-\frac{1}{x} + 2\right) - \frac{1}{x^2}$
 $= -\left(\frac{1}{x}\right) + (2)$
 $\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$
 $(2) = 0$

Ilustración 26: Actividad 5 - A4

Ahora que se han señalado algunas estructuras presentes en el análisis de esta actividad, precisamos detallar la actividad 6 para, en conjunto, dar un análisis más en profundidad de los esquemas que se presentan en las actividades relacionadas con funciones y presentar posibles explicaciones de esta situación, donde los estudiantes no son capaces de establecer como meta el trabajo entorno al infinito para la construcción conceptual del límite o bien no son capaces de responder con claridad.

6.3.6. Actividad 6

Gráfica la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ y comenta que ocurre en el punto (2,4)

Esta tarea, al igual que la anterior, pone en una situación algebraica al estudiante, tiene como intención generar una ruptura en los esquemas que podrían haber generado anteriormente sobre funciones, debido a que al graficar la función toma forma de recta y además posee una discontinuidad evitable en (2,4). Tiene como objetivo analizar los invariantes operatorios que ponen en juego, se espera que a priori grafiquen la recta correspondiente asumiendo la existencia de todos los puntos y dejen un “salto” en el punto en cuestión.

En esta actividad los estudiantes A3, A7 y A10 no responden la actividad, mientras que A1 recurre solo al registro algebraico sin graficar, dejando incompleta la tarea, como se muestra en la siguiente ilustración.

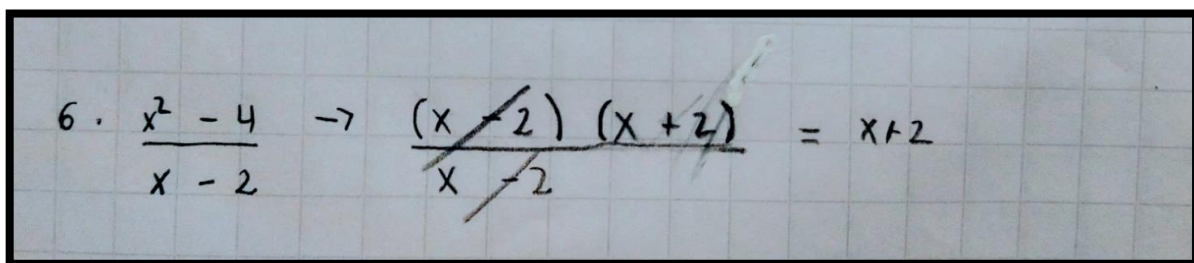

$$6. \frac{x^2 - 4}{x - 2} \rightarrow \frac{\cancel{(x - 2)}(x + 2)}{\cancel{x - 2}} = x + 2$$

Ilustración 27: Actividad 6 - A1

Los estudiantes A2, A4, A5, A6 y A11 solo dejan evidencia mediante el registro gráfico obtenido mediante software, sin embargo, al no manejar el programa algunos obtienen gráficas que no corresponden a la actividad, además, no establecen ninguna conclusión, dejando la actividad incompleta, como se muestra en la respuesta de A4.

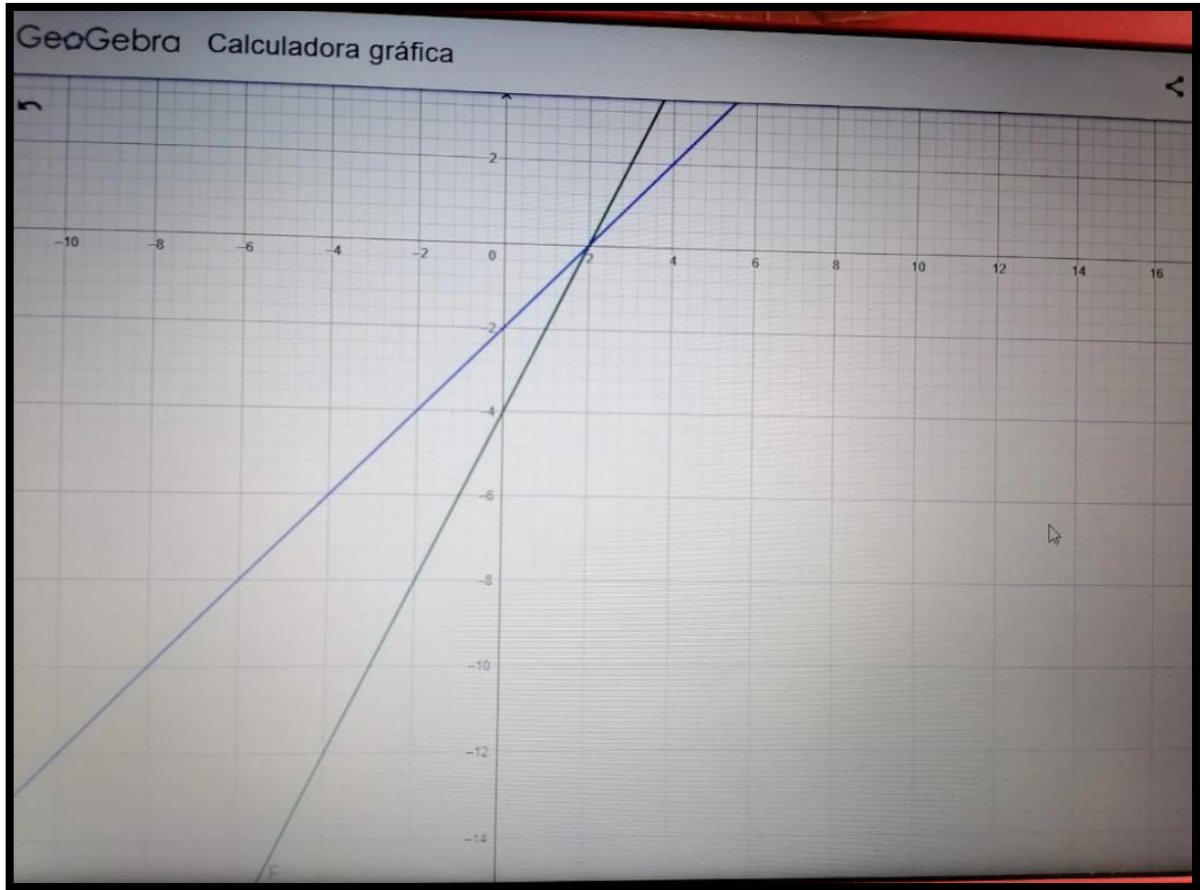


Ilustración 28: Actividad 6 - A4

Los estudiantes A8 y A9, despliegan la gama esperada de conceptos y teoremas en acto, utilizando el registro tabular, algebraico y gráfico, pero cometen un error conceptual al resolver la fracción con denominador 0 como resultado 0, lo que le significa el graficar una curva en lugar de una recta, indicando que el punto en cuestión no pertenece a la curva, como se muestra en la siguiente ilustración.

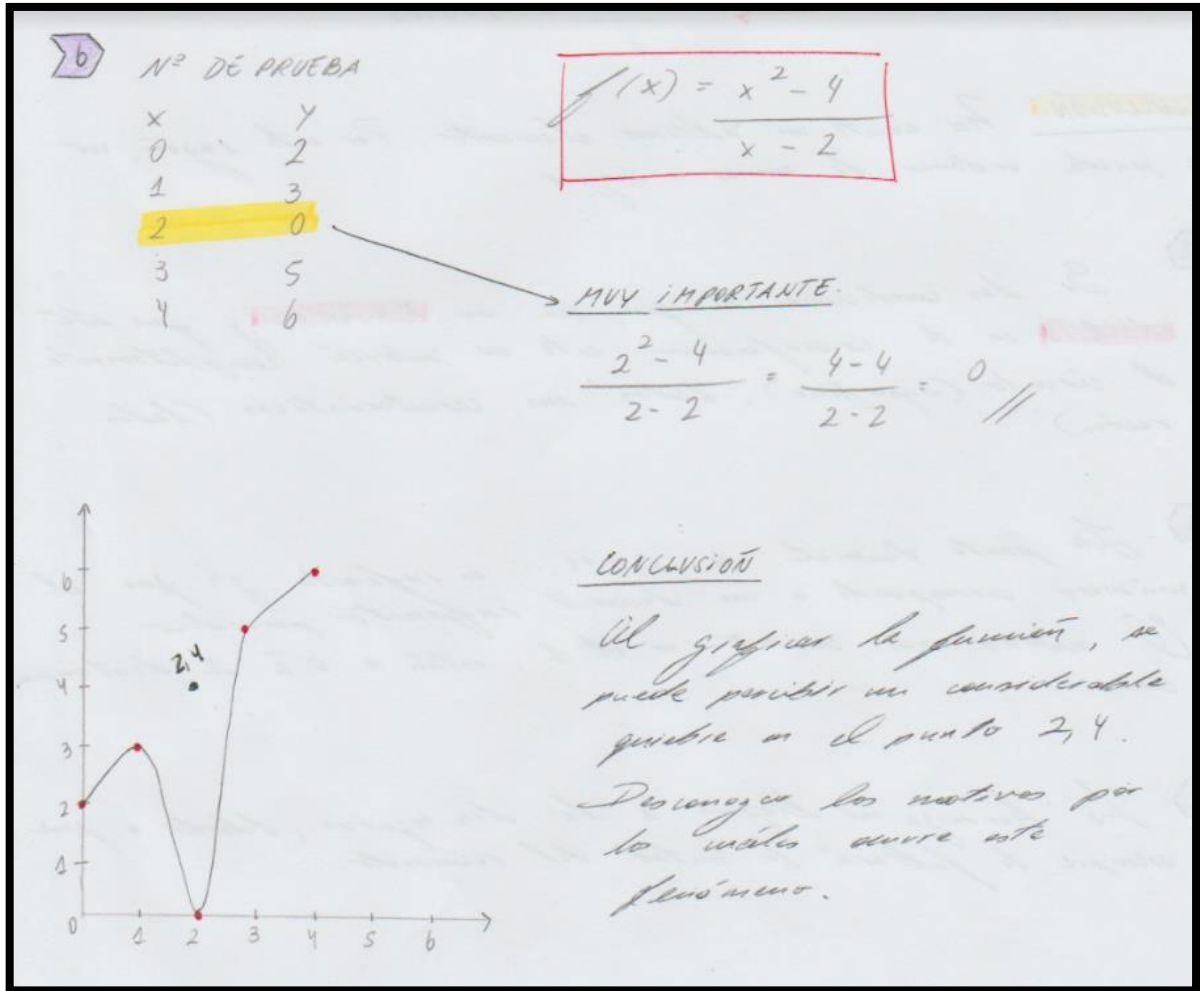


Ilustración 29: Actividad 6 - A8

Para finalizar el análisis de las actividades 5 y 6, relacionadas a situaciones del campo de las funciones, notamos que los esquemas presentes no son óptimos para el trabajo con el infinito. Los esquemas presentes en la conceptualización no permiten el razonamiento o las inferencias para identificar como meta la reflexión en torno al infinito de la actividad. Si bien, algunos estudiantes hacen uso de teoremas y conceptos en acto y representaciones que sirven como punto de control de la actividad, estos son herrados o no del todo claro, como ya lo hemos mencionado en los antecedentes de la investigación, esto es producto de una

conceptualización de funciones inconexa entre las situaciones, los significados y los significantes, lo que conduce a esquemas incompletos a pesar del largo trabajo que se realiza en los distintos años de escolaridad.

6.4. Conclusiones

La teoría de los campos conceptuales ofrece un marco para el análisis de la conceptualización que tiene un sujeto sobre un concepto. Para esto pone a disposición el concepto de **esquema**, y es aquí donde podemos visualizar el alma de la conceptualización, modelando lo que se encuentra en el interior, la forma en que entendemos lo real, con las representaciones externas y sus bases internas. De esta manera, esta investigación se asienta con el objetivo de aproximarnos a la conceptualización presente en un grupo de estudiantes sobre el concepto de límite previo a su enseñanza.

Para esto, se diseñó un cuestionario compuesto de 6 situaciones que involucran conceptos estructuradores del límite, con principal foco en el concepto de infinito y sus conceptualizaciones epistemológicas. Esto nos permitió identificar las conceptualizaciones mediante el análisis de los esquemas evidenciados en el desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes, permitiendo establecer directrices recurrentes entre los estudiantes y poniendo en aquellas respuestas que difieren a lo que se esperaba a priori. De esta manera, y a través de los objetivos específicos, podemos dar respuesta a la pregunta móvil de este estudio, ¿Cuál es la conceptualización del límite que poseen los estudiantes previos a su enseñanza formal en educación media?

A continuación, damos a conocer los resultados de la investigación en coherencia a los objetivos específicos planteados en el capítulo 1.

Con relación a las conceptualizaciones histórico-epistemológicas que participan en la construcción del concepto del límite, identificamos a la conceptualización del infinito como piedra angular de su construcción y de cómo la historia y los conceptos matemáticos permiten

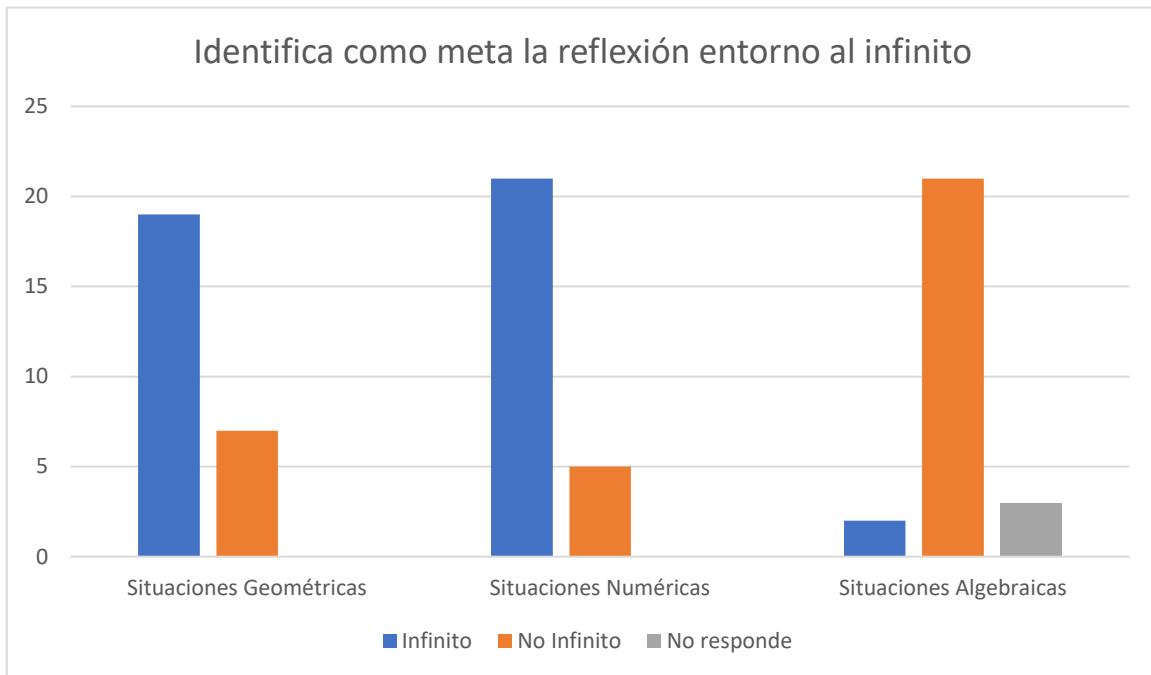
a los matemáticos ampliar la comprensión de este, desde la conceptualización potencial a la actual, acompañada del desarrollo de conceptos geométricos, algebraicos y numéricos.

Identificamos al horror al infinito como una conceptualización temprana de lo infinito, esta se caracteriza por contradicciones producidas al enfrentar lo real con reflexiones o paradojas que no pueden ser superadas por los matemáticos de la época, de esta manera no se puede enfrentar al infinito o bien se opta por un momento de este para poder trabajar.

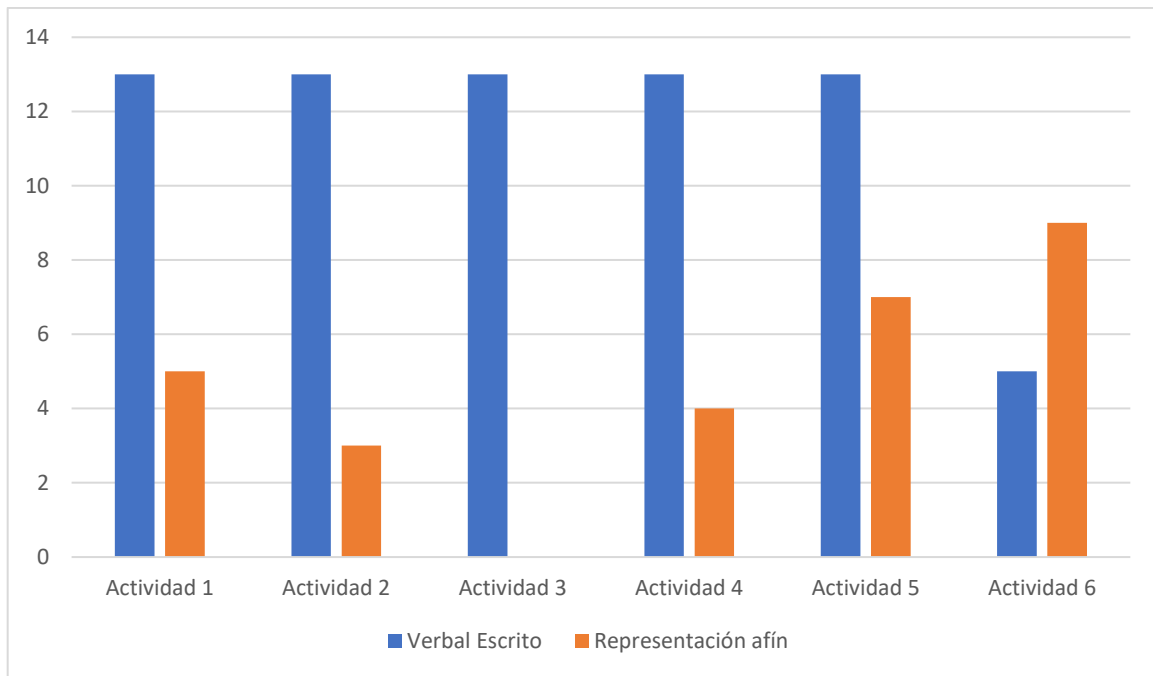
Las conceptualizaciones infinitesimales, que se desarrollan gracias al avance en la geometría y el estudio de las curvas mediante la construcción de conceptos de función. Esta conceptualización esta ad-por-tas de enfrentar el infinito para el trabajo matemático, pero se concentra en la diferencia numérica por alcanzar el límite. Este proceso vive dos etapas, la primera donde se interpreta el límite como una diferencia infinitesimal en un momento dado del infinito que permita trabajar o conjeturar en torno a este y una etapa posterior onde esta diferencia infinitesimal se torna dinámica y por ende la podemos considerar despreciable en los cálculos matemáticos.

Y en un desarrollo más avanzado identificamos la conceptualización actualista, aquí mediante la formalización de la matemática y los avances en los campos de conjuntos permiten la construcción del límite, separando lo infinito y dinámico de este. Esto da paso conceptualizar el límite desde un punto de vista estático del concepto.

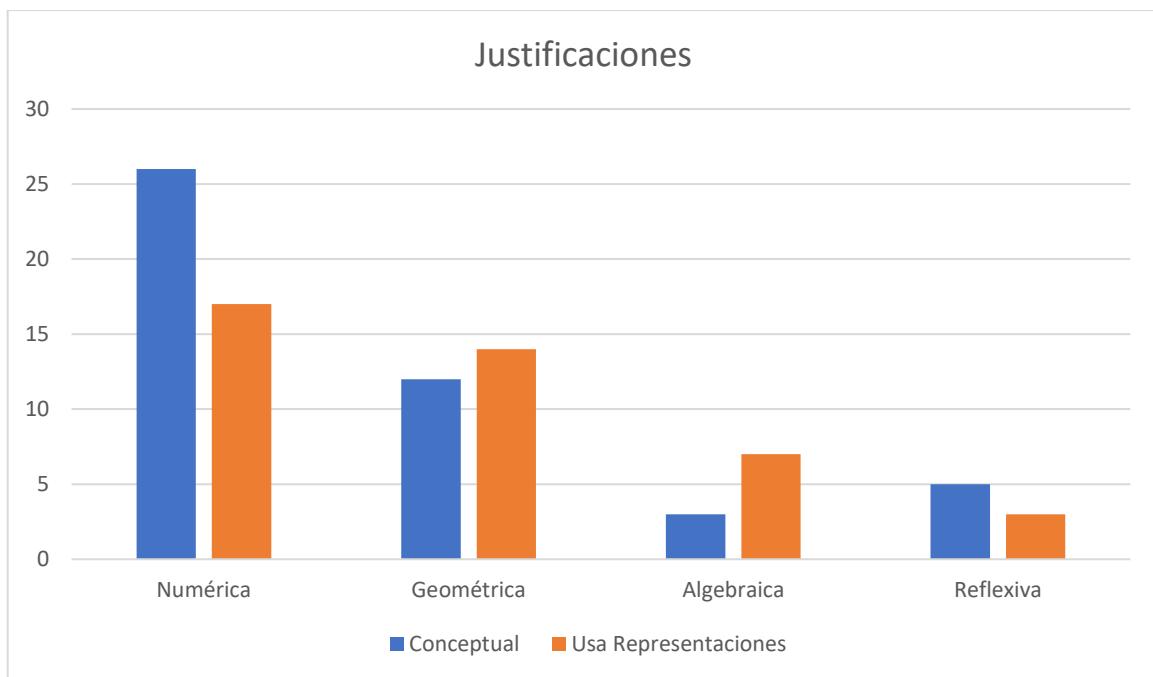
Al analizar los **esquemas** que se presentan en el desarrollo de las actividades, damos cuenta en primera instancia que los estudiantes identifican como meta la reflexión en torno a lo infinito en la mayoría de las actividades, como se muestra en los siguientes gráficos, exceptuando las actividades del entorno algebraico-funcional, esto posiblemente a lo que menciona Artigue (1995), respecto a las dificultades que tienen los estudiantes con respecto de la comprensión de este concepto



Por otra parte, los estudiantes utilizan de manera predominante el registro Verbal Escrito para el desarrollo de las actividades, si bien las actividades no exigen un determinado tipo de registro para su desarrollo, a pesar que se les da la posibilidad de justificar mediante el registro que ellos estimen conveniente, como se muestra en la siguiente ilustración por actividad, donde identificamos que el registro verbal predomina, sobre las otras representaciones afines, como las geométricas, numéricas o algebraicas.



Por otra parte, al justificar las actividades se prioriza la justificación mediante conceptos numéricos y en menor medida justificaciones del tipo algebraico, damos cuenta además que de manera homogénea se usa o no representaciones al acompañar la justificación.

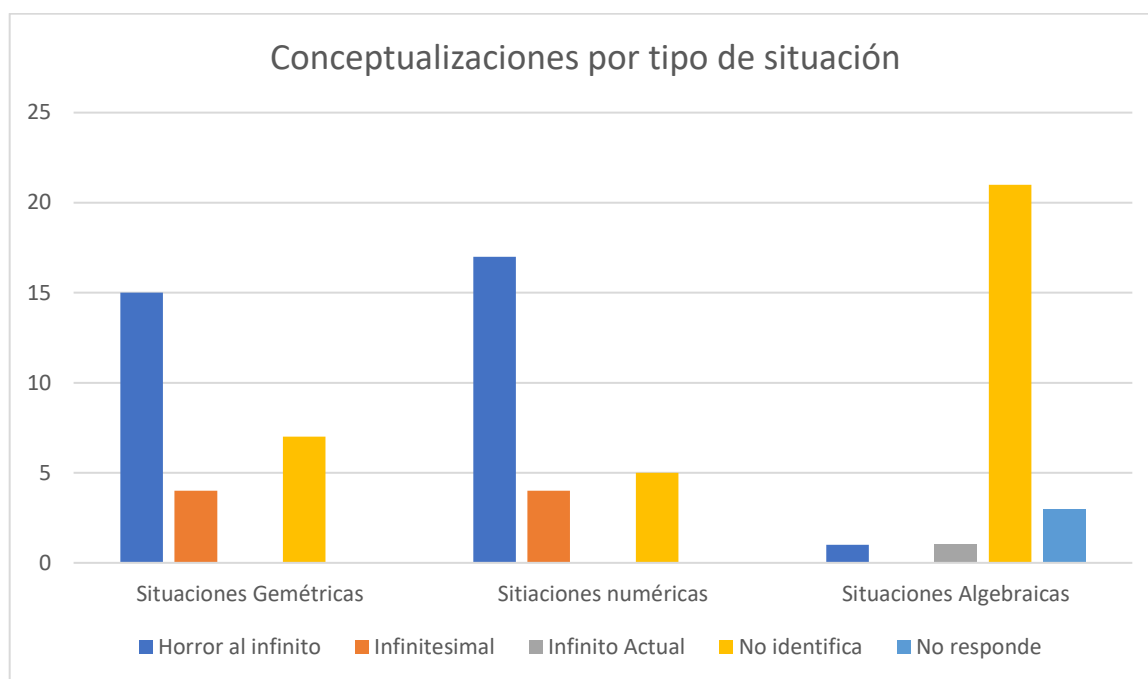


Finalmente, para identificar cuál de estas conceptualizaciones está presente en el estudiante se construye un cuestionario que contempla dos situaciones que involucran conceptos geométricos, dos situaciones numéricas y dos situaciones que contempla conceptos algebraicos-funcionales. De esta manera logramos identificar que, entre las 78 respuestas obtenidas, entre los 13 estudiantes, predominan las conceptualizaciones asociadas al “horror al infinito” independiente de tipo de situación planteada, como se muestra en la siguiente ilustración.



En el análisis según tipo de actividad, podemos identificar que tanto en actividades geométricas como numéricas predominan conceptualizaciones asociadas al infinito actual, se observa un leve aumento en las conceptualizaciones asociadas a lo infinitesimal en las situaciones numéricas, como se observa en la siguiente ilustración. Por otra parte, no se logran apreciar conceptualizaciones del infinito en las situaciones algebraicas, esto se debe

posiblemente a lo que hace referencia Artigue (1995), sobre las dificultades para articular los conceptos implícitos o explícitos asociados a funciones.



La predominancia de esta conceptualización temprana del infinito puede estar ligada al escaso trabajo en torno a este concepto que se realiza en el contexto escolar. De los antecedentes logramos identificar un escaso uso o nulo de representaciones que podrían propiciar filiaciones o rupturas que aporten a la conceptualización del infinito y posteriormente a la del límite.

Al analizar la información, damos cuenta que a priori, en nuestros estudiantes, la conceptualización del límite se enmarca en aquellos conceptos tempranos en la epistemología, asociada a ideas del infinito inalcanzable, que imposibilita el trabajo matemático escapando a la comprensión o razonamiento tangible. Por otra parte, esta capacidad de observar el infinito se encapsula muy naturalmente en situaciones geométricas, si bien el concepto de límite, pensando en el triplete de conjuntos que cita Vergnaud, donde

este se compone de situaciones que se transversalizan en distintos ejes de la matemática, los alumnos que han participado de esta investigación no han desarrollado la significación del concepto, en cuanto a sus significados y significantes, dificultando el proceso reflexivo de las actividades propuestas.

Dentro del análisis realizado, damos cuenta que existen instancias en el currículo que aportan a la conceptualización del límite, a través de la reflexión del infinito, pero que estos conceptos son relegados. Esta conceptualización obviada, de manera intencionada o no, repercute en el estado del concepto del límite y del infinito que generan los estudiantes, priorizando la generación de esquemas que se apoyan en las ideas sociales o externas del concepto en lugar de las que están en post del concepto matemático.

Una vez dicho lo anterior, queda de manifiesto la relevancia de la conceptualización de aquellos conceptos que aportan a la construcción de ideas de límite durante el proceso escolar previo a la toma del electivo y por supuesto previo al enfrentarse a estos en carreras universitarias. Damos a entender, y sustentados en la teoría de Vergnaud, que los procesos educativos no son independientes, forman parte de un todo. En este sentido el proceso escolar, debe garantizar filiaciones y rupturas adecuadas pensando en el proceso en sí, considerando aquellas conceptualizaciones construidas con anterioridad y las que están en construcción.

6.5. Proyecciones

Al completar y reflexionar sobre el proceso que se llevó a cabo en este trabajo de grado, damos cuenta que algunos puntos pueden ser mejorados para enriquecer o ampliar los datos aquí obtenidos. En aquellos puntos que pueden ser mejorados o reforzados, consideramos el ampliar la búsqueda de antecedentes y del objeto matemático con apreciaciones del infinito en otras áreas dentro de la misma ciencia, entorno social y desarrollo histórico-social, como por ejemplo características religiosas o creencias populares, para ampliar la mirada al desarrollo conceptual de este fuera del entorno matemático, que pueden aportar a la confección de actividades reflexivas o investigativas en la gestión didáctica de la enseñanza. Otro punto que se debe mejorar es la complementación de la información obtenida de los cuestionarios con entrevistas guiadas para analizar en primera fuente los esquemas desarrollados por los participantes al momento del desarrollo de cada actividad.

En aquellos aspectos que permitan ampliar la investigación, podemos considerar indagar sobre el comportamiento de los esquemas una vez finalizado el curso de profundización de límites, derivadas e integrales haciendo una comparativa con esta estructura presentada de manera preliminar a cursar el programa. Por otra parte, los datos de esta investigación fueron recolectados de un grupo de estudiantes en el momento previo a la toma del curso, 16-17 años, pero puede ser planteada para años incluso menores para analizar la conceptualización del infinito y definir un desarrollo conceptual del límite o de los esquemas asociados a su desarrollo.

Bibliografía

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA* (págs. 97-140). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A.
- Blázquez, S., & del Rincón, T. O. (2002). Nueva definición del límite funcional. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*(30), 67-84.
- Bustos, J., Naranjo, Y., Pisco, R., Torres, G., & Romero, I. (2016). Idea intuitiva de límite de una función en un punto. En *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD* (pág. 141).
- Cornu, B. (1981). *Apprentissage de la notion de limite : modèles spontanés et modèles propes. Proceedings PME-V* (Vol. I). France: Grenoble.
- Hernández-Sampieri, R., & Torres, C. (2018). *Metodología de la Investigación*. México DF: McGraw-Hill Interamericana.
- Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. *Matemática educativa, Aspectos de la investigación actual.*, 91-111.
- Irazoqui Becerra, E., & Medina Rivilla, A. (2013). Estudio Preliminar de Aproximación al Concepto de Límite de una Función. *Theoria*, 22(1), 21-31.
- Lestón, P. (2009). Ideas de los Alumnos de Escuela Media Sobre el Infinito de los Conjuntos Numéricos. *Revista Premisa*, 35-42.
- Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (Síntesis Conceptual). *IIPSI, Facultad de Psicología UNMSM*, 123-146.
- Medina, A. C. (2001). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. *Tecné Episteme y Didaxis: TED*(9).

- MINEDUC. (2020). *Programa de Estudio. Límites, Derivadas e Integrales, para Formación Diferenciada*. Santiago, Chile: Consejo Nacional de Educación.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular. *Educational Studies in mathematics*(12), 151-169.
- Vergnaud. (1990). *Recherches en Didáctique des Mathématiques* (Vol. 10).
- Vergnaud, G. (2016). ¿En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo? *Investigações em ensino de ciências*, 12(2), 285-302.
- Vigo, V. M., & Abalos, G. B. (2010). El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institucionalización. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, 5(1), 27-41.

7. ANEXOS

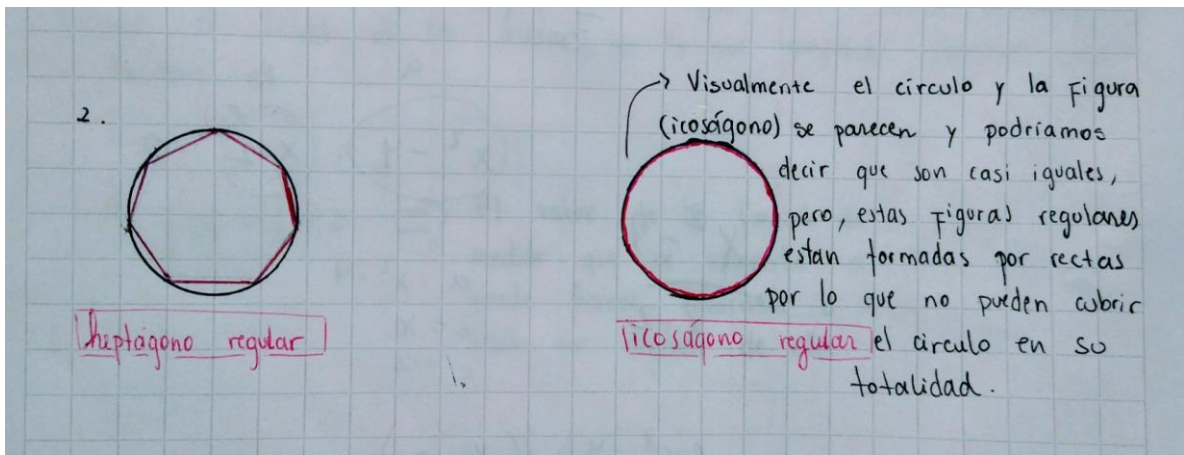
7.1. ANEXO 1: Respuesta Cuestionarios

7.1.1. Cuestionario A1

Actividad 1:

1. No existe un último elemento, ya que los números son infinitos, si tenemos un cuadrado de lado 2 y sabemos que el siguiente se reducirá a la mitad, tendremos un cuadrado de lado 1, luego, uno de lado 0,5, luego de 0,25; 0,125; 0,0625 y así infinitamente; por otra parte, para poder ordenar los cuadrados de menor a mayor o viceversa, sólo se puede hacer mediante una muestra del conjunto total (todos los cuadrados cuyo lado se reduce a la mitad), pero no se puede ordenar este último ya que al ser números infinitos no sabemos donde inicia ni donde termina.

Actividad 2:



Actividad 3:

3. El decimal $0,999$ tiene decimales infinitos, si observamos el número que sigue puede estar tan cerca y a la vez tan lejos ya que entre ellos hay números aún más pequeños que el siguiente pero mayor que el $0,999\dots$

Actividad 4:

4. Si hacemos la comparación con el primer ejercicio siempre nos faltará una mitad, por lo que "matemáticamente" no llegará, pero si hacemos la prueba nos damos cuenta que luego de un tiempo la hormiga habrá cruzado el punto de inicio, y esto dado que no sabemos cual es el inicio ni cual es el final de la mesa, por lo que tampoco sabremos cuánto tardará.

Actividad 5:

5. $f(x) = -\frac{1}{x} + 2 \Rightarrow$ El valor de la función de x ($f(x)$) a medida que se aumenta el valor de x puede hacer aumentar o disminuir la función que depende de ella.

Actividad 6:

$$6. \frac{x^2 - 4}{x - 2} \rightarrow \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$$

7.1.2. Cuestionario A2

Actividad 1:

Si podría existir otro elemento después de el 2, ya que al dividirlo a la mitad da 1 por lo cual puede se pude agregar como un cuadrado, si se podrían ordenar de menor a mayor ya que sería como si se estuvieran multiplicando por 2 y a si se pueden acomodar de esa manera

Actividad 2:

Se puede observar que al aumentar los lados se le forman puntas, por lo cual genera que en ningún momento el polígono pueda cubrir completamente la circunferencia, porque aunque aumenten los lados no podrá, ya que tiene lados infinitos y cualquier figura puede estar dentro pero no la podrá cubrir por completo

Actividad 3:

Es infinito por eso sale como 0,999... ya que no tiene fin, el numero que le sigue es el 1, es el más cerca por lo mismo cuando ponen 1,790 uno lo asemeja a 1800

Actividad 4:

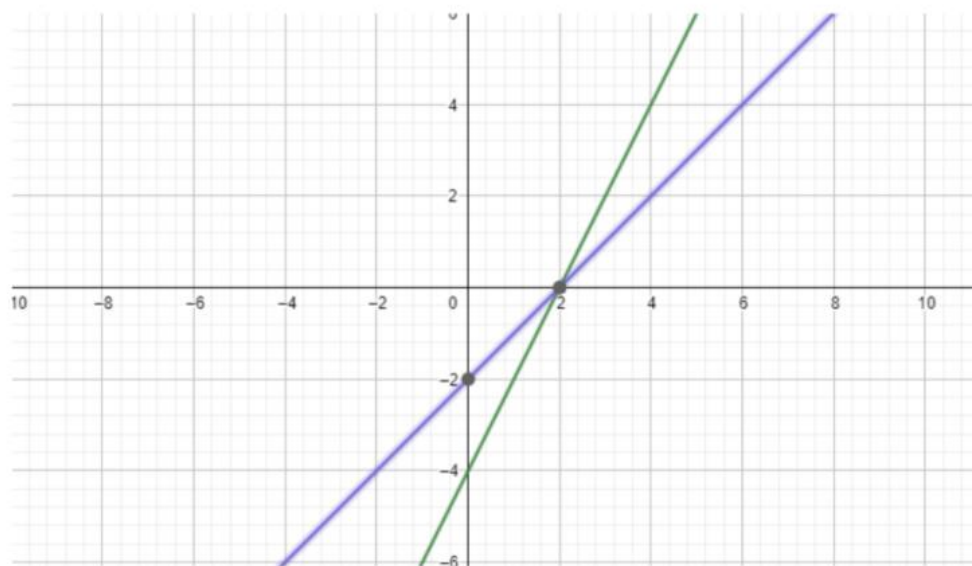
La hormiga si llegara en algún momento a la otra esquina, pero no se puede saber cuanto exactamente ya que no se especifica el tamaño de la mesa ni cuanto se demoro la hormiga en llegar a la mitad de la mesa, por lo cual no se puede tener con exactitud cuanto le tomara cruzar toda la mesa



Actividad 5:

El valor de la funcion va a ir disminullendo y cada ves va a estar mas cerca de 0, en este caso esta mas cerca de 2

Actividad 6:



Se puede notar que no esta marcado en 4 ya que queda en 2 y 2 queda negativo al ser pasado a un grafico

7.1.3. Cuestionario A3

Actividad 1:

1)

yo digo que no existe un ultimo elemento. ya que cada vez la figura se va a ir reduciendo mas hasta llegara 1 , luego de eso comienzan los decimales y estos cada ves se van reduciendo por la mitad, por ende si es posible ordenarlos de mayor a menor pero esta tabla seria infinita ya que nunca se dejara de dividir en 2

ej 64 ; 32 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,125 ; 0,00625

Actividad 2:

2)

al aumentar el numero de lados lo que yo observo es que las partes visibles de la circunferencias disminuyen . yo digo que en algún momento el polígono si cubrirá toda la figura ya que un polígono entre mas lados tiene este va adquiriendo mas forma circular , también por que un circulo es un polígono con una cantidad incontable de lados.

Actividad 3:

3)

el decimal 0,999.... periódico tiene infinitos decimales después de la coma . ye le numero mas cercano a esta decimal es el 1 y su diferencia es de 0,00000.....1

Actividad 4:

4)

yo digo que la hormiga no llegara a la mesa ya que esta nunca recorrerá el total

ej

mesa con 100 cm de largo

en el primero recorre 50 cm

después 25

luego 12,5 ; 6,25 y nunca lograra recorrer el total de la mesa

Actividad 5:

5)

a medida que aumentamos el valor de X el resultado aumenta

ej. $-1+2 = 1$; $-0,5+2 = 1,5$; $-0,3333+2 = 1,66666667$

Actividad 6:

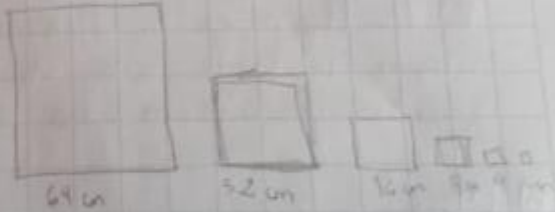
6) no pude resolver el ejercicio

7.1.4. Cuestionario A4

Actividad 1:

1) ¿Existe un último elemento? ¿Se puede ordenar desde la figura menor a la mayor? Explica.

R. Si, si existe un último elemento en este caso sería el cuadrado N°2, si se puede ordenar de menor a mayor, en la imagen se muestran ordenado de mayor a menor, entonces si se podría ordenar de menor a mayor, y de daría así, 2 cm, 4 cm, 8 cm, 16 cm, 32 cm y 64 cm

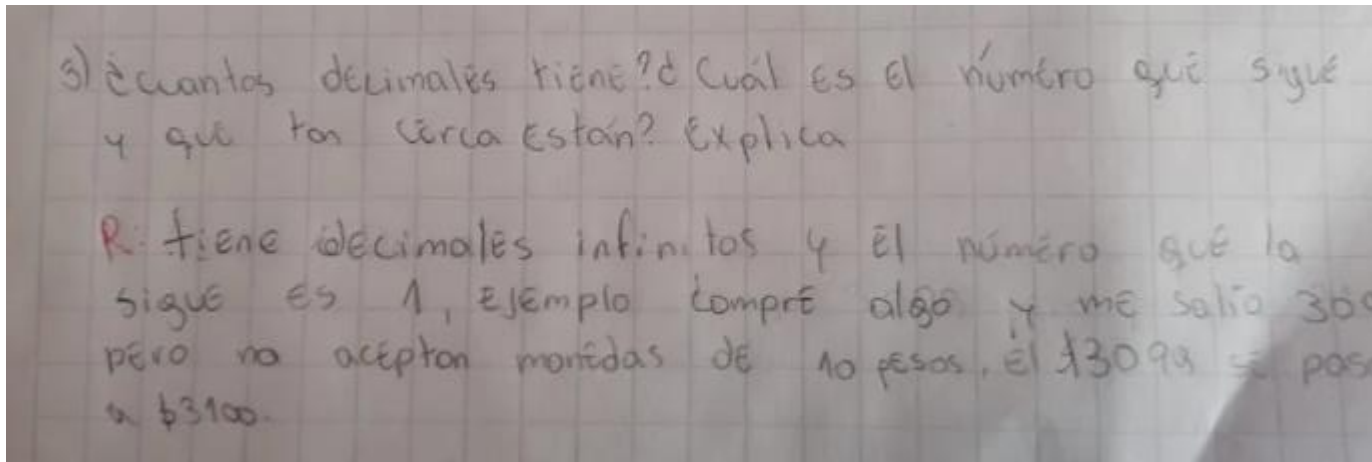


Actividad 2:

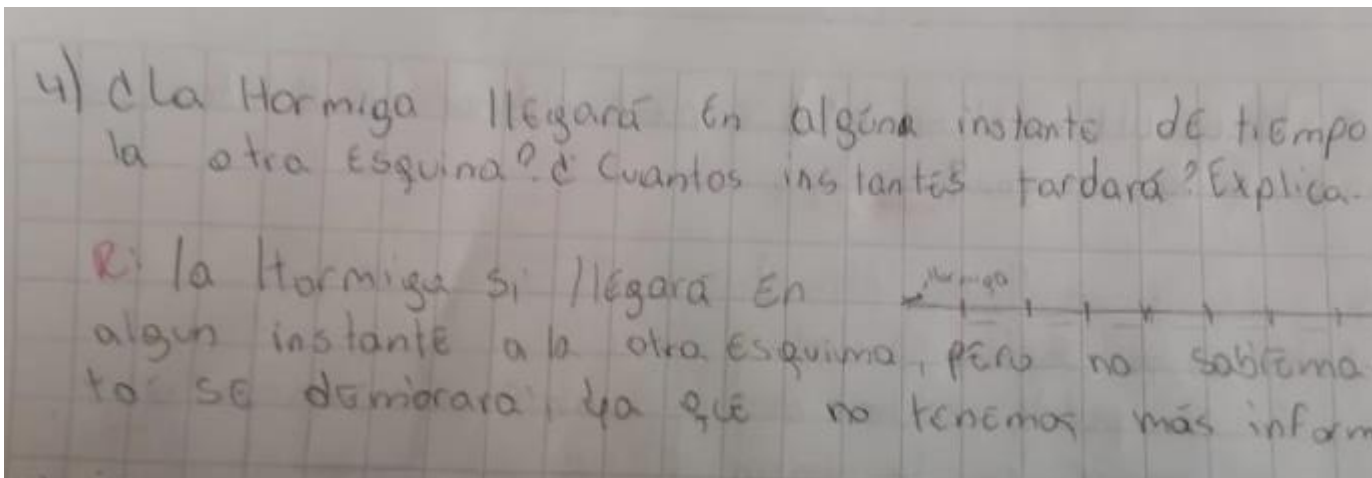
2) ¿Qué observas en el patrón? ¿En algún momento el polígono cubre totalmente al círculo? Explica.

R. lo que observo en el patrón es que, la figura dentro del círculo va cambiando, entonces por eso que va aumentando, caso que el polígono si cubriera totalmente el círculo, porque las figuras van aumentando que al final terminaran cubriendo el círculo.

Actividad 3:



Actividad 4:

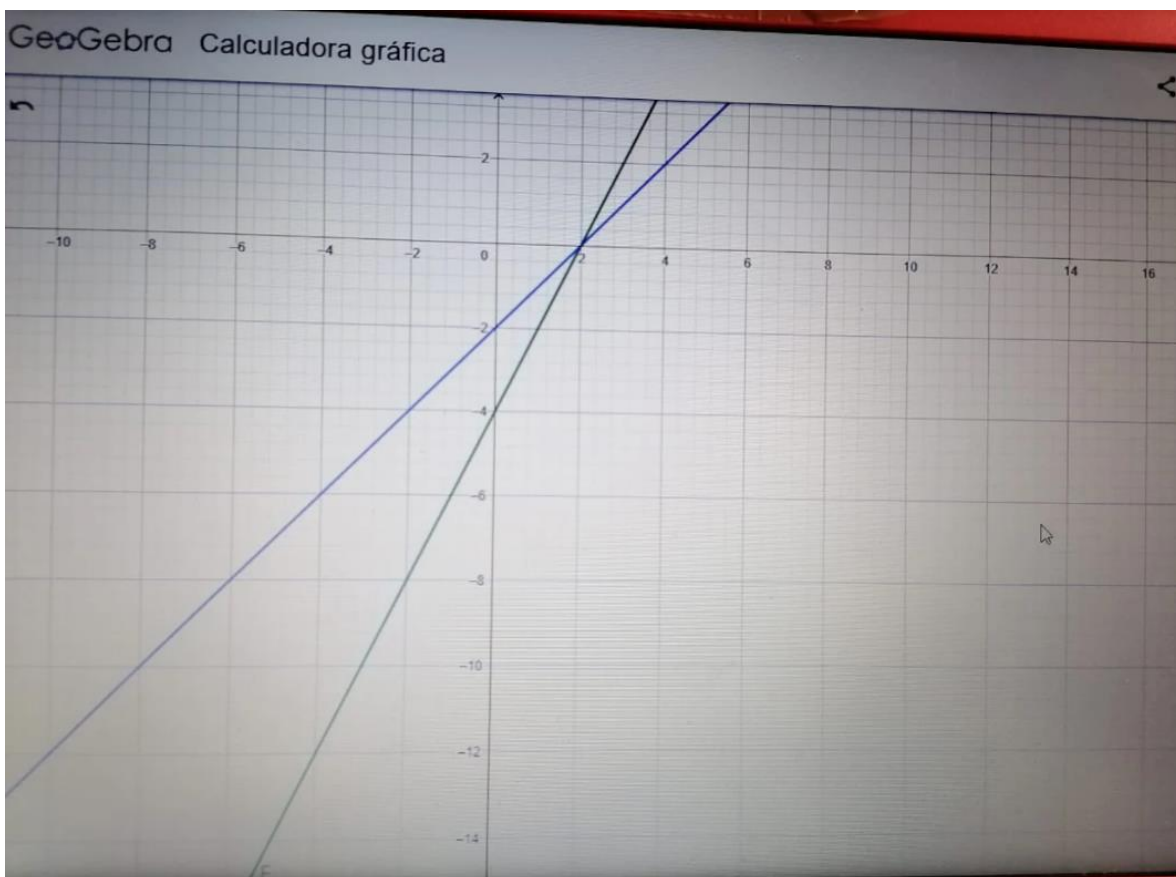


Actividad 5:

b) ~~⊗~~

$$f(x) = -\frac{1}{2} + 2 =$$
$$\left(-\frac{1}{x} + 2\right) = \frac{1}{x^2}$$
$$= -\left(\frac{1}{x}\right) + (2)$$
$$\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$
$$(2) = 0$$

Actividad 6:



7.1.5. Cuestionario A5

Actividad 1:

1) R// No existe un último elemento ya que si lo ~~siguiente~~ seguimos disminuyendo lo eliminaríamos, y si lo podemos ordenar de menor a mayor

Actividad 2:

2) R// A mayor números de lados de la figura que se encuentra dentro del círculo, mayor será el volumen ocupado. Dudo mucho de que el polígono cubra completamente el círculo.

Actividad 3:

3) Los decimales que tiene el número anterior son los tres "9", el número que le sigue al decimal es "1"

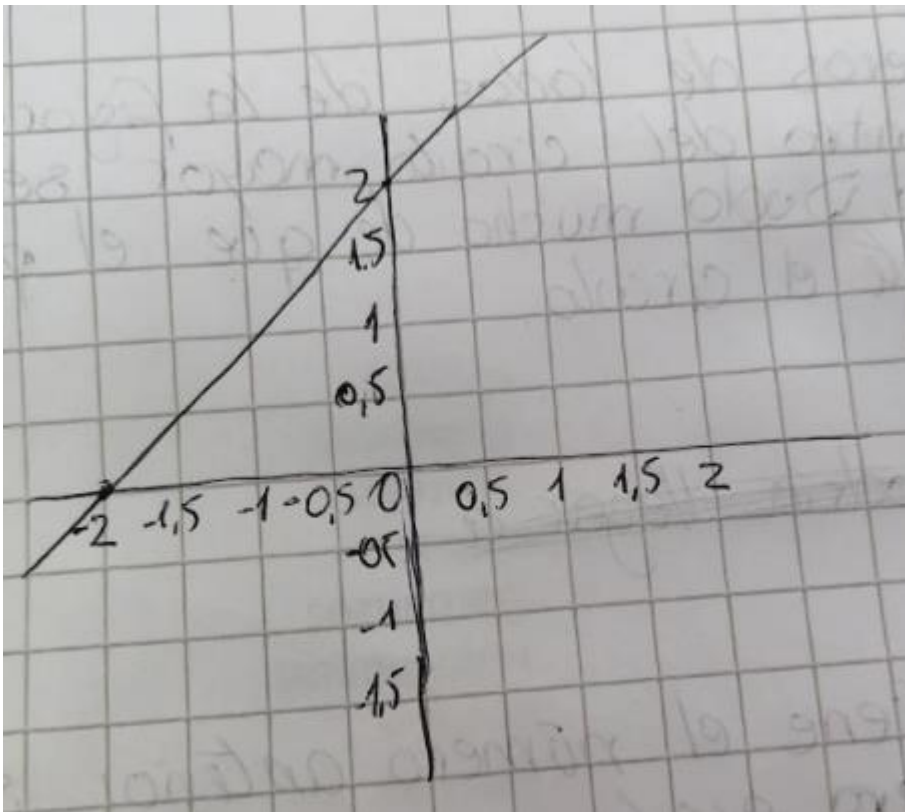
Actividad 4:

4) R// La hormiga, si puede llegar al otro lado, ya que mirado de la forma técnica, la mesa jamás se alarga, desde el lado matemático, llegaría en un tiempo indefinido, ya que siempre avanza la mitad del espacio faltante dejando en cuenta que su recorrido se alarga solo por perspectiva de hormiga.

Actividad 5:

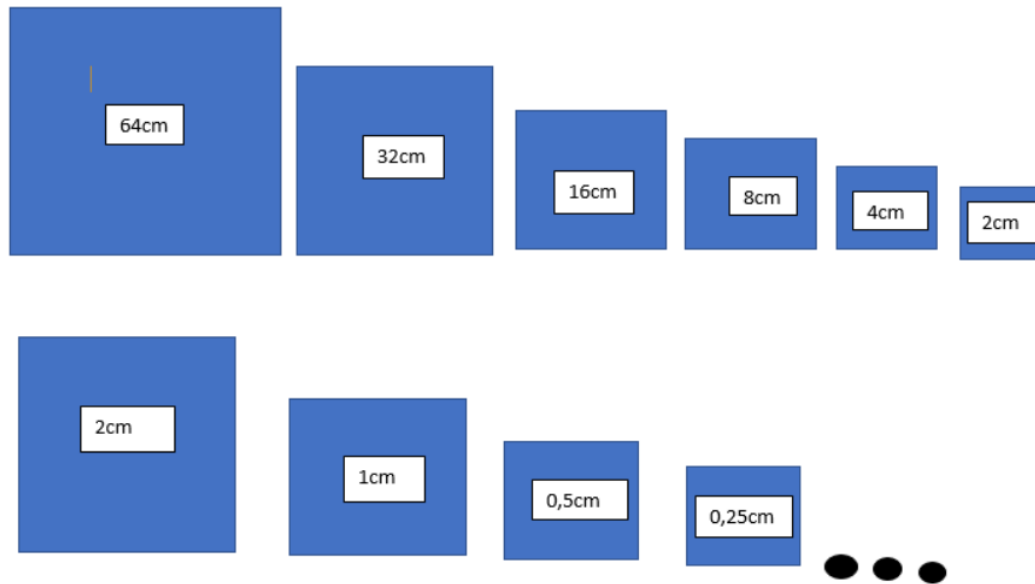
A medida de que "x" se agranda, esta se acercará al 2 pero nunca lo llegará a tocar

Actividad 6:



7.1.6. Cuestionario A6

Actividad 1:



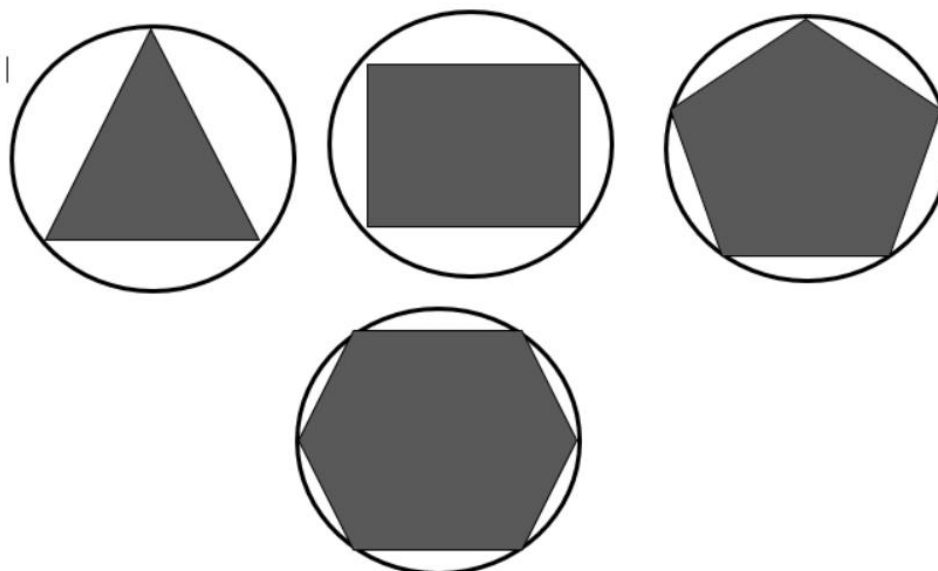
¿Existe un ultimo elemento?

No, debido a que el siguiente cuadrado es la mitad del anterior y que en los números racionales existen números mas pequeños que el "1" existen muchos mas cuadrados después del de "2cm"

¿Se puede ordenar las figuras de menor a mayor? Explica

Si se puede ordenar de menor a mayor pero desde algún punto específico, por ejemplo desde el cuadrado de 1cm hasta el de 32cm, debido a que existen números infinitos y no se podrían ordenar todos de menor a mayor

Actividad 2:



¿Qué observas en el patron?

A medida que mas lados tiene una figura, mas parecido va quedando a un circulo

¿En algún momento el polígono va a cubrir totalmente al circulo?

No, si tomamos en cuenta que hablamos de un polígono de 100 lados este parecerá un circulo pero no utilizara todo el espacio del circulo

Actividad 3:

¿Cuantos decimales tiene 0,999...?

0,999... tiene decimales infinitos, lo que significa que tiene infinitos 9 decimales de la coma

¿Cuál es el número que le sigue y que tan cerca están?

El número que le sigue es el "1" y están a un decimal de distancia, aunque solo seria una aproximación debido a que al ser periódico tendría mas numero después

Actividad 4:

¿La hormiga llegara en algún instante de tiempo a la otra esquina?

No, si tomamos en cuenta que la mesa mide 2 metros por ejemplo, en el primer instante llegaría a la mitad que serian 1 metro, al otro instante llegaría a 50 cm y al siguiente llegaría a 25cm y luego a 12.5cm y así sucesivamente.

Actividad 5:

$F(x) = -1/x + 2$ ¿que ocurre en la función a medida que aumentamos el valor de X?

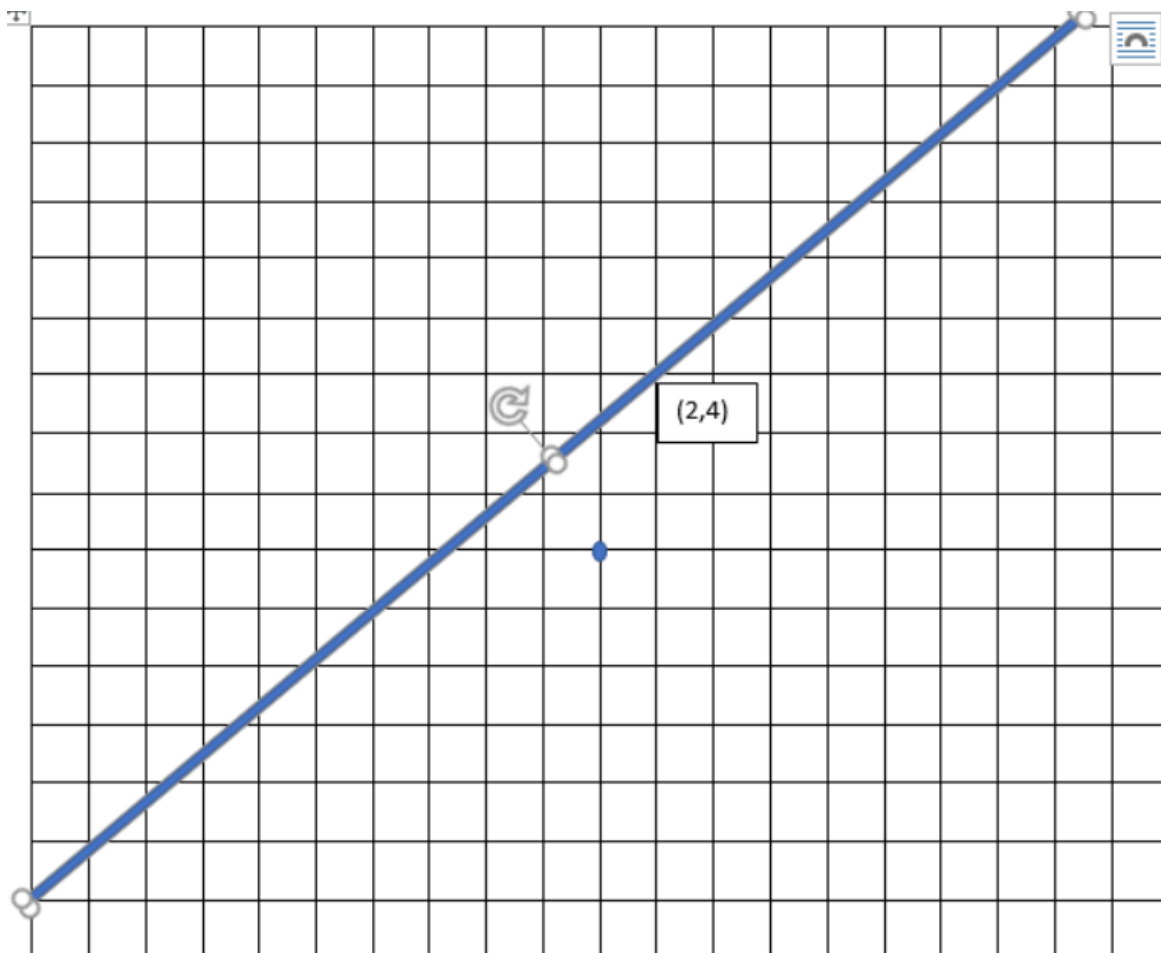
A medida que vamos aumentando el valor de X la función se va haciendo cada vez mas grande pero de a poco por ejemplo

$$F(1) = -1/1 + 2 = 1$$

$$F(2) = -1/2 + 2 = 1,5$$

$$F(3) = -1/3 + 2 = 1,666\dots$$

Actividad 6:



7.1.7. Cuestionario A7

Actividad 1:

1. No existe un último elemento ya que pueden ser infinitos porque si seguimos esa secuencia no tendrá fin, si se puede ordenar pero tendría que haber la selección de un cuadrado en específico hacia adelante ya que con todos no se puede por ser infinitos

Actividad 2:

2. Puedo observar que cada vez tiene más lados y en ningún momento se vuelve un círculo ya que un círculo no tiene aristas

Actividad 3:

3. Tiene decimales infinitos, y le siguen muchas 9 más ya que es infinito

Actividad 4:

4. Nunca llegara, se demorará mucho

Actividad 5:

5. El número se graficaría más abajo

Actividad 6:

6. no lo se

7.1.8. Cuestionario A8

Actividad 1:

1

$$\frac{2}{2} = 1 \rightarrow \frac{1}{2} = 0,5 \rightarrow \frac{0,5}{2} = 0,125$$
$$\frac{0,125}{2} = 0,0625 \rightarrow \frac{0,0625}{2} = 0,03125$$

CONCLUSIÓN No existe un último elemento. Por esta razón, no se puede ordenar de menor a mayor.

Actividad 2:

2

Si las condiciones es que sea un **POLIGONO** y que este **INSCRITO** en la circunferencia, este no cubrirá completamente el círculo (superficie), dados sus características (lados rectos).

Actividad 3:

3

La parte decimal de $0,999\dots$ es infinita, ya que el número corresponde a un decimal infinito periódico. El número más cercano es el 1, están a $0, \bar{9}$ de distancia.

Actividad 4:

4

La hormiga no llegará a la otra esquina, debido a que siempre le faltará la mitad del recorrido.

Actividad 5:

5

Nº DE PRUEBA

X	Y
2	≈ 2,13
4	2,25
6	≈ 2,17
7	≈ 2,14
100	2,01
200	2,005

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2$$

∴ a medida que el valor de X aumenta, Y disminuye.

Actividad 6:

6

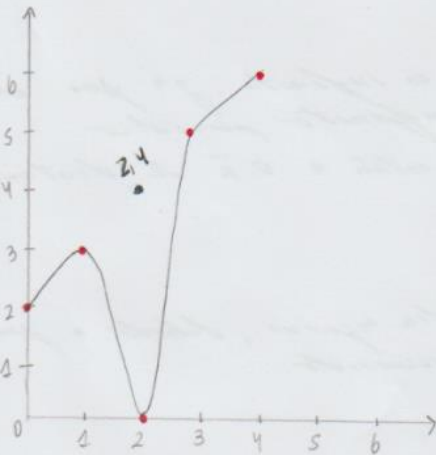
Nº DE PRUEBA

x	y
0	2
1	3
2	0
3	5
4	6

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

MUY IMPORTANTE.

$$\frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{4 - 4}{2 - 2} = 0 //$$



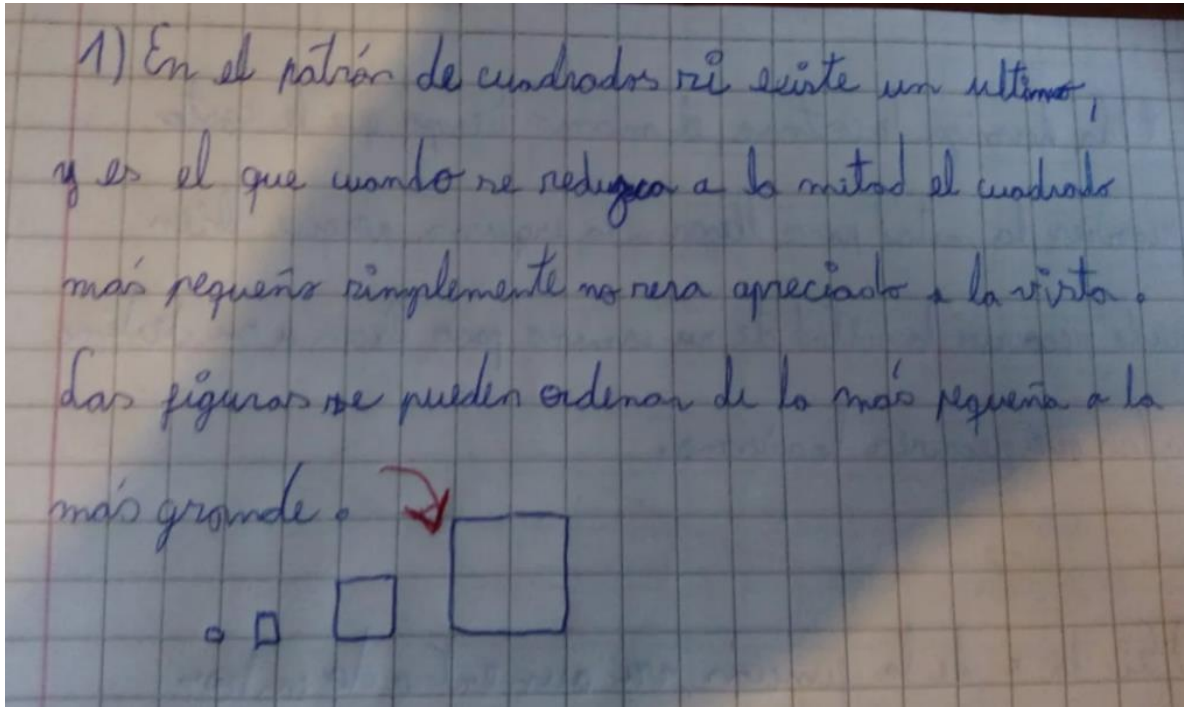
CONCLUSIÓN

Al graficar la función, se puede observar un considerable quiebre en el punto 2,4.

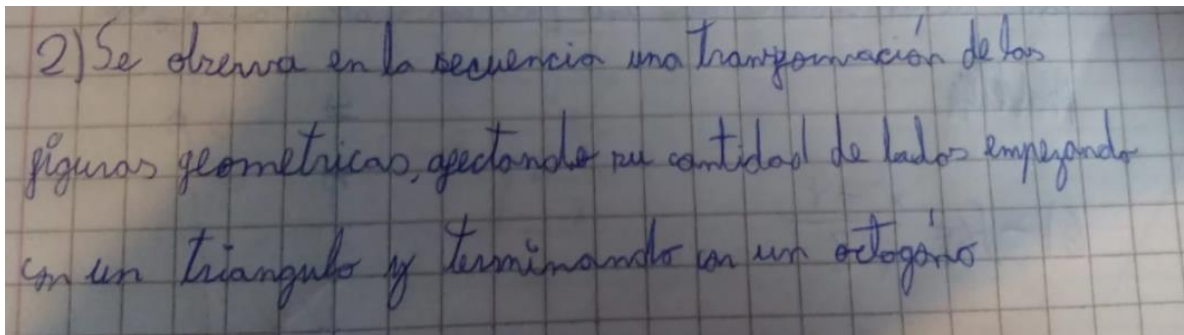
Desconozco los motivos por los cuales ocurre este fenómeno.

7.1.9. Cuestionario A9

Actividad 1:



Actividad 2:



Actividad 3:

3) El decimal tiene infinitos números después de la coma.
El número que le sigue al decimal periódico es el
1, ya que sumándole $0,7$ ~~no tiene~~
es lo único que le falta.

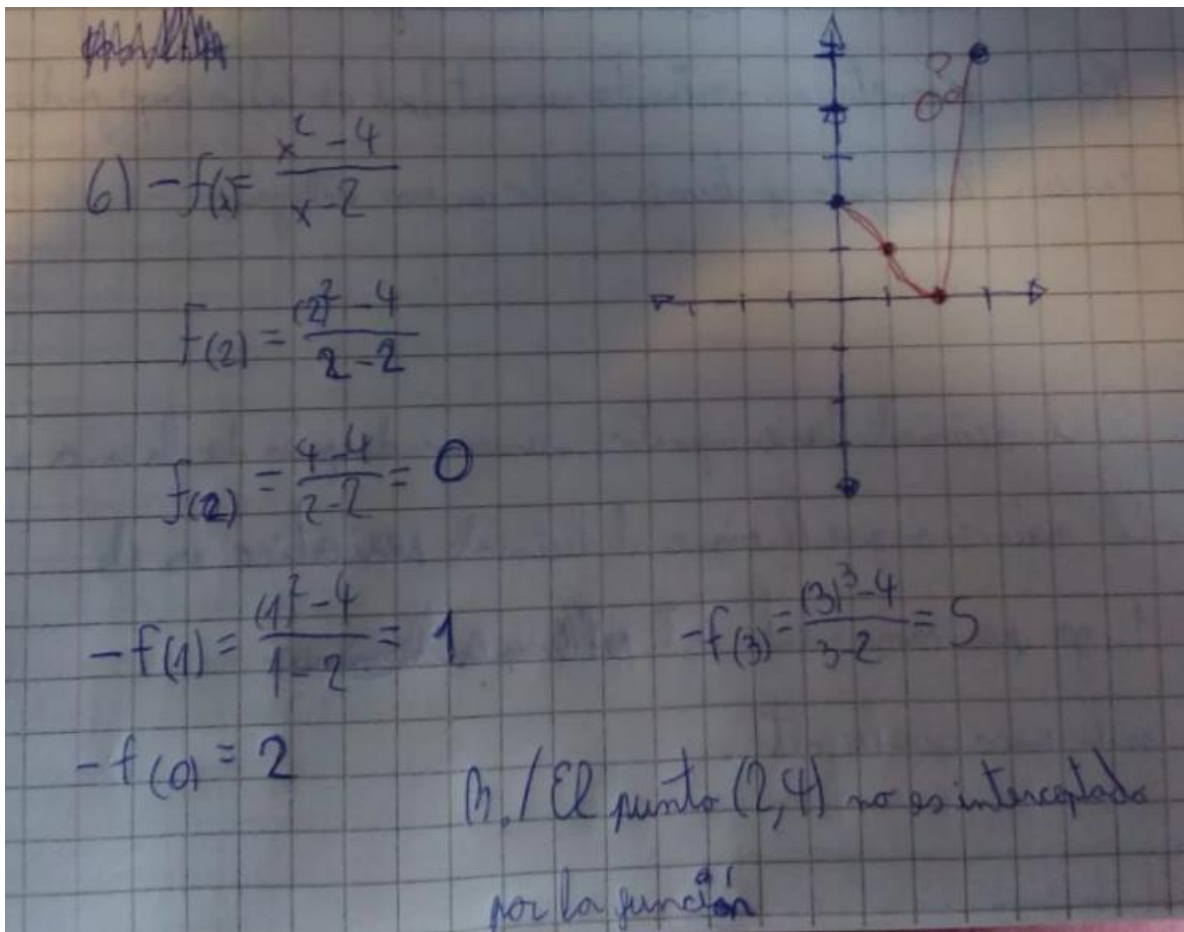
Actividad 4:

4) La hormiga le costará el mismo tiempo que le costó
recorrer la mitad para llegar a la esquina porque bien
pudo recorrer la mitad de su camino para llegar a su destino
tendrá que recorrer lo mismo.

Actividad 5:

5) Si la x de la función va aumentando con los números reales, hará que la fracción que contiene x como denominador sea una fracción más grande.

Actividad 6:



7.1.10. Cuestionario A10

Actividad 1:

Si se establece algún límite se llegaría a algún elemento final pero de no ser así esto seguiría sucesivamente por que los número nos infinito ,y se podrían ordenar si solo se pone algún límite o con cierta cantidad de datos

Actividad 2:

Observo que se le va agregando una punta más y si se sigue completaría la secuencia

Actividad 3:

Son infinitos y se se quiere aproximar seria un 10 en los dígitos finales

Actividad 4:

Por ejemplo si la mesa mide 2 metros se demoraría demoraría 7 instantes aproximados en recorrer la mesa y si llegara en algún momento pero al calcular los números son periódicos

Actividad 5:

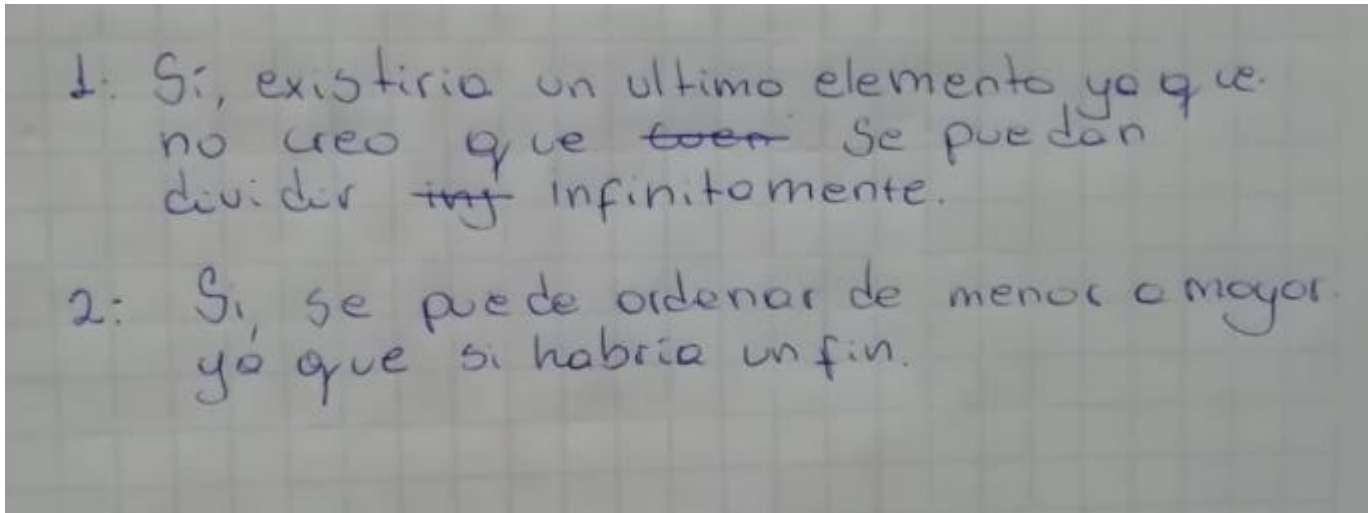
Va aumentando los dígitos de la función y cambian las coordenadas

Actividad 6:

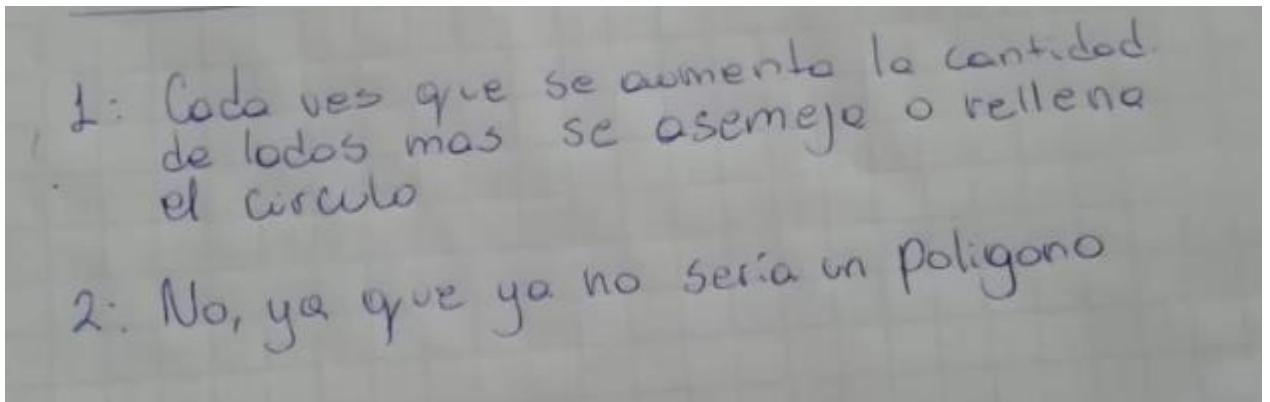
No la pude determinar

7.1.11. Cuestionario A11

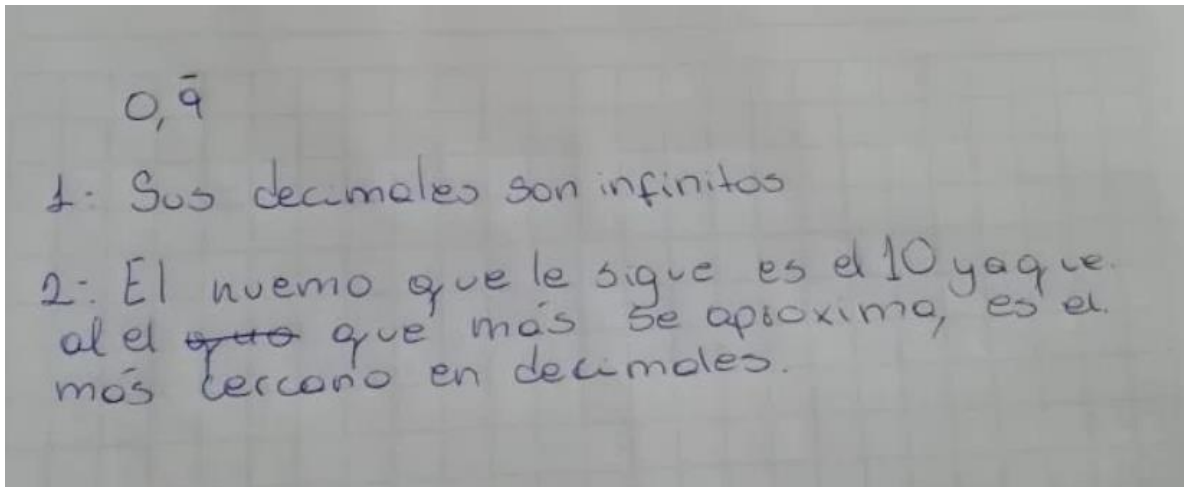
Actividad 1:



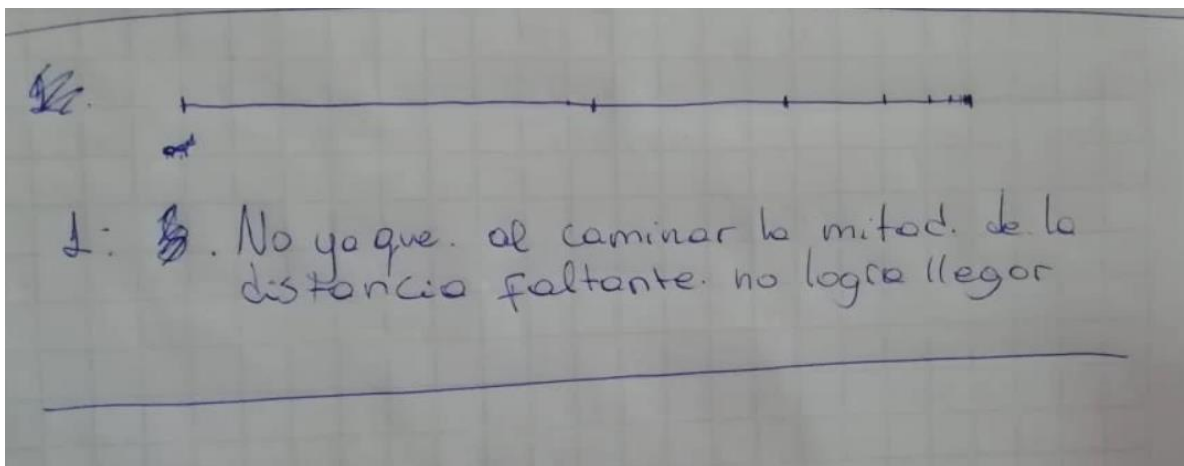
Actividad 2:



Actividad 3:



Actividad 4:

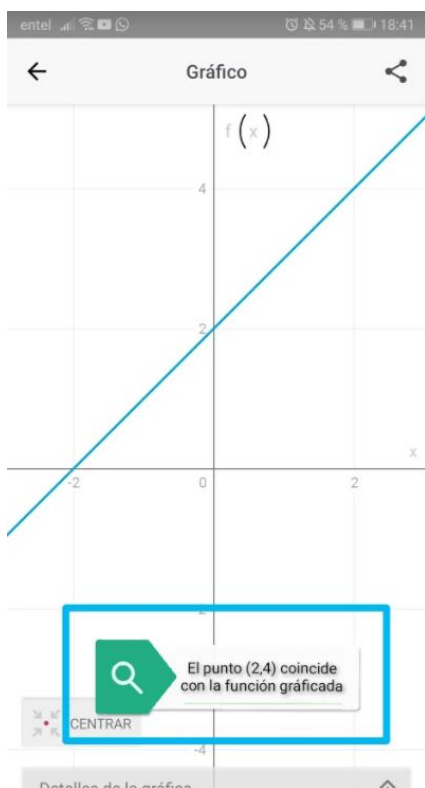


Actividad 5:

$$f(x) = -\frac{1}{x} + 2 \rightarrow f(1) = -\frac{1}{1} + 2 = -1 + 2 = 1 \quad f(1) = 1$$
$$f(2) = -\frac{1}{2} + 2 \rightarrow -0,5 + 2 \rightarrow 1,5 \quad f(2) = 1,5$$
$$f(3) = -\frac{1}{3} + 2 \rightarrow -0,3 + 2 \rightarrow 1,7 \quad f(3) = 1,7$$
$$f(4) = -\frac{1}{4} + 2 \rightarrow -0,25 + 2 \rightarrow 1,75 \quad f(4) = 1,75$$
$$f(5) = -\frac{1}{5} + 2 \rightarrow -0,2 + 2 \rightarrow 1,8 \quad f(5) = 1,8$$

↓: Aumenta el resultado.

Actividad 6:



7.1.12. Cuestionario A12

Actividad 1:

No existe un último elemento, ya que cada vez se llega a otro resultado y nunca hay un fin. Y si, se puede ordenar desde la figura menor a la mayor, pero siempre tomando solo alguna de estas como referencia para ordenarlas, sino es tan como infinitamente ordenando absolutamente todas las figuras.

Actividad 2:

Según lo que se observa en el patrón el polígono cada vez llena más la circunferencia. Entonces, yo creo que el polígono en algún momento si llega a llenar la circunferencia porque al tener cada vez más lados este se asemejará más a la circunferencia y eso se puede observar en el tetracontágono.

Actividad 3:

③ El decimal $0,999\dots$ (periódico) tiene decimales infinitos y está muy lejos del número que le sigue que, en este caso el más próximo sería el 1, aún que, aún así el $0,999\dots$ periódico nunca llega a valer realmente 1 por su infinito.

Actividad 4:

④ Con respecto al enunciado, la hormiga no llegaría nunca a la otra punta de la mesa, ya que si le faltaban 8cm después le faltarian 4cm luego 2cm, posteriormente 1cm, a continuación 0,5... y así sucesivamente. Por lo tanto, estaría infinitamente recorriendo el borde de la mesa para llegar a la otra esquina, es decir, no llegaría nunca a su destino.

Actividad 5:

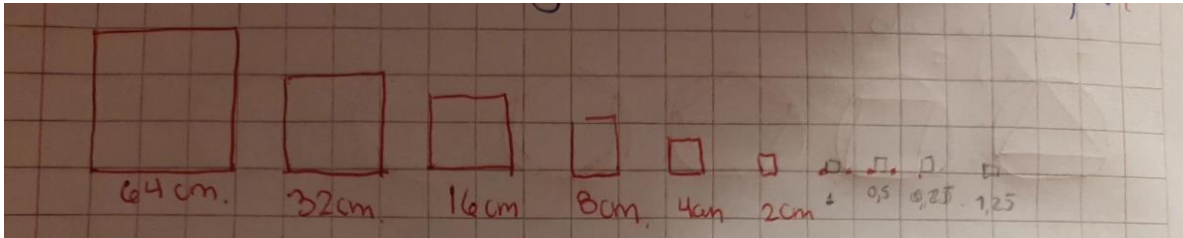
A medida que el valor de x aumenta el valor de la función también lo hace.

Actividad 6:

En el punto 2,4 yo solo veo que sucede una intersección y la recta en general es infinita

7.1.13. Cuestionario A13

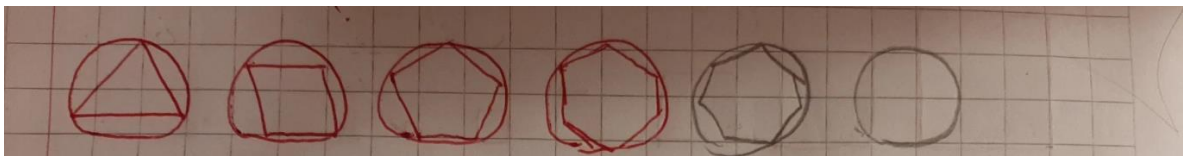
Actividad 1:



64 cm. 32 cm. 16 cm. 8 cm. 4 cm. 2 cm. 1 cm. 0,5. 0,25. 0,125

No existe un último número, ya que si uno va aumentando o disminuyendo la mitad siempre hay un nuevo cuadrado sin llegar a un último. Por otro lado no se podría ordenar de la figura menor, ni mayor, ya que no existen estas, pero se puede interpretar como en el dibujo de arriba, con distintos números, pero respetando el patrón, y obviamente con puntos que señalen que este sigue (... o ∞).

Actividad 2:



Lo que yo observo en el patrón; es que cada vez el polígono tiene un lado más y ocupa un poco más de espacio en la circunferencia. El polígono a mi punto de vista, y al dibujar cada vez otro lado, si lo iría acercando hasta a llenar el círculo, pero solo se asemeja, no lo llenaría, porque el polígono tiene lados rectos y el círculo curvas, siempre habrá un espacio, por más que se parezcan.

Actividad 3:

FECHA: / /

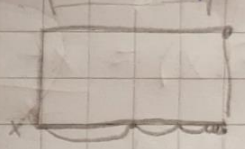
Responde la siguiente pregunta considerando el decimal $0,999\dots$ (periódico).
c) ¿Cuántos decimales tiene?
d) ¿Cuál es el número que le sigue y que tan cerca están?

El número $0,999\dots$ periódico tiene decimales infinitos. El número que le sigue es 1, y nunca estarán cerca, ya que, al ser un número periódico, al $0,999\dots$ se le seguirá agregando un 9 infinitamente, sin acabar y sin pasar al 1.

Actividad 4:

Imagina que el borde de tu mesa camina una pequeña hormiga comenzando desde una esquina y cada cierto tiempo recorre la mitad del espacio que le falta para llegar a la otra punta.
c) ¿La hormiga llegará en algún instante a la otra esquina?
d) ¿Cuántos instantes tardará?

La hormiga no llegará a la otra esquina, ya que cada vez recorre menos, y aunque este cerca de la próxima esquina, al siempre recorrer la mitad de lo que le falta, nunca llegará al destino, con ese patrón.



Actividad 5:

Dada la siguiente función, ¿Qué ocurre con el valor de la función a medida que aumentamos el valor de x ?

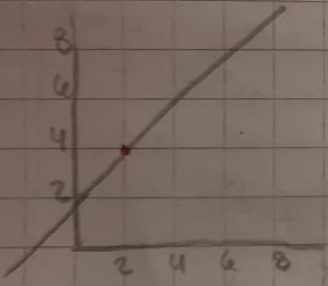
$$f(x) = -\frac{1}{x} + 2$$

$-\frac{1}{9} + 2 = -$ $-\frac{1}{1} + 2 = -1 + 2 = 1$
 $-\frac{1}{2} + 2 = -0,5 + 2 = 1,5$

A medida que el valor de x aumenta, el valor de la función va aumentando.

Actividad 6:

Gráfica la siguiente función y explica que ocurre en el punto $(2,4)$.

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 2}$$


En el punto $2,4$ hay una intersección, pero en sí la recta es infinita.