UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA NOCIÓN DE PROBABILIDAD CLÁSICA EN ESTUDIANTES DE PRIMERO MEDIO A PARTIR DE LOS REGISTROS DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

Seminario de título para optar al título de Pedagogía en Matemática

Profesora Guía: Dra. María Soledad Montoya-González
Profesor co-guía: Mg. Nicolás Sánchez.

Estudiantes
Antonieta Barría Brunetti
Francisca Jaidar Espinaza
Juan Pablo Quevedo Martínez

Diciembre de 2022
Santiago, Chile

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la universidad y al grupo de docentes que nos acompañó durante estos 5 años de aprendizaje. Por lo cual, se agradece la solidaridad y tolerancia de estos/as, sobre todo por el proceso de pandemia que se vivió estos últimos años, de esta manera, permitieron que todos sus estudiantes pudieran comprender y ser escuchados dentro de su formación. A su vez, queremos nombrar a los/as tres docentes que nos ayudaron dentro de nuestro periodo final.

Agradecemos al profesor Nicolás Sánchez por acompañarnos en el proceso de investigación, por darnos el tiempo de acompañamiento dentro del seminario, observar y corregir cada uno de nuestros errores, con el fin de poder superarnos cada día y por la disposición que tuvo dentro de todo el proceso, como lo fue promover nuestro sentido en la investigación, el cual nos ayudó a integrarnos en distintos congresos fuera del país.

Agradecemos al profesor Jorge Neira por darnos las palabras de aliento necesarias y acompañarnos en la finalización de esta carrera, el cual supo comprender y adaptar cada una de las tareas, que también, nos ayudó a salir de lo común y de todo el sistema que tuvimos dentro de nuestros días.

Agradecer, a la profesora María Soledad Montoya, por buscar soluciones y dar sus apreciaciones a nuestras investigaciones, permitiendo así que mejoremos cada uno de nuestros avances.

A nuestros futuros colegas, por saber lo que es ser compañero, en el cual supieron y defendieron cada uno de nuestros derechos y ayudaron a que todos/as tuviéramos la posibilidad de enfrentar estos años de la mejor manera posible. Se agradece el compromiso, y entrega de la docencia, en el cual todos estamos remando a un mismo lado, que es el cambio en la educación que tanto nos gusta.

Antonieta Barría Brunetti.

Agradezco a mi padre Eduardo Barría Barría y madre Giovanna Brunetti Labrin por acompañarme tanto económicamente como emocionalmente, por darme la fuerza y apoyo durante estos 23 años y acompañarme en cada uno de mis procesos.

A mi pareja Brandon Castro Torres, por el apoyo incondicional que me entregó durante estos 5 años, mayormente en este periodo de finalización y por acompañarme en cada uno de mis procesos.

A mis hermanos, hermana, sobrinos, cuñada y cuñados por alegrarme los días, enseñarme la importancia de tener un apoyo y por los consejos dados.

A mi sobrina Anais Barría Donoso, por enseñarme a vivir el día a día, a ser fuerte y no rendirme, lograr superarme a mí misma y por demostrarme que a pesar de no acompañarme terrenalmente, espiritualmente siempre estará en cada uno de los momentos importantes de mi vida.

A Dios por darme la fe para superar diferentes adversidades.

A mis compañeros/as y amigos/as Francisca Jaidar y Juan Pablo Quevedo por acompañarme en este proceso y darme el apoyo necesario para saber sortear este periodo de la manera más cómoda y tranquila posible.

Francisca Jaidar Espinaza

Al dar por finalizado mi proceso de pregrado, les agradezco a mi mamá Yenny Espinaza Jaidar que siempre me ha entregado su apoyo incondicional para poder cumplir todos mis objetivos y entregarme a un hermanito que me llena de emociones y mucho amor. Ella es la que con su cariño me ha impulsado siempre a perseguir mis metas y nunca abandonarlas. También a mi tío Leonel, abuela Golda y padrastro Javier, ya que, son los que me han brindado el soporte material, económico y emocional para poder concentrarme en los estudios y no dar marcha atrás.

Además, agradecerles a todos mis compañeros/as especialmente a Antonieta Barría, Juan Pablo Quevedo y Felipe Castro, los cuales se han convertido en mis amigos/as, cómplices y hermanos/as. Gracias por las horas compartidas, los trabajos realizados en conjunto y las historias vividas. Por último, agradecerle a mi pareja Alejandro Francis por convertirse en un ser tan importante en mi vida dentro de estos últimos procesos, por enseñarme a disfrutar cada minuto de vida, por el acompañamiento, apoyo y aceptar cada parte de mí.

<u>Juan Pablo Quevedo Martínez</u>

De esta manera, doy por finalizada mi proceso de Pregrado, en el cual antes de cerrar, quiero agradecer a las personas que me han acompañado en cada uno de mis procesos. Primero, agradecer a mi mamá Iris Ester Martínez Verá y mi papá Juan José Quevedo Lizama, por el apoyo incondicional que me han dado durante estos 23 años, sin ellos nunca hubiera llegado tan lejos, han sido el pilar más fuerte que he tenido dentro de toda mi vida, y agradecido de ellos por todo lo que han hecho por mí. También, agradecer a mi hermana María José Quevedo Martínez, por la entrega y acompañamiento dentro de toda mi vida, en la cual siempre estuvo a mi lado para aconsejarme y guiarme para no cometer ningún error, ha sido la mejor amiga que he podido tener en todos estos años, que me dio el regalo más hermoso que fue mi ahijada María Jesús Vergara Quevedo. A su vez, agradecer a mi familia (abuelas, abuelos, tías, tíos, primas, primos, amigas y amigos) por darme palabras de aliento y ser los que más me han acompañado dentro de estos momentos con cada una de mis crisis internas. Por otro lado, agradecer a mi novio Nirson Alexandro Castagnoli Garrido, por ser una persona tan importante dentro de estos últimos procesos, por enseñarme a disfrutar la vida, por el acompañamiento que ha tenido y aceptar cada parte de mí. Así también, a Antonieta Barría, Camila Oyarce y Francisca Jaidar, por ser las que me ayudarán en todo el proceso, por apoyarme y nunca dejarme solo.

Por último, me agradezco a mí por luchar y nunca perder las esperanzas, que a pesar de que en algunos momentos quise bajar mis manos, pude seguir, a tal punto de ganarle a mi mente. Agradecido de las energías, el universo y Dios por todas las personas que han puesto en mi camino y me han ayudado a avanzar en cada uno de mis procesos.

ÍNDICE

CAPÍTULO VI ESTUDIO DE CLASES

CAPÍTULO VII ANÁLISIS DE RESULTADOS

RESUMEN

Este trabajo busca particularmente la comprensión del concepto de probabilidad clásica en estudiantes que cursan primero medio, encontrándose en el eje matemático de probabilidad y estadística.

El enfoque de esta investigación es implementar una secuencia de clases en la cual se enfoca en enseñar el concepto de probabilidad clásica. De esta manera, se intenciona una secuencia didáctica, a través de la teoría de situaciones didácticas y representaciones semióticas por medio de la metodología de ingeniería didáctica y estudio de clases.

Por último, por medio de la teoría constructivista, los/as estudiantes construyeron su propio aprendizaje, comprendiendo la noción de probabilidad clásica logrando transitar por distintos tipos de representaciones semióticas, como también, observaron la regla de Laplace, la cual tuvo un impacto en el desarrollo de su aprendizaje. Debido a la teoría de situaciones didácticas, estos/as pudieron reflexionar y generar instancia de diálogo para expresar sus propias estrategias y la manera de comprender el contenido.

INTRODUCCIÓN

La investigación que se presenta se enfoca en la categorización de resultados de manera cualitativa por medio de la teoría de situaciones didácticas y de representaciones semióticas del concepto de probabilidad clásica. Este estudio es realizado por medio de un taller extraprogramático de estudiantes de primero medio cursando distintos niveles en el Liceo Bicentenario Italia.

Con lo mencionado, este informe se encuentra separado en seis capítulos que abordan en orden el problema presentado.

En el capítulo I se presentarán tres secciones importantes para el desarrollo de esta investigación.

Primeramente, se hace el encuentro con la problemática, en el cual se describe aquello que es relevante para tratar dentro del aula, mostrando que el contenido se presenta de manera breve dentro de la escolaridad, sustentando de esta forma el motivo de la investigación y por qué se decidió realizar esta misma.

Luego, se continúa con los antecedentes que apoyan la problemática presentada en el capítulo, que además de contar con los/as autores/as, este incluye un análisis descriptivo de lo que son los libros de textos entregados por el ministerio en el año 2020 y 2022, incorporando la relación del programa de estudio, el cual está vigente desde el año 2016 en Chile.

Para finalizar se presentarán los objetivos que tiene la investigación, en el cual se presenta también la pregunta de investigación que se busca responder al finalizar la investigación.

En el capítulo II del informe, se presentan elementos epistemológicos que ayudan a comprender el objeto matemático utilizado, como también realizar una mirada a la probabilidad clásica en la educación escolar actual.

En este capítulo III se estudia la teoría de registros de representaciones semióticas de Duval, la que resulta ser el marco de referencia en conjunto con la teoría de situaciones didácticas de Brousseau. Presentando descripciones de ambas teorías puntualizando el uso que se le dio dentro de la investigación.

El capítulo IV se dirige a la utilización de enfoques metodológicos de ingeniería didáctica y metodología del estudio de clases. Estableciendo la manera y criterios que se utilizaron durante el análisis de los resultados estudiantiles.

En el capítulo V se presenta la secuencia de enseñanza y aprendizaje, planificada para el contenido probabilidad clásica en un primero medio. Indicando los materiales a ser usados en cada sesión de clase y el análisis a priori de la situación clave en la que los/as estudiantes desarrollaron un concepto significativo de la regla de Laplace. Cabe destacar que tablas, guías e imágenes son de elaboración propia de los autores.

La secuencia de enseñanza y aprendizaje de esta unidad está pensada para la construcción de los conceptos de probabilidad clásica, a través de experimentos aleatorios identificando espacio muestral, casos favorables y casos totales. Teniendo como objetivo que los/as estudiantes no solo sean capaces de relacionar la probabilidad clásica a través de sucesos, sino que puedan entender el concepto como tal de probabilidad clásica y no solo su fórmula (Regla de Laplace).

En el sexto capítulo se encuentra la secuencia de enseñanza y aprendizaje desarrollada para dar respuesta al problema identificado, detallando toda la implementación y sus tiempos.

El último capítulo corresponde al análisis de los resultados obtenidos en función de la metodología mencionada anteriormente, mostrando ejemplos de las producciones y algunas consideraciones sobre las actividades realizadas en la implementación.

Para finalizar, se presentan las conclusiones obtenidas, detallando en general las ideas surgidas de la problemática, estableciendo posibles mejoras, observaciones generales respecto a lo observado en el curso y la muestra de algunos aprendizajes profesionales que se obtuvieron a través de este proceso de investigación e implementación.

CAPÍTULO I

PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS

1.1 Problemática

Es importante destacar que el programa de estudio está constituido por 4 unidades, siendo la última, la correspondiente a estadística y probabilidades. Debido a esto, nos surge la siguiente interrogante ¿Se le tomará la importancia que tiene esta unidad, para la formación de los/as estudiantes?

Al establecer la interrogante, tal como fue mencionado anteriormente, está se enfoca en el estudio de la noción de probabilidades en el aula, junto con las representaciones semióticas, tales como: tablas, diagramas y gráficos. La intención de realizar esta investigación es generar un aporte a la enseñanza escolar, a la comprensión de la noción de probabilidad desde un punto de vista clásico, tanto para los/as docentes, como para los/as estudiantes, ya que, en las prácticas docentes tempranas como en las finales, se ha podido observar que existe una deficiencia al momento de construir el concepto matemático. Tal como mencionan Alguacil, Boqué y Pañellas (2011):

> La probabilidad no se estudia suficientemente en la educación primaria ni en la secundaria. Se les dedica poca atención – normalmente a final de curso y de manera rápida – e incluso algunos profesores argumentan que son poco adecuados para los niveles de educación primaria por qué es un tema muy difícil de aprender o muy difícil de enseñar (p. 288).

En las experiencias laborales vividas y según lo mencionado con anterioridad, hemos observado que los/as alumnos/as no tienen adquirida la noción de la probabilidad como tal, sino que, solo conocen los diferentes sucesos asociados a ésta, al resolver distintos tipos de problemas o situaciones. A su vez, los/as docentes enfatizan de manera escueta dentro de esta área.

De esta manera, se ha evidenciado la deficiencia en los/as estudiantes que están cursando primero medio, puesto que, como se comentó anteriormente, el contenido es dejado para final de año. Por otro lado, los/as estudiantes consideran la probabilidad como un contenido complejo, debido a que se asocia al cálculo de sucesos específicos. Es por esto que, no se comprende la noción fundamental del concepto matemático, provocando dificultades en la adquisición del aprendizaje significativo, ya que, este "resulta cuando nueva información es adquirida mediante un esfuerzo deliberado de parte del aprendiz por ligar la información nueva con conceptos o proposiciones relevantes preexistentes en la estructura cognitiva del aprendiz" (Ausubel, 1978, p. 159).

Es así, que el fenómeno didáctico, hace referencia a la confusión que existe con el concepto y el tipo de eventos o sucesos específicos de la probabilidad, que se les presenta a los/as estudiantes, haciendo énfasis en aquellos/as que se encuentran cursando primero medio. Creemos que esto ocurre, por el exceso de situaciones que se relacionan con el objeto matemático, como lo son el lanzamiento de monedas, dados, entre otros.

Observando en la actualidad lo mencionado, al comienzo del año escolar 2022 cuando se realizó el repaso general dentro de uno de los liceos en los cuales se efectuó la práctica profesional, en un primero medio, un/a estudiante en práctica le consulta a un/a alumno/a con respecto a la probabilidad, y este le dice "profe, la probabilidad es cuando se lanza una moneda o tira un dado y quiere saber algo de ello".

A raíz de esto, se puede observar que existe una comprensión de los eventos y sucesos que se asocian comúnmente a la probabilidad, pero no la noción de probabilidad como tal. Así, como mencionan Benavidez, Rodríguez y Torres (2012) "sin embargo, la humanidad ha relacionado siempre la probabilidad con los juegos de azar y la ha separado de la estadística, a pesar de reconocer una fuerte relación entre ellas" (p. 21).

De esta manera, tal como se ha mencionado anteriormente, existe un ejemplo en el que los/as estudiantes han adquirido un conocimiento deficiente dentro de esta rama, ya que, el énfasis que se brinda es una mínima parte, debido a que se le asocian a eventos y no el concepto matemático como tal.

En relación con lo anterior, en los años de escolaridad y como estudiantes de la carrera de pedagogía en Matemática, por medio de las prácticas laborales, en el eje de probabilidad, se pueden observar las dificultades que existen dentro de esta. Por lo tanto, enfatizando en la noción de probabilidad clásica, en el curso de primero medio, teniendo en cuenta la dificultad al confundir la noción de probabilidad con el exceso de sucesos que hacen relación a esta misma, la pregunta de investigación para este proyecto de seminario es:

¿Cuáles son las características que emergen sobre la comprensión de la noción de probabilidad clásica que tienen los/as estudiantes de primero medio a partir del diseño de una secuencia didáctica con la teoría de representaciones semióticas?

1.2 Antecedentes

En el estudio de Rojas (2012) menciona que, las representaciones semióticas se obtienen por medio del tratamiento, por esta razón, las dificultades a las que se enfrenta el/la estudiante, se articulan por medio de equivalencias de representaciones semióticas, en las que se presentan 4 grupos:

i) Reconocimiento simbólico del objeto matemático (canónico), asignándole algún significado, el cual se representa como algo particular de este.

ii) Anclaje a situaciones. El/la estudiante tiende a realizar interpretaciones relacionadas con el objeto matemático visto en las clases, específicamente en la tarea propuesta (diferencias en la interpretación del objeto matemático ante situaciones dadas).

iii) Se presentan diferentes tipos de interpretación según la interacción del estudiante con el objeto matemático (al no interactuar con el objeto matemático, existe una interpretación errónea de este). El/la estudiante al dominar solo una representación e interactuar con otros pares, no considera como opción otras representaciones, sino que, se queda solo con la aprendida en clases.

iv) Dificultades con la interpretaciones y apropiación del lenguaje matemático.

Batanero, Ortiz y Serrano (s.f) determinan que los/as estudiantes mayores a 12 años, son capaces de concebir el azar como algo impredecible, que no cuenta con patrones ni secuencias. Una investigación realizada por Nisbett y Ross (1980, como se citó en Batanero, Ortiz y Serrano s.f) se dio a conocer que los/as estudiantes mayores a 12 años comprenden la ley de los grandes números y para poder aplicarla en la resolución de problemas se debe entender este como algo aleatorio. Debido a esto, se evidencia que es posible mejorar el razonamiento estadístico del estudiantado por medio de la repetición de problemas de este tipo.

Gigerenzer (1994) menciona que, si los problemas entregados a los/as estudiantes es en base a frecuencias absolutas, la mente de estos/as logrará resolverlos sin mayor dificultad, debido a la similitud de los problemas con la vida diaria.

Alguacil, Boqué y Pañellas (2011) comentan que los/as estudiantes llegan a los estudios superiores con deficiencias en probabilidad y con concepciones erróneas de esta.

Debido a lo anterior, realizan un estudio en el que, los resultados muestran que los/as estudiantes tienen concepciones erróneas sobre las secuencias aleatorias, el concepto de equiprobabilidad, en la interpretación de la probabilidad de un suceso y en la atribución de probabilidades.

Así, a pesar de que los fenómenos aleatorios, son sucesos que se viven en la cotidianidad, estos no son bien comprendidos por los/as estudiantes, debido a que tienen arraigado un pensamiento ilusionista del comportamiento del azar.

Azcárate y Cardeñoso (2004) dicen que, para lograr una integración sobre los tópicos probabilidades y azar adecuado a los establecimientos educacionales, es importante aumentar los conocimientos y promover la evolución de las ideas y concepciones sobre este. Esta investigación, concluye que las nociones estadísticas son entendidas de diferente manera en las matemáticas y en la realidad, lo cual, disocia la opinión de las personas sobre la alteridad de cualquier situación volviéndose normativa y sin significado, llegando a la inadecuada preparación que tienen los/as docentes en la educación, que se ven reflejadas en las prácticas en relación con la introducción al conocimiento probabilístico de la realidad, ya que, al docente se le entrega un material curricular ya elaborado, incluyendo pautas metodológicas, que puede integrar en los procesos de enseñanza.

Sin embargo, se observa que el concepto de probabilidad clásica al ser entregado de manera normativa y sin significado, genera en los/as estudiantes una confusión entre los conceptos y sucesos, ya que, estas últimas son mediadoras entre lo empírico y lo formal, para poder desarrollar los problemas.

A raíz de lo anterior, tal como nos mencionan García, Medina y Sánchez (2014), el razonamiento en la probabilidad se forma por los juicios o aseveraciones de distintas situaciones preconcebidas, por lo cual, se evidencia que favorece a la enseñanza proponer actividades que promuevan el razonamiento de los/as estudiantes. Cabe mencionar que, se comprenderá por razonamiento, a la capacidad de recopilación de datos, por medio del tratamiento e inferencias de los resultados. Por tanto, “la probabilidad es una disciplina cuyo aprendizaje puede ayudar a desarrollar una forma de pensamiento diferente de la que proporciona el aprendizaje de otras áreas de la matemática” (García, Medina y Sánchez, 2014, p. 6).

Inzunsa, Gastelum y Contreras (2011), nos presentan la importancia de implementar softwares educativos en la enseñanza de la probabilidad debido a que complementa y ayuda a los estudiantes a abordar conceptos de esta disciplina.

> El software(..), permite abordar conceptos de probabilidad como aleatoriedad, noción frecuencial de la probabilidad, espacio muestral, modelos de urna, distribuciones de probabilidad (binomial e hipergeométrica); además permite explorar resultados teóricos y empíricos y el efecto que el número de simulaciones tiene en dichos resultados. (p.87).

1.2.1 Antecedentes de la dimensión didáctica

Para comprender el problema y el contexto en el cual emergen algunas dificultades en la enseñanza, es necesario observar los libros de textos y el programa de estudio de primero medio.

En el que se realizará un análisis de dos libros de textos de primero medio, enfocados en el contenido a tratar dentro de esta investigación al igual que en el programa de estudios.

De esta manera, el contenido a observar es la noción de probabilidad clásica, también conocido como la regla de Laplace, en el cual se evidenciará la manera en que es abordado el contenido y las propuestas de enseñanza y actividades.

Dentro del análisis de textos, se logra observar que el contenido de probabilidad en primero medio, no abarca la noción de probabilidad clásica, puesto que, es un contenido que se tendría que haber visto en 8º básico. En ese sentido, al ser un taller que va a tomar el contenido que no se abarco en la priorización curricular, se trabajará desde la noción de probabilidad, para luego construir lo correspondiente al OA. Por tanto, se analizan dos textos escolares del MINEDUC, uno correspondiente al presente año y otro del año 2020.

En primer lugar, se tiene el texto del estudiante de Matemática 1º medio, con autores: Carlos Fresno Ramírez, Claudia Torres Jeldes y Jaime Ávila Hidalgo, Editorial Santillana, Chile, 2022. Por otro lado, se tiene el texto del estudiante de matemática 1° medio, con autores Bastián Galasso Díaz, Lesly Maldonado Rodríguez y Vivian Marambio Fuentes, Editorial Santillana, 2020.

Considerando primeramente la diferencia entre problema y ejercicio, según Pérez y Pozo, (2011),

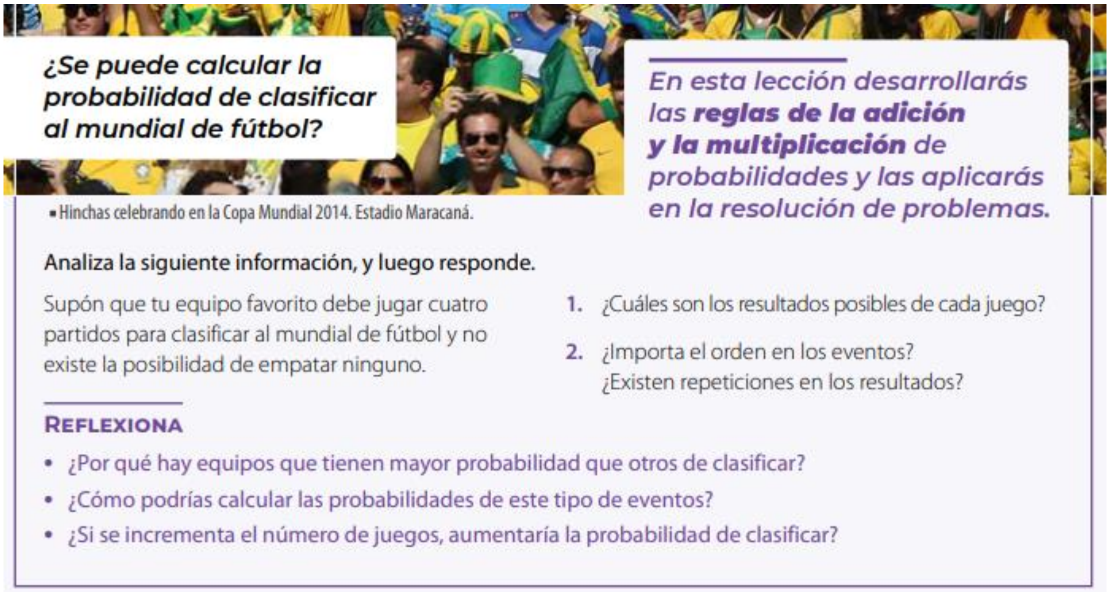
> Por tanto, un "problema" sería una cuestión a la que no es posible contestar por aplicación directa de ningún resultado conocido con anterioridad, sino que para resolverla es preciso poner en juego conocimientos diversos, matemáticos o no, y buscar relaciones nuevas entre ellos (p.78).

Es decir, un problema fomenta la utilización de la conjetura, explicación y la elaboración de tomar decisiones sobre el enunciado y el saber apropiado, permitiendo llegar a la respuesta total o parcial de cada enunciado. Sin embargo, considerando ejercicio como, “aquella exigencia para actuar donde la vía de solución es conocida para el estudiante” (Santos, 2000, p.7). Esto quiere decir que las solicitudes de los enunciados para responder pasan por un proceso o un cálculo.

<u>Libro de primero medio 2022</u>

Las páginas que se analizaron son de la 162 a la 167, los contenidos que se exponen son la unión e intersección de eventos aplicando la regla de Laplace para determinar la probabilidad de los distintos eventos.

Tal como se presenta en la ilustración se organiza en una primera parte de introducción, en el cual se presentan preguntas de reflexión, con el fin de que los/as estudiantes comprendan e internalicen los contenidos previos que se requieren para la lección.



¿Se puede calcular la probabilidad de clasificar al mundial de fútbol?

*En esta lección desarrollarás las **reglas de la adición y la multiplicación** de probabilidades y las aplicarás en la resolución de problemas.*

▪ Hinchas celebrando en la Copa Mundial 2014. Estadio Maracaná.

Analiza la siguiente información, y luego responde.

Supón que tu equipo favorito debe jugar cuatro partidos para clasificar al mundial de fútbol y no existe la posibilidad de empatar ninguno.

1. ¿Cuáles son los resultados posibles de cada juego?
2. ¿Importa el orden en los eventos? ¿Existen repeticiones en los resultados?

REFLEXIONA

- ¿Por qué hay equipos que tienen mayor probabilidad que otros de clasificar?
- ¿Cómo podrías calcular las probabilidades de este tipo de eventos?
- ¿Si se incrementa el número de juegos, aumentaría la probabilidad de clasificar?

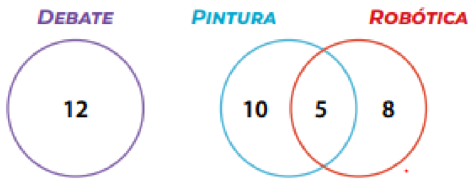
Extraído del Libro de texto escolar, Matemática 1° medio, 2022, página 162.

Luego, en la siguiente página, se presenta la unión e intersección de eventos, existiendo un recordatorio de diagrama de Venn y la escritura de conjuntos. De tal manera, que proporcione una ayuda al estudiante para responder al problema presentado.

Unión e intersección de eventos

En un colegio, 35 estudiantes participan en diferentes talleres: 12 están en debate, 15 en pintura y 13 en robótica. Como los talleres de pintura y debate tienen el mismo horario, ningún estudiante puede participar en ambos. Los talleres de pintura y robótica se dan en diferentes horarios, por lo que 5 estudiantes del taller de robótica están en el de pintura. Ninguno de los estudiantes de debate participa en el taller de robótica.

Esta información se puede organizar y representar en el siguiente diagrama:



- El diagrama usado para representar el espacio muestral y los eventos se llama **diagrama de Venn**.
- Un **conjunto** es una colección de elementos que tienen propiedades en común. Un conjunto está definido por **extensión** cuando se enumeran sus elementos y por **comprensión** si se describen características comunes a todos los elementos.

- ¿Cuántos de ellos van al taller de pintura o al de debate?
- ¿Cuántos de ellos van al taller de pintura o al de robótica?
- ¿Cuántos de ellos van al taller de pintura y al de robótica?
- ¿Cuántos de ellos van al taller de pintura y también al de debate?

Extraído del Libro de texto escolar, Matemática 1° medio, 2022, página 163.

Es así, que a continuación se presentan un conjunto de ejemplos en los cuales a medida que avanzan en dificultad se comienzan a institucionalizar diferentes conceptos. Dentro de estos, se menciona la fórmula de la Regla de Laplace con sólo algunas características de esta, dejando de lado que el espacio muestral debe ser distinto de vacío, permitiendo resolver el problema, por medio de la unión e intersección de eventos.

Después de los ejemplos se presentan 6 actividades, que ayudan a la ejercitación del contenido presentado en los ejemplos, de tal manera que el/la estudiante ejercite e interprete cada una de las definiciones.

En el que se propone un proyecto que solicita al estudiante realizar una encuesta e interpretar los datos obtenidos en esta.

3. **Considera el siguiente experimento aleatorio:**

Se lanza una moneda. Si sale sello se lanza un dado y termina el experimento. Si sale cara, se lanza nuevamente la moneda y se analiza el resultado. Esto se repite a lo más 4 veces si sale cara consecutivamente. Construye un diagrama de árbol para representar el experimento aleatorio y calcula las siguientes probabilidades usando la regla de Laplace.

a. Obtener un puntaje mayor que 4.

b. Obtener un puntaje igual a 1.

c. Obtener un 4 o un sello.

d. Si en el primer lanzamiento de moneda salió una cara, la probabilidad de obtener un número menor que 3

e. Si en el primer y segundo lanzamiento se obtuvo una cara, la probabilidad de obtener un número impar.

Extraído del Libro de texto escolar, Matemática 1° medio, 2022, página 166.

Finalmente, se presenta una actividad para reflexionar e integrar el trabajo colaborativo, en el cual debe realizar una autoevaluación de lo aprendido.

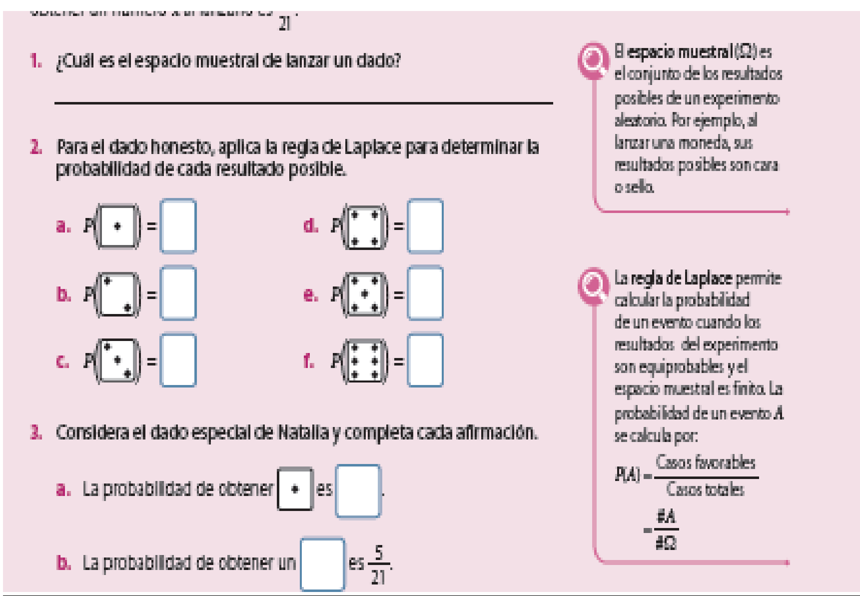
Cabe mencionar, que en el libro de texto del año 2022 se logra observar 7 actividades propuestas. De las cuales, las primeras 2 corresponden a ejercicios, debido a que el estudiante solo debe mecanizar mediante la entrega de una cantidad específica de ejercicio. Por otro lado, hay 4 ejercicios en los que se puede observar que sí podrían corresponder a un problema debido a que intenciona al estudiante a ir más allá de lo presentado en el contenido, pero al observar los ejemplos dados por el libro de texto, se puede notar que solo se pide replicar los procedimientos que se presentaron en los ejemplos, por lo que, pasan a ser ejercicio de mecanización y replicación de una estrategia. En cuanto a la última actividad se considera como problema debido a que el estudiante es el que debe indagar y comprender en profundidad sobre el contenido.

Libro de primero medio 2020

Las páginas que se analizaron son de la 244 a la 251, los contenidos que se exponen en estas páginas son la unión e intersección de eventos aplicando la regla de Laplace para determinar la probabilidad de los distintos eventos.

Por otro lado, estos están organizados en una primera parte de introducción, en el cual se presentan problemas, con el fin de que los/as estudiantes comprendan e internalicen los contenidos previos que se requieren para la lección.

A raíz de esto, tal como se presenta en la siguiente ilustración se solicita responder un cuestionario de recordatorio mediante la resolución de ejercicios y de problemas, en el cual se exploren las posibilidades del evento y sus características. Además, al costado de la segunda actividad se encuentra un recuadro que menciona la noción de probabilidad clásica, que es la regla de Laplace, en el cual se presenta la fórmula y sólo algunas características de esta, dejando de lado que el espacio muestral debe ser distinto de vacío, permitiendo resolver los siguientes problemas.



1. ¿Cuál es el espacio muestral de lanzar un dado?

2. Para el dado honesto, aplica la regla de Laplace para determinar la probabilidad de cada resultado posible.

a. P( ) =
b. P( ) =
c. P( ) =
d. P( ) =
e. P( ) =
f. P( ) =

3. Considera el dado especial de Natalia y completa cada afirmación.

a. La probabilidad de obtener es .
b. La probabilidad de obtener un es $\frac{5}{21}$.

El espacio muestral (Ω) es el conjunto de los resultados posibles de un experimento aleatorio. Por ejemplo, al lanzar una moneda, sus resultados posibles son cara o sello.

La regla de Laplace permite calcular la probabilidad de un evento cuando los resultados del experimento son equiprobables y el espacio muestral es finito. La probabilidad de un evento A se calcula por:

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Extraído del Libro de texto escolar, Matemática 1° medio, 2020, página 245.

Luego del cuestionario de recordatorio, se muestran preguntas de análisis, en el que el/la estudiante debe diseñar su estrategia de desarrollo para las actividades y problemas que continúan. Finalizando con preguntas de reflexión sobre el propio trabajo que realizó cada estudiante en los apartados anteriores del texto escolar. Continuando con el título de unión e intersección de eventos, en la que se presenta una situación problema en que se debe identificar el espacio muestra, la cantidad de elementos de este, calcular la probabilidad del evento solicitado y una situación específica en el que se relaciona un evento con otro, haciendo hincapié en los nuevos conceptos.

De esta manera, se define el concepto de unión a través de un recuadro, entregando un ejemplo con la resolución paso a paso aplicando regla de Laplace para calcular la unión de dos eventos. De esta misma manera se presenta el concepto de intersección.

Después del concepto de unión se presentan 3 actividades, que ayudan a la ejercitación del contenido presentado en los ejemplos, de tal manera que el/la estudiante ejercite e interprete cada una de las definiciones.

Finalmente, se tiene una actividad para reflexionar e integrar el trabajo colaborativo, en el cual debe realizar una autoevaluación de lo aprendido. Tal como muestra la siguiente ilustración

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué representación te parece mejor para el cálculo de probabilidades: los diagramas de árbol, los diagramas de Venn u otro tipo? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.

  ____

  ____

- ¿Qué estrategia fue la que más usaste para el cálculo de probabilidades en las actividades? ¿Por qué?

  ____

  ____

Extraído del Libro de texto escolar, Matemática 1° medio, 2020, página 251

Por lo tanto, en el libro de texto del año 2020 se pueden observar 3 actividades propuestas y que no existen actividades que a simple vista se pueda determinar cómo ejercicio. Sin embargo, las primeras 2 podrían corresponder a un problema debido a que intenciona al estudiante a ir más allá de lo presentado en el contenido.

Así, al observar los ejemplos dados por el libro de texto, se puede notar que se solicita replicar los procedimientos que se presentaron en los ejemplos, por lo que, pasan a ser ejercicio de mecanización y replicación de una estrategia. En cuanto a la última actividad del tema se considera como problema debido a que existe una mayor capacidad de interpretación por parte del estudiante al realizar este ejercicio, y a diferencia de los anteriores, el libro de texto no presenta ejemplos similares.

En conclusión, se observó que ambos libros de textos comparados anteriormente presentan características similares, si bien las actividades resultan interesantes a la hora de implementarlas, estas se deben realizar sin ejemplos que condicionen la estrategia utilizada por los/as estudiantes al momento de responder. Sin embrago, es complejo realizar una implementación acompañado de un libro de texto escolar, ya que, ambos cuentan con prototipos similares, debido a que tratan de mecanizar una estrategia.

Análisis descriptivo del programa de estudio

El análisis curricular, se realizará dentro de la unidad cuatro del eje de estadística y probabilidades, el cual se encuentra de manera implícita el concepto de noción de probabilidad clásica. Se ha observado dentro de los programas de los cursos de séptimo y octavo básico, que los/as estudiantes no han formalizado el objeto matemático como tal, por lo que, se hace alusión hasta primero medio de la regla de Laplace, permitiendo que los/as estudiantes asocien el contenido en este nivel, brindando las herramientas necesarias para poder abordarlo.

Además, se pudo observar que el contenido en 8º básico tiene una estructura similar, con respecto a la noción de probabilidad clásica, ya que se entregan en nubes la manera en la cual se debe abordar y cómo se define.

Dentro de la unidad de estadística y probabilidades, se espera que los/as estudiantes sean capaces de construir tablas de doble entrada, en conjunto de la gráfica de puntos, como también que desarrollen la regla de Laplace, por medio de distintos eventos, en el cual se implementan por medio de resolución de problemas, así se internalice la noción de azar.

Así, los contenidos previos que se indican dentro de la unidad es la operatoria con números racionales, muestreo, tablas de frecuencias absolutas y relativas, medidas de tendencia central y rango, probabilidades de eventos, medidas de posición, percentiles y cuartiles, principio combinatorio.

En ese sentido las habilidades, se enfocan netamente en la manipulación de los objetos matemáticos en cuestión, por lo cual, deben desarrollar las siguientes:

- Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad y determinando sus limitaciones (OA k).
- Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y validez de estas (OA l).
- Transitar entre los distintos niveles de representación de funciones (OA m).
- Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos (OA n).

En ese sentido, las habilidades acordes a la propuesta presentada son algunas de las que se indicaron anteriormente, como OA k, OA l y OA m. Esto es debido, a que los/as estudiantes deben transitar por distintos tipos de representaciones semióticas, de tal manera que permita la internalización del objeto en cuestión, por medio de problemas cotidianos y no cotidianos, en el que también deberán conjeturar para luego determinar posibles estrategias.

Las actitudes que se presentan a continuación orientan a que los/as estudiantes puedan desarrollar, tanto de manera social como moral dentro del contenido, así exista una contextualización con la realidad y la tecnología.

- Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social (OA E).
- Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información, dando crédito al trabajo de otros y respetando la propiedad y la privacidad de las personas (OA F).

Lo anterior es relevante dentro de nuestra propuesta, puesto que el principal foco de la implementación, es que los/as estudiantes puedan construir el aprendizaje, mediante la crítica, el cual aborde la tecnología para tener una mayor comprensión de este.

Los objetivos de aprendizaje que se esperan dentro de la unidad, son cuatro, los cuales transitan dentro de la estadística y probabilidad. Estos se conectan con las habilidades y actitudes, puesto que son de suma relevancia para poder llevar a cabo la internalización del contenido, por tanto, estos son:

OA 12: Registra distribuciones de dos características distintas, de una misma población, en una tabla de doble entrada y nube de puntos.

- Elaboran y describen gráficos de dispersión en una y en dos dimensiones.
- Reconocen estructuras lineales u otras, en las formas de las nubes de puntos.
- Realizan encuestas en torno, preguntando dos características, y representan los resultados mediante gráficos de nube de puntos.
- Describen nubes de puntos presentadas en el sistema de coordenadas.
- Conjeturan de forma intuitiva si hay correlación entre las características registradas.

OA 13: Comparar poblaciones mediante la confección de gráficos “xy” para dos atributos de muestras, de manera concreta y pictórica. Utilizando nubes de puntos en dos colores. Separando la nube por medio de una recta trazada de manera intuitiva:

- Registran datos de dos características provenientes de una o de dos poblaciones, en tablas de doble entrada, y representan los datos mediante nubes de puntos en dos colores.
- Describen nubes de puntos e identifican y comentan puntos aislados en las nubes de puntos.
- Argumentan acerca de coherencias o diferencias entre nubes de puntos de diferentes poblaciones.
- Trazan de manera intuitiva la recta que separa de mejor forma la nube de puntos en dos poblaciones.

OA 14: Desarrollar las reglas de las probabilidades, la regla aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de ambas, de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, en el contexto de la resolución de problemas:

- Elaboran completan diagramas de árboles con las posibilidades de experimentos aleatorios, para representar los eventos y determinar sus probabilidades.
- Reconocen la regla multiplicativa de la probabilidad a lo largo de una “rama” que conduce de la partida al tramo exterior.
- Reconocen la aditiva de la probabilidad en la unión de distintas ramas”.
- Aplican la combinación de la regla aditiva y de la regla multiplicativa para determinar probabilidades de eventos compuestos.
- Calculan las probabilidades de eventos simples y compuestos.
- Resuelven problemas de la vida diaria que involucran las reglas aditiva y multiplicativa.

OA 15: Mostrar que comprenden el concepto de azar: Experimentando con la tabla de Galton y con paseos aleatorios sencillos, de manera manual y/o con *software* educativo. Realizando análisis estadísticos, empezando por frecuencias relativas. Utilizando probabilidades para describir el comportamiento azaroso. Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas:

- Elaboran árboles o redes de caminos para marcar diferentes “paseos al azar”.
- Verifican que una “rama” o “camino” lleva a una meta en el margen del árbol, mientras que varios caminos llevan a una meta central.
- Reconocen una distribución de los datos (que se acumula en el centro) en repeticiones de experimentos aleatorios (tabla de Galton).
- Analizan estadísticas basadas en el mismo objetivo, reconociendo que son distintas en el detalle, aunque muestran coherencias en general.
- Resuelven problemas de la vida diaria que involucran estimaciones basadas en frecuencias relativas.

Dentro del primer OA, la propuesta que se entrega, se espera que los/as estudiantes trasciendan entre dos habilidades que son las de argumentar y comunicar. Esperando que los/as estudiantes sean capaces de argumentar y comunicar, debido a las herramientas que han adquirido dentro del contenido, con el fin de que por medio de sus propias habilidades sean capaces de dar respuesta a lo que se solicita. Esto último, se conecta de manera directa con la habilidad de representar, en el cual por medio de los datos que se entregan tengan la capacidad de observar cual es la mejor manera de abordar las situaciones entregadas.

Respecto a las orientaciones didácticas del programa curricular los/as estudiantes deben construir y aprender su propio significado para entender los conceptos y procedimientos, requiriendo que comprendan y den sentido a los contenidos. Es así, que se espera que el/la docente promueva lo mencionado con situaciones de aprendizaje.

Planteándose dentro del programa curricular una propuesta en que se transite desde lo concreto a lo pictórico para llegar a lo simbólico, enfatizando en el uso de representaciones, analogías y metáforas para una mayor comprensión.

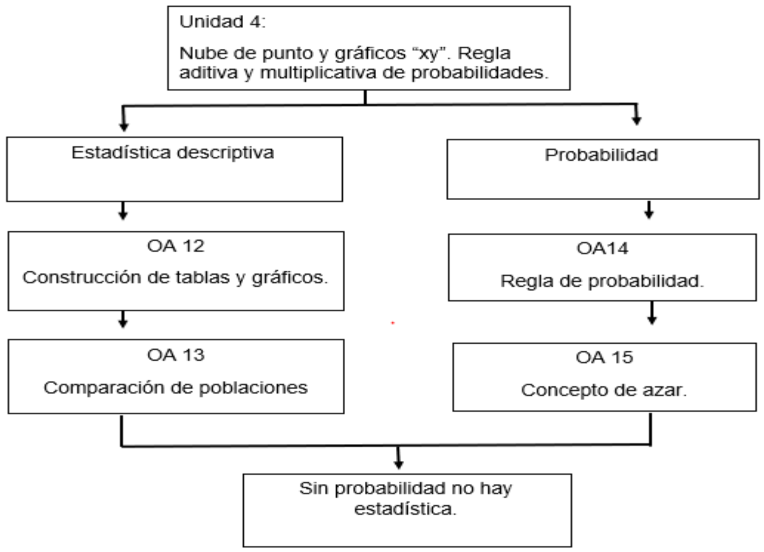
En este sentido, los/as estudiantes pueden resolver problemas en distintos niveles de abstracción y despertando su curiosidad permitiendo conectar la matemática con la vida real y diferentes áreas de conocimiento.

Por lo que, el/la docente es el/la encargado/a de proponer metodología de enseñanza didáctica, promoviendo el diálogo, discusión matemática y el desarrollo de habilidades respecto al contenido tomando en cuenta varios factores para lograr los aprendizajes en los/as estudiantes.

Cabe destacar, que los contenidos que se presentan se pueden organizar en un esquema, los cuales se distribuirán en dos ramas, una que se enfoca en la construcción del aprendizaje estadístico, observando construcciones y análisis de tablas y gráficos, a su vez, la comparación de poblaciones. De esta manera, se puede observar paulatinamente que debe ser presentado cada uno de los contenidos, permitiendo comprender de manera significativa el objeto matemático desarrollando el pensamiento estadístico por medio de construcción de tablas y gráficos.

Por otro lado, se observa el aprendizaje probabilístico, el cual abarca desde la noción de probabilidad, para luego pasar a las reglas, terminando con el concepto de azar. En ese sentido, se construye desde la raíz de la probabilidad, abarcando distintos eventos, para integrar las reglas, permitiendo tener una comprensión significativa del contenido.

De esta manera, es que se propone el siguiente esquema, el cual permite observar la distribución de la unidad, pasando por los contenidos fundamentales.



Red de articulación OA. Fuente: Elaboración propia.

Dentro del programa de estudios de primero medio, se observa que existen 10 actividades propuestas ubicándose desde la página 180 a la 186, evidenciando a continuación si estos corresponden a ejercicios o problemas.

Considerando la diferencia entre problema y ejercicio, según Pérez y Pozo, (2011), un problema fomenta la utilización de la conjetura, explicación y la elaboración de tomar decisiones sobre el enunciado y el saber apropiado, permitiendo llegar a la respuesta total o parcial de cada enunciado.

Sin embargo, considerando ejercicio como, "las solicitudes de los enunciados para responder pasan por un proceso o un cálculo" (Santos, 2000, p.7).

Según la distinción mencionada el 50% de las actividades resultan ser ejercicios, ya que, las solicitudes de los enunciados para responder pasan por un proceso o un cálculo. Esto ocurre, ya que se observa una mecanización de situaciones presentadas, en el cual el/la estudiante debe aplicar lo aprendido, dejando de lado el razonamiento lógico, y así se dedican a determinar valores que no hacen hincapié en el contenido matemático.

Sin embargo, el otro 50% de actividades son problemas, debido a que, fomenta la utilización de la conjetura, explicación y la elaboración de tomar decisiones sobre el enunciado y el saber apropiado, permitiendo llegar a la respuesta total o parcial de cada uno de estos. En comparación con los ejercicios anteriores, se espera que el/la estudiante sea capaz de razonar y buscar una estrategia, en el cual, por medio del contenido construido, debe ser capaz de resolver los problemas, mediante el razonamiento.

Por último, se puede observar que los problemas y ejercicios propuesto por el programa de estudio de primero medio, si tienen relación con los aprendizajes esperados, ya que, se hace conexión con casos de la vida diaria, además, se utiliza la tabla de Galton, análisis estadístico de frecuencias relativas y se utilizan las probabilidades para describir los comportamientos azarosos, a través de las preguntas del enunciado de cada actividad.

Sin embargo, el aprendizaje esperado de utilizar la tabla de Galton de manera manual y/o con software educativo, aparece solo como sugerencia para el/la docente. Esto ocurre, puesto que se deja de lado el uso de TIC´S dentro de la construcción del conocimiento, el cual afecta en la contextualización de los contenidos, ya que no se ven en distintos medios la utilización de los recursos. Además, existe una falta de orientaciones o solucionarios, con el fin de contrastar resultados o posibles respuestas. Esto ocurre, ya que, si bien se proponen actividades, se deja de lado la orientación y el principal objetivo, los cuales pasan a segundo plano, por lo que, existen casos como se presentaron con anterioridad, que los “problemas” propuestos, son ejercicios, ya que solo se espera la aplicación y no un razonamiento que ayude a la conformación del conocimiento.

1.3 Objetivos

Esta investigación, se realiza con el propósito de que los/as estudiantes logren comprender a partir de un diseño didáctico la noción de probabilidad, para así, enfatizar en la corrección sobre la confusión generada en los distintos tipos de sucesos que se asocian, con la noción de esta.

Por lo tanto, el proyecto de investigación tiene como finalidad diseñar una secuencia didáctica para profundizar en la comprensión del concepto clásico de probabilidad.

Objetivo General

Identificar las características que emergen sobre la comprensión de la noción de probabilidad clásica que tienen los/as estudiantes de primero medio.

Los objetivos específicos son:

- Crear un diseño para enseñar la noción de probabilidad clásica con sus representaciones.
- Implementar un diseño de clase para construir la noción de probabilidad clásica por medio de la teoría de representaciones semióticas y situaciones didácticas que abarcando los problemas no rutinarios.
- Analizar las respuestas obtenidas por los/as estudiantes durante la aplicación de la secuencia implementada.

CAPÍTULO II

OBJETO O CONTENIDO MATEMÁTICO

2.1 Elementos de la epistemología del objeto matemático

Para iniciar a indagar sobre el objeto matemático, es importante conocer un poco de la historia de esta. Como nos dice Rivadulla (1995), el comienzo de la probabilidad parte con una noción del concepto de proporción entre el número de casos matemáticamente favorables en un juego de azar respecto al total de casos matemáticamente posibles. Además, el primer libro que se publicó respecto a la probabilidad fue en el año 1657 De Ratiociniis in Ludo Ala de Christiaan Huygens. Por lo que, se entablaron las primeras conversaciones de probabilidad cuando apareció el análisis matemático de los juegos de azar, cálculos probabilísticos, etc. junto con la publicación del libro Ars conjectandi de Jakob Bernoulli en 1713.

Benavides, Rodríguez y Torres (2012) el ser humano siempre ha relacionado la probabilidad con los sucesos asociados a esta, y la ha visto como un contenido ajeno a la estadística. Gerolamo Cardano en el siglo XVI comenzó a matematizar el azar. Entre los siglos XVII y XVIII según Benavides, Rodríguez y Torres (2012) se realizan avances como la ley de los grandes números, teorema de Laplace (hoy se conoce como la definición clásica de probabilidad), nace la primera noción de probabilidad frecuencial. Entre los siglos XIX y XX se discute la equiprobabilidad de un evento. A pesar de todos estos descubrimientos y discusiones, esta disciplina, no era reconocida como tal.

Cabe destacar, que según Velandia (2021) la probabilidad emerge con la teoría de espacio medible. La cual llamaremos triplete (Ω, F, P) un espacio de probabilidad, en el cual Ω es un conjunto no vacío, F es una σ-algebra de subconjuntos de Ω y P es una medida de probabilidad sobre F, es decir, P: F → [0, 1].

2.2 Objeto o contenido matemático

Ahora bien, con la definición de espacio medible se obtienen las propiedades que se utilizan en la probabilidad clásica.

Un espacio medible es un par (Ω, A) formado por un conjunto arbitrario, Ω, y una clase de conjuntos A ⊆ P(Ω) con estructura de σ-álgebra. A la vista de esta definición, y teniendo en cuenta las propiedades de σ-álgebra, observamos que la estructura del espacio medible modela de forma consistente el espacio muestral y la clase de sucesos objeto de estudio en un experimento aleatorio. Esta estructura proporciona la base para la definición axiomática de probabilidad

Es decir, una medida de probabilidad satisface las propiedades siguientes:

1. La probabilidad es positiva y menor o igual que 1, simbólicamente queda expresado como $0 \leq P(\mathrm{A}) \leq 1$.
2. La probabilidad del suceso seguro es 1, simbólicamente queda expresado como $P(\mathrm{E}) = 1$.

3. Si A y B son incompatibles, es decir A ∩ B = ∅ entonces: $\mathrm{P(AUB)} = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})$.

Cabe destacar que, esta definición de la medida de probabilidad, es generalmente estudiada en cursos de posgrado, en el que desde la sigma álgebra emerge la teoría de probabilidades.

Dentro de las definiciones que se presentan hoy en día, existen 5 tipos, en el cual cada una abarca ciertos sucesos correspondiente y desenvueltas por medio de las operaciones de conjuntos, estas son la probabilidad clásica, geométrica, frecuentista, subjetiva y axiomática, enfocándonos en las tres primeras.

Las cuales se nos menciona según Rincón (2016)**,** que la probabilidad clásica es una de las primeras que ayudó a utilizar al cálculo de eventos en problemas de juegos de azar. Además, esta permitió construir la teoría matemática, la cual tiene como definición "sea A un subconjunto de un espacio muestral Ω de cardinalidad finita. Se define la probabilidad clásica del evento A como el cociente $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}, \#\Omega \neq \emptyset$,en donde el símbolo #A denota la cardinalidad o número de elementos del conjunto A" (Rincón, 2016, p. 20). Esta definición presenta ciertas restricciones, las cuales se limita a espacios muestrales finitos y equiprobables. Cabe mencionar que, de manera escolar esta se observa como la regla de Laplace, en la cual dentro del libro de texto del estudiante (2020) se menciona que la probabilidad del evento es $P(A) = \frac{Casos\ Favorables}{Casos\ Totales}$, en el cual no indica que los casos totales no pueden ser vacíos.

A su vez, Rincón (2016), menciona la probabilidad geométrica, la cual es una extensión de la mencionada anteriormente, se diferencian, puesto que esta tiene como función calcular aspectos geométricos, como lo son el área, volumen u otro evento de esta índole. Así, su definición formal que se presenta es "si un experimento aleatorio tiene como espacio muestral Ω $\Omega \subset R2$ cuya área está bien definida y es finita, entonces se define la probabilidad geométrica de un evento A ⊆ Ω como $(A) = \frac{Área\ de\ A}{Área\ de\ \Omega}, Área\ de\ \Omega \neq \emptyset$ cuando el concepto de área del subconjunto A está bien definido" (Rincón, 2016, p. 23). Al igual que en la probabilidad clásica, el espacio muestral es equiprobable, con la diferencia, de que esta debe abarcar una parte de la región y no el conjunto mismo.

Por último, Rincón (2016), define la probabilidad frecuentista, en el cual se observa por medio de límites la ocurrencia de un evento, por lo cual, se define como el límite $P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$ ” (Rincón, 2016, p. 32).

Por otro lado, se debe observar la Ley de los grandes números permitiendo observar lo que ocurre con los eventos y sus reiteradas repeticiones. Por tanto, existen dos teoremas de la ley de los grandes números, la ley débil de los números grandes y la ley fuerte de los números grandes. Ramírez (s.f.) comenta que estas leyes, hacen referencia al comportamiento asintótico, en la cual, si existe una convergencia en la probabilidad, se reconoce y da lugar a la Ley débil de los grandes números. Por otro lado, si la convergencia es de manera “casi segura”, se conocerá como la ley fuerte de los grandes números. Así, es que nos centraremos en la ley débil de los grandes números. Esta es mencionada en Ramírez (s.f.) teniendo como teorema 2.1 lo siguiente: Consideremos una sucesión $\{x_n : n \geq 1\}$ de variables aleatorias de cuadrado integrable. Luego, para todo ε > 0 se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{-n} - E(x)\right| \geq \epsilon\right) = 0.$$

Esto se puede demostrar por la desigualdad de Tchebychev, la cual se muestra en la siguiente ilustración.

Demostración. Primero probamos que (ii) implica (i). Definimos $X'_n = X_n 1_{|X_n| \leq n}$. Por la desigualdad de Tchebychev, para cada $\epsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} - E(X'_n)\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2 n} E((X'_n)^2) + nP(|X_1| \geq n). \qquad (2.5)$$

Pero

$$\begin{aligned} E((X'_n)^2) &= \textstyle\int_{-n}^{n} x^2 dF_{X_1}(x) = n^2(F_{X_1}(n) - F_{X_1}(-n)) - 2\int_{-n}^{n} xF_{X_1}(x)dx \\ &= -n^2(F_{X_1}(-n) - F_{X_1}(n)) + 2\textstyle\int_0^n x(F_{X_1}(-x) - F_{X_1}(x))dx \\ &= -n^2(F_{X_1}(-n) + 1 - F_{X_1}(n)) + 2\textstyle\int_0^n x(F_{X_1}(-x) + 1 - F_{X_1}(x))dx \\ &= -n^2 P(|X_1| \geq n) + 2\textstyle\int_0^n xP(|X_1| \geq x)dx. \qquad (2.6) \end{aligned}$$

Esto prueba que el primer término del lado derecho de la desigualdad (1.5) tiende a 0 cuando n tiende a ∞. □

Extraído del Cap. 2, Ley de los números grandes pág. 34.

CAPÍTULO III

MARCO DE REFERENCIA

3.1 Enfoque teórico del diseño didáctico

En el contexto de la presente investigación, se adopta la “teoría de representaciones semióticas" (Duval, 2004) la que plantea que las representaciones de un objeto matemático buscan mostrar diferentes registros ampliando la observación del contenido en los/as estudiantes. Por otro lado, no es posible desarrollar un nuevo contenido ni conocimiento sin una representación que permita al estudiante comprender este, según sus necesidades.

Agregando, que el/la estudiante debe transitar por dos tipos de la teoría de representaciones, en el que existe la semiosis y la noesis. De esta manera, la semiosis hace referencia a una actividad ligada a la producción de una representación, en cambio, la noesis hace referencia a la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos. Por lo tanto, se concluye que no hay noesis sin semiosis. Además, existen 3 tipos de actividades cognitivas que están ligadas a la semiosis.

- Representación identificable: representación mental
- Tratamiento: transformación interna (en el mismo registro anterior).
- Conversión: Transformación externa (representación en un registro distinto).

Dentro del marco de referencia que se trabajará, se observará la representación semiótica, a raíz de esta, es que se construirá la noción de probabilidad, en conjunto de las representaciones, y no al revés, debido a que, se pierde el aspecto fundamental de esta.

Por otro lado, la teoría de situaciones didácticas, según Brousseau (2007), se debe comprender como el proceso, en el cual el/la docente proporciona el medio didáctico en donde el/la estudiante construye su propio conocimiento.

3.2 Utilización del enfoque teórico para el diseño didáctico

Por tanto, dentro de la probabilidad clásica en cuestión, se presenta la secuencia, en la cual el objetivo es comprender la noción de probabilidad, de tal manera, que se presenta una situación matemática, lo que conlleva a que hay una situación didáctica, ya que son biunívocas. En ese sentido, los/as estudiantes deberán transitar por distintas etapas, para poder internalizar el concepto. Entonces, dentro de la construcción del saber existe un medio, en el cual a través de este el/la estudiante se pueda apropiar del objeto matemático que se quiere formar, solo con el conocimiento que tienen hasta ese entonces.

De esta manera, según Brousseau (2007), al trabajar de forma individual, se realiza una conjetura, de cómo poder resolver cada uno de los problemas planteados por el/la profesor/a, y que ayude a comprender e indagar más allá de este. Si bien, la situación didáctica, se internaliza, en la relación que existe entre el medio y el/la alumno/a, también se indaga sobre este, en cómo se aborda el problema. En ese sentido, el proceso que se espera dentro de las situaciones matemáticas a desarrollar, es primero observar las suposiciones realizadas. De esta manera, permite evidenciar las contradicciones didácticas, ya que si bien, se espera que se pueda llevar a cabo de una forma, esta se puede entender completamente diferente, entonces hay que hacer énfasis en cómo se transmite la situación planteada y cómo es recibida por los/as estudiantes. Finalmente, existe una situación didáctica tal que el problema es una situación matemática, que tiene como objetivo, la noción de probabilidad. Es por esto, que la evolución de las etapas se caracteriza de la siguiente manera.

La situación de acción según Brousseau (2007), los/as estudiantes por sí solo/a, comienzan a ver de qué forma pueden abordar los problemas planteados, y así realizar su propio criterio, pero sin ninguna estrategia, que les permita mostrar el cómo poder llevar a cabo esta actividad, sino que, utilizarán sus conocimientos previos, que posiblemente les ayudará. Por esa razón, en esta parte se comienza a ver el razonamiento que utilizan, y así ellos/as mismos/as realicen un plan, el que les ayude a organizar sus ideas, tal que produzca una interacción con la actividad, que les permita a accionar la actividad con sus medios, en el que se entiende que se realizará una indagación del problema, que se llega a ver como un juego, pero que este se entiende como estrategia.

En la situación de formulación como indica Brousseau (2007), se comenzarán a realizar trabajos en grupos, donde cada uno/a de los/as estudiantes planteé el razonamiento que utilizó, y así permita crear una conceptualización a lo que va enfocado el problema. Luego de tener una idea de cómo poder llevarlo a cabo, se comienza a conjeturar una estrategia, la cual les permitirá ampliar el concepto. Posteriormente, se elegirá un representante, que planteará el desarrollo que utilizaron como grupo, que antes de presentarlos a los demás, se realizarán las modificaciones de su lenguaje matemático, que les permitirá concluir las habilidades utilizadas, que luego se conviertan en teoremas, que ellos/as consideran pertinente para el problema.

Por otro lado, en la situación de validación según Brousseau (2007), los/as interlocutores de cada grupo deberán expresar lo que se conjeturó, el cual produzca validez de la estrategia utilizada entre sus pares, que ayude a entender lo que se pensó, y así convencer a la mayor parte de sus compañeros/as, que la estrategia utilizada es la correcta.

Finalmente, el proceso de institucionalización como indica Brousseau (2007) es el/la docente, el/la encargado/a de formalizar el objeto matemático, en el cual, se observan todos los errores, para luego nutrir el concepto como tal y dejar estipulado la concepción.

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA

4.1 Elementos de la ingeniería didáctica

Respecto al enfoque metodológico que se utilizó en este caso, es el de ingeniería didáctica, este se utiliza como método de investigación en el área de didáctica de la matemática, tal como dice Artigue et al. (1995) “en realidad el término ingeniería didáctica se utiliza en didáctica de las matemáticas con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje” (p.60). La cual va acompañada de un análisis y recopilación de las características de las respuestas de los/as estudiantes, enfocándose en los procesos cognitivos, para así ser evaluados de forma cualitativa.

Para informar sobre la ingeniería, según Artigue et al. (1995) se caracteriza por la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza a través de un esquema experimental y por el registro de estudio de clase. Distinguiendo cuatro fases de esta:

- Primera fase: Análisis preliminar.
- Segunda fase: Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas.
- Tercera fase: Experimentación.
- Cuarta fase: Análisis a posteriori y evaluación.

Por tanto, cada una de las fases mencionadas, hacen referencia a lo siguiente:

Primera fase: Se buscó profundizar sobre el contenido contemplado en la enseñanza del área de probabilidades del tipo curricular, acompañado de la revisión epistemológica con el contexto del objeto matemático y de enseñanza.

Segunda fase: Para el plan de clases e insumos de esta, se realizó acorde al análisis anterior y con el análisis a priori, con el desarrollo de algunas preguntas, tales como, ¿cuáles son las posibles dificultades que podría tener el o la estudiante al abordar la situación de aprendizaje clave?, ¿cuáles son los conocimientos adquiridos que necesita el o la estudiante para resolver la situación de aprendizaje clave?, entre otras. Las cuales se hacen al comienzo de cada planificación de clase correspondiente.

Tercera fase: Para llevar a cabo la experimentación, se tomó en cuenta la relación entre docente-estudiante-saber, en la que se recopilaron datos acordes a las situaciones de aprendizajes claves.

Cuarta fase: Los análisis se discutieron para la validación de la hipótesis de nuestra investigación.

Por tanto, las fases permitieron observar los momentos de la clase, como lo son el antes, durante y después de estas. De esta manera, ayuda a determinar la eficacia de la preparación de la secuencia didáctica, aportando en la comprensión del objeto matemático como tal.

4.2 Metodología del estudio de clases

A través de la ingeniería didáctica, se implementó la metodología del estudio de clases. Este es un método que permite a los/as docentes examinar y mejorar sistemáticamente sus prácticas a través del aprendizaje colaborativo entre colegas, el “estudio de clases es un proceso mediante el cual los profesores trabajan en común para mejorar progresivamente sus métodos pedagógicos, examinándose y criticándome mutuamente las técnicas de enseñanza” (Mena, 2007, p.1).

En consecuencia, existe una estructura en el estudio de clase que abarca tres aspectos, que se realizan con la finalidad de mejorar los diseños y ejecución de las clases.

El primer aspecto es llamado preparación, luego el de clase de estudio y el tercero es el de revisión. Estos consisten en transformar un proyecto del currículum en uno que se pueda implementar en las aulas, y así realizar la implementación con una asistencia de distintos docentes, ocurriendo luego una sesión de opiniones y preguntas acerca de los problemas dados en la clase y en el rol formativo del docente que fue observado.

Por lo que, esto se utilizó en nuestra investigación, de tal forma que, en las clases, se realizó una activación de conocimientos previos de resolución de problemas, enfatizando en las representaciones que utilizaran los/as estudiantes en sus respuestas sobre la probabilidad, disponiendo de guías y planificación de clases en el curso de primero medio. Luego, las clases que se implementaron en varias sesiones del taller extraprogramático, fueron observadas por el grupo de investigación, anotando los apuntes de esta en un documento específico, es decir notas de campo. Por último, se realizan sesiones grupales después de cada clase observada en el que se comentarán las opiniones, propósito e impresiones de estas.

Por lo anterior, el enfoque de la investigación es de tipo cualitativo, en el que se observaron los resultados al implementar una secuencia didáctica a estudiantes de primero medio, que tiene como fin la construcción del concepto de probabilidad y los distintos tipos de representaciones. Así, se pudo observar los conflictos y dificultades que tienen los/as estudiantes, y la incidencia que tiene en la adquisición del concepto matemático, con respecto a las situaciones que se le asocian. Por lo cual, la secuencia que se realizó tuvo como fin presentar el contenido de probabilidades con sucesos de la vida cotidiana, el cual permite trascender entre un registro de representación a otro, dejando en claro la noción del concepto matemático.

CAPÍTULO V

SECUENCIA DE ENSEÑANZA DE APRENDIZAJE

5.1 Descripción de la secuencia enseñanza aprendizaje

A continuación, se presenta la secuencia de clases que se utilizó para desarrollar en esta investigación en el curso de primero medio, en el que los/as estudiantes rondan entre 14 y 15 años de edad.

La secuencia se encuentra dividida clase a clase, con sus habilidades, objetivos e indicadores de evaluación pertinentes a cada sesión. Indicando que el objetivo de aprendizaje, que denota es mostrar que comprenden el concepto de azar:

- Realizando análisis estadísticos, empezando por frecuencias relativas.
- Utilizando probabilidades para describir el comportamiento azaroso.
- Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

La unidad corresponde a la número 4, llamada Nube de punto y gráficos “xy”. Regla aditiva y multiplicativa de probabilidades. Ubicándose en el programa de estudio actual año 2022 para realizar el segundo semestre del año académico de las páginas 159 a la 190, específicamente el objetivo de aprendizaje se encuentra en las páginas 180 a la 186.

Además, los contenidos que deben tener adquiridos los/as alumnos/as para realizar las actividades son la operatoria con números reales, diagrama de árbol, concepto de muestreo, noción de sucesos aleatorios y el concepto de frecuencia relativa.

La implementación consiste en 6 clases, en las cuales se buscó que los/as estudiantes comprendieran el contenido del eje Probabilidad y Estadística, específicamente el OA 15.

Esta unidad se trabajó en torno a experimentos aleatorios, en la que las y los estudiantes comenzaron a construir, por medio de la realización de ello, sobre los conceptos de probabilidad clásica.

La implementación del objeto matemático la fue distribuido, tal como muestra la siguiente tabla, por medio de la Teoría Antropológica de lo didáctica propuesta por Chevallard, siguiendo el modelo de la Teoría de Situaciones Didácticas y Teoría de Representaciones Semióticas. Cabe destacar que, la clase 1 consiste en un control de diagnóstico para ver los conceptos previos que traen adquiridos los/as estudiantes y la clase número 6 consta de un control final para observar la construcción del aprendizaje. Así, la distribución del objeto matemático es el siguiente:

Clase	Tarea	Técnica	Tecnología	Obj. Mat.
2	Registrar eventos probabilísticos con 2 tipos de dados	Manipular dados de 6 y 12 caras.	Espacio Muestral	Espacio medible
3	Manipular una planilla Excel para observar los sucesos.	Usar Software educativo hojas de cálculo o Excel.	Espacio Muestral y subconjunto de este (evento o suceso).	Ley de los grandes números
4	Aplicar ley de Laplace en problemas rutinarios	Aplicar regla de Laplace	Probabilidad clásica	Regla de Laplace
5	Aplicar ley de Laplace en problemas no rutinarios	Aplicar regla de Laplace	Probabilidad clásica	Regla de Laplace

Fuente: Elaboración propia

De esta forma, la implementación terminó con la clase número 5 en la que se trabajó en torno a un problema no rutinario. Este problema está diseñado para comprender de manera más profunda el concepto de probabilidad clásica y sus componentes. A su vez, en la clase número 6 al igual que en la clase número 1, se realizó la evaluación para observar y conjeturar sobre la construcción del aprendizaje de los/as estudiantes, con respecto a la secuencia didáctica propuesta.

Cabe destacar que, cada clase incluye una guía de aprendizaje, la cual los objetivos son:

Guía 1: Recordar el concepto de probabilidad y espacio muestral a través de un experimento con dados.

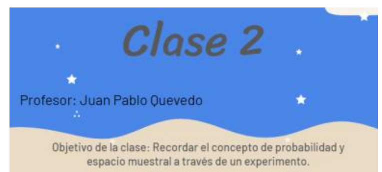
Guía 2: Observar y conjeturar experimentos aleatorios a través de software educativo.

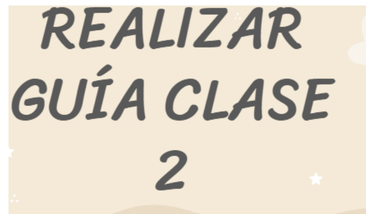
Guía 3: Aplicar regla de Laplace a través de problemas rutinarios.

Guía 4: Aplicar regla de Laplace en problemas no rutinarios

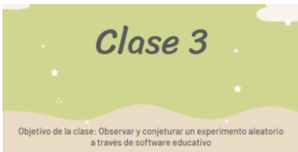
5.2 Planes de Clases

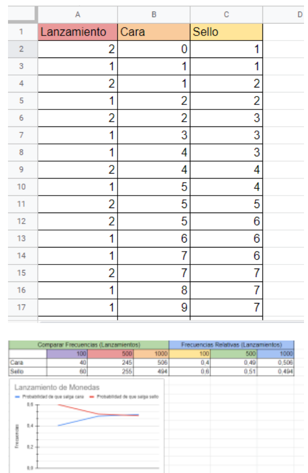
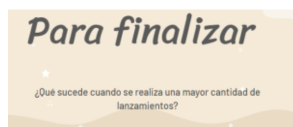
PLAN DE CLASE		
Eje Temático Estadística y probabilidad	Unidad o Tema: Nube de punto y gráficos “xy”. Regla aditiva y multiplicativa de probabilidades.	Sesión: Nº 2
Objetivo General de la Unidad	Registro de características distintas de la misma población mediante tablas y nube de puntos. Elaboración de gráficos “xy” para comparar poblaciones. Desarrollo y aplicación de la regla aditiva y multiplicativa de probabilidades.	
Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje	Mostrar que comprenden el concepto de azar: ● Utilizando probabilidades para describir el comportamiento azaroso. ● Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.	
Habilidad	Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad y determinando sus limitaciones (OA k). Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y validez de estas (OA l). Transitar entre los distintos niveles de representación de funciones (OA m). Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos (OA n)	

Actitud	Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social (OA E). Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información, dando crédito al trabajo de otros y respetando la propiedad y la privacidad de las personas (OA F).			
Momentos	Actividades de Aprendizaje	Intervención Docente	Recursos	Tiempo
Inicio	Se presenta el catastro del diagnóstico realizado la clase anterior, con la finalidad de que los/as estudiantes en conjunto puedan determinar algunas conjeturas de la subunidad y a su vez recordar conocimientos previos.	El docente organiza las ideas de los/as estudiantes y los/as guías con la finalidad de que estos logren llegar a la noción de probabilidad.  	Ppt y pizarra	5 min

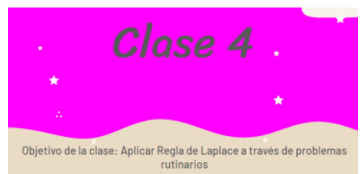
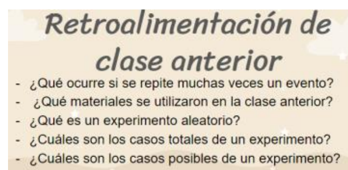
Desarrollo	Se les entrega a los/as estudiantes una guía en la cual se les realizan preguntas del tipo: ¿Cuál es el espacio muestral si lanzamos los dados una vez? ¿Qué sucede con la probabilidad de lanzar el dado 2 veces? ¿Cambiaría en algo si lo lanzamos 3 veces?	El docente monitorea que los/as estudiantes respondan y comprendan la actividad propuesta y resuelve dudas.  	PPT, guía y pizarra.	30 min
Cierre	Se les pregunta a los/as estudiantes, que ocurre si lanzamos los dos dados al mismo tiempo, con la siguiente pregunta orientadora: ¿Cuál es el espacio muestral del evento? Para luego realizar preguntas de metacognición a los estudiantes.	El docente supervisa que los/as estudiantes estén realizando y comprendiendo la actividad propuesta y resuelve dudas. Para luego concluir las actividades y realizar preguntas de metacognición.	PPT, guía y pizarra.	10 min

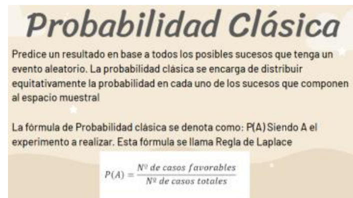
PLAN DE CLASE		
Eje Temático: Probabilidad y Estadística	Unidad o tema: Nube de punto y gráficos “xy”. Regla aditiva y multiplicativa de probabilidades.	Sesión N°3
Objetivo General de la Unidad	Registro de características distintas de la misma población mediante tablas y nube de puntos. Elaboración de gráficos “xy” para comparar poblaciones. Desarrollo y aplicación de la regla aditiva y multiplicativa de probabilidades.	
Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje	Mostrar que comprenden el concepto de azar: ● Utilizando probabilidades para describir el comportamiento azaroso. ● Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.	
Habilidad	Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad y determinando sus limitaciones (OA k). Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y validez de estas (OA l). Transitar entre los distintos niveles de representación de funciones (OA m). Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos (OA n)	

Actitud	Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social (OA E). Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información, dando crédito al trabajo de otros y respetando la propiedad y la privacidad de las personas (OA F).			
Momentos de la clase	Actividades de Aprendizaje	Intervención Docente	Recursos	Tiempo
Inicio	Se recuerda lo visto en la clase anterior, realizando las siguientes preguntas: ¿Qué ocurrió con los dados en la clase anterior? ¿Hubo cambio si hacían varios lanzamientos?	El docente realiza preguntas orientadoras con la finalidad de que los/as estudiantes recuerden lo visto en  la clase anterior. 	Pizarra y PPT.	5 min

<table>
<tr>
<td>Desarrollo</td>
<td>Se presenta una guía en la cual se solicita al estudiante observar una simulación en Excel, con la finalidad de que esté/a logre determinar qué sucede si la cantidad de lanzamientos aumenta con respecto al evento de una moneda, evidenciando con respecto a la probabilidad teórica.</td>
<td>El docente guía al estudiante y resuelve dudas.

<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Lanzamiento</td><td>Cara</td><td>Sello</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>1</td><td>5</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>11</td><td>2</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>12</td><td>2</td><td>5</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>13</td><td>1</td><td>6</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>14</td><td>1</td><td>7</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td>2</td><td>7</td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>16</td><td>1</td><td>8</td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>17</td><td>1</td><td>9</td><td>7</td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><th></th><th colspan="3">Comparar Frecuencias (Lanzamientos)</th><th colspan="3">Frecuencias Relativas (Lanzamientos)</th></tr>
<tr><td></td><td>100</td><td>500</td><td>1000</td><td>100</td><td>500</td><td>1000</td></tr>
<tr><td>Cara</td><td>40</td><td>245</td><td>506</td><td>0,4</td><td>0,49</td><td>0,506</td></tr>
<tr><td>Sello</td><td>60</td><td>255</td><td>494</td><td>0,6</td><td>0,51</td><td>0,494</td></tr>
</table>
</td>
<td>Pizarra, PPT y guía</td>
<td>30 min</td>
</tr>
<tr>
<td>cierre</td>
<td>Se le pregunta a los/as estudiantes que es lo que sucede cuando se realiza una mayor cantidad de lanzamientos.</td>
<td>El profesor recopila las respuestas dadas por los/as estudiantes y concluye la clase con preguntas de metacognición.

</td>
<td>PPT y pizarra</td>
<td>5 min</td>
</tr>
</table>

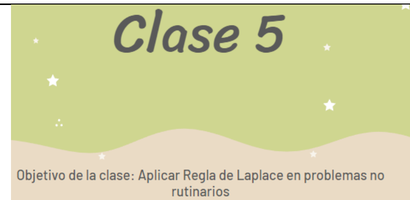
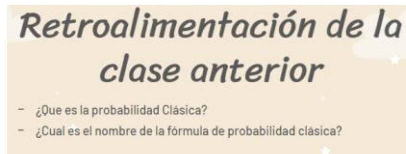
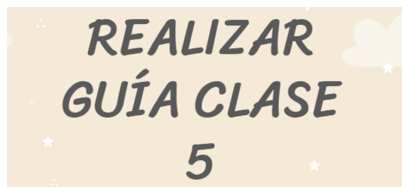
PLAN DE CLASE		
Eje Temática: Estadística y probabilidad	Unidad o Tema: Nube de punto y gráficos “xy”. Regla aditiva y multiplicativa de probabilidades.	Sesión N°4
Objetivo General de la Unidad	Registro de características distintas de la misma población mediante tablas y nube de puntos. Elaboración de gráficos “xy” para comparar poblaciones. Desarrollo y aplicación de la regla aditiva y multiplicativa de probabilidades.	
Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje	Mostrar que comprenden el concepto de azar: ● Utilizando probabilidades para describir el comportamiento azaroso. ● Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.	
Habilidad	Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad y determinando sus limitaciones (OA k). Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y validez de estas (OA l). Transitar entre los distintos niveles de representación de funciones (OA m). Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos (OA n)	
Actitud	Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social (OA E).	

	Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información, dando crédito al trabajo de otros y respetando la propiedad y la privacidad de las personas (OA F).			
Momentos	Actividades de Aprendizaje	Intervención Docente	Recursos	Tiempo
Inicio	Se recuerda lo visto en la clase anterior por medio de preguntas orientadoras como la siguiente: ¿Qué ocurre si se repite muchas veces un evento?	El docente realiza preguntas orientadoras con la finalidad de que los/as estudiantes recuerden lo visto en la clase anterior.  	Pizarra y PPT	5 min
Desarrollo	Se presentan uno o dos problemas rutinarios dependiendo del avance que tengan los/as estudiantes.	El docente guía al estudiante y resuelve dudas respecto al problema planteado, sin entregar la respuesta.	PPT, pizarra y guía.	25 min

		 		
Cierre	Se formaliza el concepto de probabilidad clásica, con respecto a la regla de Laplace.	El docente formaliza el contenido visto.  	PPT y pizarra.	15 min

PLAN DE CLASE		
Eje Temático: Estadística y probabilidad.	Unidad o Tema: Nube de punto y gráficos “xy”. Regla aditiva y multiplicativa de probabilidades.	Sesión N°5
Objetivo General de la Unidad	Registro de características distintas de la misma población mediante tablas y nube de puntos. Elaboración de gráficos “xy” para comparar poblaciones. Desarrollo y aplicación de la regla aditiva y multiplicativa de probabilidades.	
Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje	Mostrar que comprenden el concepto de azar: ● Utilizando probabilidades para describir el comportamiento azaroso. ● Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.	

Habilidad	Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad y determinando sus limitaciones (OA k). Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y validez de estas (OA l). Transitar entre los distintos niveles de representación de funciones (OA m). Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos (OA n)			
Actitud	Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social (OA E). Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información, dando crédito al trabajo de otros y respetando la propiedad y la privacidad de las personas (OA F).			
Momentos	Actividades de Aprendizaje	Intervención Docente	Recursos	Tiempo
Inicio	Se les presenta el objetivo de la clase.	El docente presenta el objetivo de la clase y entrega la guía clase 5.	Pizarra, PPT y cámara.	5 min

		 		
Desarrollo	Se presenta el problema no rutinario entregando guía.	El docente guía al estudiante y resuelve dudas respecto al problema planteado, sin entregar respuesta al problema. 	PPT, pizarra, guía y cámara.	30 min
Cierre	Se les solicita a los/as estudiantes, que mencionen estrategias realizadas y que observen el proceso de transcripción.	El profesor recopila las respuestas dadas por los/as estudiantes y concluye la clase con preguntas de metacognición.	PPT y pizarra	5 min

5.3 Guías de trabajo

En esta sección, se presentan los controles y guías realizadas por los/as estudiantes, en el cual se observa la distribución del contenido matemático, apuntando al objetivo de cada una de las clases.

Control Diagnóstico

Nombre: ________________________ **Curso: I°** _____ **Fecha:** 26/09/2022

Puntaje total: 6 puntos. **Puntaje obtenido:** ______ **Nota:** _______

Instrucciones:

(1) Lea atentamente las instrucciones de cada problema y responda de acuerdo con lo solicitado.

(2) Todas las preguntas deben tener desarrollo completo para que su respuesta sea considerada.

(3) Queda prohibido el uso de cualquier dispositivo electrónico, incluyendo celular y calculadora.

() Este control no tiene ninguna influencia con su promedio final.

1.- Responder las siguientes preguntas argumentando su respuesta

- **A.** ¿Qué es la regla de Laplace?
- **B.** ¿Qué es el espacio muestral?
- **C.** ¿Cuáles son los casos favorables?
- **D.** ¿Cuáles son los casos totales?

2.- Desarrollar el siguiente problema de probabilidad clásica, anotando el procedimiento y aquello que considere necesario. (1 pto c/u)

1. Estefan y Romina, están observando lo que ocurre con respecto al lanzar una moneda, en el cual buscan hallar la probabilidad de que al lanzar al aire dos monedas, salgan las tres opciones, dibuje y exprese cada una de las probabilidades, y ayude a responder a Estafan y Romina. Identifique el espacio muestral y las características correspondientes.

i) **Dos caras**

ii) **Dos sellos**

iii) **Una cara y un sello**

<u>Guía clase 2</u>

Nombre: ______________________________ **Fecha:** 27/09/2022

Materiales: 1 dado de 6 caras.

Instrucciones: En parejas responde las siguientes preguntas al reverso de esta hoja, realizando los experimentos necesarios.

1. ¿Cuál es el espacio muestral si lanzamos los dados una vez?
2. ¿Qué sucede con la probabilidad de lanzar el dado 2 veces? ¿Cambiaría en algo si lo lanzamos 3 veces?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que salga 1 al lanzar el dado de 6 caras?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que salga 2 al lanzar el dado de 6 caras?
5. ¿Cuál es la probabilidad de que salga 3 lanzar el dado de 6 caras?
6. ¿Cuál es la probabilidad de que salga 4 al lanzar el dado de 6 caras?
7. ¿Cuál es la probabilidad de que salga 5 al lanzar el dado de 6 caras?
8. ¿Cuál es la probabilidad de que salga 6 al lanzar el dado de 6 caras?
9. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 5 veces el dado de 6 caras nos salga 1?
10. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 10 veces el dado de 6 caras nos salga 1?
11. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 50 veces el dado de 6 caras nos salga 1?
12. ¿Qué se puede concluir al respecto de lanzar infinitas veces un dado?

Guía clase 3

Nombre: ____ **Fecha:** 04/10/202

Actividad introductoria Responder lo siguiente.

Si lanzamos una moneda 10 veces ¿Cuál crees que es la probabilidad de que salga cara? y ¿que salga el sello?

Ahora, si lanzamos una moneda 100 veces o 1000 veces ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara? y ¿de que salga sello?

Actividad 2

¿Cómo se realizó la construcción en el software de excel?

1. En la celda A1, calcula un número entero aleatorio, entre 1 y 2 (=aleatorio.entre 1,2), Copiar la fórmula para obtener, al menos, 1.000 números aleatorios.
2. Contabiliza la cantidad de ocurrencias de 1 a 2 en las siguientes columnas. (Columna B: =contar.si($A$1:$A1;1) Columna C: =contar.si($A$1:$A1;2))
3. Compara las frecuencias para distintas cantidades de lanzamientos 100 Lanzamientos 500 Lanzamientos 1.000 Lanzamientos =contar.si(A1:A100;1) =contar.si(A1:A100;2) =contar.si(A1:A500;1) =contar.si(A1:A500;2) =contar.si(A1:A1000;1) =contar.si(A1:A1000;2)
4. Calcula las frecuencias relativas para los tres casos en la columna E: Puedes adaptar las fórmulas anteriores a: =contar.si(A1:A100;1)/100
5. Añade un gráfico que facilite la visualización de esta comparación

A raíz de lo observado, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Qué crees que suceda si aumentamos la cantidad de lanzamientos?

2. ¿Qué ocurre cuándo se lanza menos veces la moneda?

3. ¿Por qué cuando lanzamos la moneda 100 veces sucede lo mismo que cuando la lanzamos 1000 veces?

4. ¿Qué se puede observar del gráfico?

5. ¿Qué podemos concluir con respecto al lanzamiento de monedas?

Guía clase 4

Nombre:____Fecha: 05/10/2022

Responde las siguientes preguntas utilizando el siguiente enunciado

Monserrat está observando una caja, en la cual sus padres tienen pelotas, está las cuentas y observa que son 10 pelotas de las cuales 4 son rojas, 3 son azules y 3 blancas. Le dice a su hermano Gaspar, si es que puede sacar una pelota, así si saca una de color azul, podrán ir al cine el día que el elija, si saca una de color rojo en la invitará al cine y si saca una blanca ninguno de los dos invita al cine.

a) Dibuje la situación presentada

b) ¿Qué puede observar según lo dibujado?

c) Si lo tuviera que escribir de forma matemática ¿cómo sería?

d) ¿Es correcto lo que está haciendo Montserrat? ¿Por qué?

e) ¿Crees que existe algún tipo de injusticia según lo planteado? ¿Cómo podrían solucionar si existiese? y en el caso de que no, ¿Estás de acuerdo con lo planteado?

Guía clase 5

Nombre:______________________________________Fecha: 11/10/2022

Responde las siguientes preguntas utilizando el siguiente enunciado

Fabian y Marcela, se encuentran observando lo que ocurre con los partidos de Voleibol dentro de la liga, si el equipo favorito de voleibol “club linares” tiene que jugar 4 partidos para clasificar y no hay posibilidades de empatar en ninguno de los partidos a realizar.

1. Si para ganar la liga, el equipo necesita ganar al menos 2 partidos, ¿cuál es la posibilidad de que gane?

2. Si aumenta el número de jugadores ¿incrementa la posibilidad de clasificar?

3. El orden de los eventos ¿es relevante dentro de la liga en los resultados?

Prueba final de diagnóstico

Nombre:_______________________________________Fecha: 12/10/2022

Puntaje total: 6 puntos. Puntaje obtenido: ______ **Nota:** _______

Instrucciones:

(1) Lea atentamente las instrucciones de cada problema y responda de acuerdo con lo solicitado.

(2) Todas las preguntas deben tener desarrollo completo para que su respuesta sea considerada.

(3) Queda prohibido el uso de cualquier dispositivo electrónico, incluyendo celular y calculadora.

(4) Este control no tiene ninguna influencia con su promedio final.

1.- Responder las siguientes preguntas argumentando su respuesta

A. ¿Qué es la regla de Laplace?

B. ¿Qué es el espacio muestral?

C. ¿Cuáles son los casos favorables?

D. ¿Cuáles son los casos totales?

2.- Desarrollar el siguiente problema de probabilidad clásica, anotando el procedimiento y aquello que considere necesario. (1 pto c/u)

Iris, tiene en su celular 500 canciones, de las cuales se puso a observar que la mitad corresponden al género de pop, un cuarto al género de reggaetón, un octavo al género del rock y lo que falta a baladas.

a) ¿Cómo representarías el espacio muestral?

b) Si ella quiere escuchar una canción al azar ¿Qué género es más probable que escuche? ¿Y el menos probable?

Rúbrica Evaluación por participación.

Esta evaluación se realizó con el fin de colocar una calificación a los/as estudiantes, para informar de su constancia. Por tanto, se presenta una tabla, en el cual aparecen los ítems y al otro lado la calificación según las características de este.

Ítem	**Calificación**
Participa en clases respondiendo las preguntas realizadas	
Asiste a las 6 sesiones realizadas.	
Es puntual para llegar a cada una de las sesiones.	
Utiliza el celular para lo solicitado por el docente y no para actividades externas a la clase.	
Trabaja de manera colaborativa con sus compañeros/as	
Promueve el respeto y tolera a cada uno de sus compañeros/as	
Trae los materiales solicitados a cada sesión	
NOTA FINAL	

5.4 Análisis apriori de situaciones de aprendizajes claves

Los análisis apriori que se presentarán a continuación son aquellos donde se observará la teoría de situaciones didácticas, juntos a sus etapas, por lo cual son situaciones claves, que son importantes de destacar, que ayudan a observar el tránsito dentro de cada una de las situaciones realizadas.

Situación clave N°1: clase 2

El análisis a priori que corresponde a la clase 2, en la cual se busca generar la etapa de acción y formulación, por lo que se considera una situación de aprendizaje clave en este escrito. Debido a la falta de conocimiento del contenido, en este caso, al ser la clase de acción y formulación, es considerado un problema.

1. ¿Cuál es el espacio muestral si lanzamos los dados una vez?
2. ¿Qué sucede con la probabilidad de lanzar el dado 2 veces? ¿Cambiaría en algo si lo lanzamos 3 veces?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que salga 1 al lanzar el dado de 6 caras?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que salga 2 al lanzar el dado de 6 caras?
5. ¿Cuál es la probabilidad de que salga 3 lanzar el dado de 6 caras?
6. ¿Cuál es la probabilidad de que salga 4 al lanzar el dado de 6 caras?
7. ¿Cuál es la probabilidad de que salga 5 al lanzar el dado de 6 caras?
8. ¿Cuál es la probabilidad de que salga 6 al lanzar el dado de 6 caras?
9. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 5 veces el dado de 6 caras nos salga 1?
10. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 10 veces el dado de 6 caras nos salga 1?
11. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 50 veces el dado de 6 caras nos salga 1?
12. ¿Qué se puede concluir al respecto de lanzar infinitas veces un dado?

1. ¿Cuál es la respuesta al problema?

En la pregunta 1, se espera que estos/as respondan que el espacio muestral en el dado de seis caras al lanzarlo solo una vez es de $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, mientras que el dado de 12 cara su espacio muestral es $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

En la pregunta 2, se espera que los/as estudiantes concluyan que al lanzar el dado 2 o 3 veces si bien no es la misma probabilidad, pero estas se asemejan, puesto que se estima que ambas se acercan a una probabilidad.

De la pregunta 3 a la 8, las respuestas podrían haber sido expresada de la siguiente manera, que la probabilidad de que al lanzar un dado y salga 1, 2, 3, 4, o 5 es de $\frac{1}{6}$ o también expresado como $0{,}167$.

De la pregunta 9 a la 11, se espera que hayan determinado que al lanzar la cantidad de veces que sea, estos/as estiman que la probabilidad de lanzar un dado y exista solo un caso favorable es de aproximadamente $0{,}167$ o bien ⅙.

La pregunta 12, se espera que los estudiantes concluyan que al lanzar un dado infinitas veces la probabilidad de obtener un caso favorable, esta siga siendo un número constante, haciendo alusión a la ley de los grandes números.

2. ¿Cuáles son los conocimientos en juego en el problema?

Los conocimientos que se deben utilizar son números racionales, razón y proporción, debido a que deben comparar la cantidad de casos favorables y totales.

3. ¿Cuáles son los conocimientos adquiridos que necesita el/a alumno/a para resolver el problema?

El conocimiento de razón y proporción, debido a que de esta manera son capaces de comparar los valores obtenidos al lanzar el dado con el total de lanzamientos, por otro lado, deben tener adquirido la división de números enteros, debido a que para calcular el porcentaje de la probabilidad se deben dividir números enteros dando como resultado un número racional.

4. ¿Cuáles son las posibles estrategias que el/a alumno/a podrá realizar?

Estrategia N°1: El/a estudiante para poder responder a las preguntas solicitadas, puede utilizar el método de conteo, es decir, que con el material concreto estos/as lo lancen y obtengan la probabilidad correspondiente a cada interrogante.

Estrategia N°2: El o la estudiante puede utilizar la regla de Laplace de forma implícita utilizando la razón de que los casos favorables es a los casos totales o posibles.

5. ¿Cuáles son las posibles dificultades que podrían tener los/as alumnos/as para abordar la situación?

Dificultad N°1: Una posible dificultad es que el/la estudiante, comprenda la probabilidad como un evento, por lo que, al lanzar el dado una cantidad de veces hasta que salga el valor pedido determinando que la probabilidad es 1 dividido en la cantidad de veces que lanzó el dado.

Dificultad N°2: Comprender los enunciados propuestos.

6. ¿Cuáles son los posibles errores que realiza el alumnado al resolver el problema?

Error N°1: En este caso, existe la posibilidad de que al contar la cantidad de veces que se lanza el dado o la cantidad de veces que sale la situación pedida, ésta se interprete de manera errónea, confundiendo los casos favorables con los casos totales.

Error N.º 2: Confusión en el espacio muestral entre el dado de 12 caras y uno de 6 caras.

Situación clave N°2: clase 4

El análisis apriori que corresponde a la clase 4, en la cual se busca generar la etapa de validación e institucionalización, por lo que se considera una situación de aprendizaje clave en este escrito.

Situación problema

Monserrat está observando una caja, en la cual sus padres tienen pelotas, está las cuentas y observa que son 10 pelotas de las cuales 4 son rojas, 3 son azules y 3 blancas. Le dice a su hermano Gaspar, si es que puede sacar una pelota, así si saca una de color azul, podrán ir al cine el día que el elija, si saca una de color rojo en la invitará al cine y si saca una blanca ninguno de los dos invita al cine.

a) Dibuje la situación presentada

b) ¿Qué puede observar según lo dibujado?

c) Si lo tuviera que escribir de forma matemática ¿cómo sería?

d) ¿Es correcto lo que está haciendo Montserrat? ¿Por qué?

e) ¿Crees que existe algún tipo de injusticia según lo planteado? ¿Cómo podrían solucionar si existiese? y en el caso de que no, ¿Estás de acuerdo con lo planteado?

1. ¿Cuál es la respuesta al problema

En la pregunta 1, se puede observar el dibujo del dotal de las pelotas, pintadas con sus respectivos colores.

En la pregunta 2, se espera que el/la estudiante describa que existen 4 pelotas rojas, 3 azules y 3 blancas.

En la pregunta 3, se espera que los/as estudiantes escriban de la siguiente manera cada uno de los casos del evento, las pelotas rojas son $\frac{4}{10}$ o $0{,}4$, mientras que las pelotas azules son, $\frac{3}{10}$ o $0{,}3$ y por último las pelotas blancas son $\frac{3}{10}$ o $0{,}3$.

En la pregunta 4, se espera que los/as estudiantes, observen la situación y reflexionen de que Montserrat está cayendo en una injusticia, debido a que, esta tiene más probabilidad de ganar.

En la pregunta 5, se espera que los/as estudiantes mencionen la injusticia, y que ellos/as propongan por ejemplo agregar una pelota más para Gaspar, de tal manera que tengan la misma probabilidad de ganar.

2. ¿Cuáles son los conocimientos en juego en el problema?

Los conocimientos que se deben utilizar dentro del problema, es la Regla de Laplace, debido a que debe contar la cantidad de pelotas totales y aquellas que favorecen que Gaspar invite a la hermana al cine y viceversa. Deben tener conocimiento sobre el lenguaje matemático utilizado generalmente en probabilidad y operatoria de números enteros, con resultados racionales.

3. ¿Cuáles son los conocimientos adquiridos que necesita el/a alumno/a para resolver el problema?

Los conocimientos que se debe haber adquirido, son el concepto de espacio muestral, casos favorables, la cardinalidad de casos totales, para aplicar en la regla de Laplace. Esto permite que los/as estudiantes puedan establecer la justicia del evento.

4. ¿Cuáles son las posibles estrategias que el/a alumno/a podrá realizar?

Estrategia N°1: Calcular la probabilidad de que Monserrat invite a su hermano al cine y que luego calculen la probabilidad de que Gaspar invite a Montserrat al cine, para determinar si la situación es justa o no.

Estrategia N°2: Observar la cantidad de pelotas para determinar si la decisión es justa o injusta.

5. ¿Cuáles son las posibles dificultades que podrían tener los/as alumnos/as para abordar la situación?

Dificultad N°1: Una posible dificultad que puede tener el estudiante es no comprender la situación, de tal manera que lo describan de forma errónea.

Dificultad N°2: No considerar las pelotas que no beneficia a ninguno de los participantes.

6. ¿Cuáles son los posibles errores que realiza el alumnado al resolver el problema?

Los/as estudiantes al resolver el problema, puede tener algunos errores, tales como:

Error N°1: Que realice un cálculo erróneo de las probabilidades, debido a que al contar las pelotas salga una probabilidad errónea.

Error N.º 2: Que, al representar la situación, dibuje una pelota más o una menos, provocando que el resultado estuviese errado.

Error N.º 3: Que estos/as utilicen los casos totales la cantidad de pelotas que favorece la situación y no la cantidad total de bolitas.

Situación clave 3: clase 5

El análisis apriori se hizo sólo con respecto a la guía de la clase número 5 que consiste en el problema no rutinario, plasmado a continuación, respondiendo las preguntas correspondientes al análisis.

Situación problema

Fabián y Marcela, se encuentran observando lo que ocurre con los partidos de Voleibol dentro de la liga, si el equipo favorito de voleibol “club linares” tiene que jugar 4 partidos para clasificar a los juegos olímpicos y no hay posibilidades de empatar en ninguno de los partidos a realizar.

1. Si para ganar la liga, el equipo necesita ganar al menos 2 de esos 4 partidos, ¿cuál es la posibilidad de que gane?
2. Si aumenta el número de jugadores ¿incrementa la posibilidad de clasificar?
3. El orden de los eventos ¿es relevante dentro de la liga en los resultados?

1. ¿Cuál es la respuesta al problema?

Pregunta uno: Considerar que al ser 4 juegos con 2 resultados posibles (ganar o perder), para obtener la cantidad de elementos del espacio muestral es 2 elevado a 4 por lo que son 16 elementos de este. Siendo estos los posibles resultados de cada juego, visualizando el diagrama.

Al tener el espacio muestral el diagrama se puede obtener que la posibilidad de que el equipo favorito de Fabián y Marcela gane al menos dos partidos ocupando la regla de Laplace es de $\frac{11}{16}$.

Pregunta dos: En este caso, si se incrementan jugadores de forma equitativa en ambos equipos, la probabilidad de que gane con las condiciones que se dan siguen siendo la misma. Por otro lado, en caso contrario, existiría una mayor probabilidad de ganar en uno de los equipos, puesto que al ser más jugadores estos/as no están en igualdad de condiciones.

Pregunta 3: El orden de los eventos o partidos que se realicen, en este caso al ser visualizado en el diagrama de árbol no afecta en los resultados de cada partido.

2. ¿Cuáles son los conocimientos en juego en el problema?

Los conocimientos que se deben utilizar dentro del problema, es la Regla de Laplace como también la construcción del diagrama de árbol, este ayuda a que los/as estudiantes puedan tener un esquema del espacio muestral, para luego establecerlo. A su vez, se necesita que el/la estudiante comprenda de manera implícita la Ley de los Grandes Números, para observar lo que ocurre cuando un evento se realiza varias veces.

3. ¿Cuáles son los conocimientos adquiridos que necesita el/a alumno/a para resolver el problema?

Los conocimientos que se debe haber adquirido, son el concepto de espacio muestral, casos favorables, la cardinalidad de casos totales, para aplicar en la regla de Laplace. Esto permite que los/as estudiantes puedan establecer la probabilidad del evento.

4. ¿Cuáles son las posibles estrategias que el/a alumno/a podrá realizar?

Estrategia N°1: Se puede utilizar el diagrama de árbol, de tal manera que se evidencie los casos posibles por medio de este.

Estrategia N°2: También, anotando todos los posibles casos, de tal manera que se evidencie el espacio muestral.

Estrategia N°3: Realizando tablas y diagrama de pares.

5. ¿Cuáles son las posibles dificultades que podrían tener los/as alumnos/as para abordar la situación?

Dificultad N°1: Puede que exista la dificultad de cómo abordar la situación, puesto que no se observa en primera instancia la realización de un diagrama y asociar la información del enunciado de forma correcta.

Dificultad N°2: La comprensión de la situación planteada.

6. ¿Cuáles son los posibles errores que realiza el alumnado al resolver el problema?

Error N°1: Estudiantes no logran determinar la probabilidad, debido a que no contabilizan de manera correcta los casos favorables.

Error N°2: Confundir eventos visualizados en clase anteriores en el cual existen dos tipos de posibilidades, pero aumentando la cantidad de veces que sucede el evento.

Error N°3: Existe la posibilidad de que no pueda expresar el espacio muestral, y no observar la diferencia entre los casos favorables y totales, lo cual impide establecer la probabilidad del evento.

CAPÍTULO VI

ESTUDIO DE CLASES

6.1 Descripción de la clase diseñada

En el siguiente apartado se presentará el estudio de clase diseñado, para la investigación realizada, la cual se desarrolló en la última clase de la secuencia que fue el día 11 de octubre del 2022. Dentro del objetivo principal del problema planteado, fue la finalización de la formalización de probabilidad clásica (Regla de Laplace), en el cual se describe el espacio muestral, casos favorables y totales. Cabe mencionar, que en esta clase pudieron participar los/as demás investigadores/as, tal como menciona Mena (2007) el estudio de clases, permite que los/as profesores/as, puedan trabajar de manera conjunta dentro de los métodos pedagógicos, de tal forma, que permita examinar y criticar de manera conjunta las técnicas de enseñanza. De esta manera, al ser la última clase con respecto al contenido mencionado en capítulos anteriores, es que se decide ser realizada al final, para observar si las prácticas de enseñanza han sido las adecuadas, con respecto a las teorías trabajadas y la construcción del aprendizaje.

Por tanto, con respecto a la etapa del estudio de clase dentro de la secuencia presentada, es relevante profundizar en la resolución de problema no rutinario, el cual fue entregado a los/as estudiantes, en el que se establece el contrato didáctico como tal, puesto que no existe intervención del docente hasta realizar la formalización del objeto matemático y el problema como tal. De esta manera, los/as estudiantes de forma individual tuvieron la primera instancia de abordar y pensar las estrategias a realizar, para luego en una segunda instancia de la clase poder compartir con sus compañeros/as aquello que comprendieron, siendo las/los docentes quienes actúan de observadores/as.

Luego, en una etapa final se realiza un plenario en que los/as estudiantes fueron seleccionados de forma estratégica para ver un resultado bueno y otro regular, para observar lo que ocurre con cada uno de los casos, de tal manera que en la pizarra pudieran expresar y registrar sus respuestas. Así, dentro del cierre de la clase se realiza la institucionalización observando lo que ocurre y definiendo los conceptos claves.

6.2 Plan de clases en forma detallada

Se presentará el plan de clases correspondiente al estudio de clases, con la finalidad de dar a conocer la intervención del docente y las actividades que se llevaron a cabo en cada uno de los momentos.

<table>
<tr><td colspan="3">PLAN DE CLASE 1 (martes 12/10-miércoles 13/10)</td></tr>
<tr><td>Eje Temático: Estadística y probabilidad.</td><td>Unidad o Tema: Nube de punto y gráficos “xy”. Regla aditiva y multiplicativa de probabilidades.</td><td>Sesión N°5</td></tr>
<tr><td>Objetivo General de la Unidad</td><td colspan="2">Registro de características distintas de la misma población mediante tablas y nube de puntos. Elaboración de gráficos “xy” para comparar poblaciones. Desarrollo y aplicación de la regla aditiva y multiplicativa de probabilidades.</td></tr>
<tr><td>Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje</td><td colspan="2">Mostrar que comprenden el concepto de azar:
● Utilizando probabilidades para describir el comportamiento azaroso.
● Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.</td></tr>
<tr><td>Habilidad</td><td colspan="2">Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad y determinando sus limitaciones (OA k).
Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y validez de estas (OA l).
Transitar entre los distintos niveles de representación de funciones (OA m).
Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos (OA n)</td></tr>
</table>

Actitud	Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social (OA E). Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información, dando crédito al trabajo de otros y respetando la propiedad y la privacidad de las personas (OA F).			
Momentos	Actividades de Aprendizaje	Intervención Docente	Recursos	Tiempo
Inicio	Situación problema: Fabián y Marcela, se encuentran observando lo que ocurre con los partidos de Voleibol dentro de la liga, si el equipo favorito de voleibol “club linares” tiene que jugar 4 partidos para clasificar y no hay posibilidades de	El/la docente inicia la clase saludando y presentando el objetivo de clase, posteriormente explica las condiciones de la clase y entrega la guía a cada uno de los estudiantes. Una vez que todos los estudiantes reciben la actividad se le entregan las instrucciones para que comiencen a desarrollar la guía. Enfatizando en que se darán 5 min para que estos intenten realizarlo de manera individual, próximamente en grupos de 3 para finalizar con una discusión por grupo curso.	Pizarra. Plumón. Cuaderno. Lápices. Guía correspondiente a clase 5 con el problema.	5 min

	empatar en ninguno de los partidos a realizar. 1.Si para ganar la liga, el equipo necesita ganar al menos 2 partidos, ¿cuál es la posibilidad de que gane? 2.Si aumenta el número de jugadores ¿incrementa la posibilidad de clasificar? 3.El orden de los eventos ¿es relevante dentro de la liga en	Se les da un tiempo para que estos lean el problema y se le pedirá a uno de los estudiantes que lea el problema en voz alta, y se preguntan si existen dudas respecto a la comprensión de este. Para finalmente comenzar con el trabajo individual.		

Desarrollo		os/as estudiantes comienzan a trabajar de forma individual (5 min). El docente comienza a pasearse por la sala de clases resolviendo dudas respecto al enunciado del problema, procurando no dar respuesta o indicios de esta a los estudiantes. Una vez transcurridos los 5 minutos, el docente le da la orden a los estudiantes que se reúnan en grupos de 3 para discutir las respuestas a las que lograron llegar, o si no han logrado terminar comiencen a discutir estrategias de resolución junto a sus compañeros (10 min). Pasado estos minutos el docente escoge estratégicamente a 6 estudiantes que pasen a resolver una de las preguntas, elige uno que tenga la respuesta correcta y otro errónea. con la finalidad de comenzar una discusión junto a los estudiantes. Se les pide que expliquen	PPT, pizarra, guía y cámara.	30 min

		cada una de las resoluciones y se les pregunta a los compañeros si están de acuerdo con las respuestas dadas.		
Cierre	Se les solicita a los/as estudiantes, que mencionen estrategias realizadas y que observen el proceso de transcripción.	El profesor, valida las respuestas de los estudiantes, resuelve dudas y re institucionaliza el contenido de probabilidad clásica. Se les retira la guía de trabajo y se despiden.	PPT y pizarra	5 min

6.3 Experimentación de la clase.

En la experimentación de clase tuvo una duración de 40 minutos, asistiendo 25 estudiantes de diferentes cursos del nivel de primero medio, llevándose a cabo los tres tiempos presupuestados para la sesión en el que los/as estudiantes tuvieron la posibilidad de trabajar de manera individual, grupal y luego generar una discusión como grupo curso. Al finalizarla clase se realiza la validación e institucionalización del problema y los contenidos llevados a cabo.

El docente comenzó la clase saludando a los/as estudiantes, y pidiendo que por favor dejen desocupadas las últimas 3 filas debido a la grabación de la clase y presenta el objetivo de esta. Luego continúa explicando que será una clase grabada debido a que se necesita registro para el proyecto de tesis de los/as profesores/as presentes. Continúa entregando la guía con el problema no rutinario a los/as estudiantes, para luego explicar que está se realizará primeramente de forma individual, donde los/as estudiantes tendrán 5 minutos para trabajar de esta manera, para luego juntarse en grupos de 3 y trabajar en el problema de forma grupal durante 10 min, para finalmente proceder a hacer un plenario de las respuestas dadas y generar una discusión. Se le entrega 1 min a los/as estudiantes para que lean el problema. Una vez entregado el minuto el docente le pide a uno de los/as estudiantes que lea el problema para comenzar a responder dudas sobre la redacción de este. Observando que inicialmente no existieron dudas respecto a la comprensión de los enunciados del problema.

El docente menciona a sus estudiantes que tienen 5 min para trabajar de manera silenciosa e individual en el problema entregado, observando a algunos/as con teléfono en la mano a los cuales se les llama la atención para que lo guarden. Los/as estudiantes constantemente piden validación al docente a cargo, realizando preguntas del tipo: ¿profe voy bien? ¿Hay que hacer esto? ¿Profe esto está bien?

Observando que el docente en todo momento evita validar a los/as estudiantes mediante las siguientes frases: recuerden lo que vimos en las clases anteriores, vean como les sirve para resolver este tipo de ejercicios.

Pasado los 5 min de trabajo individual, se observa que la mayoría de los/as estudiantes logró terminar el problema en el tiempo estimado. Así, el profesor da la orden de que se reúnan con los/as compañeros de puesto y traten de resolver la actividad vista si aún no la terminan y en caso contrario comiencen a discutir sus respuestas. En este momento en el que los/as estudiantes comienzan la discusión y a complementar sus respuestas entre pares durante 10 min, la gran mayoría terminó antes del tiempo, pero por respeto a aquellos que no, se mantuvo el tiempo.

Una vez pasado el tiempo determinado, el docente elige de manera estratégica a 6 estudiantes siendo 2 para cada pregunta (uno con la respuesta correcta y otro no tan correcta). Solicitando que pasen a la pizarra, aquellos/as que deben responder la pregunta 1, luego los/as que deben responder la pregunta 2 y finalmente los/as de la pregunta 3. Para esta última fue complejo escoger a 2 estudiantes, debido a que ninguno/a de los/as presentes tuvo respuesta errónea. Una vez que todos/as los/as estudiantes respondieron adelante, se les solicita que se sienten para que el profesor comenzara a preguntar y, a su vez, para ir confrontando las ideas y estrategias de los/as estudiantes:

Profesor: ¿Quién está de acuerdo con la respuesta número uno de la pregunta 1?

Un grupo de estudiantes levantó la mano, por lo que el docente solicitó a aquella estudiante que pasó adelante a responder, que explicara la estrategia utilizada.

La estudiante explica el desarrollo de su estrategia, comentando que utilizó el diagrama de árbol y luego contó los casos, llegando así a la respuesta esperada.

El profesor pregunta si todos/as están de acuerdo y los/as estudiantes responden “sí”.

Profesor: ¿Quién está de acuerdo con la respuesta dos de la pregunta 1?

Un grupo de estudiantes levantó la mano, por lo que el docente solicitó a aquel estudiante que pasó adelante a responder, que explicara la estrategia utilizada.

El estudiante, explica que la probabilidad correspondía a 0,5 debido a que, ocurre lo mismo que con el caso de las monedas.

El profesor les pregunta si observaron el error que hubo. Algunos/as estudiantes se percatan de aquello. Solicitando si alguno/a puede mencionar él porque no era correcto, el cual menciona que no se les preguntaba lo mismo, puesto que, en el caso de las monedas solo se estimaba a lo que hacía referencia cara y sello, pero no a un evento particular.

Profesor: ¿Quién está de acuerdo con la respuesta número uno de la pregunta 2?

Un grupo de estudiantes levantó la mano, por lo que el docente solicitó a aquel estudiante que pasó adelante a responder, que explicara la estrategia utilizada.

El estudiante explica el desarrollo de su estrategia, comentando que al agregar de forma proporcional la cantidad de jugadores no afecta, pero si se agregan más en un equipo que en el otro esto sí afectaría.

De esta manera, el docente comenta que aquellos/as que estén de acuerdo, levanten la mano, a lo que la mayor parte del curso la levanta.

Profesor: ¿Quién está de acuerdo con la respuesta número dos de la pregunta 2?

El estudiante en ese momento se levanta de su puesto y menciona que se había confundido, a lo que borra la respuesta y la cambia. Mencionando el docente, que tomando en consideración la respuesta inicial, hubiera estado correcta si el aumento de jugadores hubiera sido de manera desproporcionada, si sería un factor, pero como no ocurrió, esto no afecta.

Profesor: ¿Quién está de acuerdo con la respuesta número uno de la pregunta 3?

Un grupo de estudiantes levantó la mano, por lo que el docente solicitó a aquel estudiante que pasó adelante a responder, que explicara la estrategia utilizada.

El estudiante explica el desarrollo de su estrategia, comentando que no importa el orden, puesto que es lo mismo ganar-ganar-perder-perder (GGPP) que ganar-perder-ganar-perder (GPGP).

El docente comenta que aquellos/as que estén de acuerdo, levanten la mano, a lo que la mayor parte del curso la levanta.

Profesor: ¿Quién está de acuerdo con la respuesta número dos de la pregunta 3?

Un grupo de estudiantes levantó la mano, por lo que el docente solicitó a aquel estudiante que pasó adelante a responder, que explicara la estrategia utilizada.

El estudiante explica el desarrollo de su estrategia comentando que esto afectaría, si se estipula que existe un partido en el que tiene que ganar sí o sí.

El docente comenta que levanten la mano, a lo que la mayor parte del curso la levanta. Explicando que esto es correcto, pero que en este caso se solicitaba que ganara de forma general, y no en un partido de la liga, a lo que todos/as están de acuerdo, por lo que se observa el error y se comprende.

Para finalizar, el profesor pregunta si existe alguna duda de la actividad realizada a lo que un estudiante levanta la mano y pregunta

¿Por qué la pregunta 1 da $\frac{9}{16}$?

El profesor responde que, si se realiza el diagrama de árbol, y contamos los casos en los cuales se ganan al menos 2 partidos nos darán 9 y el caso total de posibilidades eran 16.

El estudiante comprendió y asintió con la cabeza.

Finalmente, el profesor, retira las guías de trabajo, recuerda que la próxima clase debían traer los justificativos médicos a aquellos que hayan faltado se despide de los estudiantes y les agradeció por la participación.

6.4 Discusión de la clase

Cabe destacar que, dentro de la metodología de estudio de clases, se encuentran las fases de preparación y la de revisión, siendo esta última la que permite al docente llevar a cabo la clase mencionada con anterioridad y comentar de esta misma, tales como, la cantidad de estudiantes, propósito, impresiones, entre otras.

De esta manera, la observación de clase fue realizada por dos integrantes del grupo de Investigación, además, fue presentada y comentada como una reseña ante compañeros/as del mismo curso de seminario y a la Dra. María Soledad Montoya.

Al momento de ser presentada la reseña, se realizó un momento de revisión y discusión en el que se compartieron, sugerencias, observaciones y opiniones de esta misma sobre el trabajo presentado. En el cual, se comenta lo ocurrido en la clase y los sucesos que causaron un mayor revuelo dentro de esta. Así, se puede evidenciar tres áreas que fueron focos relevantes de la discusión, en el cual se dan algunas soluciones para mejorar la clase realizada.

Es así, que se realizó la revisión de tres focos importantes de la discusión, siendo estos disciplinar, pedagógico y didáctico llegando a concluir en mejoras y observaciones de la propia clase, las que son detalladas a continuación.

En el ámbito disciplinar:

- Los/as alumnos/as presentes lograron desarrollar el problema utilizando distintas representaciones sin mayor intervención del docente.
- La clase al ser enfatizada en un objeto matemático específico del concepto de la probabilidad clásica, a los/as estudiantes les falta formalización al respecto a la utilización de registro.

En el ámbito pedagógico:

- Se tiene un buen manejo de la pizarra, espacios y del aula.
- Hubo una muy buena participación y autonomía de los/as estudiantes la cual fue beneficiosa para los espacios de opiniones, inquietudes y aportes de estos mismos.
- Error en la validación de una respuesta solicitada en el problema no rutinario.

En el ámbito didáctico:

- Las respuestas erróneas que entregaron los/as estudiantes se utilizaron para generar nuevas discusiones.

Además, es importante destacar las observaciones que fueron presentadas en la discusión, las cuales apuntan a los/as estudiantes, tales como la constante validación del conocimiento, vergüenza de exponer el error en público, equivocación de pasar de un registro de representación semiótica a otro y la equivocación en comparar un evento dependiente y un evento independiente.

Cabe destacar, que la validación constante del conocimiento de los/as estudiantes y la vergüenza que tienen, se relacionan en la autoestima del/la estudiante, debido al tipo de ambiente o clima escolar dentro y fuera del aula. Tal como menciona Gonzales y Arratia (2001):

> "El mantenimiento de la autoestima positiva depende de la exitosa integración de las imágenes de sí mismo tanto positivas como negativas, es decir, de sentirse bueno en algunos momentos y malo en otros, pero por encima de esto, el establecimiento de sentirse valioso es lo que va a hacer más o menos impermeable a los errores, a las fallas, a las frustraciones y a la crítica externa". (p.4)

De acuerdo a lo anterior, es importante que las personas aprendan y acepten los errores, para así generar instancias de aprendizaje y autoconocimiento.

Además, describiendo la equivocación de un registro semiótico a otro, esta se visualizó dentro de las respuestas de los/as estudiantes que fueron escritos en la pizarra, tanto por la dificultad del problema no rutinario. Teniendo que según Duval (2004)

> "Las observaciones que se han podido hacer en el aprendizaje de las matemáticas: se ha probado que cambiar la forma de una representación es, para muchos alumnos en los diferentes niveles de enseñanza, una operación difícil e incluso en ocasiones imposible" (p.7)

Por último, la equivocación en la comparación de un evento dependiente e independiente, se puede decir que, esto puede ocurrir debido a poca comprensión de que los eventos son subconjuntos del espacio muestral.

6.5 Reflexión sobre el proceso de Estudio de Clases y aprendizajes profesionales.

Dentro de la siguiente reflexión sobre el proceso del estudio de clases, se desarrollará desde dos visiones, una será bajo la de profesor implementador y la segunda del equipo de seminario de titulación. De esta manera, se observará el proceso llevado a cabo, desde lo más particular a lo menos particular.

Observando el desarrollo y avance del estudio de clase, el docente implementador, se percató que estaba ansioso, puesto que los/as estudiantes no habían trabajado con problemas de esta índole, por lo cual, no sabía de qué forma estos/as los/as interpretarían o de qué manera podrían abordar las estrategias. A su vez, el taller al ser constituido por estudiantes de distintos cursos y conocerlos de manera general, le preocupaba el hecho del comportamiento ante una cámara, puesto que pueden reaccionar de forma esquiva o no dar sus puntos de vistas. Por lo que, se puede observar una posible dificultad, puesto que existiría un quiebre, con respecto al diseño de la secuencia, ya que no se podría institucionalizar por una última vez.

Si bien había una preocupación, también existía una parte en la cual tenía confianza, ya que los/as alumnos/as participaban de manera constante en clases, en el cual fueron capaces de responder preguntas o realizar consultas correspondientes, según lo que consideran pertinente. Así, existió una constante construcción del aprendizaje, en el cual se comprendía el objeto matemático como tal.

Al inicio de la clase, se entregaron las instrucciones, estableciendo que no se podía usar ningún tipo de dispositivo electrónico, puesto que no era necesario para responder el problema. Por lo cual, solo se solicitó que se siguieran las instrucciones trabajando de manera individual, luego en tríos y como plenario, que entregarán sus conclusiones finales, para poder observar aquello que pensaron y comprendieron.

Si bien existieron nervios y preocupaciones, la clase se pudo llevar a cabo de forma habitual, resultando lo esperado, en la cual existió la participación que se acostumbraba a tener, respondiendo cada una de las preguntas realizada dentro de la guía, que también, se observó que comprendieron de forma autónoma el problema, para luego poder expresarlas con sus compañeros/as. Así, se presentó un diálogo fluido, logrando reflexionar con los eventos y lo que ocurría con la repetición de este, formando un grato clima de aula que favorece la discusión. De esta manera, se logró que los/as estudiantes llegaran a responder las preguntas planteadas, en el cual se utilizaron algunas de las estrategias presupuestadas y algunos errores de cálculo.

En ese sentido, relacionado con el desempeño, se logró propiciar un ambiente de discusión que ayudó a la participación de los/as estudiantes, puesto que todos/as estuvieron dispuestos/as a aportar y dejar cada una de sus impresiones o estrategias. Esto se observó, ya que discutieron y fundamentaron sus puntos de vistas, por lo cual fue acertado el trato con cada uno/a de los/as estudiantes.

Así todos/as pudieron comprender y resolver errores o falencias obtenidas, en el cual se pudo utilizar el error realizado por algunos/as para contrastar, ya que, al final de la clase se nota la satisfacción de algunos/as por haber comprendido el problema, y cómo éste estaba asociado al contenido que se formalizó.

Así, se debe mencionar que el estudio de clases, es aquella metodología, que incentiva que los/as estudiantes estén de manera activa participando dentro las clases, por lo cual la parte fundamental es la interacción del objeto matemático con ellos/as, en el cual puedan mostrar sus estrategias y fundamentarlas, de tal manera que se desarrollen habilidades y, a su vez, existe un proceso autónomo que ayude a la construcción del conocimiento, por medio de los problemas, en el cual el clima de aula en el cual se desarrolla las discusiones y reflexiones realizadas, que permita que los/as estudiantes puedan sustentar, modificar o perfeccionar las respuestas que consideraron pertinente en uno de los momentos.

De esta manera, se pueden resaltar dos momentos de las clases, el primero es, con respecto a la equivocación de la respuesta de la estudiante de la pregunta 1, la cual se validó por el docente sin haber corroborado la respuesta. El segundo, es la participación y el trabajo realizado por los/as estudiantes, puesto que se observó un trabajo constante por parte de ellos/as en el cual intentaban comprender la situación, de tal manera que podían responder dudas o argumentar su posición, sintiéndose seguros con lo que sabían.

Para finalizar, la sesión del estudio de clase al docente implementador se cuestionó aquello lo que el rol docente puede tomar dentro del aula, en el cual con la preparación que existe dentro del estudio, es relevante que el docente no intervenga dentro de la reflexión del problema, puesto que la validación debe existir entre los/as mismos/as estudiantes, para que exista un aprendizaje significativo de la actividad, en el cual se promueva la tolerancia entre sus pares.

Es así, que la metodología del estudio de clase, permite que los/as docentes comprendan el trabajo colaborativo, la reflexión constante de sus clases, las estrategias a realizar y, también en desconstruir las creencias que se desarrollan dentro de la formación, percibiendo un trabajo interesante que ayuda en el crecimiento profesional de los/as profesores/as, puesto que ayuda a mejorar las metodologías de clases y el clima del aula.

Grupo de seminaristas

Al iniciar la discusión respecto al proceso del estudio de clases, como grupo, se logró reconocer 4 focos importantes. El primer elemento fue un error masivo que tuvieron los/as estudiantes que incluso arrastró al docente. Esta situación permitió entender la importancia de los análisis a priori y planificación de las clases implementadas, debido a que se visualizó este tipo de errores, por otro lado, es importante comprender el inicio de este tipo de errores, debido a que, es fundamental entender el pensar del estudiante, tal como indica (Gregori, Orús y Pitarch, s.f) “El análisis apriori del cuestionario nos permite obtener la caracterización de cada una de las cuestiones, definiendo distintos criterios, según los tipos de operaciones que deben realizar los alumnos al responder al cuestionario” (p.20)

En segundo lugar, se logró observar que un estudiante mostró temor o vergüenza al momento de exponer un resultado erróneo al frente del grupo curso, esta situación es compleja, debido a que el/la estudiante no acostumbra a aprender de sus errores, sino que lo considera como un fracaso. Esto sucede debido a la falta de motivación en los/as estudiantes a la hora de cometer errores, donde no se aprovechan estas instancias de aprendizaje de manera positiva tal como menciona Benito (2008).

> La relación entre profesor-alumno, no es solo una fuente de satisfacción del profesor en su trabajo, sino que, para el alumno, puede constituir una importante fuente de apoyo y motivación, y, por tanto, ejercer cierta influencia en su rendimiento académico (p. 12).

En tercer lugar, se notó que los/as estudiantes necesitan una constante validación por parte del docente, esto debido a la metodología en la que acostumbrar trabajar en matemáticas, como lo es el conductismo, debido a la inseguridad académica.

Por último, se observó que los/as estudiantes al responder en la pizarra utilizaron diferentes tipos de representaciones, tales como el diagrama de árbol siendo de manera pictórica y al utilizar la regla de Laplace hace referencia a la manera simbólica.

Dentro del grupo existieron diversas discusiones respecto a la implementación y planificación de esta secuencia, debido a que se debió investigar respecto al objeto matemático, para comprender el contenido de manera más profunda. Por otro lado, debemos comprender que dentro de este proceso el/la docente es un mediador el cual busca que el estudiante construya su propio aprendizaje y así que este sea significativo, ya que, durante la práctica profesional se crea la creencia de que el/la docente debe responder y validar al estudiante en todo momento para que este sienta la seguridad de lo que está haciendo.

Respecto a los aprendizajes profesionales obtenidos se logra comprender la importancia de que el/la estudiante tenga la oportunidad de equivocarse y aprender de estos errores, sin que el/la docente entre a corregir estos, sin poner a los/as estudiantes a discutir sobre este.

Por otro lado, es importante darle la oportunidad al estudiante de explorar en el contenido de manera autónoma y de forma colaborativa, ya que esto permite que logren un aprendizaje significativo y sean capaces de comprender y relacionar el contenido con la vida diaria. Además, se comprendió la importancia de que el/la docente sea un mediador con el contenido y no imponer una estrategia de resolución a los problemas, debido a que, el/la estudiante de esta manera desarrolla el pensamiento matemático y plantea estrategias de resolución y representaciones que resultan significativas para él/ella.

También, es importante destacar que, como grupo, se debe reconocer la importancia de trabajar en equipo al poder considerar distintas opiniones en la propuesta de aprendizaje para preparar la secuencia de enseñanza, tanto en el ámbito de los aprendizajes previos y los tipos de representaciones que tienen adquiridos los/as estudiantes en el transcurso escolar respecto al concepto de probabilidad clásica y sus propiedades.

Además, respecto a la metodología del estudio de clases y la secuencia didáctica en la que se trabajó, se logró detectar que el/la docente es quien menos interviene, si no que el protagonista del aprendizaje es el/la propio/a estudiante, el que hizo indagar en distintos documentos referido a esto, logrando así la adquisición de la importancia de cuestionar el rol como docente para mejorar y entregar la mejor enseñanza para los/as alumnos/as a través de un proceso constructivista cognitivo.

Es importante recalcar en la secuencia de implementación se dio el espacio correspondiente al estudiante, considerando la experiencia previa que tenían, respetando los ritmos de aprendizaje y validando colectivamente, mostrando la consideración por el aprendizaje de estos/as, tal como indica el perfil de egreso (2016) de la carrera de Pedagogía en matemática "Analiza, diseña e interviene propuestas didácticas adaptadas a las condiciones de contexto de sus estudiantes respetando ritmos de aprendizaje".

Además, con la información recopilada del estudio de clases y la secuencia didáctica, se logra reflexionar sobre nuestras propias prácticas, ya que, hay que darle una metodología sustentada, que no únicamente se centre en realizar un proceso, sino en examinar sus fases y llevar a cabo modificaciones para una mejor utilización. Es decir, si logra mirar, tanto el pensar y elaborar una educación como un ambiente propicio para el aprendizaje, que todos/as y cada uno/a de los/as estudiantes aprendan y, al final, la responsabilidad profesional, vienen a ser, una manifestación del compromiso con el aprendizaje de nuestros/as propios/as alumnos/as, tomando como alusión los 4 dominios del Marco para la Buena Educación (Universidad Alberto Hurtado, 2016).

Es fundamental reflexionar sobre el proceso del análisis de clases bajo diversas ópticas, una es que nos posibilita comprender lo fundamental que es el trabajo colaborativo y los aportes que cada perspectiva tienen la posibilidad de crear, lo importante que resulta superar creencias y usar metodologías que tengan interacción con las necesidades de todo el mundo y nuestros/as propios/as alumnos/as.

Ahora bien, el aprendizaje profesional obtenido referido al análisis de clases, permitió posicionar al alumno/a como actor de su propio aprendizaje, debido a que, resuelve una situación a partir de sus propias habilidades y, después, se dirige al encuentro de las respuestas de otros/as, validando cada iniciativa y creando en general conclusiones que se nutren de cada saber, y de esta forma, ejemplificando, emergiendo diferentes tipos de representaciones, más allá de lo matemático, las cuales además fueron validadas por el/la docente implementador, quien toma un papel de facilitador del aprendizaje en conjunto con el curso correspondiente.

De esta forma se confirma que la resolución de problemas es clave para el desarrollo del pensamiento, tan bien expresada en el instante del trabajo personal, debido a que como comprende la enseñanza se contextualiza con solucionar situaciones de la vida cotidiana, las que necesitan de un individuo capaz de ubicarse con sus herramientas y ofrecer una solución que por lo menos responda al caso parcialmente, debido a que la sociedad de la cual se forma por la incertidumbre y el cambio constante, de ahí que nuestras propias tácticas se caracterizan por ser adaptativas. Otro aspecto por resaltar es el componente de validación de las diversas respuestas e interrogantes que tienen la posibilidad de entablar, dando legitimidad al saber que se tiene y que se puede edificar.

Por último, otorga como profesores/a la posibilidad de retroalimentar las prácticas docentes, potenciando con ello la función de producir y entregar conocimientos. Cabe destacar que, en las instituciones educativas, el/la docente toma más bien un papel de transmisor de información y no de constructor de aprendizajes, siendo los/as alumnas los/as protagonistas, por lo cual esta metodología se puede llevar al aula y compartirla con futuros/as u otros/as docentes.

CAPÍTULO VII

ANÁLISIS DE RESULTADOS

7.1 Análisis Posteriori de las situaciones de enseñanza y aprendizaje claves

Respecto a los análisis a posteriori, se obtuvieron respuestas de un promedio de 24 estudiantes, de un total de 33, los/as cuales no todos/as presentan desarrollos en su guía de clases. Se precisará en cada análisis clave la cantidad de estudiantes que lograron desarrollar las actividades y se evidenciará la categorización de cada una de estas.

Como ha sido mostrado anteriormente el análisis a priori y el análisis del estudio de clases, se clasificaron y analizaron las distintas estrategias utilizadas por los/as estudiantes durante el desarrollo de las actividades en las sesiones 2, 4 y 5.

Es por esto, que la clasificación de las estrategias y respuestas de los problemas se realizan según la teoría de situaciones didácticas, recordando que esta tiene distintas fases que son acción, formulación, validación e institucionalización. De esta manera en cada categorización de respuesta se entregan diferentes formas las cuales presenta cada una su descripción. Cabe destacar que, durante cada fase de la implementación se observó el comportamiento de los/as estudiantes con relación a los indicadores que permitieron establecer tanto las debilidades como las fortalezas que presentaron a través de esta intervención, así, se logró establecer que:

Análisis aposteriori de situación clave 1, clase 2: se presenta la fase de acción y formulación.

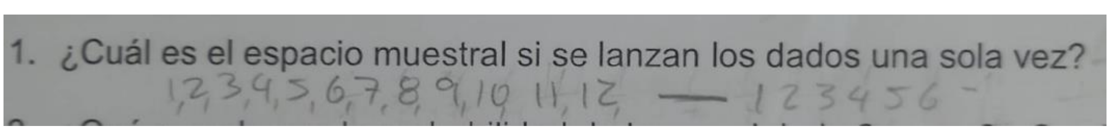
Se pretendía que los/as estudiantes resolvieran una guía de experimentos aleatorios el que hace referencia al concepto de espacio muestral y a los eventos favorables de un experimento, se observó que los objetivos de esta se lograron, ya que los/as estudiantes respondieron de acuerdo a lo que recordaban. Sin embargo, se presentó el caso de quienes por responder de manera correcta hicieron caso omiso a las instrucciones y utilizaron ayuda como el celular y acudieron a aquellos compañeros/as que suponían saber.

Además, en la fase de formulación se espera que los/as estudiantes busquen una estrategia general y un vocabulario con el que puedan convencer a sus compañeros/as de su razonamiento. Esto se espera lograr reubicando el dato corrupto, de tal manera que se sientan empujados a determinar condiciones generales bajo las cuales pueden o no resolver un problema.

En este sentido, se puede afirmar que la mayoría de los/as estudiantes cumplieron con el objetivo de la situación de acción y formulación dado que se concentran en la actividad buscando distintas estrategias de respuestas. En este caso, se evidencia en la guía de la clase 2 número 1 de la secuencia didáctica.

En la pregunta uno 7 de 25 los/as estudiantes no respondieron a la interrogante, sin embargo, la otra parte de estos/as utilizaron dos estrategias de respuestas distintas.

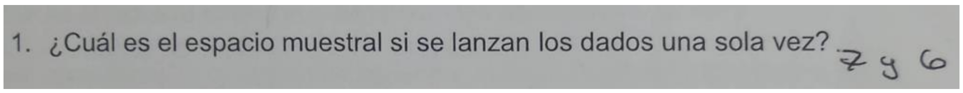
Forma A:

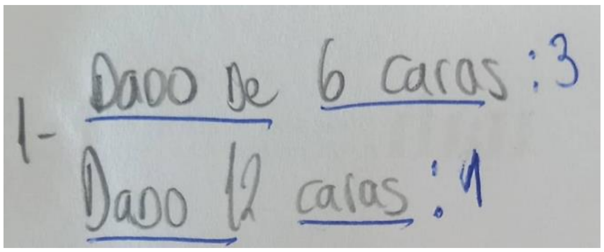

1. ¿Cuál es el espacio muestral si se lanzan los dados una sola vez?
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 11,12 —— 123456 -

Fuente: Forma A de respuesta de los/as estudiantes

Se logra visualizar que 10 de 25 estudiantes comprenden bien el concepto de espacio muestral de un experimento aleatorio, debido a que se logró identificar la cantidad de casos totales o caras de cada dado, utilizando lenguaje numérico y registro numérico.

Forma B:


1. ¿Cuál es el espacio muestral si se lanzan los dados una sola vez? 7 y 6

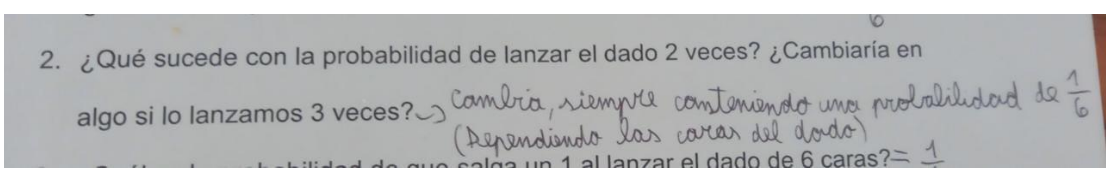

1- Dado De 6 caras: 3
Dado 12 caras: 9

Fuente: Forma B de respuesta de los/as estudiantes

En este caso, se hace alusión que 7 de 25 de los/as estudiantes respondieron en base a la representación concreta, debido a que, al lanzar una vez el dado logró obtener el número de la cara, utilizando un registro escrito en lenguaje natural y numérico.

De la pregunta dos 6 estudiantes dejaron la interrogante en blanco, es decir, esta no estaba respondida. Sin embargo, el resto de los/as alumnos/as respondieron de dos formas diferentes.

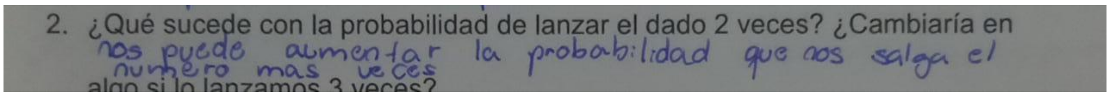
Forma A:


2. ¿Qué sucede con la probabilidad de lanzar el dado 2 veces? ¿Cambiaría en algo si lo lanzamos 3 veces? Cambia, siempre conteniendo una probabilidad de $\frac{1}{6}$ (Dependiendo las caras del dado)
salga un 1 al lanzar el dado de 6 caras?= 1

Fuente: Forma A de respuesta de los/as estudiantes

Se observa que 11 de 25 estudiantes indican que la probabilidad se mantiene independiente de cuantas veces se lanza el dado. Es decir, que se hace alusión a que, si se repite muchas veces un mismo experimento, la frecuencia de que suceda un cierto evento tiende a ser una constante, respondiendo en lenguaje natural y registro escrito.

Forma B:

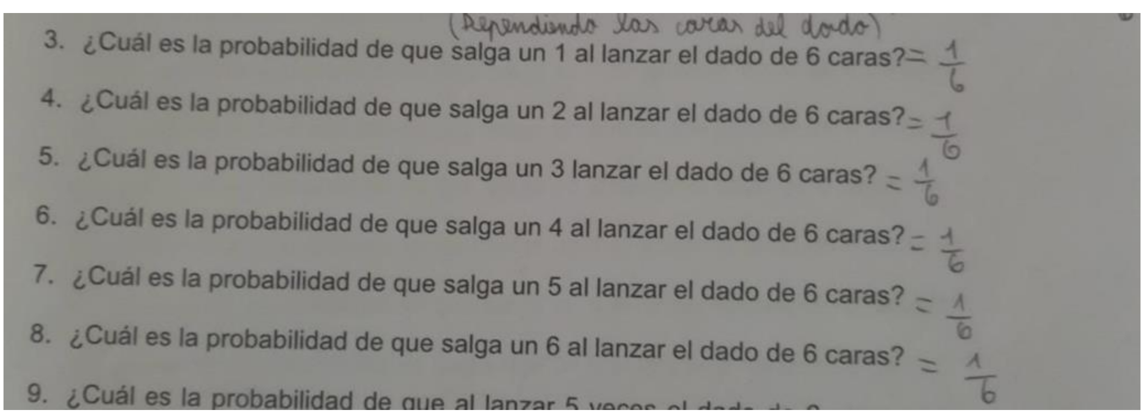

2. ¿Qué sucede con la probabilidad de lanzar el dado 2 veces? ¿Cambiaría en algo si lo lanzamos 3 veces?
nos puede aumentar la probabilidad que nos salga el numero mas veces

Fuente: Forma B de respuesta de los/as estudiantes

Una cantidad de 7 de 25 estudiantes respondieron que la probabilidad aumenta debido a que hay más posibilidades de obtener más casos favorables en específico, pero la cantidad de casos totales no cambia. Haciendo alusión a un error al confundir los casos totales con los casos favorables, ocupando lenguaje natural y representación escrita.

De la pregunta número 3 a la 8, 5 de 25 estudiantes no respondieron, entregando la guía en blanco. Sin embargo, el resto respondió de dos formas distintas.

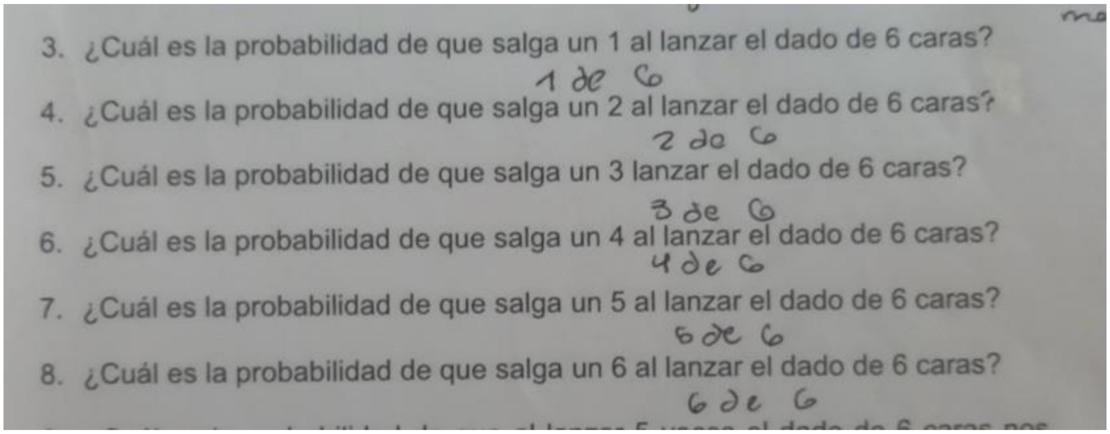
Forma A:


(Dependiendo las caras del dado)
3. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 1 al lanzar el dado de 6 caras? $= \frac{1}{6}$
4. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 2 al lanzar el dado de 6 caras? $= \frac{1}{6}$
5. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 3 lanzar el dado de 6 caras? $= \frac{1}{6}$
6. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 4 al lanzar el dado de 6 caras? $= \frac{1}{6}$
7. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 5 al lanzar el dado de 6 caras? $= \frac{1}{6}$
8. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 6 al lanzar el dado de 6 caras? $= \frac{1}{6}$
9. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 5 veces

Fuente: Forma A de respuesta de los/as estudiantes

Una cantidad de 12 estudiantes utilizaron implícitamente la regla de Laplace respecto a la razón de que los casos favorables es a la cantidad de casos totales, respondiendo de forma numérica con registro escrito.

Forma B:

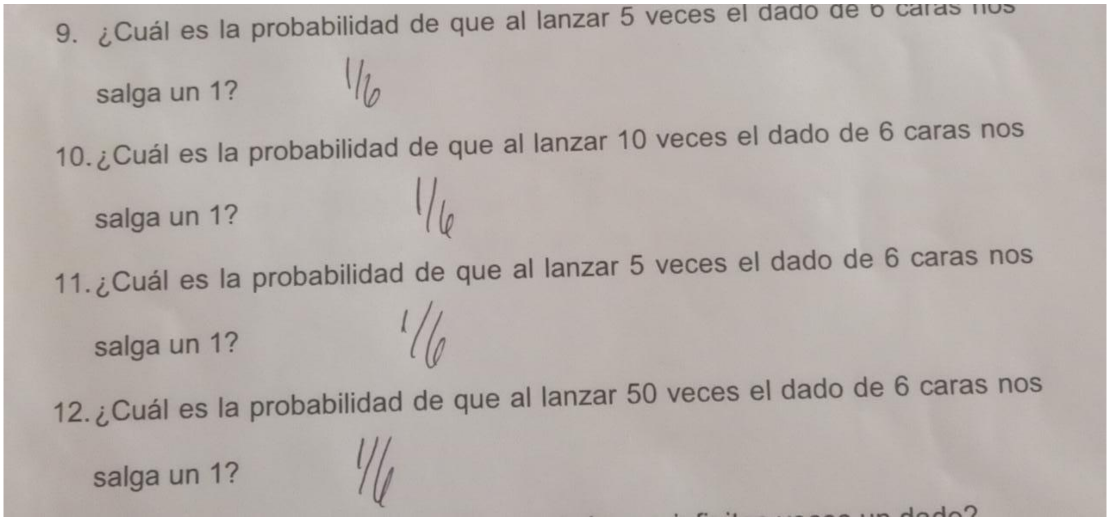

3. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 1 al lanzar el dado de 6 caras?
1 de 6
4. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 2 al lanzar el dado de 6 caras?
2 de 6
5. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 3 lanzar el dado de 6 caras?
3 de 6
6. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 4 al lanzar el dado de 6 caras?
4 de 6
7. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 5 al lanzar el dado de 6 caras?
5 de 6
8. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 6 al lanzar el dado de 6 caras?
6 de 6

Fuente: Forma B de respuesta de los/as estudiantes

La cantidad de 8 estudiantes, hicieron referencia al número de la cara del dado, como a la cantidad de casos favorables, evidenciando que no se comprende el enunciado, respondiendo de manera numérica con registro escrito.

De la pregunta número 9 a la 11, 10 estudiantes dejaron preguntas sin responder, sin embargo, el resto respondió de dos formas distintas.

Forma A:

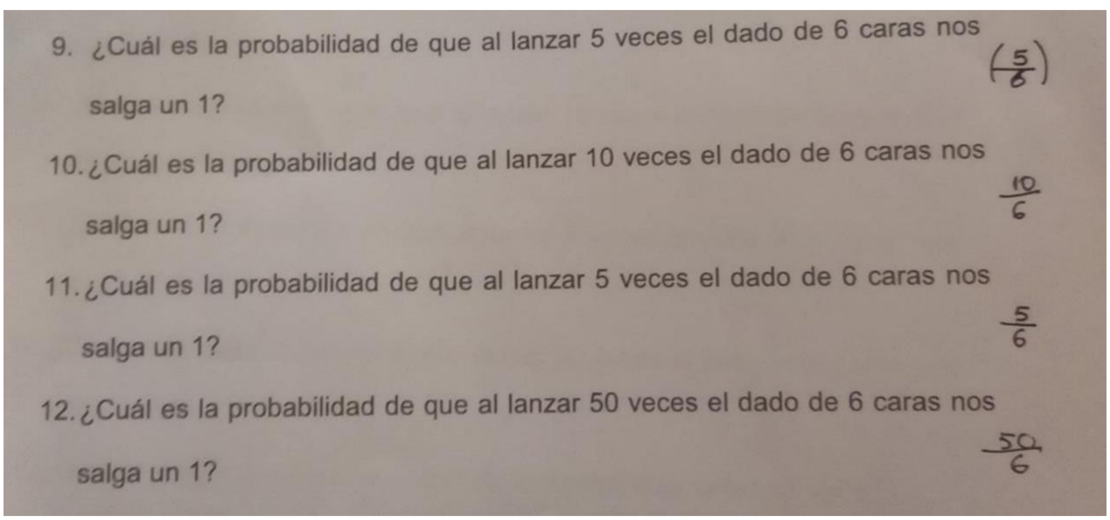


9. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 5 veces el dado de 6 caras nos salga un 1? 1/6
10. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 10 veces el dado de 6 caras nos salga un 1? 1/6
11. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 5 veces el dado de 6 caras nos salga un 1? 1/6
12. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 50 veces el dado de 6 caras nos salga un 1? 1/6

Fuente: Forma A de respuesta de los/as estudiantes

Según 10 de 25 respuestas de los/as estudiantes, esto hace alusión a que se utiliza la regla de Laplace de forma implícita, relacionado con la razón de que casos favorables es a los casos totales o posibles, ocupando lenguaje numérico y representación escrita.

Forma B:

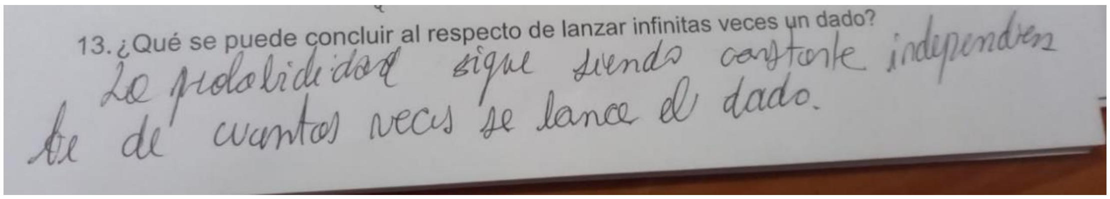


9. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 5 veces el dado de 6 caras nos salga un 1? $\left(\frac{5}{6}\right)$
10. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 10 veces el dado de 6 caras nos salga un 1? $\frac{10}{6}$
11. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 5 veces el dado de 6 caras nos salga un 1? $\frac{5}{6}$
12. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 50 veces el dado de 6 caras nos salga un 1? $\frac{50}{6}$

Fuente: Forma B de respuesta de los/as estudiantes

La cantidad de 5 estudiantes que respondieron, hacen alusión al error de confundir la cantidad de casos favorables por el número de caras del evento pedido, ocupando lenguaje numérico y representación escrita.

Finalmente, la pregunta número 12, una cantidad de 10 estudiantes no respondieron, y el resto hace alusión a la ley de los grandes números, tal como muestra la siguiente imagen, utilizando



Fuente: respuesta de los/as estudiantes

Análisis aposteriori de situación clave 2, clase 4: se presenta la fase de validación e institucionalización.

En la fase de situación de validación existió disposición e interés de la mayoría de los/as estudiantes, permitiéndoles ser autónomos frente a la forma de expresar sus conocimientos.

En relación a los resultados obtenidos en esta etapa en el análisis e interpretación de perspectivas. La situación de validación posibilitó que los/as estudiantes argumentaran la forma de cómo llegaron a responder a la situación problema. Es en esta instancia se evidenció si el/la estudiante movilizó el saber, es decir, si verdaderamente aprendió y esto fue justamente lo que sucedió con los/as estudiantes del grupo experimental. Adicionalmente se puede apreciar cálculos para verificar la cantidad de datos corruptos, aunque no queda claro el objetivo de esto.

Cabe mencionar que la fase de situación de institucionalización se desarrolló en conjunto con los/as estudiantes.

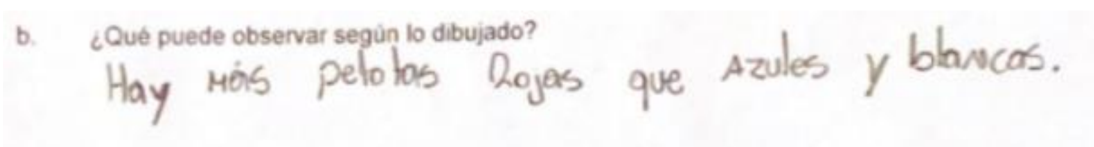
Para la primera pregunta, se puede observar que todos/as los/as estudiantes respondieron de manera pictórica debido a que la pregunta lo solicitaba.

Fuente: respuesta de los/as estudiantes

Así, se evidencia que aquello que cambiaba era el orden de las pelotas, pero se mantenía la idea.

Luego, dentro de la segunda pregunta al igual que en la anterior, debido a lo que se solicitaba, todos/as los/as estudiantes, respondieron por medio del lenguaje verbal. De esta manera, se observaron dos tipos de respuestas, las cuales son las siguientes:

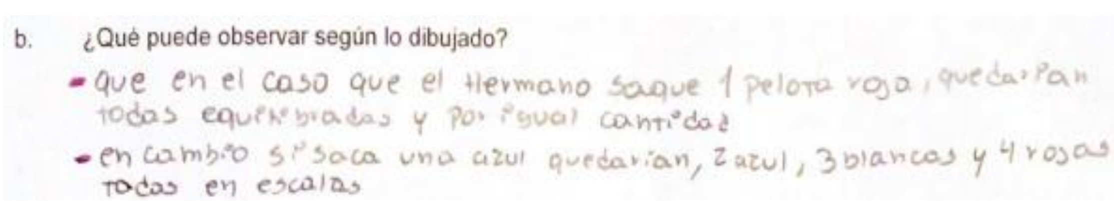
Forma A:



Fuente: Forma A de respuesta de los/as estudiantes

De esta manera, se observa de forma general lo que ocurre con respecto al evento, dejando en evidencia aquello que se plantea. $\frac{13}{21}$ respondió de esta forma o similar, por medio del registro verbal.

Forma B:



Fuente: Forma B de respuesta de los/as estudiantes

En este caso, se observa que los/as estudiantes de manera profunda, describen posibles situaciones futuras de lo que ocurre o puede ocurrir, con respecto a la situación planteada, se observaron 8 de 21 respuestas de este tipo, utilizando un lenguaje natural y representación escrita.

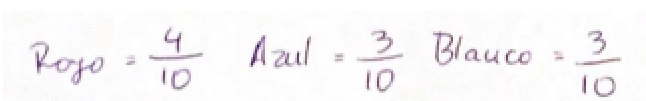
En la tercera pregunta se evidencian dos tipos de respuestas, en el cual se encuentra la numérica y simbólica, de esta manera se observan y categorizan ambas respuestas.

Forma A:

Fuente: Forma A de respuesta de los/as estudiantes

En este caso, se evidencia que los/as estudiantes de manera simbólica y por medio del lenguaje matemático describen el evento, en el cual 6 de 21 fueron respuestas de esta índole, en el cual no se presenta un error como tal.

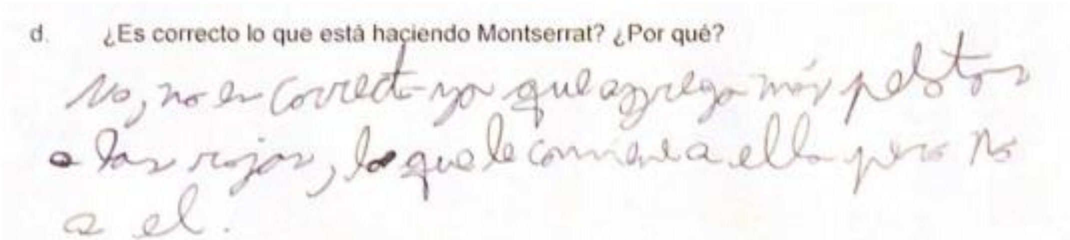
Forma B:



Fuente: Forma B de respuesta de los/as estudiantes

En este caso, se evidencia respuestas de 15 estudiantes de forma numérica y por medio del lenguaje natural anotan el espacio muestral del evento, observando que se comprendió la situación como tal.

En la cuarta pregunta, se observa que los/as estudiantes utilizan el lenguaje verbal y la representación escrita, ya que esta requería que respondieran según su posición y lo que observaron del evento, por lo cual no existen interpretaciones incorrectas.



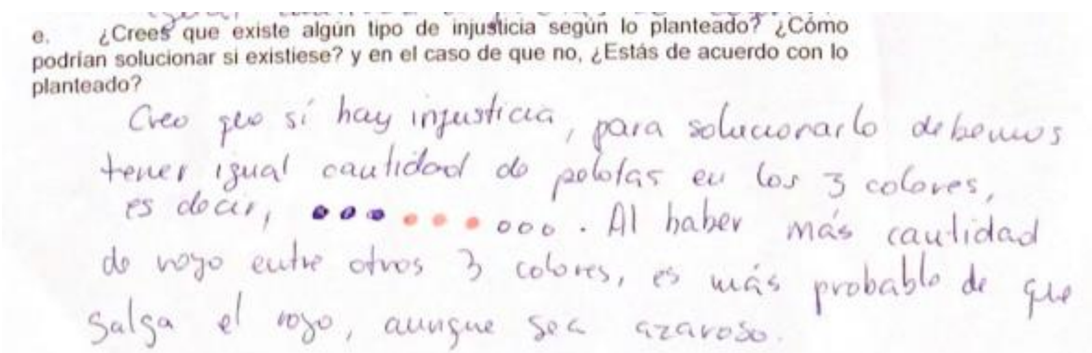
d. ¿Es correcto lo que está haciendo Montserrat? ¿Por qué?

No, no es correcto porque agrego más pelotas a las rojas, lo que le conviene a ella pero no a el.

Fuente: respuesta de los/as estudiantes

Se observó que todos los/as estudiantes responden por medio del lenguaje natural, dejando en evidencia que se encuentran en desacuerdo con la situación planteada, esperando una equidad para cada uno de los/as participantes del evento.

En la quinta y última pregunta, debido a que el problema lo amerita, se responde por medio del lenguaje verbal y representación escrita, en el cual los/as estudiantes, deben expresar el cómo observan la situación, y mejorarla en caso de que ellos/as lo consideren necesario. En este caso, se propone de manera transversal entre todos/as los/as estudiantes, que se quite una pelota roja, de tal manera que Monserrat tenga la misma posibilidad de ser invitada que los otros casos planteados, por lo cual la respuesta que se da es similar a la presentada a continuación.



e. ¿Crees que existe algún tipo de injusticia según lo planteado? ¿Cómo podrían solucionar si existiese? y en el caso de que no, ¿Estás de acuerdo con lo planteado?

Creo que sí hay injusticia, para solucionarlo debemos tener igual cantidad de pelotas en los 3 colores, es decir, ●●● ●●● ooo. Al haber más cantidad de rojo entre otros 3 colores, es más probable de que salga el rojo, aunque sea azaroso.

Fuente: respuesta de los/as estudiantes

Luego de terminar la clase, se realiza un plenario, en el que los/as estudiante comentan lo respondido, y muestran sus argumentos, llegando a la institucionalización del contenido como tal, mostrando cada uno de los elementos relevantes, en el cual se define a raíz del mismo problema, para mostrar a que hace referencia el espacio muestral, regla de Laplace, casos favorables y totales, experimento aleatorio, entre otros. Así, se deja establecido el objeto matemático y su tratamiento como tal.

Análisis aposteriori situación clave 3, clase 5:

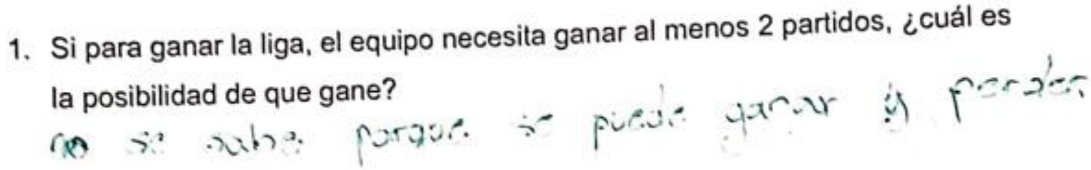
Es importante recordar que los/as estudiantes en esta sesión de clase desarrollaron un problema no rutinario el cual debían determinar el espacio muestral para determinar la probabilidad de algunos eventos en particular identificando si el orden afecta en la probabilidad.

Los/as estudiantes tuvieron un bloque de 40 minutos para poder realizar la actividad, dividiendo 5 minutos para leer el problema, 5 minutos para trabajar de forma individual, 10 minutos para discutir respuestas con los pares de alrededor, 10 minutos para que algunos estudiantes presentaran y explicaran su respuesta en la pizarra y los últimos 10 minutos para que el docente realizara la institucionalización de las respuestas.

La cantidad de guías que se recopilaron fueron 26, de las cuales ninguna fue entregada completamente en blanco.

Las estrategias y representaciones a las que lograron llegar los/as estudiantes en la pregunta uno es:

Forma A



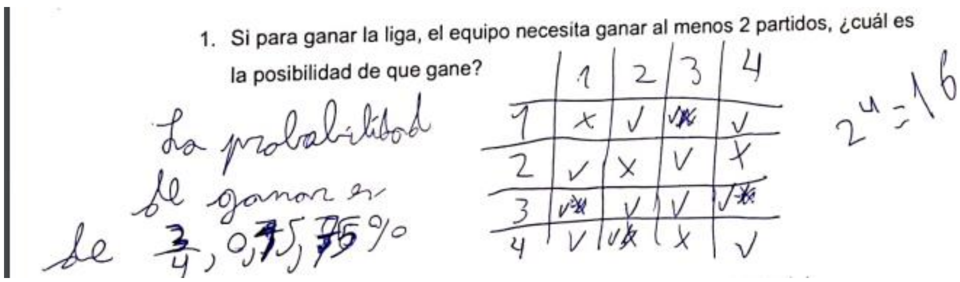
1. Si para ganar la liga, el equipo necesita ganar al menos 2 partidos, ¿cuál es la posibilidad de que gane?

no se sabe porque se puede ganar y perder

Fuente: Forma A de respuesta de los/as estudiantes

Se observó que 1 de 26 estudiantes comprendió la probabilidad como algo fortuito, que no se puede determinar, cuál tiene más posibilidades de ganar si no que es una situación que no se puede saber, utilizando lenguaje natural y representación escrita.

Forma B:


1. Si para ganar la liga, el equipo necesita ganar al menos 2 partidos, ¿cuál es la posibilidad de que gane?

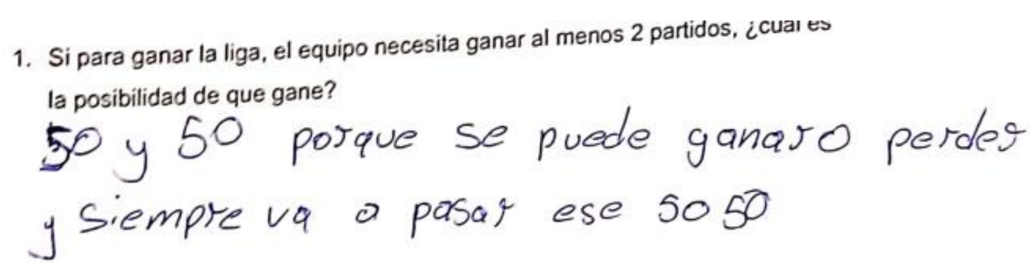
La probabilidad de ganar es de $\frac{3}{4}$, 0,75, 75%

$2^4 = 16$

Fuente: Forma B de respuesta de los/as estudiantes

Se puede observar que 1 de 26 estudiantes utilizó la tabla de probabilidades, a pesar de que esta tabla no era posible integrar en este problema, debido a que son más de dos partidos. Los/as estudiantes aplicaron lenguaje numérico y representación tabular. Esta/e pudo haber cometido este error, debido a que durante la implementación surgió esta estrategia en otro evento, la cual fue validada.

Forma C:


1. Si para ganar la liga, el equipo necesita ganar al menos 2 partidos, ¿cual es la posibilidad de que gane?

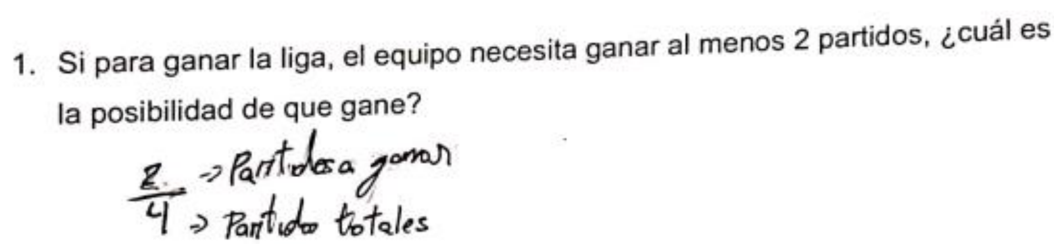
50 y 50 porque se puede ganar o perder y siempre va a pasar ese 50 50

Fuente: Forma C de respuesta de los/as estudiantes

Se observó que 13 de 26 estudiantes determinan que la probabilidad es 50% y 50%, pero no dan mayor información del porqué tiene esa probabilidad, sólo determinan que esto sucede debido a que existen dos posibles casos. El/la estudiante utilizó lenguaje natural y representación escrita.

En este caso, los estudiantes no identificaron el evento que se solicitaba, sino que solo se limitan a los posibles resultados de un partido de un equipo en específico. Esto se debe a la falta de comprensión del enunciado y a la identificación de la probabilidad simultánea. Esto es considerado debido a las dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los/as alumnos/as. Además, como indica Rivas y Godino (2015) se hace notar que predomina el error en el cálculo de probabilidades siendo el sesgo de equiprobabilidad y el espacio muestral reducido.

Forma D:

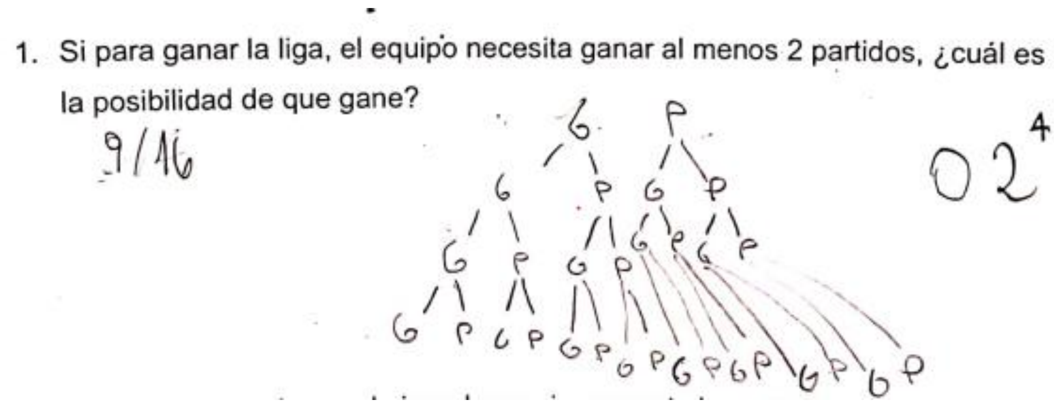

1. Si para ganar la liga, el equipo necesita ganar al menos 2 partidos, ¿cuál es la posibilidad de que gane?

$\frac{2}{4}$ -> Partidos a ganar
-> Partido totales

Fuente: Forma D de respuesta de los/as estudiantes

Se observó que 4 de 26 estudiantes que, mediante la regla de Laplace, determinan que deben ganar 2 partidos de 4, utilizando lenguaje numérico. Se puede determinar que esta respuesta está errónea, debido a que el/la estudiante considera que el equipo debe ganar 2 partidos de 4, no dos o más, por lo que deja de lado las posibilidades de que ganen 3 o los 4 partidos. Es así como indican Rivas y Godino (2015) que predomina el error en el cálculo de probabilidades siendo el sesgo de equiprobabilidad y el espacio muestral reducido.

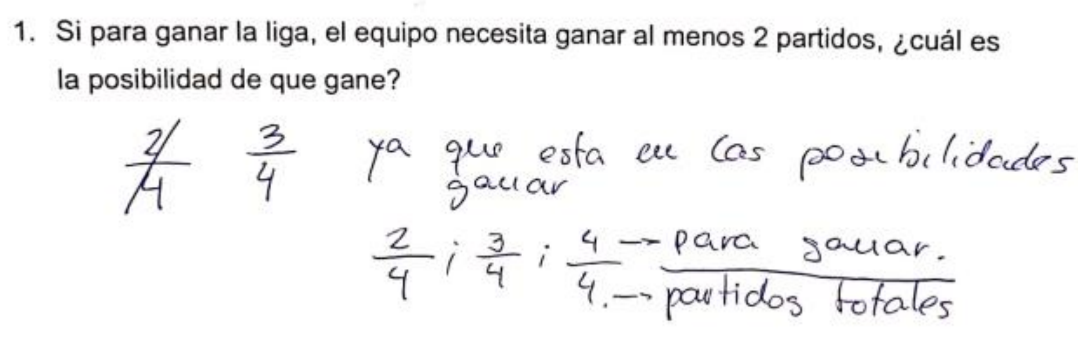
Forma E:



Fuente: Forma E de respuesta de los/as estudiantes

Se observó que 4 de 26 estudiantes, utilizaron el diagrama de árbol para lograr determinar la probabilidad de que el equipo gane al menos 2 partidos. Sin embargo, a la hora de contar los casos favorables, los/as estudiantes tuvieron un error de conteo tal como indica Batanero, Navarro-Pelayo y Godino (1997. cómo se citó en Batanero, Beltrán-Pellicer y Roldán, 2018) “indican que pocos estudiantes usan espontáneamente este diagrama para resolver problemas (…) , y los que lo usan cometen errores o lo interpretan incorrectamente”.

Forma F:

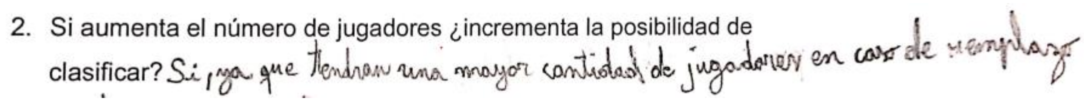


Fuente: Forma F de respuesta de los/as estudiantes

Se observó que 3 de 26 estudiantes respondieron a la pregunta mediante la regla de Laplace, utilizando representación gráfica. Sin embargo, está erróneo, debido a que se cree que los/as estudiantes, pensaron que tienen 3 casos: que ganen 2 partidos de 4, o 3 partidos de 4 o los 4 partidos de 4. Por lo tanto, aplicando la regla de Laplace, tienen 4 opciones posibles $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$ y tiene como casos favorables, $\frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$. Por lo tanto, aplicando la regla de Laplace queda ¾.

En la pregunta dos, se observó que $\frac{2}{26}$estudiantes, dejan la pregunta en blanco o respondieron “nose”

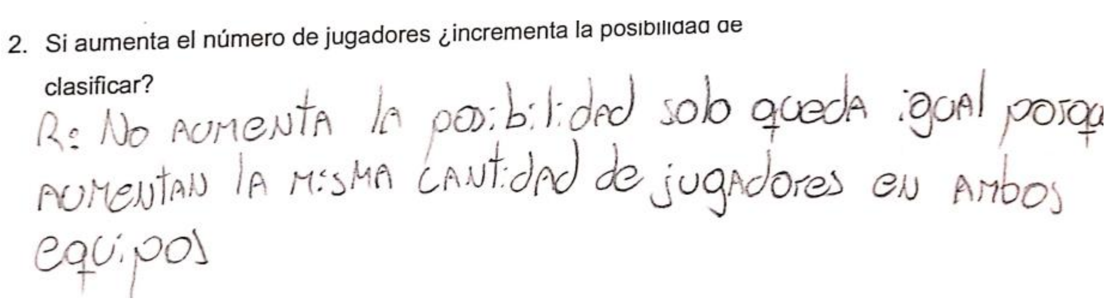
Forma A


2. Si aumenta el número de jugadores ¿incrementa la posibilidad de clasificar? Si, ya que tendran una mayor cantidad de jugadores en caso de remplazo

Fuente: Forma A de respuesta de los/as estudiantes

Se observó que 4 de 26 estudiantes responden que sí incrementa la posibilidad de clasificar si es que aumenta la cantidad de jugadores, utilizando lenguaje natural. Lo cual es erróneo, pero estos creían que incrementa en un solo equipo y no en ambos.

Forma B:


2. Si aumenta el número de jugadores ¿incrementa la posibilidad de clasificar?

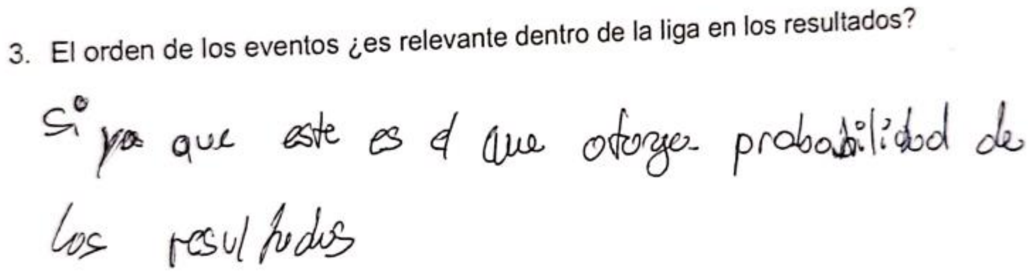
R: No AUMENTA la posibilidad solo queda igual porqu AUMENTAN LA MISMA CANTIDAD de jugadores en AMBOS equipos

Fuente: Forma B de respuesta de los/as estudiantes

Se observó que 20 de 26 estudiantes respondieron que no incrementa la posibilidad de clasificar si es que aumenta la cantidad de jugadores. Lo cual es correcto, ya que, la cantidad de jugadores aumenta proporcionalmente en ambos equipos.

En la pregunta 3, se observó que 9 de 26 estudiantes, dejan la pregunta en blanco o respondieron “no se”. Además, se observaron diferentes tipos de respuestas.

Forma A:

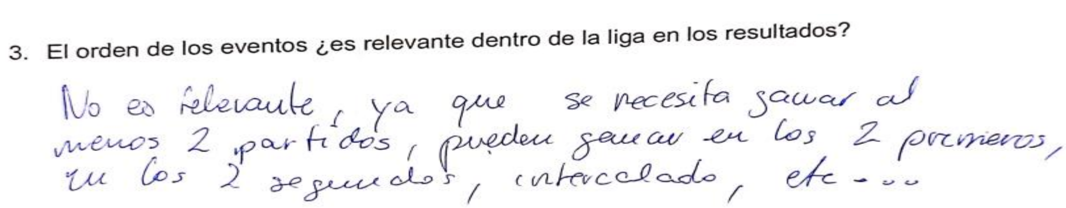

3. El orden de los eventos ¿es relevante dentro de la liga en los resultados?

Si ya que este es el que otorga probabilidad de los resultados

Fuente: Forma A de respuesta de los/as estudiantes

Se observó que 2 de 26 estudiantes responden que es relevante el orden de los partidos en los resultados de la liga, utilizando lenguaje natural. Siendo erróneo, debido a que no afecta el orden en el que ganen los partidos. Al revisar ambas respuestas se puede determinar que fue falta de comprensión del enunciado.

Forma B:


3. El orden de los eventos ¿es relevante dentro de la liga en los resultados?

No es relevante, ya que se necesita ganar al menos 2 partidos, pueden ganar en los 2 primeros, en los 2 segundos, intercalado, etc...

Fuente: Forma B de respuesta de los/as estudiantes

Se observó que 15 de 26 estudiantes responden que no es relevante el orden de los partidos en los resultados de la liga, utilizando lenguaje natural. Siendo correcto, debido a que no afecta el orden en el que ganen los partidos, solo se solicita que ganen 2 o más.

7.2 Confrontación de los análisis a priori y posteriori

En esta sección se contrastan las ideas presentadas en el análisis a priori con las ideas del análisis a posteriori. Identificando diferencias y similitudes en el estudio.

En la fase de acción de la actividad didáctica los resultados que se obtuvieron se condicen con lo esperado.

Confrontación situación N°1, Clase 2

Clase 2	Análisis a priori	Análisis a posteriori
Estrategias	Estrategia N°1	7 estudiantes anotaron los resultados a través de experimentación
	Estrategia N°2	12 estudiantes calcularon la probabilidad a través de razones.
Dificultades	Dificultad N°1	0 estudiante
	Dificultad N°2	8 estudiantes no comprendieron el enunciado
Errores	Error N°1	7 estudiantes confunden la cantidad de casos totales con los favorables.
	Error N°2	0 estudiante confunde el espacio muestral

Fuente: Elaboración propia

Confrontación situación N°2 (Clase 4)

Clase 4	Análisis apriori	Análisis aposteriori
Estrategias	Estrategia N°1	15 estudiantes calcularon la probabilidad.
	Estrategia N°2	6 estudiantes contaron las pelotas.
Dificultades	Dificultad N°1	0 de los/as estudiantes no comprendieron la situación
	Dificultad N°2	0 de los/as estudiantes no consideraron las bolitas blancas.
Errores	Error N°1	No se evidenció este tipo de error en los/as estudiantes.
	Error N°2	No se evidenció este tipo de error.
	Error N°3	No se evidenció este tipo de error.

Fuente: Elaboración propia

Confrontación situación N°3 (Clase 5)

Clase 5	Análisis apriori	Análisis aposteriori
Estrategias	Estrategia N°1	4 estudiantes utilizan el diagrama de árbol
	Estrategia N°2	0 estudiantes anotaron todos los posibles casos.
	Estrategia Nº 3	1 estudiante utiliza la tabla para responder a la pregunta
Dificultades	Dificultad N°1	2 estudiantes no logran abordar de manera correcta la situación planteada
	Dificultad N°2	4 estudiantes no comprendieron la situación planteada en el problema.
Errores	Error N°1	4 estudiantes
	Error N°2	17 estudiantes cometieron errores, con la confusión de eventos anteriores.
	Error N°3	0 estudiante cometió el error de no anotar el espacio muestral

Fuente: Elaboración propia

Errores extras

En esta confrontación se logró notar que existieron dos errores que no fueron previstos en el análisis a priori. Siendo un estudiante que comprendió la probabilidad como algo fortuito, debido a que expresó no saber determinar la probabilidad del suceso, ya que, se puede ganar o perder. Y 5 estudiantes de la situación clave número dos confundieron la cantidad de casos favorables por el número de cara del dado.

En conclusión, se puede observar que los/as estudiantes obtuvieron los errores presupuestados en el análisis a priori, al igual que las estrategias y dificultades. De esta manera, se evidencia que, si bien existieron errores y dificultades, una gran parte de los/as estudiantes comprendieron las situaciones claves, que ayudaron en la construcción del conocimiento.

Análisis de la evaluación

En esta implementación se utilizaron dos evaluaciones de tipo formativo, estas corresponden a un control que se realizó la primera clase el martes 27 de septiembre y el segundo control realizado el miércoles 12 de octubre, los cuales no eran calificados, sino que eran cualitativo y se observaron las respuestas y se contrastaron las unas con la otras.

Esto se hizo, con el fin de poder observar el proceso dentro de construcción del conocimiento, para luego poder realizar un análisis comparativo general. El objetivo del primer control, el cual fue adjunto en el apartado de planes de clase, era conocer e identificar la regla de Laplace y sus elementos. Esto es a raíz de observar cómo los/as estudiantes estaban preparados y si, a raíz de los conocimientos adquiridos en 7º y 8º básico podrían comprender el objeto matemático como tal.

De esta manera, la estructura del control fue, primero cuatro preguntas sobre el contenido, que hacía referencia a la regla de Laplace, casos favorables, casos totales y espacio muestral, luego se realizó un solo problema, en el cual debían responder según lo que ellos/as recordaban y por medio de la estrategia que sintieran pertinente.

En el último control, al igual que en el primero se les solicitó lo mismo, por lo cual fue la misma estructura, debido a que hubo una institucionalización del contenido es que se les solicitó que pudieran describir de qué manera comprendieron el contenido, en el cual las preguntas fueron de conceptos, con respecto a la regla de Laplace, espacio muestral, casos favorables y casos totales, de esta manera podían responder según lo que comprendieron y construyeron dentro de la implementación.

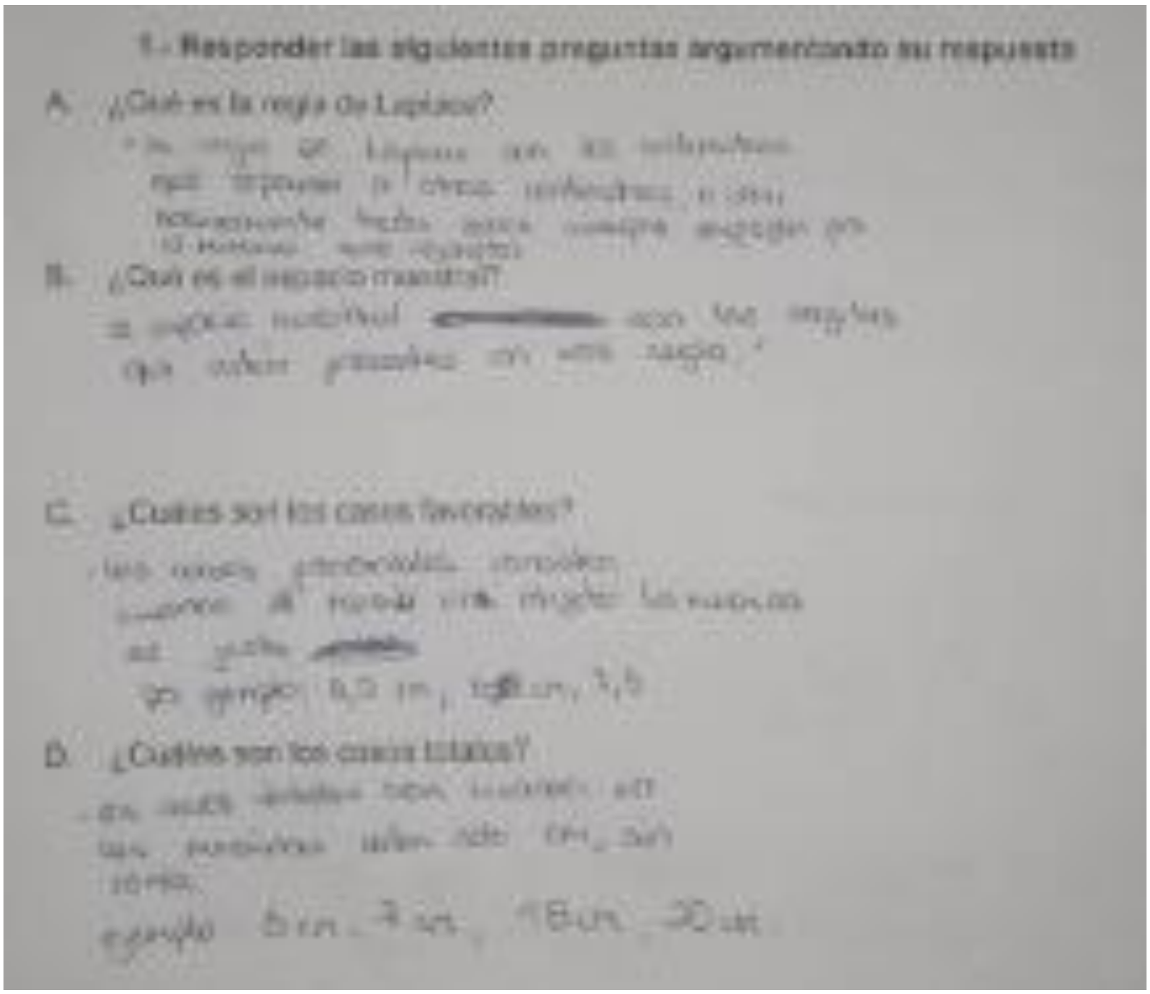
A su vez, se les realizó un problema distinto, en el cual debían utilizar la estrategia que ellos/as sintieran pertinente, así podrían haber hecho representación pictórica de la situación o simbólica, para dar respuesta a las dos preguntas planteadas.

Dentro de los resultados se adjuntan ilustraciones, que hacen referencia a las respuestas de los/as estudiantes, de esta manera se tiene que:

El primer control lo realizó un total de 24 estudiantes, en el cual se evidencia lo siguiente:

- 18 de 24 estudiantes no supieron a qué era lo que hacía referencia el contenido de regla de Laplace. Las respuestas de los/as estudiantes fue por la nula comprensión del contenido dentro del periodo de pandemia, puesto que existía una mala interpretación del objeto matemático como tal, por lo cual no pudieron comprender a lo que se hace referencia.

De esta manera, se presenta la ilustración que ayuda a evidenciar dos respuestas comunes. Según lo que hicieron los/as estudiantes se muestra una generalización de aquello, ya que no todos tenían todo mal en la pregunta, sino que existía siempre un dominio más en uno de los ejercicios que en otros. A raíz de esto, se adjunta cuáles fueron las respuestas más representativas en cada uno de los casos.


1.- Responder las siguientes preguntas argumentando su respuesta

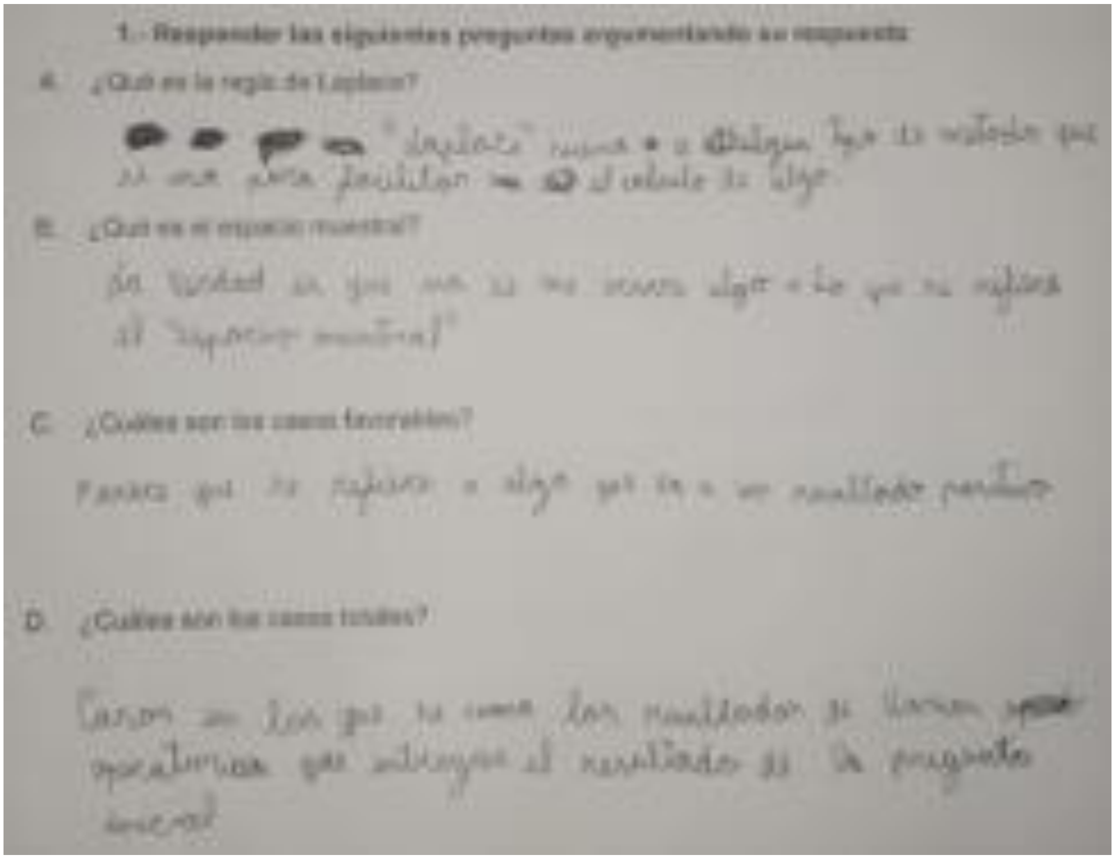
A. ¿Qué es la regla de Laplace?

B. ¿Qué es el espacio muestral?

C. ¿Cuáles son los casos favorables?

D. ¿Cuáles son los casos totales?

Fuente: respuesta 1 Control 1 de los/as estudiantes



1.- Responder las siguientes preguntas argumentando su respuesta:

A. ¿Qué es la regla de Laplace?

B. ¿Qué es el espacio muestral?

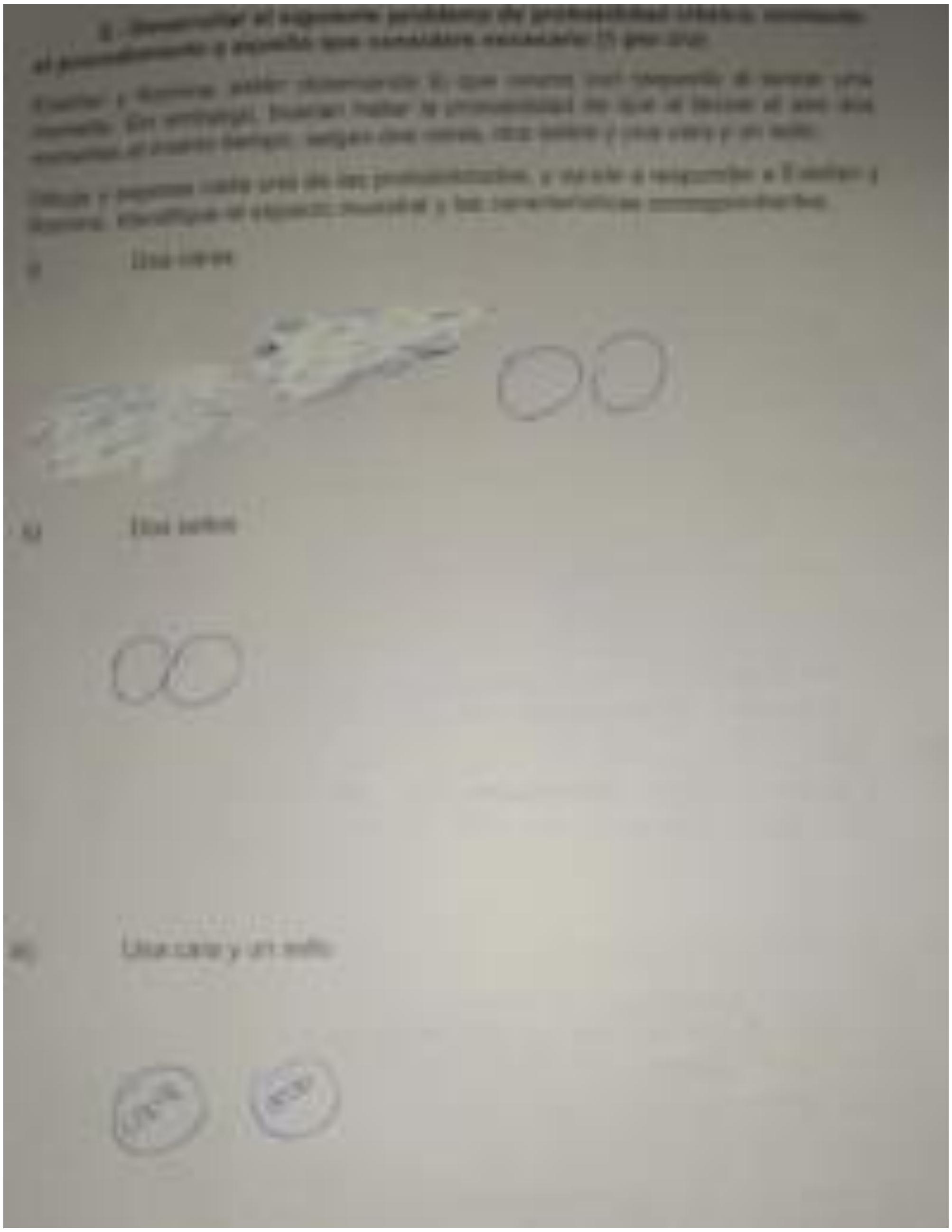
C. ¿Cuáles son los casos favorables?

D. ¿Cuáles son los casos totales?

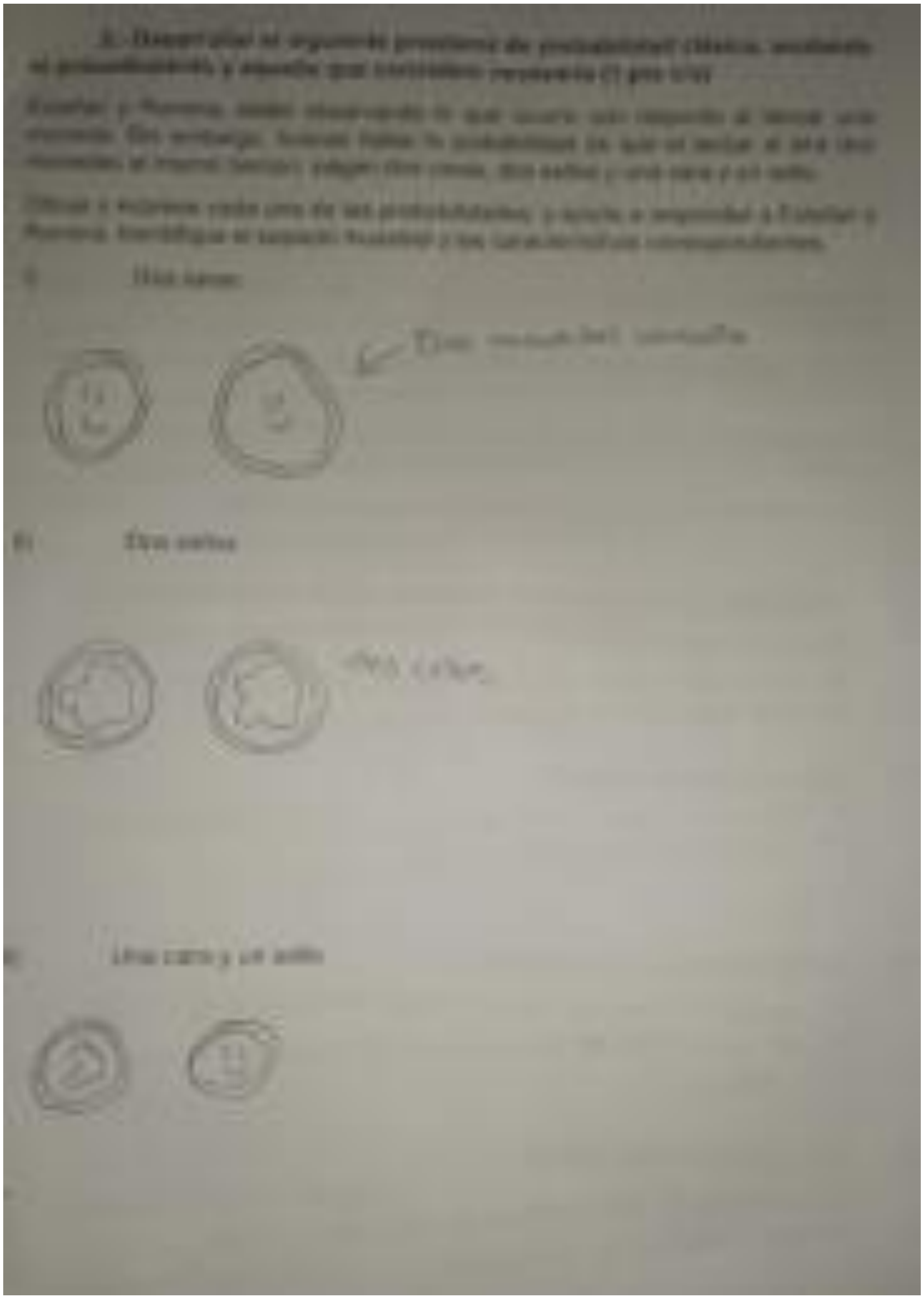
Fuente: respuesta 1 Control 1 de los/as estudiantes

En ese sentido, se evidencia que los/as estudiantes tienen problemas con aquello que comprendieron del contenido, puesto que algunos/as lo asociaron a medidas, ya que, pensaron que hacía referencia a la unidad que se estaba viendo en el curso.

- 20 de 24 estudiantes no saben representar las situaciones de forma pictórica, en específico el lanzamiento de monedas.



Fuente: respuesta 2 Control 1 de los/as estudiantes

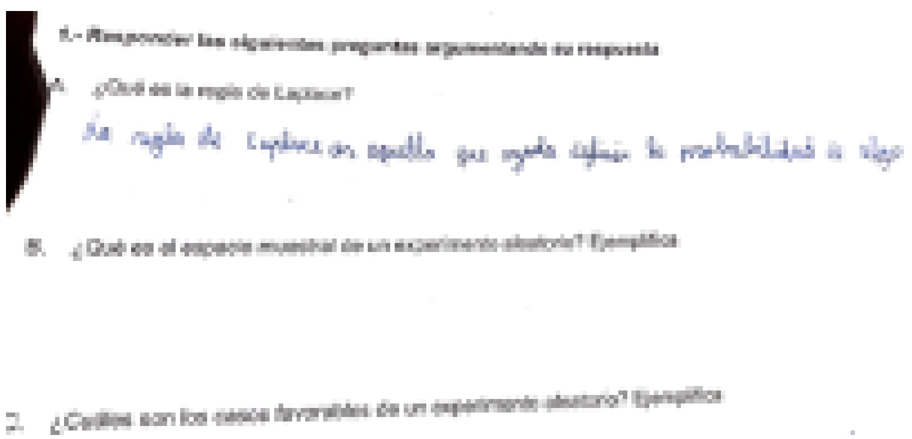


Fuente: respuesta 2 Control 1 de los/as estudiantes

Analizando las respuestas, existía una confusión con respecto a los eventos y, a su vez, a la noción que tienen los/as estudiantes, con respecto a la probabilidad clásica, por lo cual, se logra dejar en evidencia los errores cometidos.

El último control se le realizó a un total de 25 estudiantes, en el cual se evidenció lo siguiente:

- 8 de 25 estudiantes no supo responder las preguntas de conceptos, si bien comprendía a lo que hacía referencia, pero les costó comunicarlo algunos/as de estos/as estudiantes respondió lo siguiente

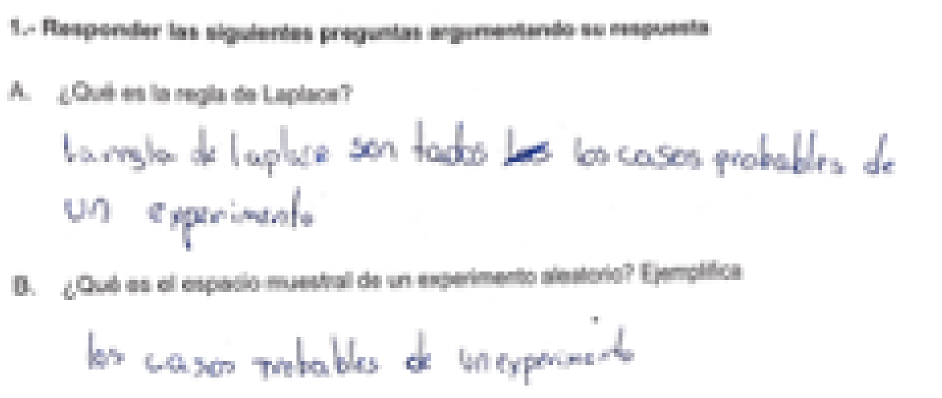

1.- Responder las siguientes preguntas argumentando su respuesta

A. ¿Qué es la regla de Laplace?

La regla de Laplace es aquella que ayuda definir la probabilidad de algo

B. ¿Qué es el espacio muestral de un experimento aleatorio? Ejemplifica

C. ¿Cuáles son los casos favorables de un experimento aleatorio? Ejemplifica


1.- Responder las siguientes preguntas argumentando su respuesta

A. ¿Qué es la regla de Laplace?

la regla de laplace son todos ~~los~~ los casos probables de un experimento

B. ¿Qué es el espacio muestral de un experimento aleatorio? Ejemplifica

los casos probables de un experimento

Fuente: respuesta 1 Control 2 de los/as estudiantes

Se evidencia la dificultad de expresar la regla de Laplace y los elementos que esta conlleva.

- 10 de 25 estudiantes no sabe comprender eventos que no sean los usuales como lo son lo de lanzar una moneda o un dado, por lo cual se les dificulta llevarlo a otro contexto. Por lo cual, se adjunta solo una imagen que hace representativos a las otras respuestas descritas.

uah

Docente: Juan Pablo Quevedo
Codocentes: Antonieta Barría y Francisca [illegible]

2.- Desarrollar el siguiente problema de probabilidad clásica, anotando el procedimiento y aquello que considere necesario (1 pto c/u)

Iris, tiene en su celular 500 canciones, de las cuales se puso a observar que la mitad corresponden al género de pop, un cuarto al género de reggaetón, un octavo al género del rock y lo que falta a baladas.

a. ¿Cómo representarías el espacio muestral?

y haci sucesibamente

b. Si ella quiere escuchar una canción al azar ¿Qué género es más probable que escuche? ¿Y el menos probable?

Fuente: respuesta 2 Control 2 de los/as estudiantes

Finalmente, como análisis general de los dos controles, se evidencia que los/as estudiantes comprenden el contenido, puesto que en cada uno existió un avance con respecto a la noción de la probabilidad clásica. Así, se pueden identificar cómo fue el paso entre distintos tipos de representaciones. Es por esto, que se aprecia que tienen un mayor dominio en el concepto de la regla de Laplace.

Por otro lado, se evidencia aspectos de dificultad respecto al comprender situaciones fuera del contexto habitual, que en este caso fueron canciones, en el cual se salió de los eventos tradicionales que se observan comúnmente. Esto ocurre porque los/as estudiantes están relacionados a ciertos tipos eventos, en el cual, si se saca o se intenta observar más allá de los no comunes, confunden la teoría que en este caso hace referencia al espacio muestral.

Cabe mencionar que esto último, sólo se observó dentro del último control, en el que se les preguntó a los/as estudiantes con respecto a canciones, ya que algunos/as no pudieron expresar el espacio muestral o un diagrama que permitiera evidenciar el evento. En este sentido, en forma de comparación, se puede observar que, con el paso del primer control al segundo, los/as estudiantes tuvieron un aumento significativo, ya que, comprendieron e internalizaron el contenido como tal, en el cual se comprende a lo que hace referencia la regla de Laplace, espacio muestral, casos favorables y casos totales, de tal forma que pudieron argumentar y comprender la aplicación de esta. Así, es que se interpreta que los/as estudiantes tuvieron un aprendizaje significativo de la secuencia didáctica, ya que aumentaron su entendimiento del contenido.

Respecto a la experiencia de la práctica, es necesario considerar mejoras respecto al desarrollo de las habilidades dentro de las clases que ayuden a potenciar un aprendizaje significativo del objeto matemático, de tal manera que permita reparar el aprendizaje perdido durante el periodo de pandemia. Mientras que, en las evaluaciones se debe intentar cambiar el planteamiento de las preguntas con el fin de que estas ayuden a evidenciar en más en detalle aquello que los/as estudiantes comprendieron.

CONCLUSIONES

Dentro de esta investigación, se puede observar algunas conclusiones obtenidas de los resultados, que ayudan a dejar en evidencia ciertas problemáticas, en el cual es importante también realizar algunas mejoras a la secuencia didáctica que se planteó y los aprendizajes profesionales.

Primero, es importante presentar la conclusión sobre la pregunta planteada al principio de la investigación, la cual resultó ser la base y el eje articulador de este. La pregunta presentada al principio fue la siguiente: ¿Cuáles son las características que emergen sobre la comprensión de la noción de probabilidad clásica que tienen los/as estudiantes de primero medio a partir del diseño de una secuencia didáctica con la teoría de representaciones semióticas?

De esta manera, primero se observaron aquellos conocimientos que tenían los/as estudiantes, con respecto al objeto matemático como tal, para luego comenzar a construir el conocimiento, de tal manera que al final se realice un problema desafiante, que permita dejar en evidencia el conocimiento construido. Por lo cual, la actividad se trabaja por medio del Estudio de Clases, de esta manera las estrategias de las soluciones del problema y los registros surgieron de ellos/as. Así, se puede responder de qué manera responden los/as estudiantes por medio de la secuencia realizada. De esta manera, es que los/as estudiantes desarrollaron estrategias acordes a su comprensión del contenido, por lo cual se deja en evidencia sus propios registros. En ese sentido, se evidencia que los registros utilizados dentro de las actividades se repitieron de forma transversal, en el cual fueron los tabulares, simbólicos y pictóricos. De esta manera, no existió una mayor detención u observación entre cada uno de los eventos, por lo cual dentro de la secuencia nos surgió la siguiente pregunta ¿cómo podemos fomentar el cambio entre distintos tipos de representaciones semióticas?

Dando respuesta a esta pregunta, creemos que la manera correcta de realizar este tipo de transición entre los distintos tipos de representaciones, se puede lograr por medio de la secuencia implementada, pero con un mayor tiempo a disposición, debido a que de esta manera el/la estudiante podrá observar distintos eventos de los cuales podrá obtener diferentes tipos de representaciones semióticas para la probabilidad clásica.

Dentro de la teoría constructivista que se incorpora dentro de la secuencia de enseñanza, se observa que existe un quiebre dentro de la educación actual, la cual se hace notar, puesto que los/as estudiantes no acostumbran a reflexionar y esperan constantemente una aprobación y validación por parte del docente. Así, se busca trabajar por medio de los eventos de tal manera que exista una transición en el objeto matemático.

Basándonos en la teoría de registro de representaciones semióticas de Duval, podemos concluir que, nos permitió pasar de lo concreto a lo pictórico y de lo pictórico a lo simbólico, logrando así llegar a un aprendizaje significativo en el/la estudiante. Por otro lado, nos permitió pensar en las formas de enseñar la probabilidad transitando por diferentes registros en un contenido, abriendo la posibilidad de llegar a más estudiantes. Así se permite identificar diferentes dificultades, que tienen los/as estudiantes al trabajar con probabilidades, en el cual, llevándolo a una situación particular, dentro del estudio de clases se observó que los/as estudiantes al pasar de un registro de representación a otro, cayó en un error, puesto que se validó el resultado, que era erróneo. Al analizar la situación se observan algunos factores que pueden que hayan entorpecido el proceso, el cual se puede ver que los/as estudiantes, hayan confundido los eventos, o que al momento de contar los casos solicitados no hayan evidenciado la situación planteada como tal.

Por otro lado, el basarnos en la teoría de situaciones didácticas nos permitió hacer más partícipe a los/as estudiantes, donde se permitió potenciar el desarrollo de estrategias, habilidades y actitudes, donde el/la docente tomó el rol de mediador/a con el contenido, permitiendo un aprendizaje significativo.

Por otro lado, esta teoría nos permitió determinar diferentes situaciones que se vivían en el contexto de enseñanza en el cual se trabajó, como, por ejemplo, la constante necesidad por parte del estudiante de ser validado al momento de trabajar de manera autónoma. Además, se observó la necesidad que tienen los/as estudiantes de que se les presente la institucionalización de los contenidos a un comienzo de la enseñanza, debido a que, si no se realiza de esta manera, sienten que no son capaces de resolver problemas como los implementados en la secuencia. Mediante esta implementación se logró romper medianamente con este tipo de dificultades observadas, debido a que se evitó en todo momento validar al estudiante y se institucionalizó una vez que el/la estudiante mediante actividades logró determinar implícitamente definiciones claves del contenido

Se realiza una autocrítica a la secuencia implementada, debido a que al no considerar más eventos y situaciones que permitan evidenciar la regla de Laplace, los/as estudiantes internalizan solo algunos de los casos. Por lo cual, para poder haber abordado otros eventos, se necesitaba un mayor tiempo, que permitiera abarcar otras situaciones, para así ver distintos tipos de registros, como lo fueron lo pictórico a lo simbólico. De esta manera, es Duval (2004) quien permite avalar que debe existir evidencia de que los/as estudiantes tienen que hacer un mayor trabajo cognitivo, para poder pasar de un registro de representación a otro, puesto que para que esto ocurra se debe tener dominio de aspectos fundamentales, en el cual sea esté en el lenguaje conjuntista. Así, es un desafío que debe ser considerado para la propuesta presentada, en el cual se debe modificar.

Observando el objetivo general del escrito, el cual propone Identificar las características que emergen sobre la comprensión de la noción de probabilidad clásica que tienen los/as estudiantes de primero medio.

Se puede determinar que este se cumplió debido a que, se logró crear un diseño didáctico que permite comprender la noción de probabilidad clásica con sus representaciones, se logró implementar un diseño de clases que permitió la construcción de la noción de probabilidad clásica y por último se analizaron aquellas respuestas obtenidas en la implementación de este diseño. Estos objetivos tantos los generales como los específicos se cumplieron, debido a que, dentro del análisis del diagnóstico final en comparación con el inicial, se evidencia que los/as estudiantes tuvieron una mayor comprensión del objeto matemático, en el cual, internalizar el concepto de espacio muestral, casos favorables, casos totales, experimentos aleatorios, la ley de los grandes números. De esta manera, se comprende que tuvieron un aprendizaje significativo, debido a la construcción de este, en el cual se caracteriza por los eventos utilizados, que bien fueron 4, y se pudo experimentar en un 5to, estos/as tuvieron respuestas esperadas.

Respecto a los aprendizajes profesionales. Primeramente y desde un ámbito disciplinar, este proceso de creación de una secuencia didáctica, nos ha permitido profundizar en el contenido a enseñar tanto didácticamente como epistemológicamente, debido a que nos permitió determinar comprender el objeto matemático que existe detrás del contenido a enseñar y profundizar en la historia de este, tanto como nace, desde cómo llegó a ser lo que es hoy en día. De esta manera, observando el perfil de egreso y asociando nuestra investigación con este, podemos observar que el análisis epistemológico realizado se encuentra relacionado con el punto M2), ya que se menciona que los/as estudiantes deben tener un dominio con respecto al origen del conocimiento, en el cual se comprendan la naturaleza del objeto (Universidad Alberto Hurtado, 2016). A modo de síntesis, esto nos permite analizar nuestro objeto matemático, de tal manera, que ayudó a conducir nuestra secuencia didáctica, en el cual se produce un tránsito dentro de cada una de los puntos claves de este, donde se produjo una construcción del aprendizaje por medio del aprendizaje significativo.

Desde el punto de vista didáctico, podemos determinar que al tener que implementar una secuencia de clases y diseñar esta propuesta basándonos en la teoría de situaciones didácticas y la teoría de representaciones semióticas, las cuales están descritas en el marco de referencia. Primeramente, se debió comparar libros de textos recomendados por el ministerio de educación, con la finalidad de identificar falencias en el lado didáctico de ambos libros. Esto nos permitió generar una mirada crítica de las herramientas de enseñanza que entrega el ministerio de educación para poder enseñar la probabilidad clásica en las aulas de Chile. Relacionando lo anterior con el perfil de egreso propuesto por la Universidad Alberto Hurtado (2016) se puede determinar que este tipo de aprendizaje profesional responde a la habilidad D1) “analiza, diseña e interviene propuestas didácticas adaptadas a las condiciones de contexto de sus estudiantes respetando ritmos de aprendizaje” (p.01). y la habilidad D2) del perfil de egreso de la Universidad Alberto Hurtado (2016) el cual nos dice que el estudiante egresado debe “seleccionar metodologías, técnicas e instrumentos, materiales y recursos adecuados para gestionar en clases las actividades del alumnado, considerando la problemática específica que origina el tipo de saber matemático transpuesto” (p.01). Por otro lado, al momento de realizar el análisis a priori, se logró determinar de dónde provienen los errores más comunes obtenidos por los/as estudiantes durante esta implementación, este aprendizaje nos ayuda a responder a la habilidad D3) tal como menciona el perfil de egreso de la Universidad Alberto Hurtado (2016) D3) “Identifica e investiga sobre las posibles causas de fracasos en el aula de matemáticas, entre otros y lo confronta con las teorías de aprendizaje” (p.1).

Para finalizar, dentro del ámbito pedagógico podemos observar la importancia del trabajo en equipo y la promoción de la tolerancia y el sentido común. Esto ocurre, ya que es importante la reflexión y los procesos de discusión de cada clase, el cual permite nutrir y mejorar cada una de estas, de tal manera que sea una instancia de aprendizaje para todos/as.

Con lo mencionado observando el perfil de egreso de la universidad, este se asocia P7), en el cual nos menciona que es fundamental la capacidad de adaptación de los contextos, en el cual sea capaz de tener opinión, sobre el tema en cuestión (Universidad Alberto Hurtado, 2016). Así, es que se considera importante la comunicación afectiva entre docentes, en el cual se permita interactuar y presentar mejoras. Además, se debe ser consecuente con el compromiso con los/as estudiantes, en el cual se adapten según su contexto y el aprendizaje significativo y la formación de sus propios criterios sea lo principal, tal como nos menciona el perfil de egreso en el P1) donde los/as docentes, deben tener el compromiso de tomar el marco para la buena enseñanza, el cual es fundamental para la educación de los/as estudiantes (Universidad Alberto Hurtado, 2016).

Así, es que se debe centrar la educación en que el/la estudiante comprenda de manera, certera y correcta el objeto matemático, en el cual exista una construcción del aprendizaje, por medio de situaciones que ayuden en su formación, al igual que la implementación de las evaluaciones, estás deben ser para ver su avance por sobre las notas, en el cual en este caso nos sirvió para dejar en evidencia aquello que comprendieron los/as estudiantes.

En conclusión, estas son las habilidades que nos ayudan a identificar nuestros aprendizajes, pero no las únicas, puesto que dentro de esta investigación abarcamos aspectos fundamentales, dejando las centrales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ausubel, D. P, J. D. Novak, H. Hanesian. (1978). *Educational Psychology: A Cognitive View* (2a edición). New York: Holt, Rinehart & Winston. Reimpreso, 1986. New York: Warbel & Peck.

Alguacil, M., Boqué, M., & Pañellas, M. (2011). Dificultades de los estudiantes de magisterio para entender un entorno de interdependencias, en el cual las decisiones se basan en estudios de probabilidad. International Journal of Developmental and Educational Psychology, 3(1), 287-297.

Avila, J. Fresno, C. & Torres, C. (2022). Matemática texto escolar 1º medio. Santiago, Chile.

Artigue, M. Douady, R. Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Una empresa docente.

Azcárate, P. & Cardeñoso, J. (2004). *Las Concepciones de los profesores de Primaria ante el conocimiento probabilístico implicaciones para su formación*. Revista de Educación de la Universidad de Granada.

Batanero, C. Ortiz, J. Serrano, L. (s.f). *Investigación en la didáctica de la probabilidad.*

Benavidez, D., Rodríguez, W. & Torres, J. (2012). Una serie de tareas enfocadas hacia la enseñanza de la probabilidad clásica y frecuencial a estudiantes de grados 8º y 9º. Universidad Pedagógica Nacional.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libro del Zorzal.

Contreras, M., Gastelum, D. e Inzunsa, S. (2011). *Importancia del desarollo y utilización de software para la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad*. Universidad Autónoma de Sinaloa.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las Prácticas Docentes en la teoría antropológica de lo didáctico, *Recherche en Didactique des Mathemátiques,*19(2), 221 - 266.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. Universidad del Valle

Francisco, A., López De Hierro, R., Batanero, C., Beltrán-Pellicer, P., & Roldán López De Hierro, A. F. (s.f). El diagrama del árbol: un recurso intuitivo en Probabilidad y Combinatoria.

Galasso, B. Maldonado, L. & Marambio, V. (2020). Matemática texto escolar 1º medio. Santiago, Chile.

Garcia, J. Medina, M. Sánchez, E. (2014). *Niveles de razonamiento de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad*. Avances de investigación en educación matemática. No 6, 5-23. México

Gigerenzer (1994). *Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa)*. En G. Wright & P. Ayton (Eds.), Subjective probability (pp.129-161). Chichester: WileyMinisterio de educación. (2022). Matemática programa de estudios 1° medio. Currículum nacional

González-Arratia, N. I. (2001). *La autoestima. Medición y estrategias de intervención a través de una experiencia en la reconstrucción del ser*. México:Universidad Autónoma del Estado de México.

Gregori, P., Orús, P., & Pitarch, I. (s/f). *Reflexiones sobre el análisis a priori de los cuestionarios basado en técnicas del Análisis Estadístico*

Implicativo. Uji.es. Recuperado el 10 de noviembre de 2022, de http://www.asi4.uji.es/actas/p1a3.pdf

Martín, B. B. (2008). *Las relaciones interpersonales de los profesores en los centros educativos como fuente de satisfacción*. Dialnet. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2377185

Mena, A. (2007). *El estudio de clases japonés en perspectiva.* Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Mendenhall W., Beaver R. y Beaver B. (2013). *Introducción a la Probabilidad y Estadística*. Décimo tercera edición. Thomson Editores. México. DF.

Mineduc. (2016). *Matemática Programa de Estudio Primero Medio*. Ministerio de educaciòn. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-34359_programa.pdf

Pérez Gómez, Y., & Beltrán Pozo, C. (2011). *¿Qué es un problema en Matemática y cómo resolverlo? Algunas consideraciones preliminares*. EduSol,11 (34),74-89. ISSN: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=475748673009

Ramírez, A. (s/f). Teoría de Probabilidad. Pontificia Universidad Católica de Chile. https://www.mat.uc.cl/~aramirez/pcap3.pdf

Rincón, L. (s/f). *INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD*. Unam.mx. Recuperado el 4 de septiembre de 2022, de https://lya.fciencias.unam.mx/lars/Publicaciones/Prob1-2016.pdf

Rivadulla, A. (1995). *HISTORIA Y EPISTEMOLOGÍA DE LOS CAMBIOS DE SIGNIFICADO DE PROBABILIDAD.* Papeles de Filosofía, Vol. 14, N. 1.

Rivas, H. y Godino, J. D. (2015). Hechos didácticos significativos en el estudio de nociones probabilísticas por futuros maestros. Análisis de una experiencia formativa. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P.Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López-Martín (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (Vol. 2, pp. 339-346). Granada: Grupo de IVALDvestigación en Educación Estadística.

Rojas, P. (2012). *Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos.* 128f. Tesis (Doctorado en Educación). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

Santos, L. M. (2000). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de matemáticas*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN: Grupo editorial Iberoamérica. México

Universidad Alberto Hurtado. (2016). *Perfil de Egreso*

Velandia, D. (2021). *Conceptos básicos.* Universidad de Valparaíso.