**Universidad Alberto Hurtado**

**Facultad de Educación**

**Pedagogía en Matemática**

# CARA A CARA CON LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

## <u>ÁREA DE SUPERFICIES Y VOLUMEN DE PRISMAS Y CILINDROS RECTOS</u>

Gonzalo Reyes Nahuelpán – Sebastián Segovia Silva – Ariel Tapia Corona

Seminario de Título

Profesora Guía: Dra. María Soledad Montoya González

Santiago, Chile

13-nov-2018

## Agradecimientos

**Gonzalo Reyes N.**

En primer lugar, agradezco a mis padres Verónica Nahuelpán y Mario Reyes quienes, pese a no estar de acuerdo con mi carrera, me han apoyado incondicionalmente, a mi pareja Loreto Canales quien me ha acompañado y apoyado a lo largo de este proyecto, a mis profesoras y profesores del liceo Darío Enrique Salas, Paola Santos, Alejandra Herrera, Dante Oneto, Cristian Bravo, Oscar Nahuelán, entre otros, quienes no solo contribuyeron en mi formación académica, sino que también me aconsejaron, apoyaron y guiaron durante los momentos más complejos de mi adolescencia, incentivando en mi la pasión por la docencia.

Agradezco también a mis hermanas Fernanda y Daniela con quienes siempre he podido contar, independiente de lo complejo que puedan ser las cosas. Por último, agradezco a mis amigos, profesores y estudiantes, quienes contribuyeron a que mi sueño de ser profesor al fin se realice.

**Sebastián Segovia S.**

En mi primer lugar agradezco a mis padres Leticia Silva y Víctor Segovia y a mi abuela materna Mercedes Oyanedel quienes han sido mi principal soporte durante mi formación académica y me enseñaron los valores que guían mis pasos. Agradezco también a mi compañera de vida Macarena González Guerra por su apoyo incondicional en todo momento y por compartir el amor por la pedagogía.

Por último agradezco a mis profesores que me guiaron en todo el proceso de pregrado y que confiaron en mis capacidades y destrezas con las cuales alcance la meta de ser Profesor de Matemática. 3

**Ariel Tapia C.**

Desde un comienzo y hasta el final de este camino, se hicieron presente como un apoyo un determinado número de personas, de las cuales sin su ayuda, nada de esto podría haber sido posible. Es por este motivo que se agradecerá su participación a lo largo de todo este proceso.

En primer lugar agradecer a las personas que conforman mi núcleo familiar, en este caso a mis madres Gabriela Corona y Patricia Carrasco, por su apoyo incondicional en todo momento, sin el nada de esto podría ser posible. A mi hermano Eugenio Moreira, que siempre manifestó estar disponible para otorgar cualquier tipo de ayuda. A mi querida acompañante Camila Castañón, gracias por tu paciencia y acogida. Y por último, a todos los amigos/as que apoyaron y estuvieron a lo largo de todo este proceso.

En una segunda instancia agradecer a todas las personas que fueron guías para poder realizar la tarea de hacerme un profesor de matemática. Agradecer a todos mis maestros que instruyeron mi formación en educación media, de igual manera a los docentes que brindaron consejo, apoyo y guía en mi formación profesional.

**ÍNDICE**

# INTRODUCCIÓN

El Presente Seminario de Título sistematiza una investigación cualitativa realizada durante el año 2018, en el Colegio Nuestra Señora de Andacollo de la comuna de Santiago específicamente con un 8° básico.

En primer momento se presenta una problemática o fenómeno didáctico junto a los antecedentes que tienen relación con el contenido, tanto en su dimensión didáctica como en su dimensión curricular. Al finalizar el capítulo uno y con la idea de darle más consistencia es que se presentan el objetivo general de la investigación junto a los objetivos específicos y la pregunta de investigación correspondiente.

Al continuar con la investigación se hizo necesario indagar acerca del concepto matemático en cuestión (Áreas y Volumen de prismas y cilindros), considerando aspectos históricos epistemológicos y el estatus actual del tema con el fin de tener fundamentos matemáticos.

Para definir ciertos límites de la investigación es que se utilizó el Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, el cual nos permitió plasmar ciertas directrices del trabajo que se realizó para lograr que los estudiantes transitaran de un nivel cognitivo menor a uno mayor. Dentro de los enfoques metodológicos que se utilizaron se encuentran la Micro ingeniería didáctica y la Metodología de Estudio de Clase (MEC) de los cuales se exponen sus elementos más relevantes. Luego de definir dichos parámetros fueron planteados los diseños de los planes de clases con sus respectivas descripciones, guías de trabajo y análisis a priori de las situaciones destacadas de cada clase.

Para referirnos a la clase bajo la MEC se destina un capítulo donde se registra detalladamente todas las labores realizadas bajo la metodología, desde su fase de contextualización y formulación del contenido, hasta la puesta en común y evaluación de la clase filmada, para finalizar con las reflexiones finales dentro de la MEC, para dar paso a los análisis de los resultados donde son expuestos los análisis a posteriori de las situaciones claves de la propuesta y la confrontación entre los análisis a priori y los análisis a posteriori.

Para culminar este informe se exponen en vista de los análisis realizados y a la luz del marco de referencia las conclusiones finales del grupo que indican si estamos en condiciones de responder la pregunta de investigación planteada.

# CAPÍTULO I
# PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS

## 1.1 Problemática

Resulta innegable el hecho de que el fracaso de la reforma de las matemáticas modernas (década de los sesenta) trajo consigo errores que aún repercuten en las salas de clase; uno de ellos fue la algebrización de la geometría, la cual era enseñada desde el álgebra lineal (vectores), descartando su carácter inductivo.

Tal como señala Morris Kline (1998) en “El fracaso de la matemática moderna”, durante los años 1955 y 1959 en Estados Unidos, la *College Entrance Examination Board* (organización sin fines de lucro, encargada de elaborar pruebas de ingreso a instituciones educativas) formó una comisión encargada de crear un nuevo programa enfocado en responder a las necesidades educativas de aquellos tiempos. Su principal justificación era que la enseñanza tradicional de la matemática había fracasado dado que sus contenidos eran anteriores al 1700. “La comisión mantenía que debíamos abordar los temas de la matemática tradicional en favor de campos tan nuevos como el álgebra abstracta, la topología, la lógica simbólica, la teoría de conjuntos y el álgebra de Boole” (Kline, 1998), no obstante, “ignoraban el hecho de que las matemáticas se desarrollaban en forma acumulativa y que es prácticamente imposible aprender los últimos procesos si no se conocen los anteriores” (Kline, 1998).

Los años siguientes, más organizaciones participaron del programa, teniendo apoyo de matemáticos como E. Artin y R. Godoment en 1963, además de, G. Choquet y J. Dieudonné en 1964 (quienes defendían la enseñanza de la geometría mediante el álgebra lineal a modo de subsanar el conflicto existente en el paso de la geometría sintética a la analítica, tal como señala Gascón, J. (2002)), masificando el nuevo programa; llegando incluso a Chile.

En específico, los conceptos de área y volumen, abordado desde paradigma tradicional, heredado de dicho programa y posterior reforma, están limitados a la identificación de cuerpos geométricos con el fin de poder discernir respecto a qué algoritmo permite calcular el área de superficie y volumen, obviando los conceptos mismos, confundiendo, por ejemplo, capacidad con volumen.

Por otra parte, la enseñanza de la geometría desde una lógica tradicional coarta la interacción del estudiante con el objeto de estudio, ya que este adquiere un rol pasivo en el proceso de enseñanza-aprendizaje en el cual el docente es quien provee conocimientos ya acabados al alumno, truncando los procesos (y por ende el desarrollo de habilidades) de visualización, comunicación y argumentación, relevantes para la adquisición de aprendizajes significativos.

En relación a lo anterior y de acuerdo con lo expuesto por Gamboa y Ballestero (2009, pág.114) en “Algunas Reflexiones Sobre la Didáctica de la Geometría”:

> En el sistema de educación formal, usualmente los contenidos de geometría son presentados a los estudiantes como el producto acabado de la actividad matemática, que deja en segundo plano los procesos implícitos de la construcción y de razonamiento en este conocimiento. La enseñanza tradicional de la geometría se enfatiza hacia el estudio memorístico de áreas, volúmenes, definiciones geométricas, teoremas y propiedades, apoyadas en construcciones mecanicistas y descontextualizadas.

Dando cuenta, en parte, de la banalización de los objetos matemáticos desde el tradicionalismo. Mientras que, referido al aprendizaje de la geometría, en el mismo texto de Gamboa y Ballestero (2009) señalan que el conocimiento geométrico provee de recursos lógicos al estudiante que le permite hacer justificaciones, pruebas o validaciones con mayor rigor matemático, que pueden ser aprovechadas cuando desee realizar este mismo tipo de conjeturas en otras áreas de las matemáticas. Recursos que no pueden ser brindados mediante clases de carácter tradicionalista y que se relacionan con las habilidades de argumentar y comunicar, presentes en las bases curriculares vigentes.

Además, respecto al desarrollo de habilidades para la adquisición de aprendizaje Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004, pág.25) señalan que:

> El aprendizaje de la geometría implica el desarrollo de habilidades visuales y de argumentación. Más aún, para lograr un aprendizaje significativo es necesario construir una interacción fuerte entre estos dos componentes, de manera que el discurso teórico quede anclado en experiencias perceptivas que ayuden a construir su sentido y, a su vez, las habilidades visuales deben ser guiadas por la teoría, para ganar en precisión y potencia.

Dando cuenta de la estrecha relación entre el aprendizaje de la geometría y el desarrollo de las habilidades de argumentar y comunicar.

Con bases en lo anteriormente descrito consideramos que como profesionales de la educación no podemos mostrarnos exentos de las problemáticas propias de un modelo tradicional de enseñanza, las cuales contribuyen a la banalización de los contenidos matemáticos, truncando el desarrollo de habilidades tales como las descritas anteriormente. Bajo esta perspectiva es que nos preguntamos:

**¿La enseñanza del área y volumen de prismas y cilindros desde un paradigma constructivista, contribuye al desarrollo de la habilidad de argumentar y comunicar en los y las estudiantes de 8° básico?**

## 1.2 Antecedentes

### 1.2.1 Antecedentes de tipo didáctico

Para poder mencionar y detallar los antecedentes que se tienen sobre el concepto volumen y su enseñanza es necesario tener un punto de referencia, en este caso es adecuado saber qué es lo que se espera que los estudiantes aprendan y desarrollen en el aula o como es concebida la matemática y/o el objeto de estudio desde la noosfera. Así desde las bases curriculares de matemática de 7° a 2° medio se menciona que la disciplina enseñada desde una lógica tradicional se reduce a mostrar fórmulas, procedimientos y símbolos alejando la matemática de su carácter dinámico y creativo. Esto también afecta en el desarrollo del pensamiento matemático, el cual es definido "como una capacidad que nos permite comprender las relaciones que se dan en el entorno, cuantificarlas, razonar sobre ellas, representarlas y comunicarlas" (Ministerio de Educación de Chile, 2016, pág. 95). Según Báez e Iglesias (2007) la mayoría de las escuelas y colegios desarrollan la enseñanza de la geometría de forma tradicional, caracterizado principalmente por el uso del discurso del docente como único medio didáctico, donde los instrumentos utilizados por lo general son el lápiz y papel y los estudiantes solo reciben el contenido.

Respecto a las habilidades comunicativas y argumentativas las Bases curriculares mencionan que son centrales para la matemática, ya que: "Es importante que las alumnas y alumnos tengan la oportunidad de describir, explicar, argumentar y discutir colectivamente sus soluciones e inferencias…" (Ministerio de Educación de Chile, 2016, pág. 98), ya que de esta manera los estudiantes desarrollan la capacidad de demostrar matemáticamente ciertas proposiciones y resolver problemas, apoyándose en distintas representaciones, para finalmente el lenguaje natural transformarlo en un lenguaje matemático. En este sentido estas habilidades colaboran en la enseñanza y aprendizaje de la geometría puesto que "la geometría es para el ser humano el idioma universal que le permite describir y construir su mundo, así como transmitir la percepción que tiene de este al resto de la humanidad" (Gamboa y Vargas, 2013), es decir, se requiere de habilidades comunicativas y argumentativas para transmitir de forma clara lo que una persona quiere expresar. Es más, en las bases curriculares (p.112) se relacionan los objetivos de aprendizaje de 8° básico con las habilidades a desarrollar en los estudiantes donde en el apartado de Argumentar y comunicar se espera que éstos sean capaces de:

a) Describir relaciones y situaciones matemáticas de manera verbal y usando símbolos.
b) Explicar y fundamentar:
   Soluciones propias y los procedimientos utilizados.
   Resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas.
c) Fundamentar conjeturas dando ejemplos y contraejemplos.
d) Evaluar la argumentación de otros dando razones.

En este sentido el rol del profesor es fundamental, ya que éste debe diseñar actividades en que sus estudiantes comuniquen y argumenten y vayan realizando conexiones dentro de la misma geometría y puedan socializar sus pensamientos e ideas con el profesor y sus compañeros tal como expone Piaget (1932), citado por Borrás (1997) "Las relaciones entre alumnos son vitales. A través de ellas, se desarrollan los conceptos de igualdad, justicia y democracia y progresa el aprendizaje académico".

### 1.2.2 Análisis descriptivo del Programa de estudio de octavo básico

El contenido de área de superficie y volumen de prismas y cilindros circular recto se encuentra ubicado en la Unidad 3 del Programa de Estudio de 8° básico del año 2016, el cual tiene como uno de sus objetivos que los estudiantes descubran y desarrollen las fórmulas de área de una superficie y el volumen de prismas rectos y de cilindros. Además, es importante mencionar que el foco de esta unidad está en el teorema de Pitágoras, siendo introducido desde sus aplicaciones y una demostración matemática sencilla. Se espera que las y los estudiantes logren resolver problemas en distintos contextos que involucren el teorema mencionado. Otro de los temas desarrollados en la unidad son las transformaciones isométricas (traslación, reflexión y rotación) donde se espera que los estudiantes logren describir la posición y el movimiento de figuras para que luego compongan transformaciones isométricas.

Respecto de la labor docente en el Programa analizado, en el apartado Orientaciones Didácticas se menciona que el docente debe crear situaciones de aprendizaje que apunten a lograr un aprendizaje significativo en las y los estudiantes, para esto se sugiere considerar modelos pedagógicos que incluyan la metodología de enseñanza Concreto, pictórico y simbólico (COPISI), la cual se centra en enseñar contenidos desde su representación concreta a su representación pictórica, para luego formalizarlo matemáticamente por medio de una representación simbólica. Además de dicha sugerencia en la sección se exhibe un punteo con factores que deben ser considerados para lograr aprendizajes satisfactorios en las y los estudiantes, los cuales son descritos a continuación de manera global.

Al comienzo se enfatiza sobre la modelación matemática, es decir, se propone una transición entre la realidad y la matemática siendo el docente un guía y protagonista en el momento en que se debe formalizar el fenómeno real mediante un modelo matemático. Para lograr lo anterior es importante que sean revisadas las experiencias y aprendizajes previos de los estudiantes, con el fin de que exista una progresión de complejidad del contenido matemático durante el desarrollo del mismo.

Luego, se destaca lo fundamental que es se propongan actividades desafiantes para los estudiantes quienes deben ser los principales protagonistas de su aprendizaje. Dentro de dichas actividades se prioriza la resolución de problemas para que por este medio los estudiantes descubran los conceptos, ideen sus propias estrategias de resolución y a la vez cometan errores, los que deben ser considerados como una oportunidad de aprendizaje por parte del docente. Es así que se espera que éste genere instancias donde los alumnos se comuniquen entre ellos, intercambiando ideas, pensamientos y/o soluciones obtenidas con los demás compañeros generando una instancia de aprendizaje cooperativo.

Se sugiere además que las actividades y situaciones que el profesor debe diseñar sean apoyadas y/o desarrolladas mediante tecnologías de la información (TIC) cuyo aporte a la enseñanza es prácticamente incuestionable. En el caso del Programa de Estudios de octavo básico se apela a la eficiencia de las TIC como una característica primordial, puesto que al tener más tiempo se logran desarrollar actividades en que los estudiantes piensen, creen y razonen con el fin de que el contenido o concepto matemático sea propio de ellos. Así mismo dentro de las actividades diseñadas por el docente, el programa es enfático en que éstas deben apuntar al desarrollo de habilidades las que define como: “capacidades para realizar tareas y para solucionar problemas con precisión y adaptabilidad”. En la Unidad 3 donde se encuentra el contenido matemático del Volumen del cilindro se espera desarrollar en las y los estudiante a lo largo de la Unidad 3 las habilidades de:

a) Explicar y fundamentar:

- las soluciones obtenidas ante alguna situación problema y las estrategias o procedimientos utilizados para llegar a la solución expuesta.
- Resultados mediante propiedades, definiciones, axiomas y/o teoremas, es decir, fundamentar matemáticamente.
- Conjeturas, por medio de ejemplos y contraejemplos.

b) Evaluar la argumentación de otros y cuestionarla con fundamentos.
c) Describir relaciones y situaciones matemáticas a través del registro verbal y del registro simbólico.
d) Usar modelos de manera manual o con el apoyo de instrumentos con el objetivo de resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

Luego de describir el hábitat del contenido matemático en el Programa de Estudio de 8º Básico, estamos en condiciones de enfocarnos en los objetivos fundamentales y objetivos de aprendizajes que se esperan alcanzar durante el desarrollo de la unidad en particular los objetivos transversales y el objetivo de aprendizaje que tienen una estrecha relación con el volumen del cilindro. En consecuencia, los objetivos transversales están referidos al desarrollo personal, intelectual, moral y social de las y los estudiantes lo que implica que estos objetivos deben ser desarrollado durante un proceso continuo de escolaridad y no deben estar enfocados en una asignatura en particular. Se destaca en el Programa y Bases Curriculares que estos objetivos han sido creados con la finalidad de favorecer una identidad formativa que promueve valores que sean compartidos a nivel nacional. Por otro lado, el objetivo específico que se enfoca directamente en el objeto y/o contenido matemático en estudio es el objetivo de aprendizaje (OA) 11 el cual es:

Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros:

- Estimando de manera intuitiva área de superficie y volumen.
- Desplegando la red de prismas rectos para encontrar la fórmula del área de superficie.
- Transfiriendo la fórmula del volumen de un cubo (base por altura) en prismas diversos y cilindros.
- Aplicando las fórmulas a la resolución de problemas geométricos y de la vida diaria.

En este caso se hace necesario ordenar el contenido de volumen desde el cubo (área basal por altura) a prismas rectos cuyas bases corresponden a polígonos de tres o más lados y así poder relacionarlo con el principio de exhaución de Arquímedes, es decir, se espera que a partir de cuerpos conocidos los estudiantes puedan ampliar sus conocimientos a otros cuerpos y desarrollar las fórmulas solicitadas.

Por otra parte, para poder alcanzar el objetivo antes expuesto, el Programa de Estudio de octavo básico, en la última sección de la unidad de geometría, propone ejemplos de actividades las cuales están constituidas mayoritariamente por problemas que implican trabajos algebraicos y/o aplicación de fórmulas para el cálculo de área de superficies y volumen de prismas y cilindros, obviando el desarrollo de dichas formulas.

Por otro lado, cada actividad está asociada a alguna/as habilidades mencionadas en el mismo Programa de Estudio, siendo la habilidad resolver problemas la más frecuente. Es así que en cierta forma es importante que el profesor genere actividades y/o desafíos que tengan congruencia con el desarrollo de habilidades específicas y transversales en las y los estudiantes.

A continuación, se muestran imágenes que respaldan las inferencias realizadas en este párrafo.

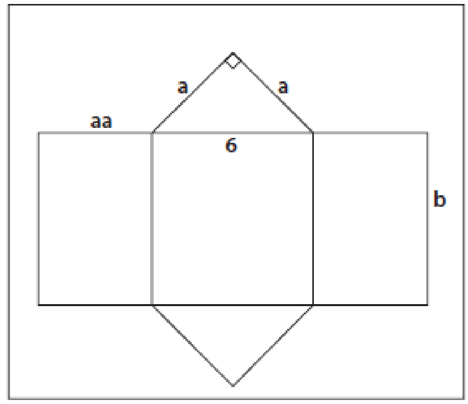
**Resolver problemas**

Comprobar resultados propios y evaluar procedimientos. (OA b)

**Argumentar y comunicar**

Fundamentar conjeturas dando ejemplos y contraejemplos. (OA f)

1. El dibujo muestra la red de una figura 3D.




- Denominan la figura 3D, indicando sus características.
- ¿Cuál es el volumen de la figura 3D?
- Un prisma recto tiene el área A y la altura h. Desarrollan la fórmula para calcular el volumen del prisma.
- Miden los lados a, b y c. Calculan el área de la superficie de la figura 3D.

Imagen 1 (Programa de Estudio de 8° básico, año 2016)

Como se mencionó con anterioridad en la imagen 1 se puede observar que la Actividad 1 sobre la red de un prisma triangular recto, viene con las respectivas habilidades que se desea desarrollar en los estudiantes y en la parte de debajo de la red se puede evidenciar un listado con cuatro puntos de los cuales sólo uno se puede considerar como una pregunta, (¿Cuál es el volumen de la figura 3d?), los demás puntos han sido catalogados como indicadores de evaluación. En la imagen 2 expuesta a continuación se puede evidenciar que las demás actividades del Programa están diseñadas de igual forma.

6. Determinan las medidas faltantes de un cilindro. Despejan la medida faltante de la fórmula del cilindro. Calculan con el valor aproximado de $\pi = 3,14$.
- Radio r = 8 cm, altura h = 25 cm, medida faltante: volumen V.
- Altura h = 16 cm, volumen v = 1,256 l, medida faltante: radio r.
- Volumen V = 14,139 $dm^3$, radio r = 15 cm, medida faltante: altura h.
- Área basal A = 200,96 $cm^2$, volumen v = 3,0144 $dm^3$, medida faltante: altura h.
- Diámetro d= 2,0 m, volumen V = 15,7 $m^3$, medida faltante: altura h.

**Resolver problemas**
Comprobar resultados propios y evaluar procedimientos. (OA b)

**Resolver problemas**
Presentar ideas propias y soluciones utilizando palabras gráficos y símbolos. (OA c)

Imagen 2 (Programa de Estudio de 8° básico, año 2016)

### 1.2.3 Análisis de textos escolares de matemática

**Primer texto**

Para focalizar este análisis, solo se tomará en cuenta la información que entrega el texto y las guías y/o ejemplos referidas al concepto central del estudio de este informe el cual corresponde al volumen del cilindro circular recto. Cabe destacar que todas las imágenes incluidas en el análisis fueron extraídas del “Texto de Estudiante Matemática 8°Basico”, editorial SM, del año 2017.

Este tema se encuentra incluido en la unidad 3 del texto, donde se especifica lo que los estudiantes aprenderán, lo que corresponde al desarrollo de las fórmulas para calcular el área y el volumen de prismas y cilindros. También se especifica el motivo del por qué aprender este contenido, el cual es aplicar las fórmulas de área y volumen de prismas y cilindros a la resolución de problemas, por otra parte, la actitud que se busca desarrollar es “demostrar curiosidad por resolver desafíos matemáticos”.

La presentación de la sección 7 de la unidad de geometría, titulada “Área y volumen de prismas y cilindros”, inicia con el taller “Activo ideas previas” el cual debe desarrollarse en parejas y consiste en la lectura de un breve texto, acompañado de preguntas.

En el texto (Imagen 3) se menciona una anécdota relatada por Eratóstenes, sobre un rey quien enunciaba que, si se duplicaba el lado de un cubo, este duplicaba su volumen inicial. Posteriormente, se reconoce la falsedad del enunciado, dando pie a preguntas referidas al tema.

Tanto en la antigüedad como en la actualidad, la construcción de grandes edificios así como la de pequeños recipientes, necesita de las aplicaciones geométricas desarrolladas por hombres y mujeres de la época. En la Antigua Grecia, por ejemplo, Eratóstenes describió la anécdota sobre la construcción de una tumba cúbica cuya arista medía cien pies, señalando que un rey, al verla, exclamó: "Demasiado pequeña es la tumba. Hacedla el doble de grande. Sin arruinar la forma, rápidamente duplicad cada arista de la tumba". Este error de pensar que para duplicar el volumen de un cubo, se deben duplicar sus aristas, generó uno de los grandes problemas de la época, "la duplicación del cubo".

Imagen 3 (Texto de Estudiante Matemática 8°Basico, año 2017)

Las primeras preguntas se enfocan en una labor de carácter investigativo, ya que están referidas a quien fue Eratóstenes y la veracidad de la anécdota. Las preguntas siguientes, apuntan a la argumentación por parte de los estudiantes respecto a la certeza del enunciado, proponiendo, además, el uso de material concreto. La última pregunta apunta a la comunicación, por parte de los estudiantes, dado que estos deben compartir sus propuestas respecto a cómo duplicar el volumen de un cubo.

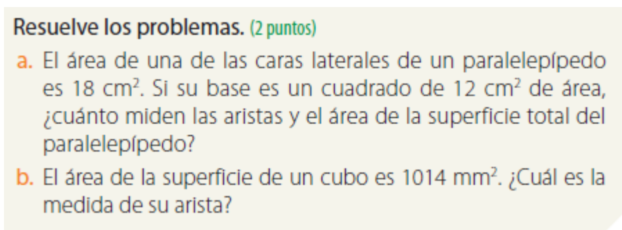
Si bien consideramos apropiada la actividad propuesta, esta pierde potencial al momento de revelar que el enunciado es errado, ya que coarta la posibilidad de que él o la estudiante conjeture respecto a la diferencia de volúmenes basados en la manipulación del material concreto, en lugar de solo corroborar la información presentada.

Posteriormente se plantean preguntas relacionadas a los conocimientos previos de los estudiantes y sus expectativas respecto a que aprenderán en la sección. Dichas preguntas se desarrollan a partir de la imagen de dos objetos: una lata de refresco y una caja cuya forma corresponde a un prisma recto de base hexagonal (Imagen 4), ambos de igual altura.

Imagen 4 (Texto de Estudiante Matemática 8°Basico, año 2017)

La actividad consiste en que los estudiantes logren reconocer y caracterizar los cuerpos presentados, reflexionar en torno al espacio que ocupa un cuerpo e identificar posibles aplicaciones de los contenidos correspondientes a la sección Área y volumen de prismas y cilindros. En relación a los objetos presentados, consideramos poco pertinente el usar una lata de refresco para representar un cilindro, ya que esta presenta variaciones en los radios de las circunferencias que dan forman al cuerpo, sin embargo, no deja de ser una buena actividad para introducir la noción de "espacio que ocupa un cuerpo" a partir de la comparación.

Por otra parte, a modo de activación de conocimientos previos, se presentan actividades que involucran operaciones combinadas entre racionales, resolución de ecuaciones, caracterización de cuerpos geométricos, cálculo de áreas de paralelepípedos y resolver problemas. Respecto a esta última, lo propuesto en el libro se acerca más a un ejercicio, debido a que su solución se desprende de la aplicación directa de propiedades de prismas y aplicación de volumen de un cubo, según Schoenfeld citado por Hugo Barrantes (Barrantes , 2006) “estas serían circunstancias estereotípicas que provocan respuestas estereotípicas, si sucede esto nos encontramos frente a una


**Resuelve los problemas.** (2 puntos)

a. El área de una de las caras laterales de un paralelepípedo es 18 $cm^2$. Si su base es un cuadrado de 12 $cm^2$ de área, ¿cuánto miden las aristas y el área de la superficie total del paralelepípedo?

b. El área de la superficie de un cubo es 1014 $mm^2$. ¿Cuál es la medida de su arista?

Imagen 5 (Texto de Estudiante Matemática 8°Basico, año 2017)

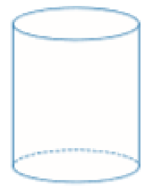
situación que no presenta una resolución problema”, tal como se muestra en la imagen 5.

Después, el texto pasa a la estimación del volumen de prisma y cilindro, la cual se realiza a partir de una unidad cubica representante que es el volumen de un cubo cuya arista mide una unidad. Se propone trabajo con material concreto conformado por dados cúbicos (representantes de la unidad cubica), además de prismas y cilindros, los cuales puedan ser “llenados” con dichos dados (Imagen 6). Al final de la página, se puede observar una definición de volumen (Imagen 7) bastante acertada ya que no se limita a solo presentar el algoritmo que permite calcularlo.

**Situación 2** Representando un cilindro con material concreto

**¿Cómo se puede estimar el volumen de un cilindro?**

Ocuparemos un tubo de papel higiénico para representar un cilindro.



**Paso 1** Rellena el cilindro de papel higiénico con todos los dados que quepan dentro de él.

**Paso 2** Verifica si el cilindro quedó absolutamente lleno con los dados. Luego, cuenta la cantidad de dados que lograste introducir en él.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial: **R:**

Imagen 6 (Texto de Estudiante Matemática 8°Basico, año 2017)

**► Para concluir**

El **volumen** de una figura 3D es la magnitud del espacio que ocupa.

Para estimar el **volumen de un prisma o un cilindro** se puede definir una unidad de volumen y comprobar cuántas veces cabe dentro del prisma o cilindro.

Imagen 7 (Texto de Estudiante Matemática 8°Basico, año 2017)

No obstante, en páginas siguientes se banaliza la definición de volumen, ligándolo única y exclusivamente al algoritmo (el producto entre el área basal y la altura del cuerpo, Imagen 8).

**► Para concluir**

El **volumen V de un prisma o de un cilindro** es el producto entre el área basal $A_B$ y la medida de su altura h:

$$V = A_B \cdot h$$

Imagen 8(Texto de Estudiante Matemática 8°Basico, año 2017)

Posteriormente, se busca estimar el volumen del cilindro mediante el método

de agotamiento, el cual consiste en circunscribir a un mismo círculo (cara basal del cilindro), polígonos regulares de 4, 5 y 6 lados, los cuales son bases de prismas de igual altura que él cilindro (Imagen 9). Posteriormente el documento propone aplicar lo aprendido en ejercicios rutinarios de cálculo de volumen. Cabe destacar que existe un apartado para resolver problemas, los cuales tienen las mismas dificultades mencionadas en párrafos anteriores, por tanto, no serían catalogados como problemas, sino más bien como ejercicios de aplicación.

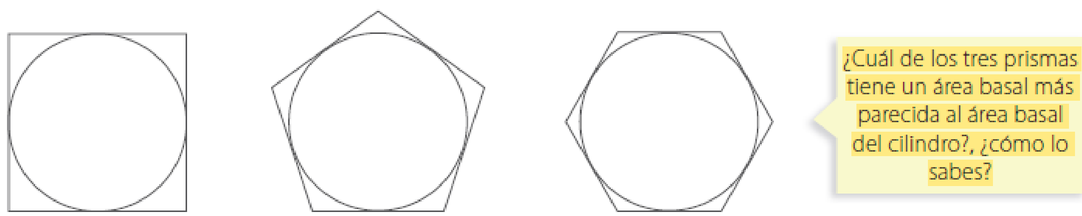
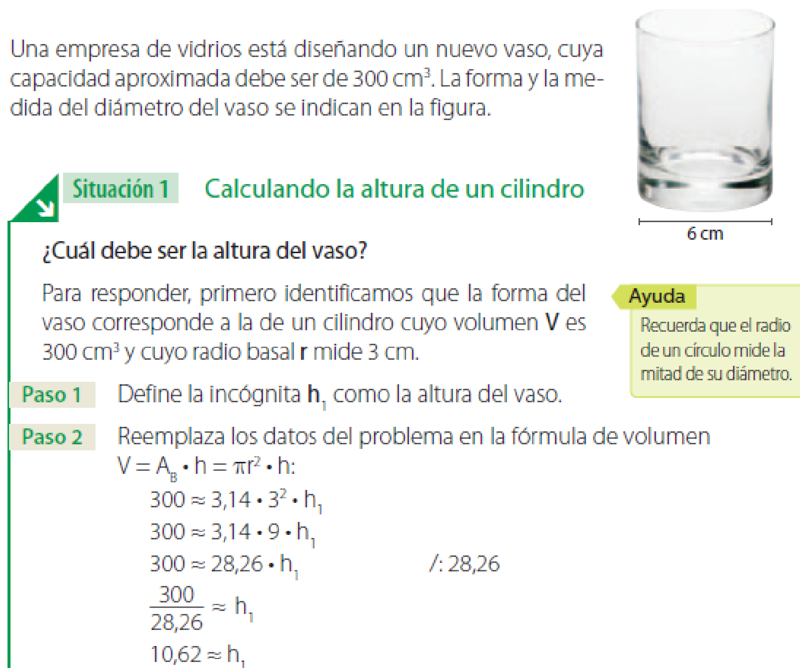



Imagen 9 (Texto de Estudiante Matemática 8°Basico, año 2017)

Para finalizar la lección, se presenta en el texto una aplicación de volumen, para ello se debe calcular la altura de un vaso cilíndrico (Imagen 10) del cual se conoce su capacidad y diámetro. El vaso presente en el texto cuenta con un fondo que genera una diferencia significativa entre el volumen del vaso y su capacidad[1], diferencia que en el texto no son abordadas.

[1] “Puede llamar la atención el hecho de que el volumen y la capacidad aparezcan como sinónimos, cuando usualmente se suele entender el volumen como espacio ocupado y la capacidad como espacio vacío con posibilidad de ser llenado.
Así el término “capacidad” sugiere un barril o recipiente para poner cosas en él, mientras que “volumen” sugiere una cosa que reclama espacio” (Olmo, Moreno y Gil, 2007).


Una empresa de vidrios está diseñando un nuevo vaso, cuya capacidad aproximada debe ser de 300 $cm^3$. La forma y la medida del diámetro del vaso se indican en la figura.

6 cm

**Situación 1** Calculando la altura de un cilindro

**¿Cuál debe ser la altura del vaso?**

Para responder, primero identificamos que la forma del vaso corresponde a la de un cilindro cuyo volumen **V** es 300 $cm^3$ y cuyo radio basal **r** mide 3 cm.

**Ayuda**
Recuerda que el radio de un círculo mide la mitad de su diámetro.

**Paso 1** Define la incógnita $h_1$ como la altura del vaso.

**Paso 2** Reemplaza los datos del problema en la fórmula de volumen $V = A_B \cdot h = \pi r^2 \cdot h$:

$$300 \approx 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot h_1$$
$$300 \approx 3{,}14 \cdot 9 \cdot h_1$$
$$300 \approx 28{,}26 \cdot h_1 \qquad /: 28{,}26$$
$$\frac{300}{28{,}26} \approx h_1$$
$$10{,}62 \approx h_1$$

Imagen 10 (Texto de Estudiante Matemática 8°Basico, año 2017)

Por otra parte, solo se presenta el cilindro recto como representante de cilindros, no obstante, en actividades se incluye el cilindro oblicuo (Imagen 11), lo cual puede generar confusión en los estudiantes ya que son contenidos no tratados por el texto.

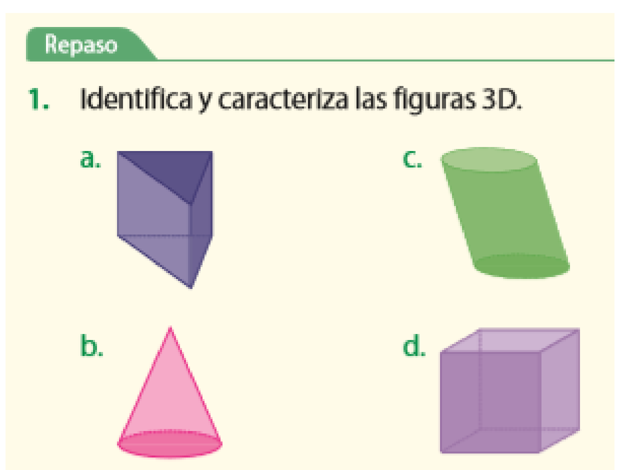



Imagen 11(Texto de Estudiante Matemática 8°Basico, año 2017)

Por último, el texto del estudiante propone constantemente el uso de material concreto para el tratamiento del contenido, lo que concuerda con las propuestas presentes en la guía didáctica, las cuales destacan la importancia del modelo COPISI, sin embargo, las actividades de cierre de la lección se limitan únicamente a identificar un cuerpo para posteriormente emplear el algoritmo apropiado para determinar su área y volumen.

**Segundo texto**

Para focalizar este análisis, solo se tomará en cuenta la información que entrega el texto y las guías y/o ejemplos referidos al concepto central del estudio de este informe el cual corresponde al volumen del cilindro circular recto. Cabe destacar que todas las imágenes incluidas en el análisis fueron extraídas del "Texto de Estudiante Matemática 8°Basico", editorial Galileo, del año 2014.

En este texto escolar el contenido es desarrollado dentro de la cuarta unidad llamada fundamentos de la geometría, en el capítulo 4 volumen de prismas y cilindro, el cual menciona que el aprendizaje esperado es aprender a calcular volumen de prismas y cilindros, dando cuanta de una mirada calculista respecto a la geometría.

El texto comienza definiendo un cilindro y prisma, mostrando una imagen que representa lo mencionado, como se puede apreciar en las imágenes 12 y 13, donde podemos destacar que no se realiza una distinción entre el cilindro circular recto y el oblicuo, admitiendo en la imagen solo el cilindro circular recto. Después el texto presenta un cuadro comparativo donde muestra en palabras, numéricamente y en formula el volumen total de prismas y cilindros (Imagen 14), notar que esta relación no es del todo clara y podría provocar algunas dificultades para el entendimiento del estudiante, además agregar la importancia que en ninguna parte del texto previo a este cuadro se define lo que es el volumen de un cuerpo, ni menos se habla de capacidad.

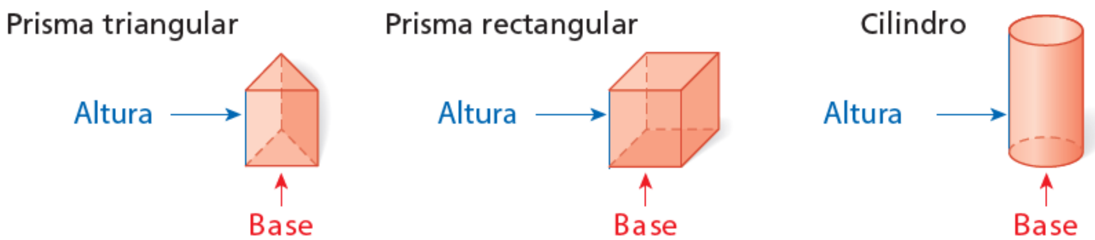



Imagen 12 (Texto Matemática 8°Basico, año 2014)

Recuerda que un **cilindro** es una figura tridimensional que tiene dos bases circulares congruentes y un **prisma** es una figura tridimensional que recibe su nombre según la forma de sus bases. Las dos bases son polígonos congruentes. Todas las otras caras son paralelogramos.

Imagen 13 (Texto Matemática 8°Basico, año 2014)

**B** **Una lata de bebida tiene un radio de 2,5 dm y una altura de 4 dm. Explica si duplicar la altura de la lata tendría el mismo efecto en el volumen que duplicar el radio.**

| Dimensiones originales | Duplicar la altura | Duplicar el radio |
|---|---|---|
| $V = \pi r^2 h$<br>$= 2{,}5^2\pi \cdot 4$<br>$= 25\pi\ \text{dm}^3$ | $V = \pi r^2(2h)$<br>$= 2{,}5^2\pi \cdot 8$<br>$= 50\pi\ \text{dm}^3$ | $V = \pi(2r)^2 h$<br>$= 5^2\pi \cdot 4$<br>$= 100\pi\ \text{dm}^3$ |

Si duplicas la altura, duplicas el volumen. Si duplicas el radio, aumentas cuatro veces el volumen original.

Imagen 14 (Texto Matemática 8°Basico, año 2014)

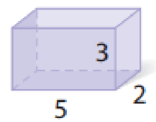
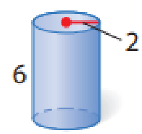
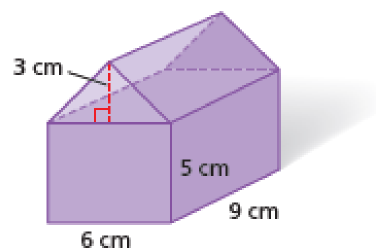
| VOLUMEN TOTAL DE PRISMAS Y CILINDROS | | |
|---|---|---|
| **En palabras** | **Con números** | **Fórmula** |
| **Prisma:** El volumen $V$ de un prisma es el área de la base $B$ por la altura $h$. |   $B = 2(5) = 10$ unidades$^2$; $V = (10)(3) = 30$ unidades$^3$ | $V = Bh$ |
| **Cilindro:** El volumen $V$ de un cilindro es el área de la base $B$ por la altura $h$. |   $B = \pi\,(2^2) = 4\pi$ unidades$^2$; $V = (4\pi)(6) = 24\pi \approx 75{,}4$ unidades$^3$ | $V = Bh$<br>$V = \pi r^2 h$ |

Imagen 15 (Texto Matemática 8°Basico, año 2014)

**EJEMPLO 4** **Encontrar el volumen de figuras compuestas**

**Encuentra el volumen de la figura:**

Volumen de la figura = Volumen del prisma rectangular + Volumen del prisma triangular




$$\begin{aligned} V &= (6)(9)(5) + \tfrac{1}{2}(6)(3)(9) \\ &= 270 + 81 \\ &= 351\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

El volumen es de 351 cm³.

Imagen 16 (Texto Matemática 8°Basico, año 2014)

Posterior al cuadro comparativo, el capítulo procede a mostrar ejemplos resueltos para encontrar el volumen de prismas y cilindros, explorar efectos de dimensiones que cambian en los cuerpos, aplicación a la música (esto solo se remite a calcular el volumen de un tambor), encontrar el volumen de figuras compuestas y explorar cambios de dimensiones manteniendo el volumen, las imágenes 15 y 16 muestran algunos de estos ejemplos.

Luego se proponen ejercicios que tienen relación directa con los ejemplos (cada ejercicio lleva como referencia al lector observar el ejemplo donde se planteó un ejercicio similar). Como se puede apreciar hasta esta instancia, el documento en lo único que se ha enfocado es en mecanizar al estudiante para que este realice reproducción de lo planteado anteriormente en la aplicación de la fórmula del volumen de prismas y cilindros.

**16.** En un campo donde se cultiva trigo, necesitan almacenar la producción de la temporada. Para ello necesitan construir un silo que contenga 80 metros cúbicos. ¿Qué dimensiones sugieres?

Imagen 17 (Texto Matemática 8°Basico, año 2014)

El texto luego tiene un apartado para practica y resolución de problemas, donde salen problemas como el mostrado en la ilustración 18, donde este no cuenta con una solución inmediata, y tiene un pequeño problema debido a que no da ninguna sugerencia para utilizar $\pi$ como un número racional aproximado (esto es pertinente debido a que la pregunta pide las posibles medidas de las dimensiones del silo) y poder despejar $r^2h = \frac{80}{\pi}$, para que el estudiante pueda proponer medidas para el radio y la altura por ejemplo por tanteo, salvo este detalle este podría ser considerado como un problema, debido a que no es una situación estereotípica, dado que depende de las formas en las cuales el estudiante pueda plantear el radio y la altura (por tanteo, generando dependencia entre el radio y la altura, sabiendo que la altura no puede ser nula el alumno puede encontrar posibles medidas), siendo esta una respuesta no estereotípica. También se presentan como problemas lo que muestra la imagen 17 donde si bien el estudiante debe corregir, esta corrección se desprende de la aplicación directa del volumen del cuerpo, siendo esta una respuesta estereotípica, dejando este enunciado en una categoría de ejercicio.

Por último, se presentan dos páginas que muestran posibles actividades para desarrollar del contenido donde se sugiere el trabajo con material concreto como modelo de exploración para el volumen de prismas rectangulares y cilindros. Estas actividades apuntan más a lo que piden los programas de estudio, ahora bien estas no se encuentran relacionadas con lo expuesto en los párrafos anteriores, aquí se observa un desarrollo con respecto al contenido donde se apela a que el estudiante interactúe con el concepto, no obstante, este tipo de actividades deben estar primero que todo el contenido mostrado anteriormente en el capítulo y enlazado de tal manera que los estudiantes vayan, a medida que se lleva a cabo la actividad, desarrollando propias conjeturas que le den indicio del cálculo del volumen y no resumir todo a la fórmula y a la caracterización de las figuras de una manera tradicionalista.

### 1.2.4 Antecedentes de tipo cognitivo

El volumen del cilindro circular recto está referido al espacio que ocupa el cuerpo, entonces para comprender bien el concepto de volumen la persona debe adquirir esta noción de espacio. El espacio es el entorno(dimensión) en la cual vivimos, por ende, nos encontramos en constantes representaciones del mismo a diferentes escalas (un contenedor de gas, una piscina, una caja, una botella, entre otros), y esto es desde las edades más tempranas[2]. Real (2009, pág.4) comenta al respecto:

> "La percepción del espacio se realiza a través del contacto con el entorno, ya que permite al niño/a situarse en el espacio y reconocerlo. La exploración del espacio es una actividad vital, especialmente en las primeras edades y los niños lo hacen a medida que se relacionan con el medio. Esta exploración del espacio va muy ligada al movimiento y a los juegos sensoriales. La exploración incluirá desde grandes espacios a espacios más pequeños y de formas diferentes. Esta exploración incluirá el volumen y el plano."

Es de esta manera como la exploración se traduce en las situaciones que plantea el docente, las cuales como ya hemos visto, suelen ser desde una perspectiva tradicional, lo cual si lo contrastamos con respecto a lo mencionado anteriormente (el cómo se adquiere la noción de espacio) podríamos ver dificultades debido a que se entrega la geometría como un producto acabado, lo que provoca que el estudiante no interactúe con el medio, con el espacio, y este haga reproducciones de fórmulas sin sentido.

### 1.2.5 Antecedentes de aprendizajes

Chile, como miembro de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), ha participado continuamente en el Programa Internacional de Evaluación de estudiantes (PISA, por *The Programme for International Student Assessment*), cuyo propósito es "conocer cuán exitosos están siendo los sistemas educativos en preparar a las nuevas generaciones con las competencias y habilidades necesarias para vivir, actuar y alcanzar

[2] Piaget y otros (1948) realizan un estudio con conservación de líquidos con trasvaso de distintos contenedores, y llegan a la conclusión que los niños de entre seis años y medio y ocho años son capaces de reconocer cuando el líquido permanece constante de un contenedor a otro, lo cual da señas de que a estas tempranas edades los niños son capaces de adquirir el concepto de capacidad. Lunzer (1960) estudia la conservación del volumen con niños de entre seis y ocho años, e indica que la conservación del volumen surge en estas edades, pero esta conservación requiere actividades de inmersión, que por lo general la escuela no proporciona, por lo tanto, se demoran más en alcanzarla.

sus objetivos en la sociedad del siglo XXI" (Agencia de Calidad de la Educación de Chile, 2017).

Para ello, se evalúa a estudiantes de distintos niveles, en particular, de 15 años (próximos a finalizar la educación obligatoria) en las áreas de Ciencias Naturales, Lectura, Matemática, entre otras; con el fin de recopilar información referida al desarrollo de competencias en dichas áreas, permitiendo realizar comparaciones e investigaciones a nivel internacional. Las evaluaciones se realizan en intervalos de tres años, siendo el 2015 la última vez que se aplicó en Chile.

La evaluación de competencias matemáticas aplicada a estudiantes de segundo medio en el año 2015, clasifica los puntajes obtenidos por los y las estudiantes en 5 niveles de acuerdo a las características de las actividades que ellos logran resolver, estos se ordenan de manera creciente de acuerdo a la complejidad de dichas actividades.

El primer nivel se caracteriza por ser insuficiente respecto a competencias matemáticas, dado que los estudiantes solo logran desarrollar tareas o actividades donde, tanto la información como la pregunta se presentan de manera explícita, destacando únicamente la habilidad de reconocer información.

El segundo nivel se diferencia del primero debido a que los estudiantes "pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que requieren una inferencia directa. Pueden extraer información relevante de una sola fuente y usar un único modo de representación. Los estudiantes de este nivel pueden emplear algoritmos básicos, fórmulas, procedimientos o convenciones para resolver problemas con números enteros. Ellos son capaces de hacer interpretaciones literales de los resultados" (Agencia de Calidad de la Educación de Chile, 2017).

En el tercer nivel en cambio, los estudiantes "pueden ejecutar procedimientos claramente descritos, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Sus interpretaciones son suficientemente sólidas como para ser base para la construcción de un modelo simple o para seleccionar y aplicar estrategias de resolución de problemas sencillos. Los estudiantes de este nivel pueden interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente sobre ellas. Por lo general muestran una cierta capacidad para manejar porcentajes, fracciones y números decimales, y para trabajar con relaciones proporcionales. Las soluciones a que llegan, reflejan que se involucran en la interpretación y el razonamiento básicos" (Agencia de Calidad de la Educación de Chile, 2017).

Por otra parte, en el nivel 4 los estudiantes "pueden trabajar eficazmente con modelos explícitos en situaciones complejas concretas que pueden implicar restricciones o exigen hacer suposiciones. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo representaciones simbólicas, vinculándolas directamente con aspectos de situaciones del mundo real. Los estudiantes de este nivel pueden usar una limitada gama de habilidades y pueden razonar con cierto nivel de comprensión, en contextos sencillos. Pueden construir y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, razonamientos y acciones" (Agencia de Calidad de la Educación de Chile, 2017).

Por último, en el nivel 5, los estudiantes "pueden desarrollar y trabajar con modelos para situaciones complejas, identificando las limitaciones y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias de resolución de problemas apropiadas que permiten hacer frente a problemas complejos relacionados con estos modelos. Los estudiantes de este nivel pueden trabajar estratégicamente usando un pensamiento amplio y bien desarrollado, y habilidades de razonamiento, representaciones relacionadas apropiadas, caracterizaciones simbólicas y formales, y conocimientos relacionados con estas situaciones. Ellos comienzan a reflexionar sobre su trabajo y pueden formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos” (Agencia de Calidad de la Educación de Chile, 2017).

Con bases en lo anteriormente descrito, podemos afirmar que desde el nivel 4 en adelante, las y los estudiantes dan cuenta del desarrollo de habilidades de comunicación y argumentación, las cuales son relevantes dentro de esta investigación.

Respecto a los resultados obtenidos en la evaluación, publicados por la OCDE y la Agencia de la Calidad de la Educación, el 49,4% de las y los estudiantes evaluados en Chile están por debajo del nivel 2, los cuales de acuerdo con la Agencia de la Calidad de la Educación “no alcanzan las competencias mínimas requeridas para participar completamente en una sociedad moderna” (Agencia de Calidad de la Educación de Chile, 2017); mientras que, por otra parte, un 92,2% de los y las estudiantes se encuentran por debajo del nivel 4, dando cuenta del bajo desempeño de los estudiantes en actividades que involucran las habilidades de argumentar y comunicar. Además, cabe destacar que en los resultados obtenidos el año 2015 no se presenta mayor variación respecto a los obtenidos en el 2006.

## 1.3 Objetivos

**Objetivo general:**

Categorizar las producciones de las y los estudiantes en situaciones que involucren las habilidades de argumentar y comunicar, para corroborar si la enseñanza del área de superficies y volumen de prismas y cilindros desde un paradigma constructivista contribuye al desarrollo de dichas habilidades en estudiantes de octavo básico.

**Objetivos específicos:**

A.- Diseñar y aplicar evaluación diagnóstica que permita determinar en qué nivel se encuentran los estudiantes según Van Hiele y en la habilidad de argumentar y comunicar en geometría.

B.- Analizar los resultados obtenidos en la evaluación diagnostica, para determinar en qué nivel (según Van Hiele) se encuentran los estudiantes

C.- Diseñar y aplicar una secuencia didáctica bajo una perspectiva constructivista sobre el área de superficie y volumen de prismas y cilindros.

D.- Contrastar las respuestas de los estudiantes que presentaron a cada situación clave aplicadas en la secuencia de clases, evidenciando lo sucedido en relación a los análisis del punto anterior. Sacando conclusiones que permitan definir el objetivo general y respondan la pregunta de investigación.

# CAPITULO II
# OBJETO MATEMÁTICO

La matemática no es el conjunto de fórmulas, algoritmos y trivializaciones que comúnmente son presentadas por el paradigma tradicionalista de la disciplina, sino más bien, estas son cristalizaciones que se logran formar a lo largo del tiempo, las cuales siempre tienen contexto y lugar de origen. Es por este motivo que se hace imperante hacer estudios de la epistemología de los conceptos matemáticos, para que de esta manera exista comprensión y adquisición del objeto desde su desarrollo histórico, para poder evidenciar de manera tangible la necesidad de éste en nuestras vidas. Para ello se introduce el área y volumen de figuras y cuerpos desde la intrínseca necesidad de medición del ser humano y que esta necesita de modelos matemáticos que resalten la precisión de estas mediciones.

Bajo el nacimiento de la teoría de conjuntos de Georg Cantor (1874) y el desarrollo de la teoría de funciones desde Oresme hasta Goursat (1382-1923), es como se da inicio al estudio del concepto actual y formal del algoritmo de área y volumen de prismas y cilindros, específicamente ubicando éste en el análisis matemático por medio de funciones.

## 2.1 Elementos de la epistemología del objeto matemático.

Resulta innegable el hecho de que la necesidad de medir es inherente al ser humano, más aún, cuando nos referimos a cuerpos o sólidos dado que, al igual que nosotros, estos radican en el espacio. Ante esto, es posible señalar que el desarrollo del concepto de volumen pudo verse fuertemente influenciado por la necesidad de precisar cuánto espacio ocupa un cuerpo y cuál es el espacio interior de un cuerpo (concepto ligado a la capacidad), útil para determinar cantidad de líquidos o cosechas. No obstante, existen numerosos registros que dan cuenta de cómo el volumen también fue objeto de estudio para distintas civilizaciones, más allá de las necesidades métricas.

Es así, que desde la Edad Antigua muchas civilizaciones, ante dicha necesidad e interés, han desarrollado formas de determinar el volumen de sólidos, por ejemplo, tal como se menciona en el libro La Historia de las Matemáticas de Carl Boyer, tanto mesopotámicos (6.000 a.C. aproximadamente) como egipcios[3] (1.890 a.C.) calculaban volúmenes de troncos de pirámides y conos mediante la narración de procedimientos que condicen a la aplicación de la fórmula actual. Otra de las civilizaciones que destacan por sus aportes significativos respecto al cálculo de volumen es la griega donde sobresalen matemáticos como Arquitas (428 a.C.), Eudoxo (390 a.C.), Euclides (325 a.C.) y Arquímedes (287 a.C.). El primer autor en ser mencionado, contemporáneo a Platón, destaca por solucionar uno de los tres problemas clásicos de la antigüedad[4], Arquitas logra realizar la duplicación de un cubo desde la geometría sintética, lo que da cuenta del trabajo con figuras tridimensionales y el concepto de volumen. Por otra parte, el segundo autor trabajó el Método de exhaución el cual es fundamental para poder realizar las demostraciones de áreas y volúmenes de figuras y cuerpos curvilíneos como el cilindro circular recto. Respecto a Euclides en el Libro XI de su obra Los Elementos define los conceptos de “sólido como <<lo que tiene longitud, anchura y profundidad>>, y entonces nos dice que <<una frontera de un sólido es una superficie>>” (Boyer, 2010); mientras que en Libro XII da cuenta de la utilización del método de exhaución al cálculo de volúmenes de pirámides, conos, cilindros y esferas. Por último, Arquímedes utiliza el mismo método antes mencionado para el trabajo con volúmenes de

[3] En el Papiro de Moscú, uno de los antecedentes matemáticos más importantes del antiguo Egipto, da cuenta del cálculo de volumen de troncos de pirámides.

[4] Los tres problemas clásicos o famosos de la antigüedad, tal como los presenta Carl Boyer, son la cuadratura del círculo, la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo o problema de Delos.

cilindros, conos y esferas, enunciando teoremas y corolarios referidos a la proporcionalidad entre estos cuerpos[5]. Cabe destacar que posiblemente muchos de los logros matemáticos atribuidos a los griegos sean procedentes de civilizaciones más antiguas, lo que debido a la falta de registros no se ha podido determinar.

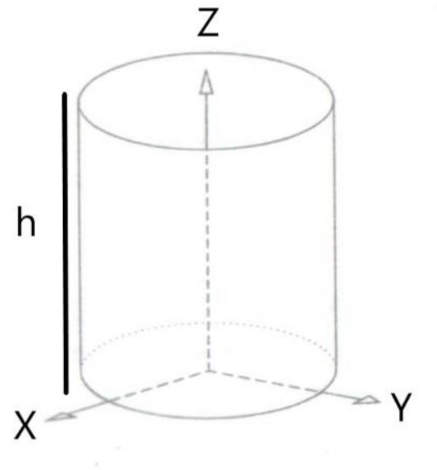
El paso a la modernidad produjo cambios en la concepción de algunos conceptos geométricos, incluido el concepto de volumen el cual es entendido como una función (campo escalar) que relaciona el espacio que ocupa un cuerpo con un número real (medida).

## 2.2 Estatus actual del concepto matemático

Tras el nacimiento del cálculo integral (desarrollado por Newton y Leibniz), concepto fundamental del análisis matemático, se torna una herramienta que se utiliza principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos por revolución (entendiendo el volumen como una función), podemos hacer un estudio del objeto matemático, específicamente el desarrollo de la fórmula del volumen de un cilindro, tras el proceso de integración múltiple de la siguiente manera.

La integral múltiple que define el volumen del cilindro circular recto esta expresada por, $\boldsymbol{V_r} = \int\int\int \boldsymbol{dv}$ donde la región de integración sería el Volumen, es decir, observando el plano $XY$ tenemos que $\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{y^2} = \boldsymbol{r^2}$, donde

[5]Tal como se señala en el texto Tratados I de Arquímedes, este enuncio dos teoremas y un corolario, en los cuales se presenta que el cilindro es el séxtuple del cono que tiene igual base y altura igual al radio del circulo basal, mientras que la esfera es el cuádruple del cono que tiene la base igual a al círculo máximo de la esfera y altura igual al radio de la esfera, de lo que desprende que “todo cilindro que tenga por base el circulo máximo de los de la esfera y altura igual al diámetro de la esfera es una vez y media la esfera” (Arquímedes y Eutocio, 2005).




$r$ es radio (constante), de lo que obtenemos $-\sqrt{\boldsymbol{r^2-x^2}} < \boldsymbol{y} < \sqrt{\boldsymbol{r^2-x^2}}$**,** también $-\boldsymbol{r} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{r}$ y por otra parte tendremos que $\boldsymbol{0} < \boldsymbol{z} < \boldsymbol{h}$, con lo cual podremos rescribir nuestra primera integral de la siguiente manera (Imagen18):

Imagen 18

$$V_r = \int\int\int dv = \int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\int_{0}^{h} dzdydx \Rightarrow h\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dydx$$

$$\Rightarrow 2h\int_{-r}^{r}\sqrt{\boldsymbol{r^2-x^2}}\,dx \Rightarrow 2h\left[\frac{r^2}{2}\sqrt{r^2-r^2}+\frac{r^2}{2}arcsen\frac{r}{r}-\left(\frac{r^2}{2}\sqrt{r^2-r^2}+\frac{r^2}{2}arcsen\frac{-r}{r}\right)\right]$$

$$= 2h\left[\frac{r^2}{2}\frac{\pi}{2}+\frac{r^2}{2}\frac{\pi}{2}\right] = 2h\frac{r^2\pi}{2} = \pi r^2 h$$

Teniendo así que el volumen de un cilindro circular recto de radio $r$ y altura $h$ esta dado por la expresión $\pi r^2 h$. (análogamente se obtienen las fórmulas para el volumen de cualquier prisma recto)

Si bien no se aborda el cálculo integral en la secuencia de enseñanza, resulta primordial tener en consideración aspectos de la epistemología y estatus actual del objeto matemático al momento de diseñar la secuencia para así, evitar incurrir en posibles obstáculos epistemológicos (Brousseau, 1998) que den cuenta de inconsistencias en las actividades a proponer.

Por otra parte, es necesario considerar dos postulados necesarios para el diseño de actividades y cumplimiento de los objetivos de aprendizajes propuestos por el ministerio de educación. Dichos postulados están referidos a la adición de áreas y volúmenes.

- "Si un sólido es la unión de dos sólidos que no tienen puntos interiores en común, entonces su volumen es la suma de los volúmenes de los dos sólidos" (Clemens, O'Daffer y Cooney, 1998).
- "Si una región poligonal es la unión de $n$ regiones poligonales que no se solapan, su área es la suma de las áreas de las $n$ regiones" (Clemens, O'Daffer y Cooney, 1998)

Cabe destacar que, por sus estatus de postulados, estos no requieren de demostración ya que se asumen como ciertos.

# CAPÍTULO III
# MARCO REFERENCIAL

El contenido desarrollado en este trabajo corresponde al eje de geometría y como tal se hace necesario un modelo adecuado que nos facilite el estudio y análisis de las situaciones claves de aula que se desarrollaron para este trabajo de investigación. Es por esto que el marco de referencia es la herramienta que nos ayuda a contrastar las estrategias de los estudiantes, para poder evidenciar el progreso y dilucidar si las estrategias planteadas para abordar el contenido son eficientes para el desarrollo de habilidades, el cual, es el foco central del trabajo.

Para poder llevar a cabo los objetivos específicos y con esto nuestro objetivo general, se fundamenta el trabajo con el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, el cual es un modelo de enseñanza y aprendizaje de la geometría. Este explica el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes dividiéndolos en cinco niveles sucesivos: la visualización, el análisis, deducción informal, la deducción formal y el rigor. Se sitúa al alumno en uno de estos niveles (esto se hace por medio de un diagnóstico) al inicio del aprendizaje, y a medida que el alumno vaya cumpliendo con su proceso, avanza a un nivel superior. El modelo también proporciona una pauta organizada para que el docente diseñe situaciones de aprendizaje que ayuden al estudiante en el progreso de los niveles, esto lo realiza por medio de cinco fases sucesivas: la información, la orientación dirigida, la explicitación, la orientación libre y la integración. A continuación, se presentan los rasgos que destacan del modelo, para luego detallar cada nivel y fase respecto del aspecto que describen, según Gamboa y Vargas (2013):

Esté modelo abarca dos aspectos básicos:

- Descriptivo: mediante esté se identifican diferentes formas de razonamiento geométrico de los individuos y se puede valorar su progreso (niveles).

- Instructivo: marca pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en el nivel de razonamiento geométrico en el que se encuentran (fases).

**Descriptivo.**

Primer nivel: Visualización
Se reconocen las figuras geométricas como un todo. No existe reconocimiento de propiedades de las figuras. No existe lenguaje geométrico básico.

Segundo nivel. Análisis
Se reconocen y analizan partes y propiedades de figuras específicas, sin embargo, no se pueden clasificar en las distintas familias de figuras. Se establecen propiedades por medio de experimentación y manipulación, pero el discente no es capaz de elaborar definiciones.

Tercer nivel: Deducción informal
Existe comprensión y reconocimiento de las figuras por sus propiedades, relacionándolas entre sí y entre sus familias de figuras. La definición adquiere significado. No se puede realizar razonamiento lógico formal.

Cuarto nivel: Deducción formal
Se realizan deducciones y demostraciones formales. Se entiende la naturaleza axiomática de la matemática. No se reconoce la necesidad de rigor en el razonamiento.

Quinto nivel: Rigor

Puede apreciar la consistencia, independencia y completitud de los axiomas de los fundamentos de la geometría. Capta la geometría en forma abstracta.

**Instructivo.**

Primera fase: “Información”

El profesor debe diagnosticar los conocimientos previos de los alumnos sobre el tema que se va a desarrollar y la forma de razonar que tienen los alumnos con respecto a éste.

Segunda fase: “Orientación dirigida”

El profesor debe guiar el proceso para que los alumnos vayan descubriendo lo que va a constituir el desarrollo del concepto. Esta fase es el centro del aprendizaje, que le va permitir al estudiante a pasar de un nivel a otro superior, y construir los elementos propuestos. El profesor debe planificar las actividades que le permitan establecer propiedades y elementos básicos del contenido.

Tercera fase: “Explicitación”

Los alumnos deben estar conscientes de las características y propiedades aprendidas anteriormente, exponiendo y discutiendo sus ideas con los pares, para posteriormente, consolidar el vocabulario propio del nivel, lo que corresponde a describir las estructuras de los conceptos trabajos.

Cuarta fase: “Orientación libre”

Consolidar los conceptos adquiridos en el nivel anterior ampliando sus aplicaciones a ejercicios y problemas de mayor dificultad que los propuestos anteriormente. El docente limita su interacción solo como un guía.

Quinta fase: “Integración”

Tiene por objetivo establecer y completar las relaciones que profundicen el concepto, estableciendo una visión global entre el aprendizaje adquirido y los ya existentes en el estudiante.

En una primera instancia debemos aplicar la fase de información, la cual consiste en conocer los conocimientos previos con respecto al contenido, esto se lleva a cabo por medio de un diagnóstico, para efectos del trabajo y el cumplimiento de nuestro objetivo general, este diagnóstico estará centrado en ubicar el nivel de los estudiantes con respecto a sus habilidades de argumentar y comunicar con relación directa a el área y volumen de prismas y cilindro circular recto.

Tras los resultados del diagnóstico y saber en qué nivel se encuentran los estudiantes, se diseñan y aplican clases que cumplan con desarrollar todas las fases que propone Van Hiele y así poder ayudar en el progreso de nivel de los estudiantes con respecto a el área y volumen de prismas y cilindro circular recto.

Luego se analizan las producciones de los estudiantes para cada situación clave que se diseñó para la secuencia, esto se realiza con el modelo de razonamiento geométrico, ubicando cada respuesta en una categoría y relacionándola con los niveles de Van Hiele, para luego tener resultados, que se obtienen de comparar lo que se esperaba en cada actividad clave y lo que realizaron los estudiantes, y finalmente redactar conclusiones con respecto a esta comparación.

# CAPÍTULO IV
# ENFOQUE METODOLÓGICO

Para poder realizar está investigación de tipo cualitativa nos vemos en la necesidad de fijar ciertos parámetros que nos ayuden a establecer la forma en cómo debemos llevar a cabo el proceso investigativo. Así, en este cuarto capítulo se abordan las dos metodologías utilizadas por nuestro grupo al momento de diseñar la propuesta de enseñanza, las que corresponden al nivel de micro ingeniería de la Ingeniería didáctica (De Faria, 2006) y además la Metodología de Estudio de Clase (MEC).

## 4.1 Elementos de Ingeniería didáctica

La ingeniería didáctica (ID) se utiliza en la didáctica de la matemática como un método de investigación y un productor de proyectos de enseñanza-aprendizaje, por lo cual se diseñó una secuencia de clases organizadas en torno al concepto matemático del volumen del cilindro circular recto y en el grupo curso de octavo básico A del colegio Nuestra Señora de Andacollo.

El proceso experimental del ID consta de cuatro fases: análisis preliminares, concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas planteadas, experimentación, análisis a posteriori y evaluación.

Regidos por lo anterior, en la primera fase se realizó un análisis preliminar considerando aspectos de la epistemología del concepto volumen, la dimensión cognitiva en que se mencionan las características de los estudiantes y la dimensión didáctica que está directamente relacionada a como se propone la enseñanza en dos textos escolares y los planes de estudio de octavo básico de Matemática.

En la segunda fase se diseñó la propuesta de enseñanza-aprendizaje en donde tuvimos que realizar ciertos análisis a priori sobre las situaciones más relevantes de la secuencia. En cada análisis a priori se consideró tanto la respuesta experta como también los obstáculos involucrados en la situación, los errores cometidos y las estrategias de resolución de los estudiantes.

Luego, en la tercera fase se implementó la secuencia de enseñanza de la cual obtuvimos la información necesaria para poder reflexionar acerca de nuestras decisiones y justificaciones del porqué de nuestro diseño, siendo fundamental en esta fase la participación de las y los estudiantes y la recopilación de información.

De la fase de experimentación se obtuvieron los resultados y se realizó el análisis a posteriori de las producciones de las y los estudiantes sobre las situaciones más relevantes, para ser contrastado con el análisis a priori y así dilucidar si nuestra propuesta logra darnos la información necesaria para dar respuesta a la pregunta de investigación planteada.

## 4.2 Metodología de Estudio de Clase

Dentro de la secuencia de enseñanza diseñada, una de las clases se planificó desde el enfoque de la Metodología de Estudio de Clase (MEC), la cual es un proceso en el que las y los profesores utilizan el trabajo colaborativo para mejorar las prácticas pedagógicas y métodos de enseñanza y además sociabilizan sus clases con la idea de ir perfeccionando cada vez más alguna propuesta de enseñanza. Mena (2016) menciona que esta metodología

> Consta de tres aspectos bien definidos, que se realizan de forma reiterada, de manera de mejorar progresivamente su diseño y

> ejecución: un grupo de profesores prepara una clase (o conjunto de clases), luego uno de ellos la enseña públicamente –asisten no sólo quienes la prepararon– y finalmente se hace una sesión de revisión y crítica.

Así dentro de estos aspectos definidos por Mena (2016), durante la preparación de la clase nos centramos en la gestión de un problema para luego ser compartido junto al respectivo plan de clases con el resto de los y las compañeras y una docente experta que componen el equipo de trabajo. A partir de la puesta en común surgieron comentarios y apreciaciones que nos sirvieron para mejorar la propuesta inicial y así dejar el problema y el plan de clases listo para su aplicación. Luego un integrante del grupo de investigación aplicó la clase diseñada en el Colegio Nuestra Señora de Andacollo, la cual quedó registrada en formato audiovisual para ser mostrada al resto del curso, permitiendo realizar la sesión de revisión y/o retroalimentación con el objetivo de seguir perfeccionando el problema o la clase en cuestión. Cabe destacar que por temas de logística no puede estar todo el equipo de trabajo observando la clase, por lo que se recurre al registro audiovisual.

# CAPÍTULO V

# SECUENCIA DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Como se ha mencionado con anterioridad la investigación que realizó el grupo es de tipo cualitativa por ende las respuestas y producciones de las y los estudiantes son nuestra principal fuente de información, respuestas que son intencionadas desde nuestros diseños de ejercicios, actividades y problemas. Es por esto, que en este capítulo se aborda la secuencia de Enseñanza Aprendizaje con sus respectivas justificaciones, para esto se presentará una descripción de la secuencia donde se incluirá el objetivo de aprendizaje a lograr, las metas de cada clase, los aprendizajes previos que deben tener las y los estudiantes para poder desarrollar un nuevo conocimiento y las guías de trabajo utilizadas dentro de la secuencia aludida anteriormente. Además, es fundamental exponer que cada plan de clase incluye al menos una situación clave con su respectivo análisis a priori.

## 5.1 Descripción Secuencia Enseñanza Aprendizaje

En la tabla 1 se muestra el objetivo general de la secuencia de Enseñanza Aprendizaje extraído desde el Plan de Estudio de octavo básico de Matemática (pág. 53). Dentro de la tabla se sintetiza el desglose enfocado en tres criterios, cada sesión con su respectiva meta o metas de aprendizaje, aprendizajes previos o conocimientos necesarios que deben tener los alumnos para el desarrollo de cada clase y las guías o instrumentos de verificación utilizados en de la secuencia.

| Objetivo de aprendizaje: Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros | | | |
|---|---|---|---|
| **Número de sesión** | **Meta de la clase** | **Conocimientos previos** | **Guías o actividad clave** |
| 1 | Evaluar los conocimientos previos de los estudiantes, apuntando a la habilidad de argumentar y comunicar.<br><br>Activar conocimientos previos. | Áreas de superficies de figuras geométricas en el plano (rectángulo, cuadrado, triángulo) y en el espacio (cubo y paralelepípedo).<br>Volumen de cuerpos geométricos. | Evaluación de diagnóstico. |
| 2 | Recordar la definición de área de superficies y realizar estimación de áreas | Cálculo de área de superficies de figuras planas | Actividad de estimación de la pizarra. |
| 3 | Inferir las fórmulas para el cálculo de área de prismas | Cálculo de área de superficies de figuras planas y suma de áreas | Guía de actividad para reproducir prismas a partir de una cara basal. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | Caracterizar el cilindro e inferir la fórmula del área de la superficie del cilindro | Áreas de redes de prismas de distintas bases | MEC |
| 5 | Recordar el concepto de volumen y estimar volumen de cuerpos. | Área de superficies | Actividad de duplicación de la arista de un cubo y estimación de volumen |
| 6 | inferir la fórmula del cálculo de volumen de prisma y extender el cálculo del volumen del prisma al cilindro | Volumen de un cubo<br>Comparación de áreas | Actividad par inferir la formula del volumen del prisma |
| 7 | Aplicar las fórmulas de área y volumen de prismas y cilindros a resolución de problemas geométricos y de la vida diaria | Áreas de superficies y volumen de prismas y cilindros | Guía de desafíos. |
| 8 | Evaluar la unidad de Área y volumen de prismas y cilindros | | Prueba de la unidad. |

Tabla 1

## 5.2 Guías de trabajo

A continuación, se presentarán las guías utilizadas en los planes de clase, exponiendo de manera breve en que consiste y señalando el objetivo para la cual fue diseñada.

**Plan de clase 1: Diagnóstico.**

Este es un instrumento de evaluación el cual tiene como tarea principal evidenciar el nivel según Van Hiele que tienen los estudiantes con respecto a sus conocimientos previos y la habilidad de argumentar y comunicar. Para esto se consideran que todas las preguntas planteadas en esta evaluación estarían correctas considerando un nivel 3 de respuesta de los estudiantes, es decir, según Vargas y Gamboa (2013) el estudiante tiene comprensión y reconocimiento de figuras por sus propiedades, relacionándolas entre sí y entre familias de figuras, la definición adquiere significado para es discente. A continuación, se presenta el diagnóstico con sus respectivas respuestas aludidas al nivel 3.

Evaluación diagnóstica de geometría

$8^{vo}$básico

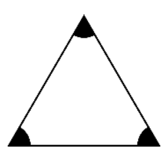
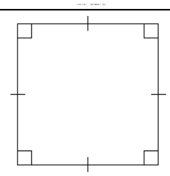
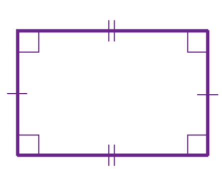
Nombre: ____________________________________________________ Fecha: ___________

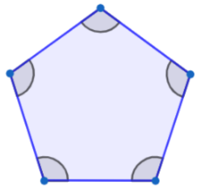
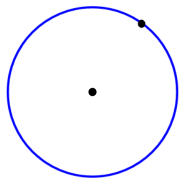
**Indicaciones:** La evaluación es de carácter individual y no está permitido el uso de celular.

1.- A partir de las imágenes mostradas en la tabla, completa:

a) Nombra cada figura.

b) Caracteriza cada una de estas figuras.

| Figuras | Nombre y características |
|---|---|
|  | a) Triángulo equilátero<br>b) figura conformada por tres lados y tres ángulos congruentes. |
|  | a) Cuadrado<br>b) Paralelogramo de ángulos interiores rectos, cuyos lados son congruentes. |
|  | a) Rectángulo<br>b) Paralelogramo de ángulos interiores rectos, cuyos lados opuestos o paralelos son congruentes. |

| | |
|---|---|
|  | a) Pentágono regular<br>b) Polígono regular de cinco lados de igual medida y ángulos interiores son congruentes. |
|  | a) Circulo o circunferencia<br>b) circunferencia: lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.<br>Circulo: superficie delimitada por una circunferencia. |

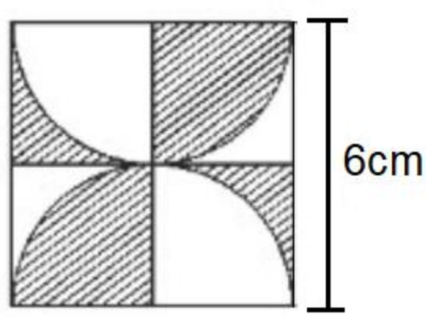
2.- ¿Cuál es la diferencia entre cuadrados y rectángulos? Explica.

Los cuadrados tienen todos sus lados congruentes a diferencia del rectángulo, el cual tiene sus lados opuestos congruentes. El cuadrado es un caso particular del rectángulo, por lo que todo cuadrado es un rectángulo, mientras que no todo rectángulo es un cuadrado.

3.- ¿Es posible que dos cuerpos de distintitas dimensiones tengan igual volumen? Explica.

Si es posible, dado que igualdad de volumen es inherente a las formas de los cuerpos, en el caso de prismas y cilindros, basta con que exista proporcionalidad (inversa) entre las alturas y las áreas basales de estos para que haya igualdad de volumen.

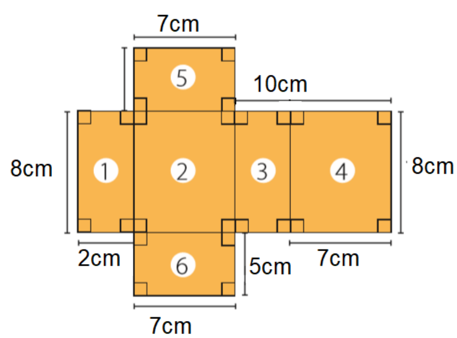
4.- Determina el área achurada considerando que la figura corresponde a un cuadrado dividido en 4 cuadrados y dos semicírculos.




La figura se puede descomponer y podemos notar que la región achurada será igual a la mitad del área del cuadrado que serian $18cm^2$.

Calcular por medio de métodos aritméticos el área de la semi circunferencia y el exceso del área del rectángulo y la semicircunferencia, luego de esto suma estas áreas obtenidas teniendo $18cm^2$.

5.- Observa la red presentada. ¿Es posible construir un prisma a partir de ésta? ¿Por qué?




Para poder formar el paralelepípedo, las figuras: 1 y 3, 2 y 4, 5 y 6 deben ser congruentes entre ellas. Identificando cualquier incongruencia entre este par de lados, puede justificar el por qué no es posible formar el cuerpo.

6.- Moisés e Ignacia deben construir cuerpos geométricos utilizando cartón. Moisés ha decidido construir un cubo cuya arista mide 8*cm*, mientras que Ignacio opto por un prisma de base rectangular cuyas medidas son 10*cm* de largo, 5*cm* de ancho y 7*cm* de alto. ¿Cuál de ellos necesitara más cartón para construir el cuerpo geométrico? ¿Por qué?

Para dar respuesta al ejercicio se debe calcular el área de cada cuerpo y luego compararlas entre sí.

$$\text{Área del cubo} = \text{área de la cara x el numero de caras}$$

$$= (8 \times 8) \times 6$$

$$= (64) \times 6$$

$$= 384\ cm^2$$

$$Área\ del\ prisma\ =\ área\ de\ la\ cara\ basales +\ área\ de\ las\ caras\ laterales$$

$$= (10 \times 5)2 + (10 \times 7)2 + (7 \times 5)2$$

$$= (50)2 + (70)2 + (35)2$$

$$= 100 + 140 + 70$$

$$= 310\ cm^2$$

Se puede notar por las medidas de las áreas, que Moisés necesitara más superficie de cartón.

7.- ¿Qué sucede con el volumen de un cubo si duplicamos la longitud de todas sus aristas?

$$Volumen\ del\ cubo\ inicial\ = a^3$$

$$Volumen\ del\ cubo\ que\ doblamos\ sus\ aristas = (2a)^3 = 8a^3$$

El volumen del cubo se octuplica respecto al original.

**Plan de clase 3: Actividad para reproducir prismas a partir de sus caras basales.**

Esta guía presenta en una primera instancia las indicaciones de la actividad para que los estudiantes puedan reproducir los cuerpos geométricos de una manera estándar, luego se presentan preguntas que guían al estudiante a alcanzar el objetivo de la clase (caracterizar los prismas he inferir las fórmulas para el cálculo de área de prismas). Las preguntas a, b, c de la segunda parte están enfocadas a caracterizar los prismas y la pregunta d está centrada en que el estudiante se percate que el cálculo del área del prisma se desprende de la red y el área de figuras compuestas.

***"Cultivar la mente sin desmedro del corazón"***

COLEGIO NUESTRA SEÑORA DE ANDACOLLO

Congregación de Santa Cruz

DIRECCIÓN ENSEÑANZA MEDIA

***PROFESOR***

**Cuestionario**

**Unidad : Geometría**

**Contenido(s) : Área de Prismas**

**Alumno:**

______________________________________________________________

**_______Curso: 1° A ____**

**Fecha: ________/ ________ /2018**

**Instrucciones:**

- Lea con mucha atención cada una de las preguntas, piense y luego conteste.
- Responda con lápiz pasta azul o negro o lápiz grafito.
- El cuestionario se responde de manera individual y sus respuestas se entregan al docente.

**Actividad**

1.- Formen grupos de 4 estudiantes y elaboren las redes correspondientes a los cuerpos mostrados por el profesor.

a) A partir de los polígonos entregados en la clase, completen (dibujen) la red correspondiente a cada cuerpo.
b) Es importante que la altura utilizada sea de 15 cm para optimizar el material.
c) Cada integrante del grupo debe construir la red de un cuerpo distinto.

2.- A partir de la actividad 1. Responda:

a) ¿Qué figuras del cuerpo geométrico consideras como bases?

b) ¿Qué relación existe entre las bases?

c) ¿Qué partes del cuerpo son sus caras laterales? ¿Qué características tienen éstas? ¿Cuál/es polígonos reconoces como caras laterales?

d) ¿Cómo calcularías el área de la red formada?

**Plan de clase 7: Actividad para aplicar el cálculo de área y volumen de prismas y cilindros a problemas del mundo real y/o contexto matemático.**

El listado de desafíos tiene como principal objetivo contribuir al desarrollo de habilidades tales como la visualización, la argumentación y comunicación y la resolución de problemas. Para ello se presenta una colección de problemas los cuales deben ser desarrollados de manera individual.

***"Cultivar la mente sin desmedro del corazón"***

COLEGIO NUESTRA SEÑORA DE ANDACOLLO

Congregación de Santa Cruz

DIRECCIÓN ENSEÑANZA MEDIA

***PROFESOR***

**Listado de desafíos**

**Unidad : Geometría**

**Contenido(s) : Área y volumen de Prismas y cilindros**

---

**Alumno:**

______________________________________________________________

**_______Curso: 1° A ____**

**Fecha: ________/ ________ /2018**

---

**<u>Instrucciones:</u>**

- Lea con mucha atención cada una de las preguntas, piense y luego conteste.
- Responda con lápiz pasta azul o negro o lápiz grafito.

- El cuestionario se responde de manera individual y sus respuestas se entregan al docente.
- En los desafíos que sea necesario aproxima $\pi = 3$.

**Actividad**

**Desafío 1**

Un grupo de jóvenes se reúnen a jugar Jenga, juego que consiste en construir un prisma de base cuadrada a partir de piezas iguales, donde cada "piso" está conformado por tres piezas.

Cada turno, un jugador debe sacar una pieza de la torre, colocándola en la parte superior de esta.

Si el juego cuenta con 60 piezas, las cuales miden $1cm$ de alto, $2cm$ de ancho y $6cm$ de largo, tal como se muestra en la imagen.

Responde las siguientes preguntas

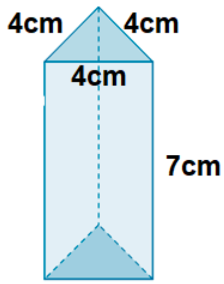
a) ¿Cuáles serán las dimensiones de la torre formada por todas las piezas del juego?
b) ¿Cuál es el volumen de la torre?
c) Si han transcurrido 4 turnos ¿Cuál es volumen del cuerpo resultante?
d) Si los jóvenes deciden jugar sin reponer las piezas extraídas ¿Cuál será el volumen del cuerpo después de 7 turnos?

e) Si se desea construir una caja para poder guardar la torre armada ¿Cuál debe ser la mínima cantidad de cartón (en $cm^2$) necesaria para construirla?

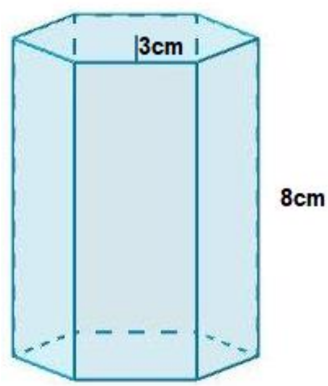
**Desafío 2**

Obtén el área y el volumen de los siguientes cuerpos:

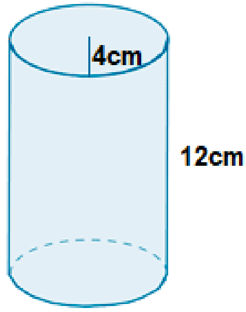
a) Prisma regular de base triangular de lado $4\ cm$ y altura $7\ cm$.




b) Prisma regular de base hexagonal cuya apotema mide $3cm$ y su altura $8cm$.




c) Cilindro de altura $12cm$ y radio basal $4cm$.



**Desafío 3**

¿Cuál es el volumen de un prisma de base cuadrada, cuyas aristas miden 3 cm y 7 cm?

**Desafío 4**

¿Cuánto debe medir la altura de un cilindro de radio 4 cm, para que su volumen sea 56 $\mathrm{cm}^3$?

**Desafío 5**

Un prisma recto de base cuadrada tiene una altura de 40 cm y su volumen es de $1000cm^3$. ¿Cuál es el área de la superficie del prisma?

**Desafío 6**

María quiere regalarle a su abuelo una caja con galletas la cual tiene forma de cilindro. Si la altura de la caja es de 10 cm y su área basal es de 32 $\mathrm{cm}^2$. ¿Cuál es la mínima cantidad de papel que se necesita para poder envolver completamente la caja?

**Desafío 7**

Un agricultor necesita construir un invernadero semicilíndrico de manera tal que, su ancho mida 5m, mientras que su largo 15 m.

¿Cuál es la cantidad de material necesaria para cubrir la estructura?


**Desafío 8**

Un rollo de papel higiénico tiene un radio de 5 cm y una altura de 10 cm, este está formado a partir de un cilindro de cartón, cuyo radio mide 2,5 cm, en el cual se enrolla el papel.

¿Cuál es el espacio ocupado por el papel?

**Desafío 9**

Una barra cilíndrica de metal de 1 m de altura y 0,1 m de diámetro es derretida y vaciada en moldes cúbicos cuyas aristas miden 0,2m. ¿Cuántos cubos de metal se pueden hacer a partir de la barra?

**Desafío 10**

Problema del inicio (de no haber sido resuelto)

Para poder unir dos localidades del sur del país, se ha construido un túnel con forma de semicilindro de manera tal que, el grosor de sus paredes es $1m$, su diámetro interior mide $14m$ y el largo del túnel $200m$.

¿Cuál fue aproximadamente la cantidad de tierra removida para su construcción?

¿Cuál fue la cantidad de cemento (en $m^3$) necesaria para la construcción del túnel?

**Plan de clase 8: Evaluación de la unidad.**

El instrumento de evaluación corresponde a una prueba que consta de treinta ejercicios y problemas de selección única y dos preguntas de desarrollo, centradas en la visualización, caracterización y comunicación y argumentación. La evaluación es de carácter individual y deberá ser rendida en un tiempo de una hora y treinta minutos.

***"Cultivar la mente sin desmedro del corazón"***

COLEGIO NUESTRA SEÑORA DE ANDACOLLO

Congregación de Santa Cruz

DIRECCIÓN ENSEÑANZA MEDIA

***PROFESOR***

**Prueba de Geometría**

**Unidad : Geometría**

**Contenido(s) : Área y volumen de prismas y cilindro.**

**Alumno:**

_____________________________________________________________________

**_______Curso: 8° A ____**

**Fecha: ________/ ________ /2018**

**<u>Instrucciones:</u>**

- Lea con mucha atención cada una de las preguntas, piense y luego conteste.
- Responda con lápiz pasta azul o negro o lápiz grafito.
- El cuestionario se responde de manera individual, por cada **alternativa correcta** se obtiene **1 punto** y por **desarrollo** de la pregunta **2 puntos**.

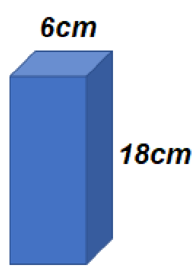
- Estudiante que es sorprendido copiando, se le quitará la prueba y será evaluado con la calificación mínima.

**Preguntas de selección única:**

1.- ¿Qué sucede con el volumen de un cubo si duplicamos la longitud de todas sus aristas?:

a) Se duplica.
b) Se triplica.
c) Se cuadruplica.
d) Se octuplica.
e) Ninguna de las anteriores.

2.- ¿Cuál es el área del prisma de base cuadrada que se muestra en la imagen?

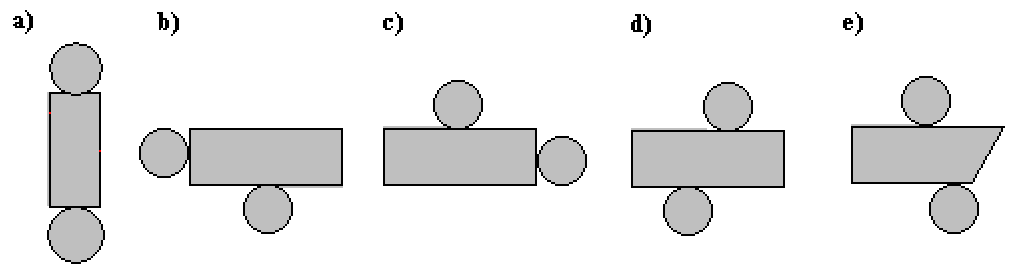



a) $36\ cm^2$
b) $72\ cm^2$
c) $144\ cm^2$
d) $288\ cm^2$
e) $504\ cm^2$

3.- ¿Cuál es el volumen del cuerpo anterior?

a) $504cm^2$
b) $504cm^3$
c) $648cm^2$
d) $648cm^3$
e) $1.944cm^3$)

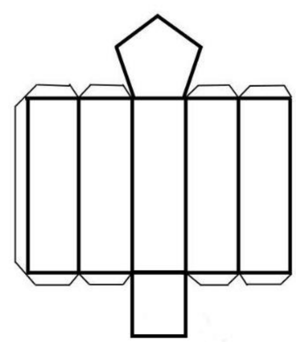
4.- ¿Con cuál de las siguientes redes se puede armar un cilindro?




5.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones **es correcta**?

a) El volumen y la capacidad son conceptos iguales.
b) El área y la superficie son conceptos iguales.
c) El volumen es el espacio ocupado y la capacidad es espacio por ocupar.
d) El volumen del cubo es la suma del área de todas las caras.
e) Ninguna de las anteriores.

6.- Con la red mostrada no se puede armar el cuerpo. El motivo de esto es porque:



a) Las caras basales son congruentes.
b) Las caras laterales son congruentes.
c) Las caras basales no son congruentes.
d) Las caras laterales no son congruentes.
e) Ninguna de las anteriores.

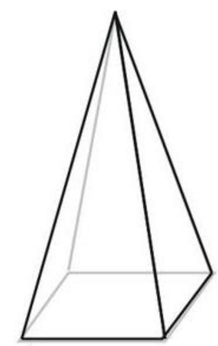
7.- Si un paralelepípedo mide 8 cm de largo, 6 cm de ancho, y 3 cm de alto, entonces su área total mide:

a) $84\ cm^2$
b) $90\ cm^2$
c) $180\ cm^2$
d) $510\ cm^2$
e) $1.020\ cm^2$

8.- Si la arista de un cubo mide $2\ cm,$ entonces el **triple** del volumen del cubo mide:

a) $4\ cm^3$
b) $8\ cm^3$
c) $16\ cm^3$
d) $22\ cm^3$
e) $ninguna\ de\ las\ anteriores.$

9.- El siguiente cuerpo corresponde a:



a) Un prisma de base triangular
b) un prisma de base cuadrada
c) un prisma recto
d) un cilindro recto
e) ninguna de las anteriores.

10.- ¿Cuál es el área de la superficie de un cubo cuya arista mide $7m$?

a) $196m^2$
b) $245m^2$
c) $294m^2$
d) $343m^2$
e) $392m^2$

11.- Sí el área de una de las caras de un cubo es 81 $cm^2$, entonces su volumen es:

a) 81 $cm^3$
b) 162 $cm^3$
c) 324 $cm^3$
d) 729 $cm^3$
e) Otro valor.

12.- Si sabemos que el área basal de un prisma es igual a $50\ cm^2$ y el volumen de éste es de $1000\ cm^3$. ¿Cuál es su altura?

a) $10\ cm$
b) $15\ cm$
c) $20\ cm$
d) $25\ cm$
e) $30\ cm$

13.- Determina el área de superficie de un cilindro cuya área basal es de $27cm^2$ y la medida de su altura es de $7cm$.

a) $180cm^2$
b) $180cm^3$
c) $243cm^2$
d) $243cm^3$
e) $306cm^2$

14.- ¿Cuánto mide la altura de un prisma de base cuadrada si el área basal mide $9\ m^2$ y su área de superficie $78\ m^2$?

a) $3m$
b) $4m$
c) $5m$
d) $6m$
e) $7m$

15.- ¿Cuál es el área de un cilindro cuya altura mide $4m$ y el radio basal $6m$?

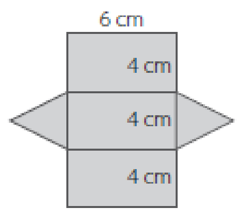
a) $240m^3$
b) $360m^3$
c) $432m^3$
d) $360m^2$
e) $432m^2$

16.- ¿Cuál es el volumen de un prisma de base pentagonal cuya arista basal mide 4 cm, su altura 7 cm y la apotema de la base mide 3 cm?

a) $84cm^3$
b) $42cm^3$
c) $105cm^3$
d) $210cm^3$
e) $252cm^3$

17.- ¿Cuál es el área de la red del prisma si la altura del triángulo mide 3,5 cm? (el triángulo de la base es equilátero)

a) $68\ cm^2$
b) $89cm^2$
c) $86cm^2$
d) $84cm^2$
e) $42cm^2$

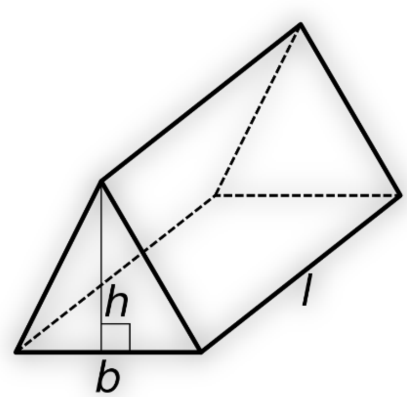



18.- ¿Qué sucede con el volumen de un cilindro si la medida de su radio se duplica?

a) el volumen se duplica.
b) el volumen se octuplica.
c) el volumen se cuadruplica.
d) el volumen no se altera.
e) ninguna de las anteriores.

19.- Si tuvieras que envolver con papel de regalo el siguiente cuerpo que se muestra a continuación, ¿Cuál es la mínima cantidad que utilizarías en $cm^2$, sabiendo que su base triangular es equilátera?

a) $(hb + hl)cm^2$
b) $(hb + 3bl)cm^2$
c) $(2hb + 3hl)cm^2$
d) $(2hb + 3bl)cm^2$



e) $ninguna\ de\ las\ anteriores$.

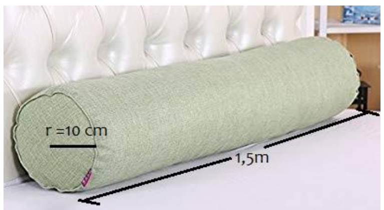
20.- El volumen del prisma anterior es:

a) $(hb^2)cm^3$
b) $(h^2b)cm^3$
c) $(hbl)cm^3$
d) $(\frac{hbl}{2})cm^3$
e) $ninguna\ de\ las\ anteriores$.

21.- El volumen de un prisma de base hexagonal es $108cm^3$, si su área basal es de $9cm^2$ ¿Cuánto mide la altura del prisma?

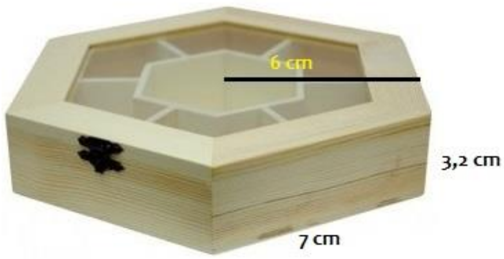
a) $24\ cm$
b) $6\ cm$
c) $12\ cm$
d) $10{,}8\ cm$
e) $18\ cm$

22.- El espacio que utiliza la almohada mostrada en la imagen es aproximadamente:




a) 22.500 $cm^3$
b) 450 $cm^3$
c) 675 $cm^3$
d) 45.000 $cm^3$
e) 15.000 $cm^3$

23.- Claudia necesita envolver la caja mostrada en la imagen con papel de regalo. La cantidad mínima de papel que debe tener Claudia para envolver completamente la caja es:




a) $126\ cm^2$
b) $252\ cm^2$
c) $252{,}4\ cm^2$

d) $386\ cm^2$

e) $386{,}4\ cm^2$

24.- En un gimnasio se apilan los discos de las pesas para poder guardarlos de manera ordenada. ¿Cuánto espacio ocupa una pila de 12 discos, si cada uno de estos tiene un grosor de $6cm$ y radio de $30cm$?

a) $38.880cm^3$

b) $64.800cm^2$

c) $64.800cm^3$

d) $194.400cm^2$

e) $194.400cm^3$

25.- El volumen de un prisma de base rectangular es $105cm^3$. Si su altura mide $5cm$ y uno de los lados de su base $7cm$. ¿Cuál es la medida del lado faltante de la base?

a) $2cm$

b) $3cm$

c) $4cm$

d) $5cm$

e) No se puede determinar.

26.- El volumen de un cilindro es 320 $\pi$ $cm^3$ y su altura es 5 cm. Entonces el radio del cilindro mide:

a) 5 cm

b) 8 cm

c) 10 cm

d) 32 cm

e) 64 cm

27.- Una caja de madera tiene forma de paralelepípedo recto de dimensiones: 25 cm de largo, 10 cm de ancho y 18 cm de alto, en ella se guardan cajas de dulces de 5 cm de largo, 5 cm de ancho y 3 cm de alto. ¿Cuántas cajas de dulces se pueden guardar?

a) 40 cajas
b) 50 cajas
c) 60 cajas
d) 70 cajas
e) 80 cajas

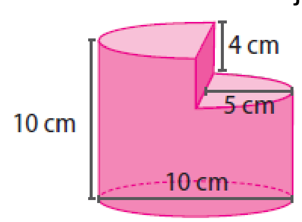
28.- La altura de un cilindro mide el doble de su radio basal. Si el área de sus dos bases es igual a $162\pi\ cm^2$ , ¿cuál es su volumen?

a) $324\pi\ cm^3$
b) $729\pi\ cm^3$
c) $1458\pi\ cm^3$
d) $2916\pi\ cm^3$
e) $ninguna\ de\ las\ anteriores$.

29.- Se tiene un recipiente con 900 $cm^3$ de agua y un vaso cuyas medidas son 15 $cm^2$de área basal y 8 cm de altura. Si vaciáramos el recipiente con dichos vasos totalmente llenos. ¿Cuál es la cantidad de agua que tendrá el ultimo vaso?

a) $50cm^3$
b) $60cm^3$
c) $70cm^3$
d) $80cm^3$
e) $90cm^3$

30.- La siguiente figura pertenece a una pieza cilíndrica de un juguete desarmable. ¿Cuál es el área de la superficie de esta pieza?




a) $40\ cm^2$
b) $(130\pi)\ cm^2$
c) $(170\pi)\ cm^2$

d) $(40 + 130\pi)\ cm^2$

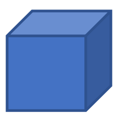
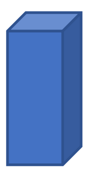
e) $(130 + 40\pi)\ cm^2$

**Preguntas de desarrollo.**

1.- De los cuerpos que muestra la siguiente tabla:

a) Nombra cada cuerpo.

b) Caracteriza cada cuerpo.

| Cuerpo | Nombre y características. |
|---|---|
|  | a)<br>b) |
|  | a)<br>b) |
|  | a)<br>b) |

2.- Un agricultor necesita construir un invernadero de manera tal que, la estructura está formada por un prisma de base rectangular, mientras que su techo, por un semicilindro que calza de manera exacta sobre el prisma.

Si su altura, sin considerar el semicilindro, es de $2m$, su ancho es de $6m$ y su largo $10m$.

a) ¿De qué manera determinarías el área de superficie y el volumen del cuerpo?
b) ¿Cuál es la cantidad de plástico que se necesita para cubrir la estructura?
c) ¿Cuál es el espacio que ocupa el invernadero?

### 5.2.1 Planes de clases

En las siguientes páginas se mostrarán todos los planes de clase desarrollados para la secuencia. Para cada plan de clase se realiza un resumen descriptivo y predictivo con respecto a los conceptos trabajados en cada propuesta. Además, se destaca la fase que cumple cada plan en concordancia con nuestro marco de referencia.

Plan de clase número 1

En esta clase se aplicó el instrumento de evaluación diagnostica diseñado para medir el nivel en el cual se encuentra el grupo curso, según Van Hiele. Las preguntes están referidas a conocimientos previos desarrollados en cursos anteriores, según planes y programas, de lo cual se espera que los estudiantes puedan desarrollar cada pregunta, apelando a la argumentación y comunicación, que se pide de manera explícita en cada pregunta. (Tabla 2)

Este plan corresponde a la primera fase propuesto por el modelo de Van Hiele, según Vargas y Gamboa (2013), donde se busca diagnosticar los conocimientos previos de los estudiantes con respecto al tema que se desarrolla en la secuencia.

Plan de clase número 2

En el comienzo de esta clase se trabajan los conceptos de superficie y área haciendo la diferencia entre estos y se recuerda el concepto de volumen. Posteriormente pasamos a la **actividad de estimación del área de la pizarra,** donde los estudiantes podrán ver que el cálculo de área de una superficie puede llevarse a cabo de manera estimativa sin la necesidad de medirlo directamente, llegando a números muy similares al cálculo real. La actividad está enfocada en dar relevancia a la estimación como paso previo al cálculo directo de áreas, para entender la necesidad métrica que tiene el humano de intuir una medida sin tener la necesidad de tener el instrumento de medición (Tabla 3).

Este plan corresponde a la segunda fase de orientación dirigida en el desarrollo de la actividad, llegando a una fase tres de explicitación que se identifica cuando se entiende el porqué de estimar y la necesidad de un modelo matemático para tener precisión en nuestras mediciones. No se sigue en las fases con respecto al tema de estimación por motivos de que éste no es el foco principal de la secuencia, no obstante, es necesario para una mejor adquisición del concepto de área

Plan de clase número 3

En el comienzo de esta clase se trabajan ejercicios que nos lleven a formalizar el área de figuras compuestas, posteriormente se realiza un despliegue de redes de prismas cotidianos (cajas de dentífrico, chocolate, etc.) y se define la red de un cuerpo. Luego pasamos a la actividad de **reproducir prismas a partir de su cara basal**, enfocada en caracterizar los prismas para posteriormente definir el concepto de prisma y luego descubrir la fórmula para el cálculo de área de prismas. La intención es que por medio de la creación de los cuerpos con base en sus redes los estudiantes logren identificar regularidades entre los prismas y evidenciar que el área del cuerpo se desprende de la suma de todas las caras a partir de su red. Luego finaliza la clase formalizando el concepto de prismas y áreas de éstos (Tabla 4).

Este plan corresponde a una segunda fase de orientación dirigida con respecto al área del prisma recto regular, que tiene relación con la actividad de reproducir prismas, llegando a una fase tres de explicitación al momento de formalizar el concepto de prisma y área de éstos.

Plan de clase número 4

El siguiente plan de clase se realizó en base a una situación problema, el cual esta estudiado bajo la Metodología de Estudio de Clase (MEC), del cual todo su desarrollo y análisis correspondientes se encuentran en el capítulo VI. Se presenta este plan de clase para que se entienda la secuencia en su totalidad, y no quede con vacíos, los cuales puedan producir confusión al lector (Tabla 5).

Este plan corresponde a una segunda fase de orientación dirigida con respecto al área del cilindro, que tiene relación con la actividad de reproducir un cilindro recto, llegando a una fase tres de explicitación al momento de formalizar el concepto de cilindro y área de éste.

Plan de clase número 5

Al inicio de la clase el profesor plantea algunas preguntas para recordar el concepto de volumen y también identificar si los estudiantes comprenden la diferencia entre una figura plana y un cuerpo geométrico. Luego se plantea una problemática extraída del Texto del estudiante de Matemática correspondiente a octavo básico denominada “Duplicación de un cubo”, la cual es una actividad de comparación y verificación.

En el desarrollo de la clase se trabaja en una actividad de estimación utilizando recursos que los estudiantes construyeron en una sesión anterior (prismas y cilindros) y unidades de 1 centímetro cúbico entregadas por el docente. A partir de las preguntas propuestas el profesor dirige la clase para que se le encuentre sentido a la estimación.

Para finalizar la sesión se plantea una pregunta de investigación la que debe ser estar desarrollada para el comienzo de la clase siguiente (Tabla 6).

.

Este plan corresponde a la segunda fase de orientación dirigida en el desarrollo de la actividad, llegando a una fase tres de explicitación que se identifica cuando se entiende el cómo estimar los volúmenes de prismas. No se sigue en las fases con respecto al tema de estimación de volúmenes, por motivos de que éste no es el foco principal de la secuencia, no obstante, es necesario para una mejor adquisición del concepto de volumen.

Plan de clase número 6

En la sesión número 6 se retoma la actividad de la clase 5 de estimación de volumen y se formaliza la utilización de la unidad cúbica. Luego, se procede a problematizar con los estudiantes la idea de extender el cálculo del volumen de un cubo al cálculo de volumen de un prisma, lo que nos conduce a formalizar el concepto y exponer la fórmula utilizada para dichos cálculos. Además, en esta clase se busca realizar el nexo entre el cálculo del volumen de prismas al volumen de cilindros, a través de una actividad de visualización donde se espera que los alumnos logren generar el vínculo entre los volúmenes y las respectivas fórmulas y concluir con la formalización del volumen de un cilindro.

Para finalizar se proponen un par de ejemplos para mostrar la manera de identificar los datos y utilización de la técnica para resolver los ejercicios (Tabla 7).

Este plan corresponde a una segunda fase de orientación dirigida con respecto al volumen de prismas y cilindro, que tiene relación con la actividad 1, 2, y 3 del plan de clase, llegando a una fase tres de explicitación al momento de formalizar el concepto de volumen de prisma y volumen del cilindro a partir del prisma.

Plan de clase número 7

En esta sesión, se busca que los y las estudiantes logren aplicar el cálculo de áreas de superficie y volumen de prismas rectos y cilindro en ejercicios y problemas del mundo real y/o contexto matemático con el fin de profundizar en el reconocimiento de cuerpos geométricos, la comprensión de los conceptos de área de superficie y volúmenes de cuerpos, la aplicación de algoritmos para el cálculo de áreas de superficies y volumen, además del desarrollo de las habilidades de argumentar y comunicar. Para lograr dichos objetivos, la clase inicia con un desafío referido a área y volumen de cuerpos, el cual puede ser trabajado de manera individual o en parejas, que, de no ser resuelto en el tiempo estimado, puede retomarse durante el cierre de la clase. Posteriormente, se trabajará con un listado de ejercicios y problemas los cuales están graduados de menor a mayor dificultad.

Si bien se espera que los estudiantes trabajen de manera autónoma, los problemas iniciales serán desarrollados por el docente y los estudiantes con la finalidad de ayudarlos con la interpretación de la información y evitar posible frustración en los estudiantes.

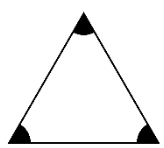
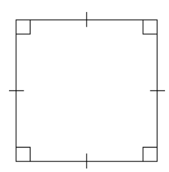
Para finalizar, se retoma el desafío inicial (de no haber sido resuelto) presentando, además, un segundo desafío referido a la composición de cuerpos geométricos y cálculo de volumen (Tabla 8).

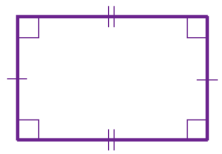
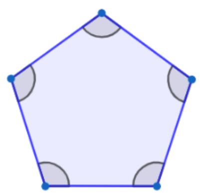
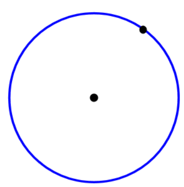
En los planes de clases anteriores se han mencionado las fases dos y tres para los temas de área y volumen de prisma, y también para área y volumen de cilindro. En esta clase se aborda de manera conjunta la fase cuatro y cinco del modelo (Van Hiele), realizando una orientación libre en el caso del desafío de la Jenga, y por último la fase de integración con la presentación de los problemas donde se busca extender el conocimiento formado a los ya existentes (modelar situaciones que involucren el área o volumen, desarrollo de ecuaciones a partir de área y volumen, volumen de cuerpos compuestos).

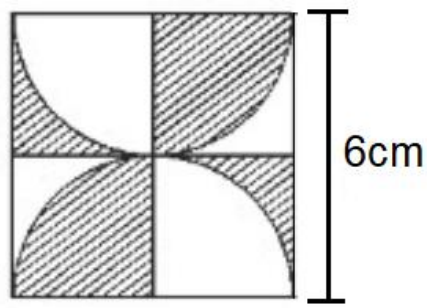
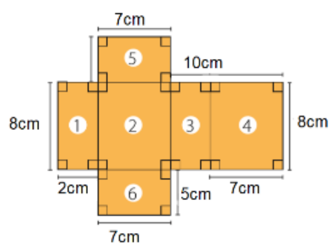
<u>Plan de clase número 8</u>

Este plan es el ultima de la secuencia, y tiene como finalidad evaluar los conocimientos presentados en la unidad de Área y Volumen de prismas y cilindros, para ello se diseña un instrumento evaluativo que contempla preguntas para evidenciar si el estudiante logra comprender, aplicar, argumentar y comunicar, modelar situaciones donde deben aplicar los conceptos desarrollados en la secuencia (Tabla 9).

| **PLAN DE CLASE** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Eje Temático** | Geometría | **Unidad o Tema:** | Área y volumen de prismas y cilindros | | **Sesión N°1** |
| **Objetivo General de la Unidad** | | Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros | | | |
| **Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje** | | Recordar conocimientos previos. | | | |
| **Habilidad** | | Argumentar y comunicar | | | |
| **Actitud** | | Honestidad, esfuerzo e interés | | | |
| **Momentos de la clase** | **Actividades de Aprendizaje** | | **Intervención Docente** | **Recursos de Aprendizaje** | **Tiempo Estimado** |
| Inicio | **Aplicación de control diagnóstico (Anexo 1)** | | El educador saluda a sus estudiantes, organiza la sala para poder aplicar el diagnóstico. | Instrumento de Evaluación (prueba) | 7´ |

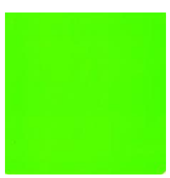
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr>
<td>Desarrollo</td>
<td>Desarrollo del control diagnóstico<br>1.- A partir de las imágenes mostradas en la tabla, completa:<br>a) Nombra cada figura.<br>b) Caracteriza cada una de estas figuras.
<table>
<tr><td>Figuras</td><td>Nombre y características</td></tr>
<tr><td></td><td>a)<br>b)</td></tr>
<tr><td></td><td>a)<br>b)</td></tr>
</table>
</td>
<td>El profesor observa y vela por una aplicación fidedigna del instrumento.</td>
<td>Instrumento de Evaluación (prueba)</td>
<td>63´</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>a)<br>b)</td></tr>
<tr><td></td><td>a)<br>b)</td></tr>
<tr><td></td><td>a)<br>b)</td></tr>
</table>
2.- ¿Cuál es la diferencia entre cuadrados y rectángulos? Explica.<br>
3.- ¿Es posible que dos cuerpos de distintitas dimensiones tengan igual volumen? Explica.<br>
4.- Determina el área achurada considerando que la
</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | figura corresponde a un cuadrado dividido en 4 cuadrados y dos semicírculos.<br><br><br>5.- Observa la red presentada. ¿Es posible construir un prisma a partir de ésta? ¿Por qué?<br><br><br>6.- Moisés e Ignacia deben construir cuerpos geométricos utilizando cartón. Moisés ha decidido construir un cubo cuya arista mide 8*cm*, mientras que Ignacio opto por un prisma de base rectangular cuyas medidas son 10*cm* de largo, 5*cm* de ancho y | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 7*cm* de alto. ¿Cuál de ellos necesitara más cartón para construir el cuerpo geométrico? ¿Por qué?<br>7.- ¿Qué sucede con el volumen de un cubo si duplicamos la longitud de todas sus aristas? | | | |
| Cierre | Sociabilización respecto a la evaluación de los ejercicios que tuvieron mayor dificultad | El profesor presenta y desarrollo en conjunto al grupo curso preguntas un plenario con respecto a las preguntas que los alumnos manifiesten mayor dificultad. | Pizarra, data y plumones. | 20´ |

Tabla 2

<table>
<tr><td colspan="6">PLAN DE CLASE</td></tr>
<tr><td>Eje Temático</td><td>Geometría</td><td>Unidad o Tema:</td><td colspan="2">Área y volumen de prismas y cilindro</td><td>Sesión N°2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo General de la Unidad</td><td colspan="3">Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje</td><td colspan="3">Recordar la definición de área y volumen, y realizar estimación de áreas.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Habilidad</td><td colspan="3">Argumentar y comunicar</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Actitud</td><td colspan="3">Esfuerzo e interés</td><td></td></tr>
<tr><td>Momentos de la clase</td><td colspan="2">Actividades de Aprendizaje</td><td>Intervención Docente</td><td>Recursos de Aprendizaje</td><td>Tiempo Estimado</td></tr>
<tr><td>Inicio</td><td colspan="2">Presentar la imagen de un cuadrado de color verde y preguntar:<br></td><td>El educador saluda a sus estudiantes, plantea las preguntas para hacer la diferencia entre superficie y área, recopila y contrasta</td><td>PPT (anexo)<br>Pizarrón<br>Plumones</td><td>15´</td></tr>
</table>

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | ¿Cuál sería la superficie del cuadrado?<br>¿Cuál es el área del cuadrado?<br>¿Cuál es la diferencia entre área y superficie?<br><br>**Definición.**<br><br>Superficie: extensión plana.<br>Área: medida asociada a una superficie.<br>Presentar la imagen de un cubo y preguntar:<br>¿Cuál sería el volumen de este cubo?<br>Volumen: espacio ocupado por un determinado cuerpo. | resultados, proporciona las definiciones formales. | | |
| Desarrollo | **Actividad de estimación** (grupo de personas):<br>Estimar el área de la pizarra sin instrumento de medición estándar, utilizando una unidad de medida representante (esto es a elección de los estudiantes). | El profesor observa y guía la actividad, plantea las preguntas y recopila información para contrastarla entre los | PPT (anexo)<br>Pizarrón<br>Plumones | 55´ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | ¿Cuál es el área de la pizarra?<br><br>Ahora con instrumentos de medición calculen cuanto mide su unidad representante, y vuelve a estimar el área de la pizarra.<br><br>¿Cuál creen ustedes es el cálculo más preciso? ¿Por qué?<br><br>El docente mide la pizarra, y compara este resultado con los obtenidos por los estudiantes.<br><br>¿Cuál sería la importancia de estimar? | alumnos. | | |
| Cierre | Plantear otras situaciones de la vida cotidiana en las cuales se estime.<br><br>¿Cuál es la distancia entre el colegio y metro Cumming? | El docente dirige el cierre de la clase, planteando las preguntas, recopilando la información. | PPT (anexo)<br>Pizarrón<br>Plumones | 20´ |

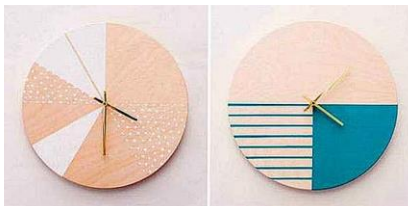
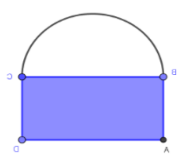
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Ver la hora en un reloj no graduado.<br>¿Qué hora es?<br><br>¿Cuántos cc contiene el vaso sabiendo que es de 250 cc?<br><br>¿Puedes presentar otros ejemplos de estimación que logres identificar? | | | |

Tabla 3

<table>
<tr><td colspan="7">PLAN DE CLASE</td></tr>
<tr><td>Eje Temático</td><td colspan="2">Geometría</td><td>Unidad o Tema:</td><td colspan="2">Área y volumen de prismas y cilindros</td><td>Sesión N°3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Objetivo General de la Unidad</td><td colspan="3">Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje</td><td colspan="3">Caracterizar los prismas he inferir las fórmulas para el cálculo de área de prismas</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Habilidad</td><td colspan="3">Argumentar y comunicar</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Actitud</td><td colspan="3">esfuerzo e interés</td><td></td></tr>
<tr><td>Momentos de la clase</td><td colspan="3">Actividades de Aprendizaje</td><td>Intervención Docente</td><td>Recursos de Aprendizaje</td><td>Tiempo Estimado</td></tr>
<tr><td>Inicio</td><td colspan="3">Ejercicios<br>¿Cómo calcularías el área de las siguientes figuras?<br></td><td>El educador saluda a sus estudiantes, y presentar las imágenes de figuras compuestas, realizando la pregunta. Guía la actividad recopilando información.</td><td>Pizarra, data y plumones.</td><td>15´</td></tr>
</table>

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Formalizar área de figuras compuestas**.<br><br>Para calcular el área de superficies de una figura compuesta considera seguir los siguientes pasos:<br>a) dividir la figura en polígonos conocidos.<br>b) determinar las áreas de cada polígono.<br>c) Sumar las áreas obtenidas y calcular el área total. | | | |
| Desarrollo | Desplegar la red de un cuerpo geométrico real.<br><br>Pedir a los estudiantes que traigan una caja de mano (pasta de diente, de remedios, perfumes, etc.) | La docente solícita el material pedido la clase anterior, plantea las preguntas, recopila información que será sociabilizada con el grupo curso. | Cajas<br>Cartulina<br>Pegamento<br>Regla<br>Compás<br>Pizarra, data y plumones | 65´ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Preguntas:<br><br>a) ¿Cómo crees que se hizo esta caja? ¿Qué características tiene ésta?<br>Desarma la caja, de tal manera de no separar ninguna de las caras que conforma el cuerpo. ¿Qué vez?<br><br>**Definición.**<br>*La red de un cuerpo geométrico es un conjunto de líneas que determinan diversas figuras planas. Al recortar y armar la red convenientemente, obtenemos el cuerpo geométrico.*<br><br>b) ¿Cómo crees tú que se calcula el área de la red de la caja que acabas de desarmar?<br><br>**Actividad para reproducir prismas a partir de** | Entrega las figuras geométricas para la actividad, plantea las preguntas y resuelve dudas para que esta tenga un mejor desarrollo, contrasta los resultados entre estudiantes. | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **sus caras basales.**<br><br>A cada estudiante se le entregara un triángulo, cuadrado y hexágono.<br>Mostrando prismas rectos ya construidos por el docente, que tengan como bases las figuras entregadas a los alumnos, se pedirá a cada estudiante reproducir cada cuerpo mostrado armando su red, de tal manera que cada cuerpo cuente con la misma altura.<br><br>Preguntas para guiar la actividad.<br>De los cuerpos mostrados<br>¿Qué considerarías como altura? ¿esta cambia dependiendo de la posición en que se encuentren los cuerpos?<br><br>¿Cómo se calcularía el área de la red formada? | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Con el cuerpo ya formado:<br>¿Qué partes del cuerpo considerarías como bases? ¿Qué características tienen estas?<br><br>¿Qué partes del cuerpo considerarías como caras laterales? ¿Qué características tienen estas?<br><br>Si te digiera que todos los cuerpos formados son prismas rectos. Elabora una definición de Prisma Recto basándose en tus respuestas anteriores.<br><br>¿Cómo se calcularía el área del cuerpo formado? | | | |
| Cierre | **Formalización**<br><br>***Prisma***: Poliedro compuesto por dos caras congruentes y paralelas denominadas bases, además de caras laterales rectangulares. | El profesor formaliza el conocimiento propuesto en las actividades anteriores. | Pizarra, data y plumones. | 10´ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | ¿Cuál es la cantidad mínima de caras laterales que se necesitan para formar un prisma?<br><br>Área de prismas rectos:<br>Para calcular el área de la superficie de un prisma se deben sumar las áreas de todas las caras. | | | |

Tabla 4

| PLAN DE CLASE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Eje Temático** | Geometría | **Unidad o Tema:** | Área y volumen de prismas y cilindros | | **Sesión N°4** |
| **Objetivo General de la Unidad** | | Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros | | | |
| **Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje** | | Caracterizar el cilindro e inferir la formula del área de la superficie del cilindro | | | |
| **Habilidad** | | Argumentar y comunicar | | | |
| **Actitud** | | esfuerzo e interés | | | |
| **Momentos de la clase** | **Actividades de Aprendizaje** | | **Intervención Docente** | **Recursos de Aprendizaje** | **Tiempo Estimado** |
| Inicio | **Presentación del cuerpo**<br>Observa el cuerpo mostrado a continuación. | | El educador saluda a sus estudiantes, muestra el cuerpo geométrico. | PPT (anexo)<br>Pizarra, data y plumones. | 5´ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Desarrollo | **Actividad: reproducción del cilindro.**<br><br>A partir del cilindro mostrado dibuja la red del cuerpo geométrico, y luego procede a armarlo.<br><br>Preguntas para guiar la actividad:<br><br>¿Qué sucedió al momento de querer armar el cilindro a partir de su red?<br><br>Si no pudiste formar el cuerpo vuelve a la red que dibujaste ¿Por qué crees que no pudiste armar el cilindro?<br><br>¿Qué modificarías de la red que habías dibujado para poder armar el cilindro?<br><br>¿Qué relación deberían tener las bases del cilindro? | El docente presenta el cilindro circular recto.<br>Presenta las preguntas para que los estudiantes puedan realizar de mejor manera la actividad y resuelve duda de los estudiantes. | Cartulina<br>Pegamento<br>Regla<br>Compás<br>Pizarra, data y plumones<br>PPT (anexo) | 70´ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | ¿Por qué es importante considerar el perímetro de las bases al momento de dibujar la red? ¿Con cuál parte de la red debería tener relación el perímetro de las bases?<br><br>Ahora que logramos identificar los errores de la red que se había utilizado en un comienzo, corrígelos y vuelve a dibujar la red.<br><br>¿Cómo calcularías el área de la red que tienes?<br><br>Ahora arme el cilindro.<br><br>¿Podría definir el cilindro a partir del trabajo realizado?<br><br>¿Cómo calcularías el área del cilindro? | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Cierre | Formalización de los conceptos:<br><br>Cilindro recto: cuerpo geométrico formado por una cara lateral curva y dos bases circulares congruentes. Las bases son perpendiculares a la cara lateral curva.<br><br>Área del cilindro: Para calcular el área $(A)$ de la superficie de un prisma se deben sumar las áreas de sus caras laterales $(A_L)$ y basales $(2A_B)$:<br>$A: área\ de\ la\ superficie\ de\ un\ prisma$<br>$A_L: suma\ de\ áreas\ de\ caras\ laterales$<br>$2A_B: suma\ de\ las\ cara\ basales\ del\ prisma$<br><br>$A = AL + 2AB$ | El profesor formaliza el conocimiento propuesto en las actividades anteriores. | PPT (anexo) Pizarra, data y plumones. | 15´ |

Tabla 5

| **PLAN DE CLASE** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Eje Temático** | Geometría | **Unidad o Tema:** | Área y volumen de prismas | **Sesión N°5** |
| **Objetivo General de la Unidad** | | Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros | | |
| **Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje** | | Recordar el concepto de volumen y estimar volumen de cuerpos | | |
| **Habilidad** | | Visualizar, argumentar y comunicar | | |
| **Actitud** | | Esfuerzo, compromiso y dedicación | | |

| **Momentos de la clase** | **Actividades de Aprendizaje** | **Intervención Docente** | **Recursos de Aprendizaje** | **Tiempo Estimado** |
|---|---|---|---|---|
| Inicio | Actividad 1: Algunas preguntas para comenzar<br>a) ¿Qué entiendes por volumen de un cuerpo?<br>b) ¿Recuerdas haber calculado el volumen de algún cuerpo? ¿De cuál?<br>c) ¿existen diferencias entre un cuadrado | El profesor luego de saludar, se dispone a recordar los conocimientos previos de los estudiantes respecto del concepto de volumen de un cuerpo. | Proyector. | 15´ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | y un cubo? Menciónalas. | | | |
| Desarrollo | Actividad 2: Comenzamos con un pequeño problema "Duplicación de un cubo" (Texto de estudiante Matemática 8° Pág.)<br>En la Antigua Grecia, por ejemplo, Eratóstenes<br>describió la anécdota sobre la construcción<br>de una tumba cubica cuya arista media cien<br>pies, señalando que un rey, al verla, exclamo: "Demasiado<br>pequeña es la tumba. Hacedla el doble de<br>grande. Sin arruinar la forma, rápidamente duplicad<br>cada arista de la tumba".<br><br>Realiza la actividad con tu compañero/a de | El docente debe plantear la situación, pero no del mismo libro, pues en este recurso la respuesta de la actividad está explicita.<br><br>Al entregar las redes el profesor no debe entregar una red de iguales medidas a una misma pareja. Es importante que los estudiantes construyan cubos distintos para comparar. | Redes de cubos.<br>Tijeras.<br>Pegamento.<br>PPT-Listado de preguntas | 55´ |

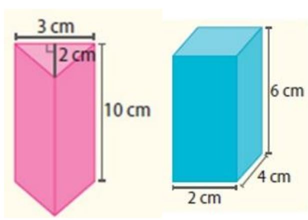
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | puesto.<br><br>¿Estás de acuerdo con lo que plantea el rey?<br><br>Cada uno debe construir un cubo de distintas medidas, a partir de la red entregada por el profesor.<br>(cubo de arista de medida 2 cm y otro de arista 4 cm)<br>Luego de construir los cubos contesten:<br><br>a) ¿Qué pueden afirmar de la idea que dio el rey para duplicar la tumba? ¿Por qué?<br><br>Actividad 3: Utilizo mis recursos<br><br>A partir de los prismas que construiste en clases anteriores (clase 4) estima el volumen del prisma de base triangular, rectangular y | El profesor durante esta actividad es un mediador, entre el trabajo de los estudiantes y el contenido matemático en cuestión y luego de que los estudiantes finalicen la actividad expone en la pizarra la representación algebraica de la situación.<br><br>El docente llevará cubos de arista $1\,cm^3$, para poder representar una unidad de medida más precisa. | | |

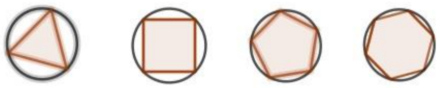
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | hexagonal.<br><br>a) ¿Con qué cubo es más eficiente estimar el volumen de otro cuerpo? ¿Por qué?<br>b) ¿Qué cuerpo tiene mayor volumen? Explica tu razonamiento. | | | |
| Cierre | Plenario<br>Revisión Actividades 2 y 3.<br><br>Sección “Googlea”: Diferencia entre volumen de un cuerpo y capacidad. | El profesor debe dirigir el cierre dando importancia a la estimación y motiva a los estudiantes a investigar sobre el tema propuesto | Pizarra, data y plumones. | 20’ |

Tabla 6

<table>
<tr><td colspan="6">PLAN DE CLASE</td></tr>
<tr><td>Eje Temático</td><td>Geometría</td><td colspan="2">Unidad o Tema:</td><td>Área y volumen de prismas y cilindros</td><td>Sesión N°6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo General de la Unidad</td><td colspan="3">Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje</td><td colspan="3">inferir la formula del cálculo de volumen de prisma y extender el cálculo del volumen del prisma al cilindro</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Habilidad</td><td colspan="3">Argumentar y comunicar</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Actitud</td><td colspan="3">esfuerzo e interés</td><td></td></tr>
<tr><td>Momentos de la clase</td><td colspan="2">Actividades de Aprendizaje</td><td>Intervención Docente</td><td>Recursos de Aprendizaje</td><td>Tiempo Estimado</td></tr>
<tr><td>Inicio</td><td colspan="2">Retomando la clase anterior:<br>¿Cuál es el volumen de un cubo?<br><br>¿Cómo se calcula el volumen de un cubo?<br><br>Revisión de la tarea anterior:</td><td>El educador saluda a sus estudiantes,</td><td>Proyector<br>Pizarra<br>Plumones</td><td>20´</td></tr>
</table>

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Volumen: espacio ocupado por un determinado cuerpo.<br>Capacidad: espacio disponible para ser ocupado, se mide como un volumen. | | | |
| Desarrollo | Activación 1: A partir de la actividad de estimación, responde a las siguientes preguntas:<br><br>a) ¿Cuántos cubos de $1cm^3$ caben en el prisma de base cuadrada?<br>b) ¿existe alguna manera de saber esta cantidad sin la necesidad de llenar el cuerpo con una unidad representante?<br>c) ¿puedes extender el cálculo del volumen del cubo al prisma? ¿Cómo?<br>d) ¿Cómo calcularías ahora el volumen de un prisma de base triangular?<br><br>Actividad 2: Escribe en tu cuaderno<br>Volumen de un prisma: se calcula mediante el producto | El profesor debe motivar a las y los estudiantes para que éstos opinen y expongan sus respuestas | | 50´ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | entre el área basal $(A_B)$ del cuerpo y la medida de su altura $(h)$:<br><br>$V = volumen\ de\ un\ prisma$<br>$A_B = área\ basal$<br>$h = altura$<br><br>$V = A_B \bullet h$<br><br>Ejercicios: Calcula el volumen de los cuerpos presentados:<br><br><br><br>Actividad 3: Extensión del volumen de prisma a cilindro<br>Con el círculo entregado por el docente, ubica cada prisma que construiste sobre éste. | | | |

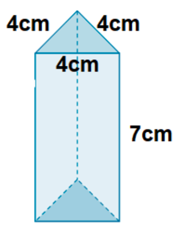
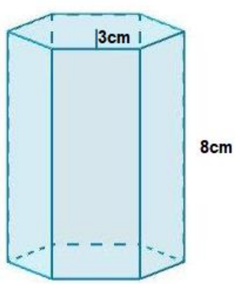
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | a) ¿Qué puedes decir del área del círculo con respecto al área de las bases de los prismas?<br><br>Ahora, imagina que el círculo entregado es base de un cilindro de igual altura que los prismas, esto quiere decir que podremos inscribir los prismas en el cilindro, como presenta la imagen:<br><br><br>b) ¿Qué puedes decir del volumen de los prismas con relación al del cilindro?<br><br>c) De acuerdo a tus respuestas anteriores ¿Cómo calcularías el volumen del cilindro? | | | |

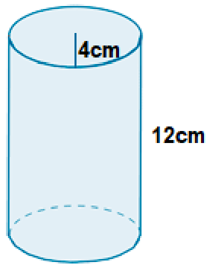
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Cierre | Anota en tu cuaderno<br>Volumen de un cilindro:<br>Se calcula mediante el producto entre el área basal $A_B$ y la medida de su altura $(h)$:<br>$V = volumen\ de\ un\ \ cilindro$<br>$A_B = \pi r^2 = área\ basal$<br>$h = altura$<br>$$V\ =\ \pi r^2\ \bullet\ h$$ | El profesor presenta la formalización y realiza un ejemplo en la pizarra. | Pizarra, data y plumones. | 10´ |

Tabla 7

| PLAN DE CLASE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Eje Temático** | Geometría | **Unidad o Tema:** | Área y volumen de prismas y cilindros | | **Sesión N°7** |
| **Objetivo General de la Unidad** | | Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros | | | |
| **Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje** | | Aplicar las fórmulas de área y volumen de prismas y cilindros a resolución de problemas geométricos y de la vida diaria | | | |
| **Habilidad** | | Visualizar, Argumentar y comunicar, resolución de problemas | | | |
| **Actitud** | | esfuerzo e interés | | | |
| **Momentos de la clase** | **Actividades de Aprendizaje** | | **Intervención Docente** | **Recursos de Aprendizaje** | **Tiempo Estimado** |
| Inicio | **Desafío sobre áreas y volúmenes de cuerpos**<br>Un grupo de jóvenes se reúnen a jugar Jenga, juego que consiste en construir un prisma de base cuadrada a partir de piezas de igual medidas, donde cada “piso” está conformado por tres piezas. | | El educador saluda a sus estudiantes, y entrega el desafío a cada estudiante. | Listado de ejercicios y desafíos, plumones, borrador y pizarra. | 10´ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Cada turno, un jugador debe sacar una pieza de la torre, colocándola en la parte superior de esta.<br><br>Si el juego cuenta con 60 piezas, las cuales miden $1cm$ de alto, $2cm$ de ancho y $6cm$ de largo:<br><br>¿Cuáles serán las dimensiones de la torre formada por todas las piezas del juego?<br>¿Cuál es el volumen de la torre?<br>Si han transcurrido 4 turnos ¿Cuál es volumen del cuerpo resultante?<br>Si los jóvenes deciden jugar sin reponer las piezas extraídas ¿Cuál será el volumen del cuerpo después de 7 turnos?<br>Si se desea construir una caja para poder guardar la torre armada ¿Cuál debe ser la mínima cantidad de cartón (en $cm^2$) necesaria para construirla? | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Desarrollo | **Resuelva los siguientes desafíos presentados en el listado de ejercicios**<br><br>1.- Obtén el área y el volumen de los siguientes cuerpos:<br>a) Prisma regular de base triangular de lado 4 cm y altura 7 cm.<br><br>b) Prisma regular de base hexagonal cuya apotema mide 3 cm y su altura 8 cm.<br><br>c) Cilindro de altura 12 cm y radio basal 4 cm. (Aproxima π = | El profesor es guía en la resolución de los ejercicios y realiza revisión de éstos. | Listado de ejercicios y desafíos, plumones, borrador y pizarra. | 45´ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3)  <br><br>2.- ¿Cuál es el volumen de un prisma de base cuadrada, cuyas aristas miden 3 cm y 7 cm?<br><br>3.- ¿Cuánto debe medir la altura de un cilindro de radio 4 cm, para que su volumen sea 56 $\mathrm{cm}^3$?<br><br>4.-Un prisma recto de base cuadrada tiene una altura de 40 cm y su volumen es de $1000cm^3$. ¿Cuál es el área de la superficie del prisma?<br><br>5.- María quiere regalarle a su abuelo una caja con galletas la cual tiene forma de cilindro. Si la altura de la caja es de 10 cm | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | y su área basal es de 32 $\mathrm{cm}^2$. ¿Cuál es la mínima cantidad de papel que se necesita para poder envolver completamente la caja? (aproxima π = 3)<br><br>6.-Un agricultor necesita construir un invernadero semicilíndrico de manera tal que, su ancho mida 5m, mientras que su largo 15 m.<br>¿Cuál es la cantidad de material necesaria para cubrir la estructura?<br><br> | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 7.- Un rollo de papel higiénico tiene un radio de 5 cm y una altura de 10 cm, este está formado a partir de un cilindro de cartón, cuyo radio mide 2,5 cm, en el cual se enrolla el papel.<br>¿Cuál es el espacio ocupado por el papel?<br><br>8.- Una barra cilíndrica de metal de 1 m de altura y 0,1 m de diámetro es derretida y vaciada en moldes cúbicos cuyas aristas miden 0,2m. ¿Cuántos cubos de metal se pueden hacer a partir de la barra? | | | |
| Cierre | Problema del inicio (de no haber sido resuelto)<br>Para poder unir dos localidades del sur del país, se ha construido un túnel con forma de semicilindro de manera tal que, el grosor de sus paredes es $1m$, su diámetro interior mide $14m$ y el largo del túnel $200m$.<br>¿Cuál fue aproximadamente la cantidad de tierra removida | El profesor presenta el problema de cierre de la clase, guía a los | Listado de ejercicios y desafíos, plumones, borrador y pizarra. | 35´ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | para su construcción?<br><br>¿Cuál fue la cantidad de cemento (en $m^3$) necesaria para la construcción del túnel? | estudiantes, realiza plenario del problema. | | |

Tabla 8

| PLAN DE CLASE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Eje Temático** | Geometría | **Unidad o Tema:** | Área y volumen de prismas y cilindros | | **Sesión N°8** |
| **Objetivo General de la Unidad** | | Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros | | | |
| **Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje** | | Evaluar la unidad de Área y volumen de prismas y cilindros | | | |
| **Habilidad** | | Argumentar y comunicar | | | |
| **Actitud** | | esfuerzo e interés | | | |
| **Momentos de la clase** | **Actividades de Aprendizaje** | | **Intervención Docente** | **Recursos de Aprendizaje** | **Tiempo Estimado** |
| Inicio | En el comienzo de la clase se le entrega a cada estudiante la evaluación correspondiente a la unidad área y volumen. | | El educador saluda a sus estudiantes, y ordena la sala de tal manera que se pueda efectuar la evaluación. | Instrumento evaluativo. | 5´ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Desarrollo | Desarrollo de la prueba. (anexo) | El profesor observa a los alumnos para asegurar el correcto desarrollo del instrumento evaluativo. | Instrumento evaluativo. | 80´ |
| Cierre | Se entrega la evaluación al docente | El profesor recoge todas las pruebas que rindieron los estudiantes. | Instrumento evaluativo. | 5´ |

Tabla 9

### 5.3 Análisis a priori de las situaciones claves de los planes de clase

A continuación, se detalla el análisis a priori de las situaciones claves para los planes propuestos, del cual se contemplan los siguientes aspectos: **(a)** respuesta correcta al problema o situación planteada, **(b)** detectar los conocimientos previos que son necesarios para el desarrollo de la situación, **(c)** conocimientos en juego de la situación, **(d)** posibles dificultades y errores de las respuestas de los estudiantes.

**Plan de clase 2: actividad de estimación del área de la pizarra.**

(a) Para estimar el área se espera que se utilice una unidad representante de área (la superficie de un cuaderno, de un block, etc.), del cual se podrá estimar el número de veces que podría contener la pizarra a esta unidad. O por otra parte recordar que el área de un rectángulo es igual al largo por el ancho, entonces la unidad representante para estimar el área de la pizarra sería la longitud de un objeto, midiendo el largo y el ancho de la pizarra, de manera que con estos datos se pueda estimar el área. Luego el estudiante podrá decir cuál es el área en base a su unidad representante y de aquí se realiza una medición a esta unidad con una medida estándar (metros) y así saber de manera más precisa la estimación realizada. De aquí se espera que el estudiante comprenda que la estimación es adecuada cuando carecemos de los instrumentos de precisión, pero tenemos una referencia para poder estimar alguna medida de un objeto (longitud, área, volumen, etc.).

(b) Los conocimientos previos que el estudiante debe tener para poder desarrollar la actividad sería comprensión del concepto de área y aplicación de este al cálculo de área de rectángulos.

(c) Los conocimientos en juegos de esta situación es comprender que la estimación de áreas es un paso previo al cálculo de áreas y para pasar de la estimación al cálculo se precisa de un modelo matemático que represente en este caso al área, el cual estaría dado por medio de expresiones algebraicas.

(d) Las posibles dificultades están asociadas a que los estudiantes no dominen los conocimientos previos, hecho que no les permitiría hacer desarrollo efectivo de la actividad. Los posibles errores que se pueden cometer estarían dados al momento de querer pasar de la unidad representante a la unidad estándar y los estudiantes realicen mal las operaciones llegando a resultados alejados de la aproximación al cálculo real del área de la pizarra.

**Plan de clase 3: Actividad para reproducir prismas a partir de una cara basal.**

(a) Para poder reproducir los prismas a partir de una base, se considera el lado de dicha base para el ancho de la cara lateral y su largo serán los quince centímetros que solicita la actividad, considerando esto se dibuja la base y se construye una cara lateral adyacente a uno de los lados (rectángulo formado con las especificaciones mencionadas anteriormente), y de manera contigua se repite esta cara lateral tantas lados tenga la base, posteriormente se dibuja de manera adyacente por el ancho de la cara lateral, que no se ha trabajado, la otra base. Así se desarrolla una red de prisma con bases regulares, como se presenta en la imagen 19.

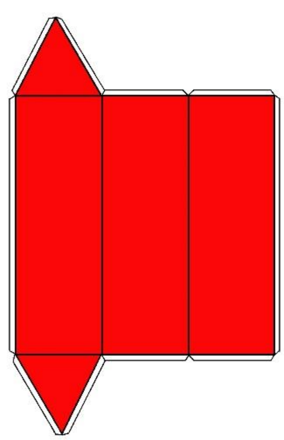


Imagen 19

(b) Los conocimientos previos necesarios para el desarrollo de esta actividad son: área de figuras compuestas, conocimiento de la red de un cuerpo, área de figuras regulares, construcción de figuras planas, caracterización de figuras planas.

(c) El desarrollo de esta actividad está enfocado en la caracterización del prisma regular y en la inferencia de la formula del cálculo de área de prisma. Para ello se hacen preguntas referidas a identificar propiedades de la red en una primera instancia, y luego relacionar estas con una segunda sección de preguntas que permitan extender las propiedades de la red al cuerpo.

(d) Las posibles dificultades están asociadas a que el estudiante no tenga pleno dominio o entendimiento de los conocimientos previos, lo cual cuartara un pleno desarrollo de la actividad. Y posibles errores que puedan cometer los estudiantes pueden ser:

- No considerar las bases como figuras congruentes.
- Considerar más caras laterales que lados de las bases.
- No considerar que las caras laterales son congruentes.

**Plan de clase 4: actividad reproducción del cilindro a partir de su visualización.**

A partir de la problemática planteada, la cual es dibujar la red que logre armar el cilindro circular recto a partir de la visualización del cuerpo, se espera como respuesta experta que los estudiantes consideren el perímetro de la base que ellos escogieron para poder dibujar la red correctamente y ésta cierre, es decir, cuando dibujen el rectángulo que corresponda a la cara lateral curva, el ancho o el largo (dependiendo de donde se ubique la base) debe medir lo mismo que el perímetro de la base circular. Para poder llevar a cabo esta tarea, se desarrolla una serie de preguntas que tienen como fin guiar al estudiante al descubrimiento de esta relación. Para esta secuencia de preguntas, se realiza el análisis a priori de cada una de éstas:

(a) Se espera que los estudiantes puedan dibujar distintas redes de cilindros, es decir, no solo presentar la típica que muestra el rectángulo que genera la cara lateral curva, y sus bases unidas a un par de lados paralelos. Estas se consideran como posibles estrategias que puedan tener los estudiantes.

1) Caracterización del cilindro circular recto: cuerpo geométrico redondo, que cuenta con dos caras basales circulares congruentes, y una cara lateral curva y cerrada. Las bases son paralelas y perpendiculares al eje del cilindro.

2) Pregunta 1 y 2: Esta pregunta busca establecer que tan precisa puede ser la argumentación y comunicación del estudiante, identificando dificultades al momento de dibujar la red, por ende, no tiene respuesta experta, busca detectar déficit de los estudiantes con relación a la habilidad.

3) Pregunta 3: Las bases son circulares congruentes, paralelas y perpendiculares al eje del cilindro.

4) Pregunta 4: Debido a que este perímetro debe coincidir con la medida de los lados paralelos de la cara lateral curva donde se decida ubicar las bases.

5) Pregunta 5: Se debe calcular el área de ambos círculos más el área del rectángulo que conforma la cara lateral curva.

6) Para calcular el área $(A)$ de la superficie de un cilindro de radio r y altura h es:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

(b) Los conocimientos previos de los estudiantes para el desarrollo correcto de la actividad deben ser, construcción geométrica, comprensión del concepto de perímetro y área, más el cálculo del perímetro y superficie de áreas de círculos y rectángulos, postulado de la suma de áreas.

(c) Los conocimientos en juego serian la caracterización y le inferencia del cálculo del área de la superficie del cilindro.

(d) Las posibles dificultades que podrían tener los estudiantes tienen relación con el no dominio de los conocimientos previos, que impedirían al estudiante a encontrar la relación entre el perímetro de la base circular y la medida del lado del rectángulo que se ubique la base y/o identificar el área de la superficie del cilindro desprendiéndola de la red del cuerpo. Y los posibles errores que puedan cometer los estudiantes tienen relación con:

- No considerar las bases del cuerpo como figuras congruentes.
- No considerar el área de las bases circulares, para que esta coincida con el lado de la cara lateral curva, en la cual se decidan poner, provocando que el cuerpo no cierre.

**Plan de clase 7: actividad del Jenga.**

(a)

1. Al armar la torre como se sugiere, se puede visualizar un prisma de base cuadrada cuya arista basal mide 6 cm y la altura del prisma medirá 20 cm.

En este caso se espera que los estudiantes reconozcan que la base es un cuadrado por lo que su largo y ancho miden 6 cm respectivamente y su alto corresponde a 20 cm.

2. Para determinar el volumen se calcula el área basal ($36cm^2$) y se multiplica por la altura (20 cm) lo que resulta $720cm^3$

   Para esta pregunta es posible que los estudiantes realicen el cálculo del volumen mediante la fórmula $Área\ basal \cdot altura$ o multipliquen directamente las medidas de sus dimensiones.

3. La pregunta c) apunta al volumen que se define como espacio ocupado por un sólido, entonces el volumen luego de 4 turnos no varía.

4. En este caso el juego está en una modalidad sin reposición lo que implica que en este caso el volumen final será ($Volumen\ final = Volumen\ total - Volumen\ de\ 7\ piezas$), lo que resulta un volumen final de 636$cm^3$.

   Dentro de este apartado se espera que los alumnos calculen los volúmenes solicitado a partir de la fórmula para luego realizar la sustracción correspondiente.

5. Se debe calcular el área de la torre del juego (prisma de base cuadrada): $Área\ prisma = Área\ lateral + Área\ basal$, entonces el área del prisma (cantidad necesaria de papel para envolver el juego), R: 552$cm^2$.

   En el caso del cálculo de área se espera que los estudiantes apliquen la fórmula, aunque no se descarta que los discentes realicen una descomposición de figuras desde la red de la figura.

(b) Los conocimientos previos que necesitan los estudiantes para desarrollar la actividad son: comprensión y cálculo de área de superficies y redes geométricas, comprensión y cálculo de volumen de sólidos, noción del concepto capacidad y modelar situaciones algebraicamente.

(c) El conocimiento en juego de la actividad es resolver situaciones problemas mediante el cálculo de áreas y volúmenes de prismas.

(d) Una de las dificultades de los estudiantes es diferenciar los conceptos de capacidad y volumen, ya que están acostumbrados a entenderlos como sinónimos. En este caso el error que puede surgir de dicha dificultad es en la pregunta 3 ya que los discentes pueden consideren que el volumen del sólido aumenta al ir colocando piezas encima de la torre sin considerar que queda espacio por utilizar o cavidades dentro de la torre. También respecto a la pregunta 5) los estudiantes están expuestos a confundir el foco de la pregunta considerando el volumen del cuerpo en vez del área de su superficie.

# CAPÍTULO VI
# ESTUDIO DE CLASES

## Descripción de Estudio de Clase

La clase seleccionada para realizar la Metodología de Estudio de Clases (MEC) se ubica en la secuencia como el plan de clase número cuatro, el cual corresponde al contenido de área de cilindro. Esta clase fue seleccionada debido a que su contenido por lo general es presentado de manera tradicionalista, es decir, se presenta el cálculo del área de cilindro como un procedimiento algorítmico sin mayor fundamento para el estudiante, el cual solo es replicado en ejercicios y/o problemas. El logro didáctico del desarrollo de esta clase será caracterizar y formular el área del cilindro, lo cual se llevará a cabo por medio de la actividad de la reproducción del cuerpo, es decir, a partir de la visualización de un cilindro los estudiantes tendrán que construir la red del cuerpo y desde esta tarea introducir las características del cuerpo e inferir su fórmula a partir de la red.

## 6.1 Diseño de la clase

### 6.1.1 Plan de clase

En la tabla 10 se encuentra el plan de clase diseñado en base a la situación problema**.**

<table>
<tr><td colspan="6">PLAN DE CLASE</td></tr>
<tr><td>Eje Temático</td><td>Geometría</td><td colspan="2">Unidad o Tema:</td><td colspan="2">Área y volumen de prismas y cilindros</td><td>Sesión N°4</td></tr>
<tr><td colspan="3">Objetivo General de la Unidad</td><td colspan="3">Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje</td><td colspan="3">Caracterizar el cilindro e inferir la fórmula para el cálculo de área de la superficie del cilindro</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Habilidad</td><td colspan="3">Argumentar y comunicar</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Actitud</td><td colspan="3">esfuerzo e interés</td><td></td></tr>
<tr><td>Momentos de la clase</td><td colspan="3">Actividades de Aprendizaje</td><td>Intervención Docente</td><td>Recursos de Aprendizaje</td><td>Tiempo Estimado</td></tr>
<tr><td>Inicio</td><td colspan="3">Presentación del cuerpo<br>Observa el cuerpo mostrado a continuación.</td><td>El educador saluda a sus estudiantes, muestra el cuerpo</td><td>PPT (anexo)<br>Pizarra, data y plumones.</td><td>5´</td></tr>
</table>

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | geométrico. | | |
| Desarrollo | **Actividad: reproducción del cilindro.**<br><br>A partir del cilindro mostrado dibuja la red del cuerpo geométrico, y luego procede a armarlo.<br><br>Preguntas para guiar la actividad:<br><br>¿Qué sucedió al momento de querer armar el cilindro a partir de su red?<br><br>Si no pudiste formar el cuerpo vuelve a la red que dibujaste ¿Por qué crees que no pudiste armar el cilindro?<br><br>¿Qué modificarías de la red que habías dibujado para poder armar el cilindro? | El docente presenta el cilindro circular recto. Presenta las preguntas para que los estudiantes puedan realizar de mejor manera la actividad y resuelve duda de los estudiantes. | Cartulina<br>Pegamento<br>Regla<br>Compás<br>Pizarra, data y plumones<br>PPT (anexo) | 70´ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | ¿Qué relación deberían tener las bases del cilindro?<br><br>¿Por qué es importante considerar el perímetro de las bases al momento de dibujar la red? ¿Con cuál parte de la red debería tener relación el perímetro de las bases?<br><br>Ahora que logramos identificar los errores de la red que se había utilizado en un comienzo, corrígelos y vuelve a dibujar la red.<br><br>¿Cómo calcularías el área de la red que tienes?<br><br>Ahora arme el cilindro.<br><br>¿Podría definir el cilindro a partir del trabajo realizado?<br><br>¿Cómo calcularías el área del cilindro? | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Cierre | Formalización de los conceptos:<br><br>Cilindro recto: cuerpo geométrico formado por una cara lateral curva y dos bases circulares congruentes. Las bases son perpendiculares a la cara lateral curva.<br><br>Área del cilindro: Para calcular el área $(A)$ de la superficie de un prisma se deben sumar las áreas de sus caras laterales $(A_L)$ y basales $(2A_B)$:<br>$A$: *área de la superficie de un prisma*<br><br>$A_L$: *suma de áreas de caras laterales*<br>$2A_B$: *suma de las cara basales del prisma*<br><br>$A = AL + 2AB$ | El profesor formaliza el conocimiento propuesto en las actividades anteriores. | PPT (anexo) Pizarra, data y plumones. | 15´ |

Tabla 10

### 6.1.2 Reflexiones

En un comienzo para definir la situación problema, se planteó la clase bajo una perspectiva constructivista, buscando romper con el paradigma tradicional imperante en las aulas (donde el profesor es el centro de la clase y quien provee los conocimientos), mediante una actividad en la cual el estudiante a partir de la experimentación pueda conjeturar respecto a los conocimientos en juego, adquiriendo un rol más activo en la clase.

Para esto en un principio se planteó frente al grupo de futuros profesores la actividad de dibujar la red del cilindro a partir de un rectángulo dado, de lo cual se decidió que la actividad era una situación problema dado que era posible abordarlo de más de una manera y además, su solución no es trivial para las y los estudiantes; de igual forma se sugirió cambiar la actividad, debido a que los estudiantes podrían cortar el rectángulo y formar el cilindro uniendo una de las parejas de lados paralelos, encontrando de esta forma las bases faltantes para armar el cilindro, sin relacionar el perímetro de la base con la medida de los lados paralelos que se posicionan sobre ellas. También se propuso mejorar la seguidilla de preguntas planteadas para esta actividad, de lo cual se mencionó que debían ser más precisas con respecto a lo que preguntaban. También en un comienzo el inicio de la clase retoma la actividad de la clase anterior realizando una síntesis de ésta y luego se iniciaba el desarrollo con la situación problema, de esto se comentó que sería mejor comenzar el inicio de la clase con la situación problema, quitando la parte de retomar la clase anterior. Tomando en consideración los comentarios de los colegas se procede hacer cambio del plan de clase presentado en un comienzo, modificando el inicio, el cual es eliminado para dar paso a la situación problema la cual también es modificada, ahora consiste en reproducir el cilindro a partir de la visualización de éste, la cual será realizada por completo por el estudiante, acompañando esta situación de dos situaciones guiadas por una serie de pregunta que tienen como fin inferir la fórmula para el cálculo de área del cilindro a partir de la red de éste.

Respecto a los cambios realizados a partir de la discusión de la clase, resulta primordial la visión externa de la comisión colaboradora, ya que identifican dificultades que en principio no fueron detectadas, permitiendo la mejora de la clase, además de posibles estrategias a ocupar por los estudiantes, propiciando una visión más global del problema, permitiendo analizar de manera más rigurosa su pertinencia para el cumplimiento del objetivo de la clase.

## 6.2 Experimentación de la clase

La clase planificada fue aplicada en el Colegio Nuestra Señora de Andacollo de la comuna de Santiago y se desarrolló junto a un 8° básico conformado por estudiantes de entre 13-15 años. La asistencia de aquel día registró un total de 40 alumnos a quienes se les entregó un cuestionario (Tabla 10) y luego se les mostró el cilindro llevado por el docente.

Al enfrentarse a la actividad 1 (primera parte del cuestionario) los alumnos se mostraron bastante interesados e hicieron preguntas generales como "¿Profesor, que significa caracterizar?" o "¿Podemos utilizar regla y compás? "Al momento de estar desarrollando la primera hoja del cuestionario (Actividad 1 y preguntas 1, 2, 3 y 4), la principal dificultad evidenciada por los discentes radicó en que, al momento de dibujar la red del cuerpo, no lograron armar el cilindro circular recto porque las bases que dibujaban no calzaban con la medida del lado del rectángulo que constituye la cara lateral o viceversa, otra dificultad fue identificar la relación de congruencia y paralelismo que existe entre las bases. El docente en dichos momentos verificaba el trabajo de los estudiantes puesto por puesto para entregar la segunda hoja del cuestionario a quienes terminaban de armar o tratar de armar el cuerpo. En esta segunda instancia el profesor motivó a las y los alumnos a responder el cuestionario para que pudieran visualizar sus errores y realizar los correctivos necesarios. Para la pregunta cuatro en particular las preguntas más frecuentes fueron "¿Qué es el perímetro? o ¿Qué era el perímetro?" a lo que el docente entregó la respuesta: "el perímetro de una figura corresponde a la suma de las medidas de todos sus lados".

Respecto de la pregunta 5 de la actividad dos, los alumnos en su mayoría respondieron de manera adecuada pues mencionaron que la manera de calcular el área de la superficie del cilindro es determinar cada área de las figuras correspondientes y luego sumarlas. En el caso de la pregunta seis los alumnos mostraron muchas dificultades de abstracción pues mencionaron que no podían determinar el área solicitada porque les faltaban números (medidas), lo que denota un precario dominio del algebra. Cabe destacar que hubo un solo estudiante que logró inferir la fórmula para determinar el área del cilindro.

Para el cierre de la clase se tenía preparado realizar un plenario para compartir las respuestas de las y los estudiantes con el fin de sintetizar el trabajo realizado, caracterizar el cuerpo geométrico formalmente y mostrar la fórmula para calcular el área de la superficie de cilindros, lo que por motivos de tiempo no se realizó de manera óptima siendo un factor fundamental el ruido y las constantes conversaciones de alumnos y alumnas que estaban organizando actividades escolares extra programáticas.

## 6.3 Reflexión y discusión de la clase

### 6.3.1 Descripción del escenario

Posterior a la aplicación y grabación de la clase, se presentó el video con las partes más relevantes de la clase al grupo de trabajo con quienes ya se había revisado el plan de la clase previo a la implementación, con el fin de generar discusión respecto a las apreciaciones, tanto matemática, como pedagógicas y didácticas, destacadas por la comisión (gestión de la actividad, formalización de conceptos, formalidad, entre otros). De esta manera es como se busca dar perfeccionamiento sustancial a la clase desarrollada en base a una situación problema planteada por un equipo de profesores, siendo ésta observada y evaluada por un grupo docentes.

### 6.3.2 Focos relevantes de la discusión

Una vez presentado el video, los comentarios realizados por los y las colaboradoras se centraron en: la conducta de los estudiantes durante la clase, los tiempos destinados al desarrollo de la actividad, el uso de los errores cometidos por los estudiantes como instancia de aprendizaje, la sociabilización de resultados y el objetivo de la clase versus el objetivo de la actividad.

Respecto a la conducta de las y los estudiantes, la mayoría de estos mantuvieron un bullicio constante en casi toda la clase dificultando su desarrollo por lo que, el inicio de la discusión se centró en el porqué de su comportamiento y las posibles formas de llamar su atención. Se destacaron numerosos factores externos, pero principalmente, la ruptura del contrato didáctico (Brousseau, 1998) como gestor de lo ocurrido y los tiempos destinados a cada etapa de la actividad, ya que los y las estudiantes no acostumbraban a trabajar de manera independiente, ni en actividades que no involucraran el cálculo directo de algún valor o medida. Respecto a los tiempos de la actividad, se sugiere acotarlos y respetarlos, para evitar el ocio en estudiantes que hayan finalizado antes que sus compañeros y compañeras y poder tener más tiempo para el cierre de la clase.

En cuanto al uso de los errores cometidos por las y los estudiantes, en la discusión se menciona la ausencia de situaciones en donde éstos sean utilizados como instancias de aprendizajes, siendo que, en la actividad el equivocarse es uno de los puntos clave para su óptimo desarrollo, siendo necesaria su incorporación dentro del plan de clase. En relación con lo anteriormente descrito, es que se discute la pertinencia de la sociabilización de las producciones de los estudiantes en dos instancias, la primera, al momento de diseñar la red del cuerpo, mientras que la segunda es al momento de construir el cuerpo a partir de la red diseñada; con el fin de que los y las estudiantes adquieran un rol activo en la clase, además de validar los conocimientos en juego entre pares, rompiendo de esta manera con el paradigma tradicional de la educación, donde el docente es el centro del conocimiento.

Por último, el final de la discusión se focalizó en la pertinencia de presentar el algoritmo para el cálculo de área de superficie de cilindros, ya que, si bien se esperaba que los estudiantes fueran capaces de construirlo, el tiempo no fue suficiente para ello, opacando la caracterización del cuerpo y su red.

### 6.3.3 Reflexiones del profesor en práctica

Como es sabido quien ejerce en el ámbito docente debe tener la capacidad de generar reflexiones profesionales de manera continua, que ayuden a mejorar y analizar con una mirada crítica sus propias prácticas.

Es así que dentro de las fases de la MEC, la evaluación se constituye en una herramienta sustantiva para el desarrollo profesional del profesor, ya que, más que sugerencias se reciben opiniones y críticas en base a la clase observada y en esta ocasión pudimos evidenciar desde la misma discusión y las pautas de observación que el grupo de trabajo estuvo interesado en la discusión y se lograron formular críticas de manera objetiva y profesional lo que colaboró en la continuidad del proceso, puesto que a pesar del sonido ambiente del aula el cual era muy ruidoso el grupo evaluador se preocupó de analizar los aspectos pedagógicos y didácticos, pero más allá de eso la discusión estuvo centrada en la situación problema que se propuso, tal como mencionan Jiménez y Cárdenas (2014,pág.99) “con el equipo realizan una coevaluación, dada a través del diálogo y análisis caracterizado por la objetividad, pues no se puede correr el riesgo de ser excesivamente permisivos o críticos, o centrándose sobre aspectos no convenidos en la planeación inicial”. A partir de los comentarios y críticas constructivas realizadas por el grupo evaluador consideramos importante mencionar que al realizar un quiebre del contrato didáctico de un curso en específico son muchos los factores que se deben tomar en cuenta, por ende, es ideal poder establecer reglas mínimas de conducta y respeto dentro de un aula para que la actividad propuesta sea más que “armar un cuerpo” lo que puede ser subsanado por cierres parciales de cada actividad en que los estudiantes expongan sus producciones y realicen conjeturas con la guía del profesor.

Por la riqueza del trabajo en cuanto a lo disciplinar/didáctico, consideramos que los futuros profesionales de la Educación en Matemática debemos promover estos espacios de discusión en las escuelas y en los colegios y así fomentar el trabajo grupal y colaborativo entre docentes con el objetivo de mejorar la educación a través de nuestras prácticas profesionales a través de propuestas innovadoras que logren generar aprendizajes significativos en las y los alumnos.

### 6.4 Plan de clases Rediseñado (Tabla 11).

| **PLAN DE CLASE** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Eje Temático** | Geometría | **Unidad o Tema** | Área y volumen de prismas y cilindros | **Sesión N°4** |
| **Objetivo General de la Unidad** | | Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros | | |
| **Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje** | | Caracterizar el cilindro e inferir la fórmula del área de la superficie de cilindros | | |
| **Habilidad** | | Argumentar y comunicar | | |
| **Actitud** | | esfuerzo e interés | | |
| **Momentos de la clase** | **Actividades de Aprendizaje** | **Intervención Docente** | **Recursos de Aprendizaje** | **Tiempo Estimado** |
| Inicio | **Presentación del cuerpo** **Actividad 1**: A partir del cilindro mostrado: caracteriza el cuerpo geométrico, dibuja su | El educador saluda a sus estudiantes para luego entregar | Cuestionario (anexo) Pizarra, data y | 10´ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | red, compártela con tus compañeros y compañeras, luego contesta las preguntas.<br><br>Características del cuerpo geométrico:<br><br>Dibuja la red del cuerpo presentado.<br><br>Preguntas:<br>¿Era posible armar un cilindro a partir de la red que diseñaste? ¿Por qué? | la hoja del cuestionario correspondiente a la Actividad 1. Luego, muestra un cilindro de cartulina a las y los estudiantes para que puedan realizar lo pedido.<br>En la actividad 1, se da tiempo a los estudiantes para que puedan compartir las redes, identificando errores y aciertos en los diseños.<br>En este caso el profesor realiza un cierre parcial para | plumones. | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | caracterizar el cuerpo e identificarlo por su nombre. | | |
| Desarrollo | **Actividad 2**: De ser necesario rediseña la red del cilindro, construye la red en una cartulina, procede a armarla, comparte el cuerpo formado a tus compañeras y compañeros, luego contesta las preguntas.<br><br>Preguntas:<br>1. ¿Qué dificultades tuviste al construir la red y armar el cuerpo?<br><br>2. ¿Te fue posible armar el cuerpo? De no haberlo podido armar, ¿Por qué no lo pudiste hacerlo? ¿Cuáles errores destacarías?<br><br>3. ¿Qué relación existe entre las bases | Durante la actividad 2, se presentan producciones representativas de los estudiantes para que estos visualicen y discutan sus posibles errores; una vez realizado esto, de ser necesario, se presentan las preguntas 3 y 4 a los estudiantes | Cartulina<br>Pegamento<br>Regla<br>Compás<br>Pizarra, data y plumones<br>PPT (anexo) | 65´ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | del cuerpo? Explica tu respuesta.<br><br>4. ¿Es importante considerar el perímetro de las bases al momento de dibujar la red? ¿Por qué?<br><br>**Actividad 4**: Tomando en consideración tus respuestas anteriores, corrige tus errores y dibuja a la red nuevamente. Luego contesta las siguientes preguntas.<br><br>1. ¿De qué manera podrías calcular el área de la superficie del cilindro?<br><br>2. ¿Cuál es el área de superficie de un cilindro cuyo radio basal es r y su altura es h? | para que puedan conjeturar a partir de sus errores.<br><br>El educador debe verificar puesto por puesto que los estudiantes trabajen en la actividad. Además, es necesario que por cada actividad se compartan las respuestas de los estudiantes, para así validarlas, complementarlas o refutarlas en conjunto con los estudiantes. | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Cierre | Formalización de los conceptos:<br><br>Cilindro recto: cuerpo geométrico formado por una cara lateral curva y dos bases circulares congruentes. Las bases son perpendiculares a la cara lateral curva.<br><br>Área del cilindro: Medida asociada la superficie del cuerpo. Para calcular el área $(A)$ de la superficie de un prisma se deben sumar las áreas de sus caras laterales $(A_L)$ y basales $(2A_B)$:<br>$A$: *área de la superficie de un prisma*<br><br>$A_L$: *suma de áreas de caras laterales*<br>$2A_B$: *suma de las cara basales del prisma*<br><br>$A = A_L + 2A_B$ | El profesor antes de entregar las definiciones y la fórmula realiza un plenario en conjunto con los estudiantes, en este caso debe seleccionar a estudiantes bajo el criterio del docente, con el fin de que el plenario sea significativo para los y las estudiantes. | PPT (anexo)<br>Pizarra, data y plumones. | 15´ |

Tabla 11

## 6.5 Reflexión final

Para hablar del trabajo, entendiendo este como colaborativo, se nos hace necesario destacar que se mencionará bajo la definición dada por Zumba y Jaramillo (2016, pág.6) quienes señalan que “se entiende por trabajo colaborativo a la participación de todos y cada uno de los integrantes de una comunidad para el beneficio del medio en el que se desenvuelven.”

Al realizar los lineamientos generales del trabajo de investigación nos produjo bastante expectativas de lo que sería el trabajo bajo la Metodología de Estudio de Clase y sus respectivas etapas. Desde la etapa de formulación del problema hasta la puesta en común de la clase diseñada se obtuvieron aprendizajes profesionales por parte del grupo, puesto que el trabajo colaborativo sugerido por la MEC fomenta un trabajo respetuoso entre pares y el compromiso de los docentes para generar propuestas de clases innovadoras, además fomenta el aprendizaje de habilidades blandas por parte de los docente, como el trabajo en grupo y/o equipos, la resolución de conflictos, etc. tal como menciona Londoña (2018,pág.) “Hoy y en unos años, los profesores tendrán que trabajar el pensamiento crítico y la creatividad como habilidades principales”, conceptos desarrollados durante el trabajo realizado en conjunto con el curso el cual que aportó en el diseño y rediseño de la clase propuesta y en las reflexiones propuestas.

Dentro de las reflexiones expuestas hubo una que nos llamó la atención pues se refería a que nuestra propuesta se podría transformar en una situación didáctica potente, ya que la clase propuesta constaba implícitamente con las fases de Acción, Validación e Institucionalización, faltando la fase de comunicación lo cual concuerda con algunos comentarios de los pares quienes sugirieron realizar cierres parciales durante la actividad para que los estudiantes pudieran verificar sus respuestas en base a plenarios guiados por el docente.

Condiciendo lo anterior, para poder sustentar una discusión con compañeros y futuros colegas es fundamental que como profesores reflexionemos sobre nuestras prácticas, como lo indica el Marco para la Buena Enseñanza (2008) en el "Dominio D: Responsabilidades profesionales, Criterio D.1: El profesor reflexiona sistemáticamente sobre su práctica", es decir, apunta a realizar una reformulación de las prácticas de enseñanza reflexiones a partir de los resultados de los alumnos. Además, se hace necesario construir espacios de diálogo con los demás docentes donde se confronten reflexiones individuales y también se difundan herramientas pedagógicas y/o metodologías que aportan al propio perfeccionamiento y también al de la Educación Matemática.

# CAPITULO VII
# ANÁLISIS DE RESULTADOS

Tras la aplicación de la secuencia completa, se obtuvieron producciones de los estudiantes dentro de las situaciones claves, las cuales serán analizadas en la siguiente sección del trabajo, para posteriormente realizar una confrontación con lo desarrollado en el capítulo anterior, referido al análisis a priori de las situaciones.

## 7.1 Análisis a Posteriori

Evaluación diagnóstica: se realiza esta evaluación con el fin de determinar el nivel en el que se encuentras los estudiantes respecto a conocimientos previos con relación a la habilidad de argumentar y comunicar, todo esto a la luz de nuestro marco de referencia, para ello, se presenta una tabla que relaciona cada pregunta, con la cantidad de alumnos que contestaron en el nivel correspondiente (nivel 1: visualización, nivel 2: análisis, nivel 3: deducción informal, y la categoría de no responde, donde también se incluyen producciones que no se pueden considerar dentro de los niveles) y una pequeña descripción del objetivo de la pregunta (Tabla 12). Luego se muestran respuestas representantes de cada nivel, dando una pequeña descripción de lo que realiza el estudiante.

| Preguntas | No responde | Nivel 1 | Nivel 2 | Nivel 3 | Objetivo de la pregunta |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 39 | 1 | 0 | Reconocer la familia a la que corresponde la figura, atribuyendo las propiedades correspondientes. |
| 2 | 3 | 34 | 3 | 0 | Reconocer la diferencia entre las figuras, y advertir que una es caso particular de la otra. |
| 3 | 13 | 26 | 1 | 0 | Justificar por qué dos cuerpos de distinta forma, pueden |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | tener igual volumen. |
| 4 | 18 | 19 | 3 | 0 | Aplicar un algoritmo adecuado que permita calcular el área solicitada. |
| 5 | 9 | 29 | 2 | 0 | Reconocer porque no se puede armar el prisma con la red. |
| 6 | 14 | 26 | 0 | 0 | Comparar el área de dos superficies. |
| 7 | 15 | 25 | 0 | 0 | Modelar y evidenciar que sucede con la situación planteada. |

Tabla 12

*****(el reconocer, justificar, aplicar, comparar y modelar que se utilizan como objetivos, serán correctos en la respuesta siempre y cuando, el alumno argumente y comunique de forma adecuada a la pregunta planteada, debido a que cada una de estas es de manera abierta, por ende, cada objetivo tiene su respectiva argumentación matemática, la cual debe ser comunicada de manera coherente).

A continuación, se presentan producciones representantes de cada nivel, para cada pregunta del diagnóstico:

Pregunta 1.

Nivel 1: los estudiantes son capaces solo de reconocer las figuras a partir de un todo, no asociando propiedades a éstas, mostrando un lenguaje geométrico no desarrollado (Imagen 20 y 21)

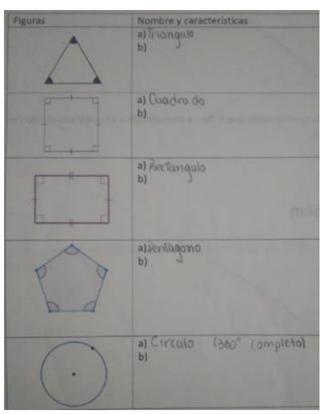


Imagen 20

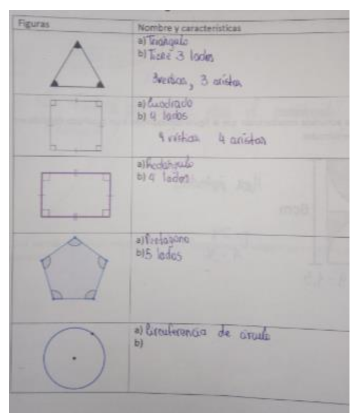


Imagen 21

Nivel 2: los estudiantes reconocen las figuras y asocian algunas propiedades a éstas, pero no reconocen las familias a las que corresponden (Imagen 22 y 23).

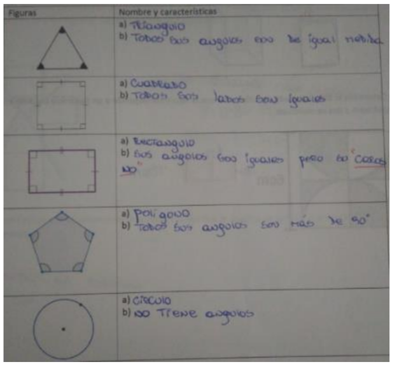


Imagen 22

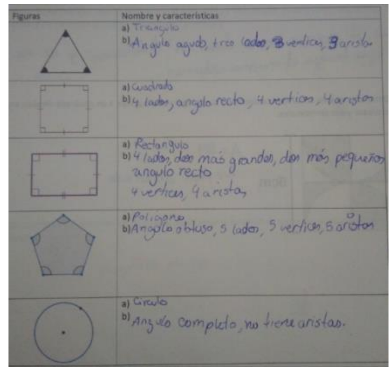


Imagen 23

Nivel 3: no existen producciones que alcancen este nivel.

Pregunta 2.

Nivel 1: los estudiantes son capaces de identificar la diferencia de manera particular o visual, no desarrollando un lenguaje geométrico adecuado (Imagen 24).

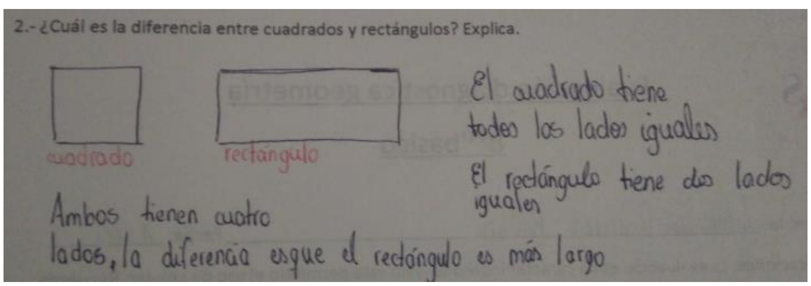



Imagen 24

Nivel 2: reconocen similitud entre las figuras, destacando su diferencia, sin considerar que el cuadrado es caso particular del rectángulo (Imagen 25).

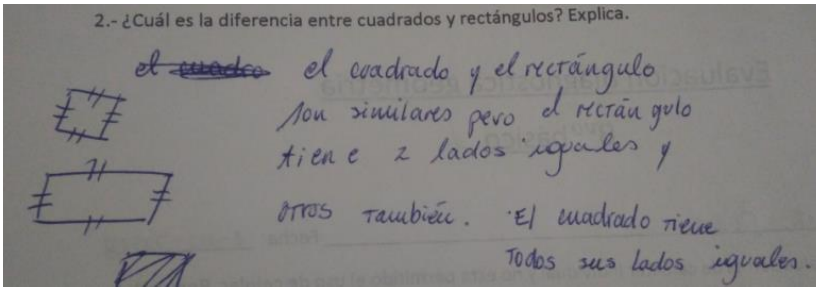


Imagen 25

Nivel 3: no existen producciones que alcancen este nivel.

Pregunta 3.

Nivel 1: reconocen que figuras de distintas dimensiones pueden ser de igual volumen. No demuestran lenguaje geométrico desarrollado. No existe justificación matemática (Imagen 26).

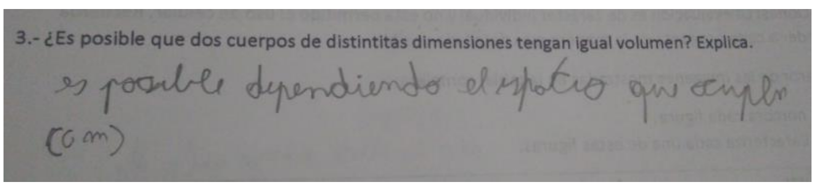


Imagen 26

Nivel 2: reconoce que figuras de distintas formas pueden tener igual volumen, dando justificación matemática correspondiente, que compruebe la afirmación. Sin embargo, es de nivel experimental, sin evidenciar las propiedades entre los cuerpos para su justificación (Imagen 27).

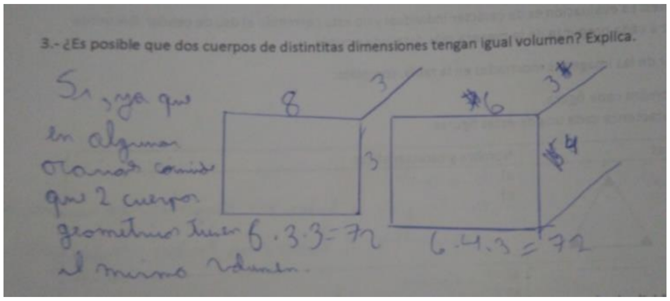



Imagen 27

Nivel 3: no existen producciones que alcancen este nivel.

Pregunta 4.

Nivel 1: se logra reconocer las áreas generales de la figura, sin desarrollar un algoritmo que proporcione el área solicitada (Imagen 28).

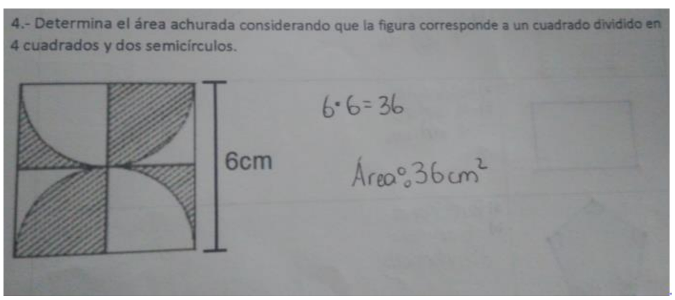



Imagen 28

Nivel 2: existe reconocimiento de una descomposición geométrica, aplicando el algoritmo del cálculo del rectángulo, obteniendo el área solicitada. Pero lo realiza de manera experimental, sin justificaciones en relación al enunciado (Imagen 29).

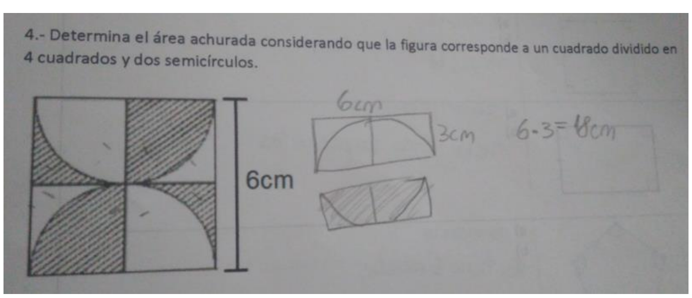



Imagen 29

Nivel 3: no existen producciones que alcancen este nivel.

Pregunta 5.

Nivel 1: existe noción de que el cuerpo no se puede formar con la red, sin dar argumentos matemáticos que justifiquen esta afirmación (Imagen 30 y 31).

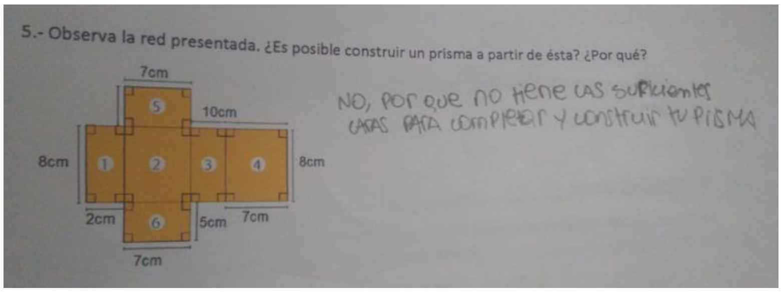


Imagen 30

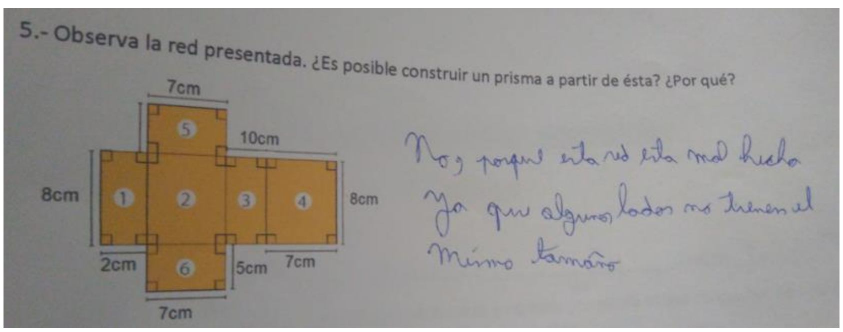


Imagen 31

Nivel 2: se logra identificar por qué no se puede armar el cuerpo con la red propuesta, identificando las medidas no permiten la construcción. Pero no se atribuye a la propiedad de congruencia (Imagen 32).

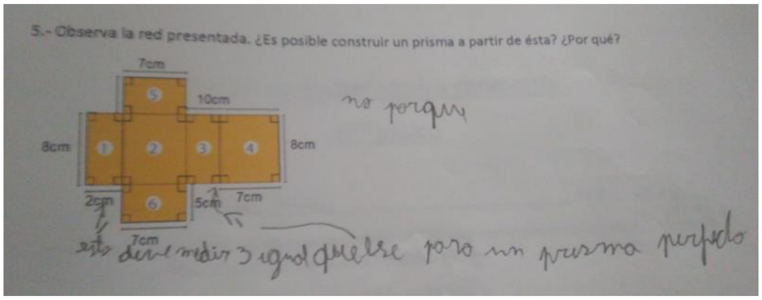


Imagen 32

Nivel 3: no existen producciones que alcancen este nivel.

Pregunta 6.

Nivel 1: se logra calcular el área de las figuras, afirmando que se necesita más cartón para el cubo que para el prisma, pero la justificación matemática no confirma lo dicho (Imagen 33).

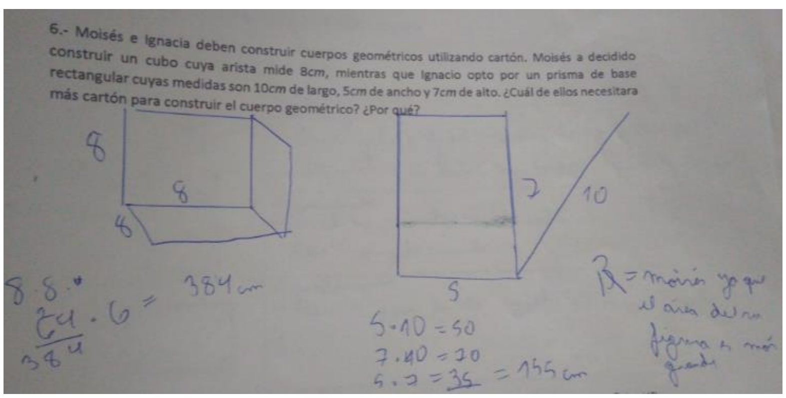


Imagen 33

Nivel 2: no existen producciones que alcancen este nivel.

Nivel 3: no existen producciones que alcancen este nivel.

Pregunta 7.

Nivel 1: reconocen que el volumen del cubo aumenta, sin identificar en qué relación aumenta (Imagen 34 y 35).

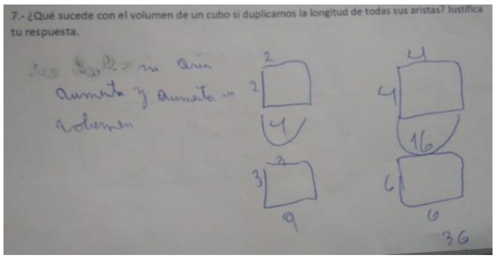


Imagen 34

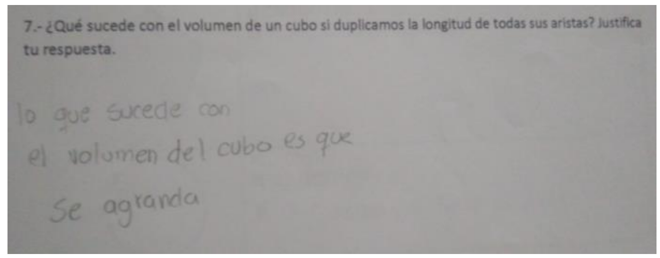


Imagen 35

Nivel 2: no existen producciones que alcancen este nivel.

Nivel 3: no existen producciones que alcancen este nivel.

Para el análisis de las situaciones claves, éste está enfocado en categorizar las distintas estrategias utilizadas por las y los estudiantes para dar solución al problema o actividad propuesta por el docente. (Las categorías se relacionan con los niveles de Van Hiele, cuando sea posible)

Clase 2: Actividad de estimación de área

Categoría 1: El estudiante utiliza una unidad de medida representante enfocada en la longitud

En esta actividad la totalidad del curso presenta implícitamente la misma estrategia de resolución, estimando el área de la pizarra a partir del producto de las medidas de su largo y ancho.

Clase 3: actividad de reproducción de prismas a partir de sus bases.

Esta clase fue aplicada, pero no se obtuvieron producciones de los estudiantes, debido a que trascurrido un tiempo iniciada la clase, sacaron a los estudiantes para realizar una actividad extraprogramática del establecimiento (ensayo de una prueba estandarizada).

Clase 4: actividad de reproducción del cilindro a partir de su visualización.

Caracterización del cilindro (para esta actividad, cada categoría se asocia a los niveles, es decir la categoría 1 corresponde a un nivel de visualización).

Categoría 1: reconoce el cuerpo como un todo no reconociendo las propiedades de éste. Se presentan representantes de esta categoría (Imagen 36 y 37).

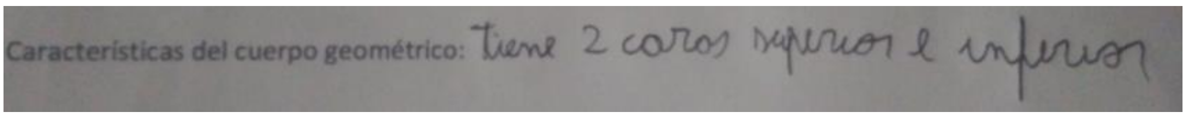



Imagen 36

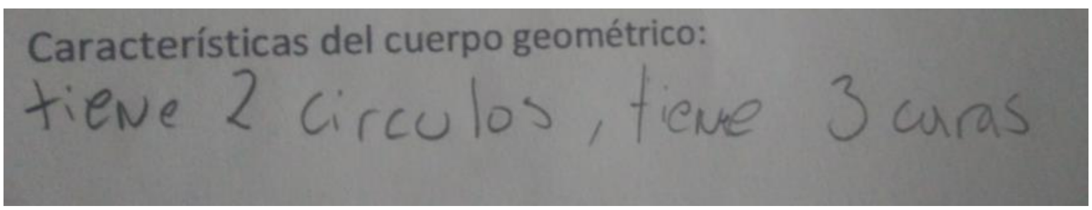



Imagen 37

Categoría 2: Los estudiantes que contestaron reconociendo propiedades del cuerpo, sin detallar de manera directa todas estas. Se presentan representantes de esta categoría (Imagen 38 y 39).

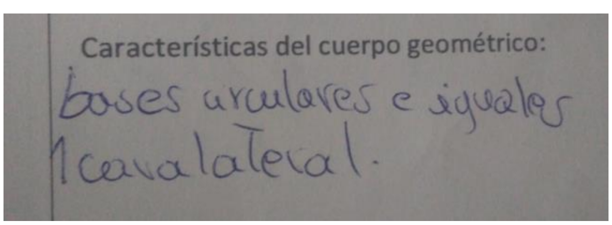
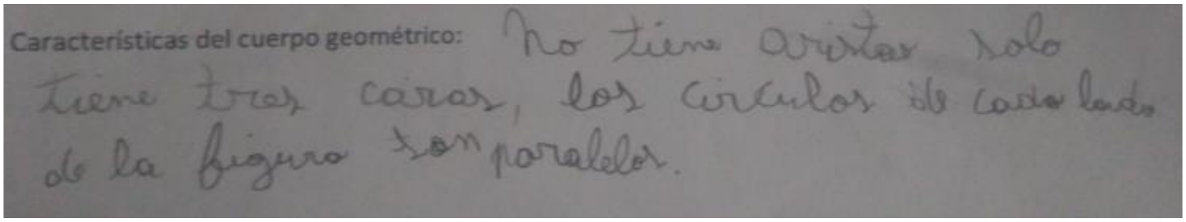



Imagen 38

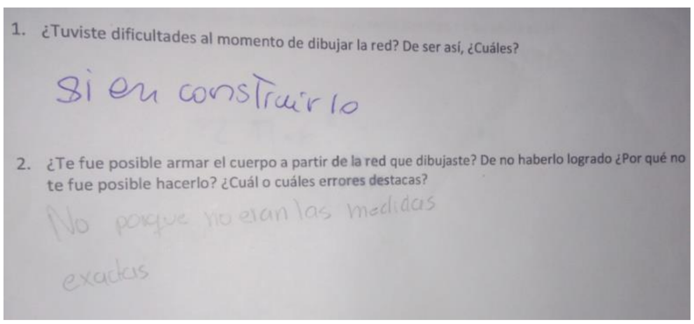


Características del cuerpo geométrico: no tiene aristas solo tiene tres caras, los circulos de cada lado de la figura son paralelos.

Imagen 39

Pregunta 1 y 2.

Se presentan las respuestas de los estudiantes para estas preguntas (Imagen 40 y 41):



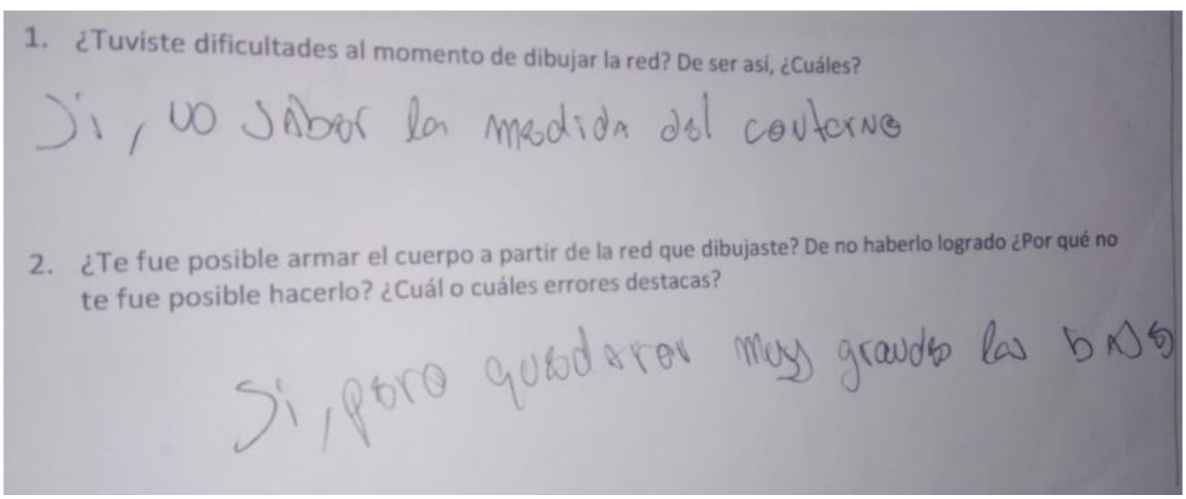
1. ¿Tuviste dificultades al momento de dibujar la red? De ser así, ¿Cuáles?

Si en construirlo

2. ¿Te fue posible armar el cuerpo a partir de la red que dibujaste? De no haberlo logrado ¿Por qué no te fue posible hacerlo? ¿Cuál o cuáles errores destacas?

No porque no eran las medidas exactas

Imagen 40



1. ¿Tuviste dificultades al momento de dibujar la red? De ser así, ¿Cuáles?

Si, no saber la medida del contorno

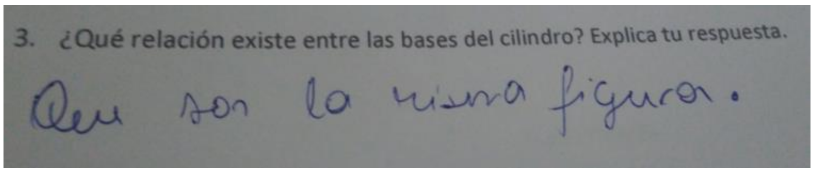
2. ¿Te fue posible armar el cuerpo a partir de la red que dibujaste? De no haberlo logrado ¿Por qué no te fue posible hacerlo? ¿Cuál o cuáles errores destacas?

Si, pero quedaron muy grandes las bases

Imagen 41

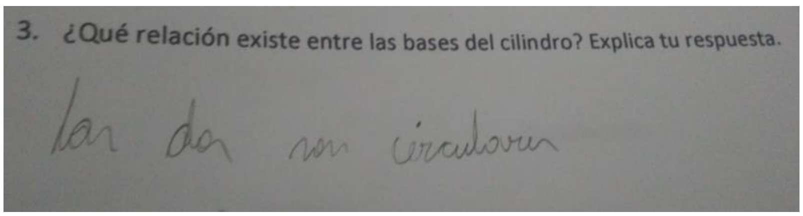
Pregunta 3.

Categoría 1: estudiantes que contestaron la pregunta identificando las bases, pero no identificando propiedades entre éstas, sin lenguaje geométrico adecuado. Se presentan representantes de esta categoría (Imagen 42 y 43).


3. ¿Qué relación existe entre las bases del cilindro? Explica tu respuesta.

Que son la misma figura.

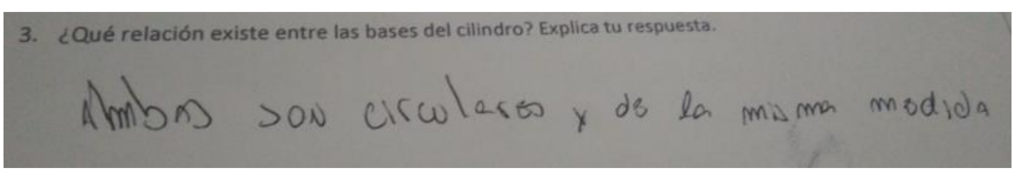
Imagen 42


3. ¿Qué relación existe entre las bases del cilindro? Explica tu respuesta.

las dos son circulares

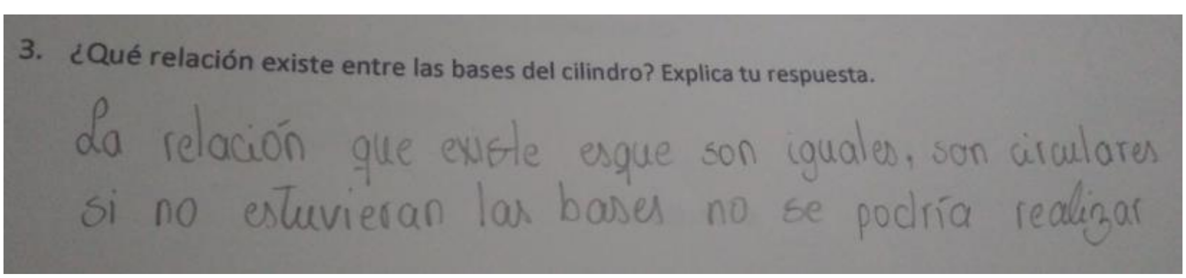
Imagen 43

Categoría 2: estudiantes que reconocen las bases y presentan las propiedades de éstas parcialmente, dejando de lado algunas estas. Se presentan representantes de esta categoría (Imágenes 44, 45 y 46).


3. ¿Qué relación existe entre las bases del cilindro? Explica tu respuesta.

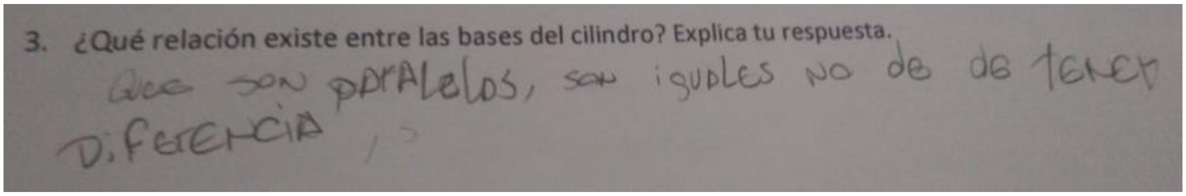
Ambos son circulares y de la misma medida

Imagen 44


3. ¿Qué relación existe entre las bases del cilindro? Explica tu respuesta.

La relación que existe esque son iguales, son circulares si no estuvieran las bases no se podría realizar

Imagen 45



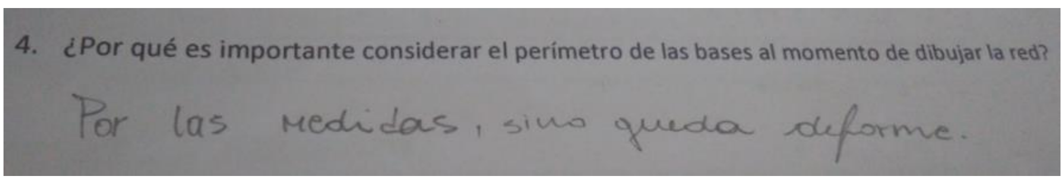
3. ¿Qué relación existe entre las bases del cilindro? Explica tu respuesta.

Que son paralelos, son iguales no de de tener diferencia

Imagen 46

Pregunta 4.

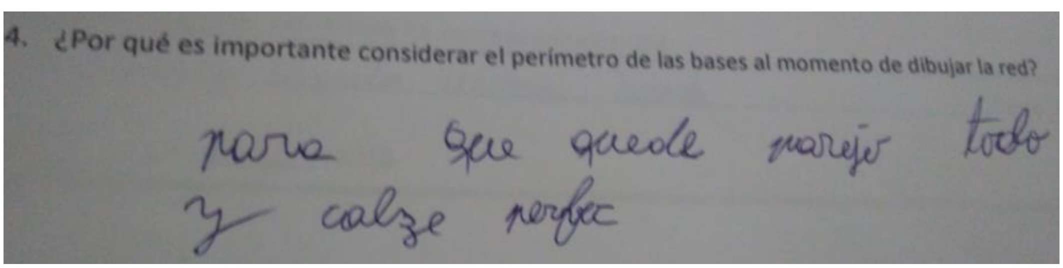
Categoría 1: estudiantes que consideren la importancia del perímetro de la base circular sin detallar la relación que tenga éste con la red. Se presentan representantes de esta categoría (Imágenes 47 y 48).



4. ¿Por qué es importante considerar el perímetro de las bases al momento de dibujar la red?

Por las medidas, sino queda deforme.

Imagen 47

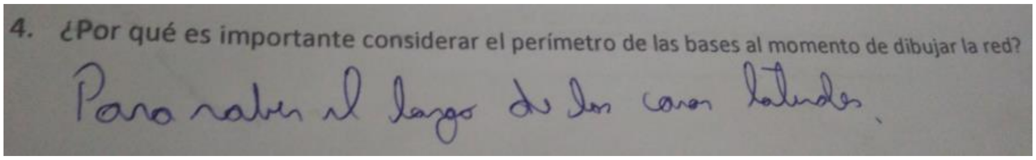


4. ¿Por qué es importante considerar el perímetro de las bases al momento de dibujar la red?

para que quede parejo todo y calze perfec

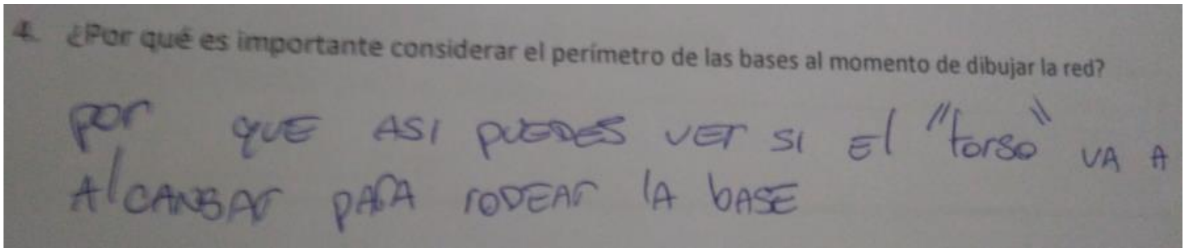
Imagen 48

Categoría 2: estudiantes que consideren la importancia del perímetro de la base circular detallando de manera parcial la relación que tenga éste con la red del cilindro. Se presentan representantes de esta categoría (Imágenes 49 y 50).


4. ¿Por qué es importante considerar el perímetro de las bases al momento de dibujar la red?

Para saber el largo de los caras laterales.

Imagen 49

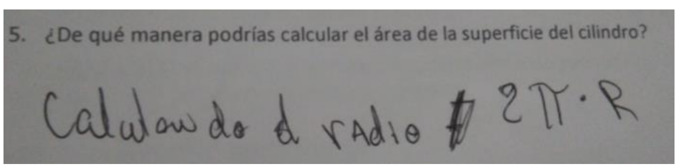

4. ¿Por qué es importante considerar el perímetro de las bases al momento de dibujar la red?

POR QUE ASI PUEDES VER SI EL "TORSO" VA A ALCANZAR PARA RODEAR LA BASE

Imagen 50

Pregunta 5.

Categoría 1: estudiantes que logran identificar el área del cilindro sin detallar el proceso con el cual harían esto. Se presentan representantes de esta categoría (Imagen 51).


5. ¿De qué manera podrías calcular el área de la superficie del cilindro?

Calculando el radio $2\pi \cdot R$

Imagen 51

Categoría 2: estudiantes que logren desarrollar de manera parcial el procedimiento del cálculo de la superficie del cilindro. Se presentan representantes de esta categoría (Imagen 52).

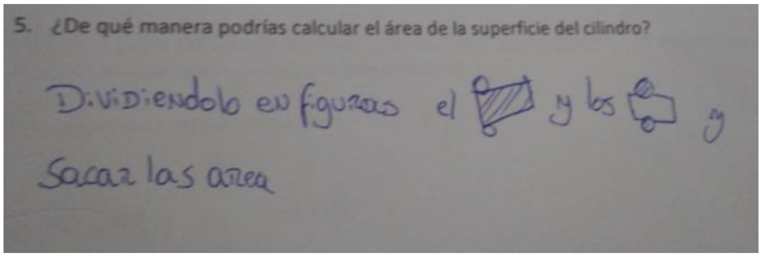



Imagen 52

Categoría 3: estudiantes que logran presentar el procedimiento completo del cálculo del área de la superficie de un cilindro. Se presentan representantes de esta categoría (imagen 53).

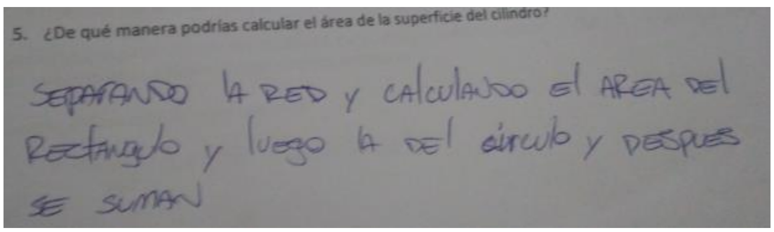



Imagen 53

**Clase 7: Actividad del Jenga**

Pregunta 1

Categoría 1: El estudiante identifica las dimensiones, las menciona e indica sus medidas (Imagen 54).

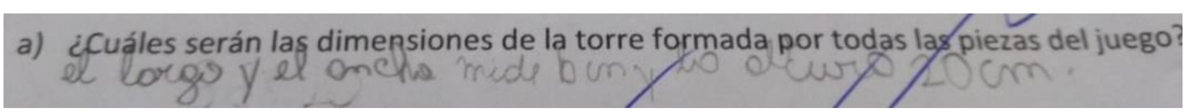



Imagen 54

Categoría 2: El estudiante identifica parcialmente las dimensiones, denotando problemas en la verbalización de la respuesta (Imagen 55).

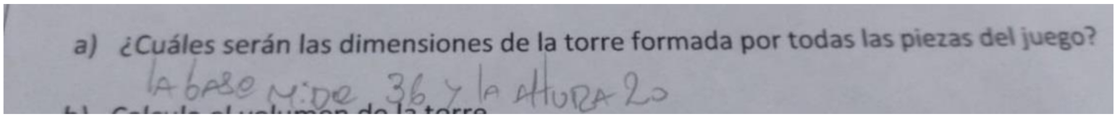



Imagen 55

Categoría 3:  El estudiante no responde a la pregunta solicitada

Pregunta 2

Categoría 1: El estudiante calcula el volumen mediante el producto del área basal con la altura del cuerpo (Imagen 56).

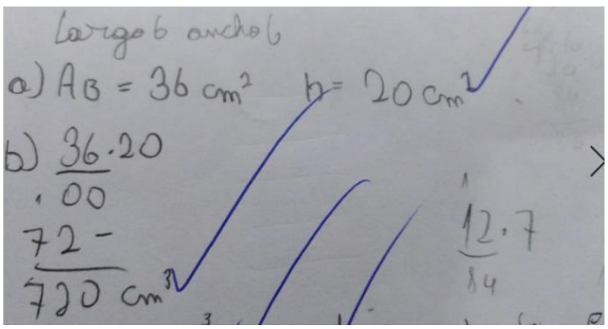



Imagen 56

Categoría 2: El estudiante calcula el volumen mediante el producto de sus dimensiones (Imagen 57).

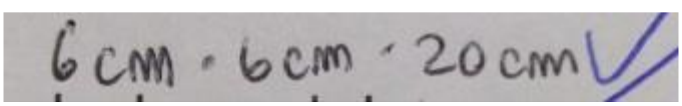



Imagen 57

Categoría 3: El estudiante determina el volumen de una pieza y luego la multiplica por sesenta.

Pregunta 3

Categoría 1: El estudiante identifica que el volumen del sólido es invariante (Imagen 58).

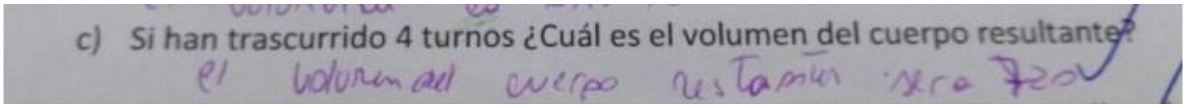



Imagen 58

Pregunta 4

Categoría 1: El alumno determina el volumen final mediante la sustracción de volúmenes (Imagen 59).

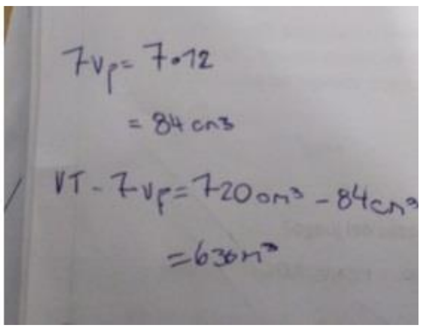



Imagen 59

Categoría 2: El alumno determina el volumen mediante el volumen de una pieza y luego lo multiplica por el número de piezas correspondientes (Imagen 60).

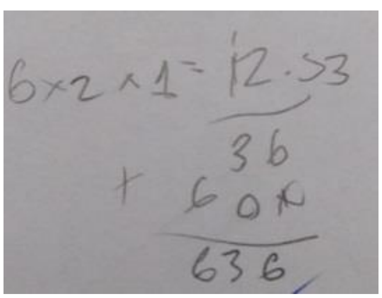



Imagen 60

Pregunta 5

Categoría 1: El alumno calcula el área del prisma mediante la fórmula y da respuesta a la pregunta (Imagen 61).

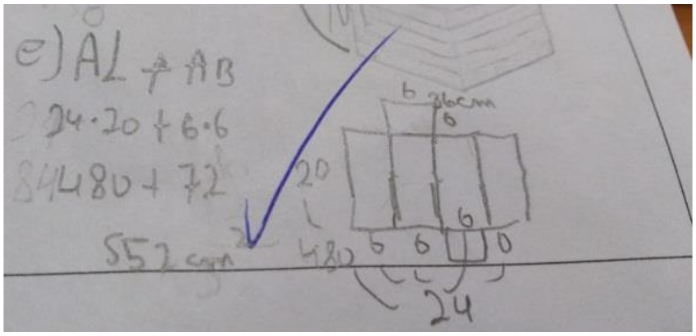


Imagen 61

Categoría 2: El alumno registra respuesta errada y sin desarrollo (Imagen 62).

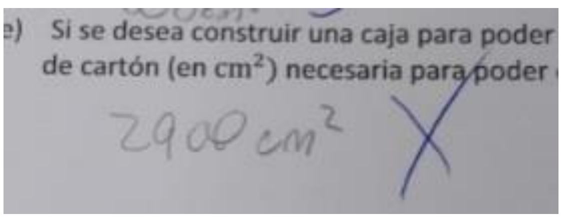



Imagen 62

## 7.2 Confrontación de los análisis a priori y a posteriori

### Clase 1: Evaluación diagnóstica

Como se puede observan en la tabla presentada en el comienzo del capítulo, la gran mayoría de las respuestas se encuentran en un nivel de visualización según Van Hiele, lo que correspondería a que los estudiantes reconocen las figuras geométricas como un todo, lo cual se deja ver en los representantes para cada respuesta del nivel uno que se muestran. Si bien existen algunas respuestas de nivel de análisis, estas son menores y no afectan al nivel que correspondería al grupo curso, el cual se encuentra en un nivel de visualización. Es por este motivo que se intentara pasar de un nivel de visualización a un nivel de análisis, con la implementación del contenido.

### Clase 2: Actividad de estimación de área

La principal estrategia utilizada por los estudiantes fue medir la pizarra con unidades representantes que apuntaban a la medida de la longitud del objeto, por ende, los estudiantes realizaron respuestas como: “tres palos y medio”, “Ancho: 5 botellas; Altura 10,5 botellas” tal como se muestra en las imágenes 63 y 64.

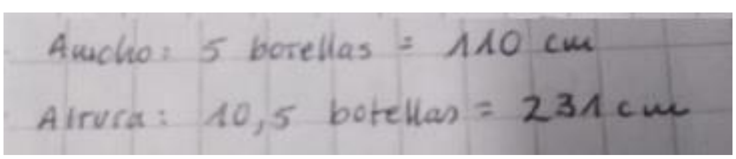



Imagen 63

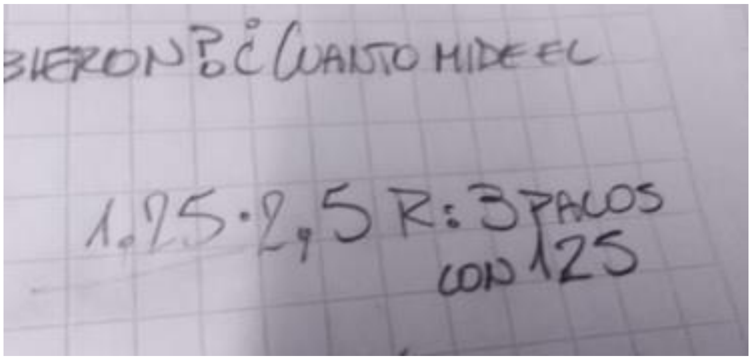
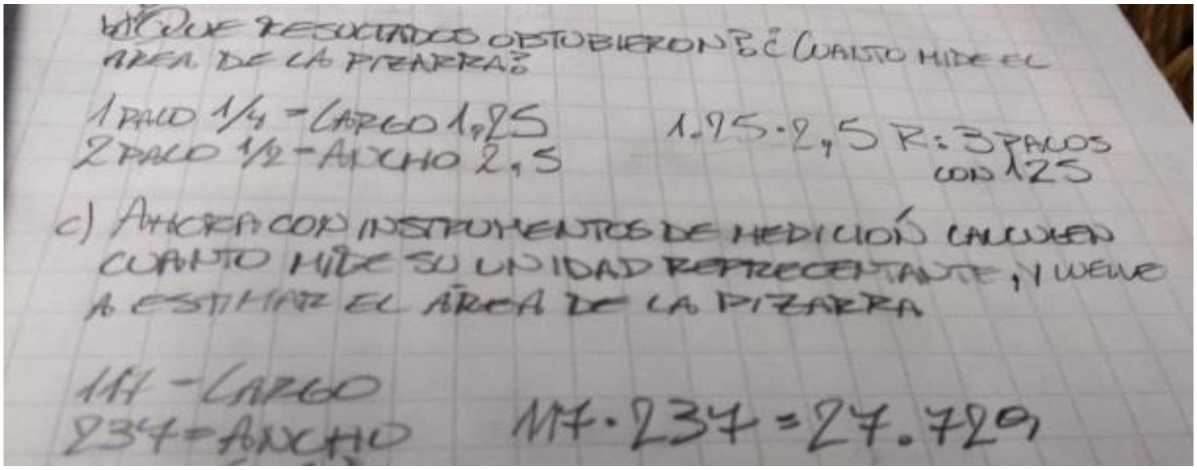



Imagen 64

Luego de esto los discentes procedieron a medir su unidad de medida y estimar el área de la superficie de la pizarra solicitada.

Por otro lado, no se evidencian producciones de los estudiantes en que se haya utilizado la unidad de medida representativa pero enfocada en su área, por ejemplo, ningún estudiante consideró estimar cuántas veces contenía a un cuaderno la pizarra a medir.

Después de considerar las estrategias utilizadas por los alumnos es momento de analizar el contraste de errores, en este caso se esperaba que ciertos estudiantes obtengan un valor muy lejano al real ($28.800\ cm^2$) debido a la elección de una unidad representante poco precisa. De las imágenes anteriores se puede observar que el grupo que utilizó una botella determinó que las dimensiones de la pizarra miden $110\ cm$ y $230\ cm$ en cambió el grupo que utilizó el palo obtuvo que las dimensiones de la pizarra miden $117\ cm$ y $237\ cm$ lo que se acerca bastante a las medidas tomadas con un instrumento de medición estándar ($120\ cm$ y $240\ cm$) (Imagen 65).


b) ¿QUE RESULTADOS OBSTUBIERON? ¿CUANTO MIDE EL AREA DE LA PIZARRA?

1 PALO 1/4 = LARGO 1,25 1.25 · 2,5 R: 3 PALOS CON 125
2 PALO 1/2 = ANCHO 2,5

c) AHORA CON INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN CALCULEN CUANTO MIDE SU UNIDAD REPRECENTANTE, Y VUELVE A ESTIMAR EL ÁREA DE LA PIZARRA

117 = LARGO
234 = ANCHO 117 · 234 = 27.729

Imagen 65

Por último, no existen registros de alguna estrategia innovadora que salga de los parámetros fijados en el análisis a priori.

Se puede mencionar también que las producciones de los y las estudiantes con relación a las respuestas que dieron, luego de realizar la actividad, se presentan con una precisión un tanto mejor a las producciones que se obtuvieron en el diagnóstico.

**Clase 4: actividad de reproducción del cilindro a partir de su visualización.**

Para el dibujo de la red todos los estudiantes presentan la misma red, la cual consistió en presentar la cara lateral curva como un rectángulo y a uno de sus lados paralelos ubicar las bases, una a cada lado, la cual se esperaba que fuese recurrente. No se presentan estrategias nuevas con relación a esta actividad. También en relación a los errores, hubo estudiantes que no consideraron el perímetro de la base al momento de construir la red, como se presenta en la siguiente imagen (Imagen 66).

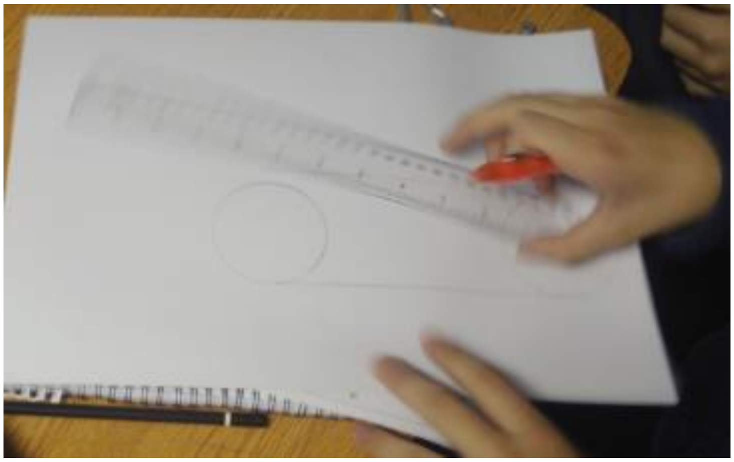


Imagen 66

Para el trabajo de la caracterización del cuerpo, si bien las respuestas no logran el desarrollo esperado en su totalidad, varios estudiantes logran identificar características que luego le ayudaran con las preguntas siguientes. Errores que se detectaron en esta pregunta, fue que algunos estudiantes atribuían características como representaciones pictóricas tal como se presenta a continuación (Imagen 67).

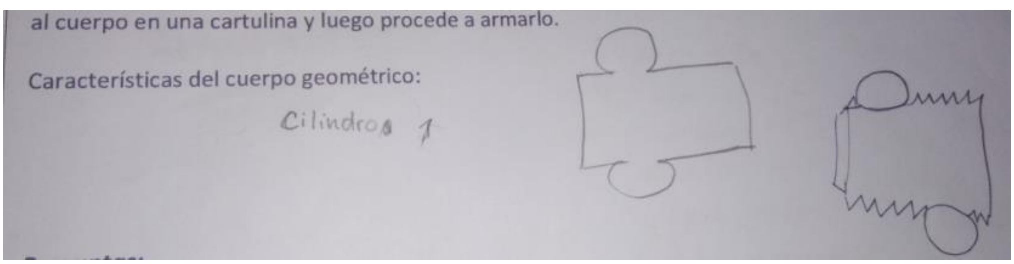



Imagen 67

En relación a la primera y segunda pregunta se puede notar que la gran mayoría de los estudiantes no son capaces de entregar una argumentación y comunicarla de manera correcta, debido a que estos carecen de argumentos matemáticos que apoyen lo que ellos quieren comunicar.

Tras el desarrollo de la actividad, la pregunta tres, se logra responder de mejor manera donde una cantidad significativa de estudiantes logra atribuir propiedades entre las bases (que estas deben ser de igual medida principalmente), siendo esta trabajada en la actividad de la construcción del cilindro. Para esta pregunta no se presentan errores, solo estudiantes que no presentan desarrollo a la pregunta. Para la pregunta cuatro, si bien existieron estudiantes que señalaban la importancia, estos no podían comunicarlo de manera correcta, la relación entre el perímetro y el lado de la cara lateral curva. Y para la pregunta cinco, se puede evidenciar que casi la gran mayoría de los estudiantes logra presentar el desarrollo esperado para ésta.

**Clase 7: Actividad del Jenga**

En general, las producciones analizadas no evidencian respuestas que escapen de nuestro campo de respuestas, salvo algunos detalles que serán mencionados y mostrados según la pertinencia que tengan las imágenes. A continuación, se presenta la confrontación de los análisis realizados lo cual se organizará por preguntas:

**Pregunta a**

En este caso las respuestas fueron bastante similares, donde varios estudiantes pudieron responder que las dimensiones correspondían al largo, alto y ancho con sus respectivas medidas. Otros discentes presentaron las dimensiones a partir del área basal y la altura del prisma como se muestra en la (Imagen 68,) lo cual no estuvo contemplada en nuestro análisis predictivo. En este apartado ciertos estudiantes denotaron falta de rigor, por ejemplo, el alumno A responde: “la base mide 36 y la altura 20” (Imagen 69), hubo otros alumnos que no pudieron verbalizar la situación y colocaron las medidas en el dibujo presente dentro del cuestionario la cual no alcanza a ser una estrategia distinta según lo analizado.

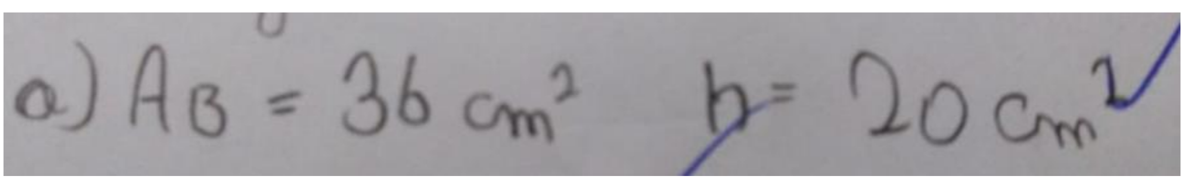



Imagen 68

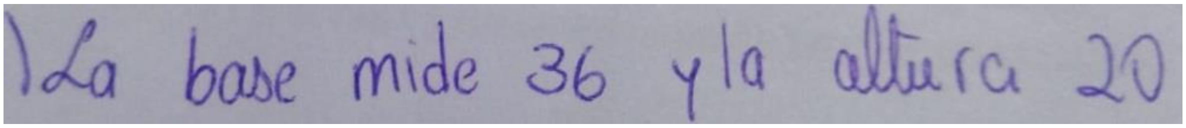



Imagen 69

**Pregunta b**

Para el apartado b se evidencian las estrategias esperadas por el grupo investigador, ya que algunos estudiantes determinaron el volumen mediante el producto del área basal con su altura (Imagen70) y otros estudiantes realizaron el producto de las medidas de las dimensiones por separado obteniendo la respuesta esperada (Imagen 71). Hubo un estudiante que determinó el volumen de la "torre" calculando el volumen de una pieza (prisma de base rectangular) y luego multiplicándola por el total (Imagen 72). También se precisa que en las respuestas se denota poco rigor matemático en el lenguaje de algunos discentes, además en esta actividad no se registran errores, sólo respuestas sin desarrollo y otras respuestas sin contestar.

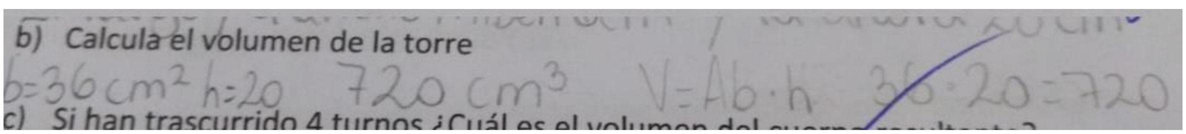



Imagen 70

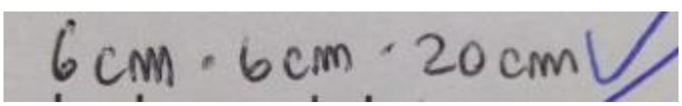



Imagen 71

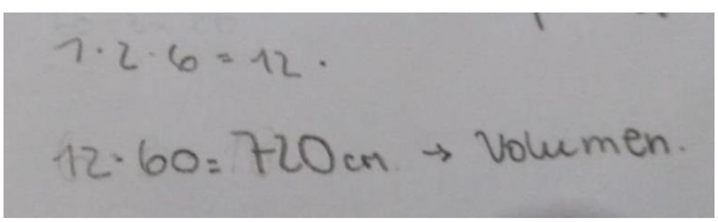



Imagen 72

**Pregunta c**

En esta pregunta no se presentan estrategias debido a que durante la actividad un estudiante comenzó a difundir la idea de que el volumen del sólido no cambia pues las piezas se reponen y al enfocarnos en el espacio ocupado no sufre variación respecto a la torre inicial, esto produjo que la pregunta no fuese provechosa.

**Pregunta d**

En este caso, la pregunta es más directa y los estudiantes lograron captar la idea de la pregunta, por ende, al volumen total del prisma le restaron el volumen de 7 piezas y calcularon el volumen solicitado como se pensó en un comienzo al realizar el análisis preliminar. En la imagen se muestra la respuesta de una estudiante que respondió a la pregunta con precisión (Imagen 73).

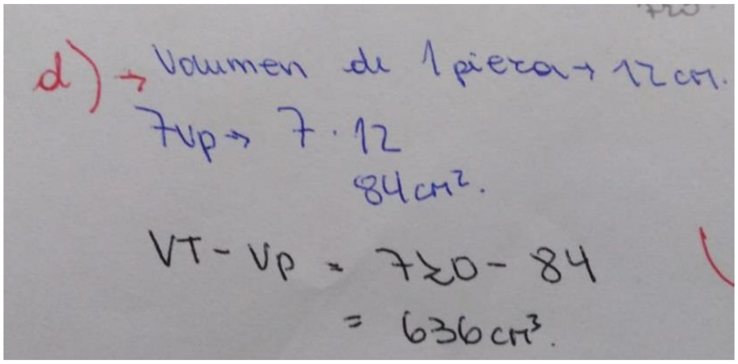



Imagen 73

**Pregunta e**

En esta pregunta no se encontraron estrategias nuevas, pues los estudiantes saben calcular áreas de superficies de prismas por lo que el problema estaba en entender el contexto y comprender que se solicita una aproximación del área del cuerpo, hubo algunas respuestas correctas que fueron resueltas por medio de la fórmula (imagen 74). En general, este inciso fue el con mayor cantidad de errores siendo en algunos casos fallos en los cálculos, otros tuvieron dificultades con la comprensión de la pregunta, por otro lado, se registran varias respuestas sin desarrollo que no logramos intuir de donde se obtuvieron.

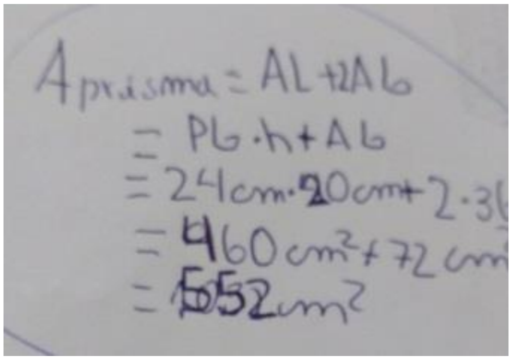



Imagen 74

**Conclusiones del contraste de los análisis.**

Se puede apreciar que los estudiantes tienen dificultades para dar argumentos matemáticos al momento de querer comunicar alguna inquietud o manifestar afirmaciones que tengan validez dentro de éste mismo ámbito. También se puede decir que, en el caso de la actividad bajo la MEC, al momento de relacionarlo con el marco de referencia, se verifica ciertas mejoras en los estudiantes, teniendo más respuestas relacionadas con un nivel superior al que tenían cuando fueron evaluados por primera vez, pero esto no es meritorio para decir que los estudiantes, en su totalidad, puedan estar desarrollando habilidades de argumentar y comunicar acorde al nivel de escolaridad, ya que estos dan cuenta de un déficit respecto a la apropiación de conceptos previos, lo que coarta las respuesta de los estudiantes, perdiendo precisión en sus producciones.

# CONCLUSIONES

Resulta innegable el hecho de que el paradigma tradicional preponderante en la mayoría de las aulas de clase (no solo en Chile) ha causado estragos en la educación. Basta con revisar los resultados obtenidos en pruebas estandarizadas tales como Simce o PISA, para notar el bajo desempeño de los estudiantes, principalmente en matemática a nivel nacional e internacional.

Es por ello que como grupo desarrollamos esta investigación cuyo objetivo principal es establecer si un cambio de paradigma, de uno tradicional a uno constructivista, puede llegar a generar progresos significativos dentro de la formación de un determinado número estudiantes de octavo básico. Específicamente, nos parece clave el desarrollo de la habilidad de argumentar y comunicar debido a su relevancia en el entendimiento de la geometría y el desarrollo de un pensamiento geométrico (Gamboa y Ballestero, 2009).

Para poder concretar el desarrollo de una secuencia de enseñanza bajo un paradigma constructivista resultó esencial el trabajo colaborativo, no solo entre quienes desarrollamos el informe, sino que también de la participación de la comisión con la cual se discutió parte esencial de la secuencia.

Respecto a la implementación de las clases diseñadas, cabe destacar la complejidad que implica un cambio de paradigma, en particular, la ruptura del contrato didáctico (Brousseau, 1998) establecido de manera explícita o implícita con estudiantes, quienes, habituados a replicar los contenidos presentados por el docente, no suelen responder de la mejor manera ante situaciones que demandan autonomía por parte de ellos, por lo que se torna necesario realizar una transición paulatina entre la dificultad de las actividades propuestas, para así evitar posible frustración y rechazo en la asignatura.

Para poder establecer variaciones en el desarrollo de las habilidades de argumentar y comunicar se realizó una evaluación diagnóstica a partir de la Teoría de Razonamiento Geométrico de Van Hiele (Gamboa y Vargas, 2013), la cual nos permitió categorizar las respuestas de los estudiantes, siendo posible dilucidar el nivel de razonamiento en el cual se encontraban las y los estudiantes. Tal como se esperaba, la mayoría de estas y estos respondieron acorde al nivel más bajo según Van Hiele dando cuenta, además, de dificultades al momento de comunicar ideas (pese a ser correctas) y justificarlas.

En cambio, la implementación de las clases se vio afectada por variables que no fueron consideradas al momento de diseñarlas. Si bien se tomó en cuenta los conocimiento previos necesarios para el cumplimiento de los objetivos de las clases, los estudiantes no dominaban contenidos básicos para el óptimo desarrollo de estas entre los cuales se encontraban: la comprensión del concepto de dimensión, manejo de unidades de medidas de longitud y sus respectivas conversiones, comprensión de los conceptos de área y volumen, algoritmos para el cálculo de áreas, elementos que componen cuerpos y figuras geométricas, congruencia de figuras geométricas, entre otros, lo que significó tener que dedicar una mayor cantidad de tiempo a repasar contenidos correspondientes a años anteriores. Por otra parte, las exigencias institucionales, en cuanto a formato de evaluaciones y tiempos destinados al desarrollo de las unidades, truncaron el óptimo desarrollo de las propuestas de clases, ya que el tiempo de implementación tuvo que ser acotado.

No obstante, a partir de la recopilación de evidencias de actividades realizadas en la mayoría de las clases, es posible apreciar un leve progreso en cuanto a la habilidad de argumentar y comunicar, ya que los estudiantes logran redactar sus ideas de manera coherente, pero, sin poder justificarlas necesariamente. Sin embargo, respecto a los niveles propuestos por Van Hiele, solo en algunas actividades los estudiantes logran superar el nivel evidenciado en la evaluación diagnóstica (de visualización), específicamente en las preguntas realizadas en la actividad desarrollada bajo la MEC.

Es por ello que, respecto a la pregunta de investigación planteada en capítulos anteriores, no se evidencian progresos significativos respecto a los niveles de Van Hiele y las habilidades de argumentar y comunicar. No obstante, un número reducido de estudiantes si da cuenta de progresos.

Ante esto creemos relevante replantear la cantidad de actividades propuestas en cada clase y el tiempo destinado a cada una de ellas, además de clases necesarias para subsanar la carencia de conocimientos previos. Sin embargo, aún consideramos que de aplicar de manera óptima las clases propuestas, estas pueden contribuir al desarrollo de las habilidades de argumentar y comunicar, además de un tránsito entre los niveles propuestos en la teoría de razonamiento geométrico de Van Hiele.

# BIBLIOGRAFÍA


Agencia de Calidad de la Educación de Chile. (2017). *Informe de Resultados PISA 2015.* Santiago, Chile.

Alfaro , S., Espinoza, Y., Chala, J., Guejardo, I., & Hurtado , M. (2014). *Matemática 8°.* California: Galileo.

Arquímedes, & Eutocio. (2005). *Tratados I; Comentarios.* EDITORIAL GREDOS.

Baéz, R., & Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL. *Revista Enseñanza de la Matemática*, 67-87.

Barrantes , H. (2006). Resolución de Problemas El Trabajo de Allan Schoenfeld. *Seminario Teorico* (págs. 1-6). Escuela de Ciencias Exactas y Naturales UNED.

Borrás, I. (1997). Enseñanza y aprendizaje con internet: una aproximación crítica. (pág. en línea). San Diego: State university.

Boyer, C. (2010). *História de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques.* Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L., & Acosta, M. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales.* Colombia: Enlace Editores Ltda.

Catalan Navarrete, D., Pérez Ureta , B., Prieto Córdoba, C., & Rupin Gutiérrez, P. (2017). *Texto del Estudiante Matemática 8°Básico.* Providencia, Chile: SM.

Clemens, S., O'Daffer, P., & Cooney, T. (1998). *Geometría.* Argentina: Addison Wesley Longman.

De Faria, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*.

Gamboa, R., & Ballestero, E. (2009). *Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría.*

Gamboa, R., & Vargas, G. (2013). El Modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 74-94.

Gascón, J. (2002). Geometria sintética en la ESO y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma*, 13-25.

Kline, M. (1998). *El fracaso de la matemática moderna ¿Por qué Juanito no sabe sumar? .* Madird, España: Siglo Veintiuno.

Londoña, C. (4 de abril de 2010). *Elige Educar.* Obtenido de eligeeducar: http://www.eligeeducar.cl/las-5-habilidades-los-profesores-del-futuro-necesitan

Ministerio de Educación de Chile. (2008). *Marco Para la Buena Enseñanza.* Santiago, Chile.

Ministerio de Educación de Chile. (2016). *Programa de Estudio Octavo Básico.* Santiago, Chile.

Olmo, M. A., Moreno, M., & Gil, F. (2007). *Superficie y volumen ¿Algo mas que el trabajo con formulas?* Madrid: Sintesis.

Real, I. (2009). Espacio y Tiempo en Educación Infantil. *Innovación y Experiencias Educativas*.

Zumba, E. J. (2016). *Trabajo Colaborativo entre docentes.* Latacunga: Universidad Técnica de Cotopaxi.