



FACULTAD DE EDUCACIÓN  
MAGÍSTER DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

# LA DERIVADA. UNA APROXIMACIÓN DESDE LOS MODOS DE PENSAMIENTO

TESISTA: MARIANO MUÑOZ ARCE

PARA OBTENER EL GRADO DE MAGÍSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

TUTOR DE TESIS: XIMENA GUTIERREZ FIGUEROA

DICIEMBRE 2015

## ÍNDICE

RESUMEN .....	1
INTRODUCCIÓN.....	2
CAPITULO I.....	4
ANTECEDENTES .....	4
1.1 Una mirada al currículo, textos escolares y libros especializados.....	4
1.1.2 Antecedentes hitóricos - epistemológicos .....	14
1.1.2.1 $f'(a)$ y $f'(x)$ Una distinción necesaria.....	23
1.1.3 Antecedentes desde el punto de vista de la didáctica .....	23
1.2 PROBLEMÁTICA .....	23
1.3 OBJETIVOS .....	24
1.3.1 Objetivo general .....	24
1.3.2 Objetivos específicos.....	24
CAPITULO II.....	25
MARCO TEÓRICO .....	25
2.1 Pensamiento Teórico y Pensamiento Práctico.....	25
2.2 Modos de pensamiento para la derivada.....	26
2.3 Síntesis ilustrativa de los Modos de pensamiento de la derivada en esta investigación.....	29
CAPITULO III .....	31
DISEÑO METODOLÓGICO .....	31
3.1 Metodología cualitativa. Estudio de caso .....	31
3.2 Contexto y sujetos .....	32
3.2.1 Criterios de selección de los sujetos.....	34
3.3 Proceso recogida de información .....	33
3.4 Diseño del cuestionario. ....	33
3.4.1 Ejemplos de posibles respuestas categorizadas según los tipos de pensamiento definidos.....	38
CAPITULO IV .....	47
Análisis de Resultados.....	47
CAPITULO V .....	65
5.1 Conclusiones y reflexiones.....	67

## RESUMEN

El propósito de ésta investigación es caracterizar los modos de pensamiento que se espera emerjan en la comprensión del objeto derivada desde la noción pendiente de la recta tangente a una curva. El marco teórico Los modos de Pensamiento (Sierpinska, 2000) plantea que en la comprensión de algunos conceptos en matemática se deben activar tres modos de pensamientos que son definidos como Sintético-Geométrico, Analítico-Aritmético y Analítico-Estructural. El concepto Derivada es parte del contenido “Funciones y Procesos Infinitos” de acuerdo al plan diferenciado en la matemática escolar en Chile emanados desde el Ministerio de Educación (MINEDUC) y por cierto en primer año de universidad en carreras afines a las ciencias básicas y pedagogía en matemática y/o física en la asignatura cálculo diferencial e integral comúnmente denominado cálculo I.

De acuerdo a investigaciones Azcárate y Cols (1997) “se constata la tendencia en la enseñanza de dedicar una gran parte de las actividades al aprendizaje de reglas de cálculo, sin basarse en la comprensión de los conceptos” (citado por Flores y Salinas 2013); que da luz respecto a un fenómeno educativo en la enseñanza de la matemática caracterizado por el predominio de métodos algebraicos y algorítmicos, tendiendo a una mecanización de los mismos. Por otro lado en la enseñanza se observa un formalismo en lo conceptual, que implica por cierto rigurosidad en definiciones, axiomas, propiedades y que son reproducidos por los docentes dificultando en los estudiantes su aprendizaje. En efecto; los conceptos son dados en forma acabada no permitiendo la elaboración mental de los mismos por parte de los estudiantes. En la investigación en desarrollo (Contreras, 2011) se presenta una visión general de las causas del bajo rendimiento de estudiantes en primeros años de carrera universitaria en Chile, y de la situación de las asignaturas de matemática.

Bajo este contexto; esto es de acuerdo a la revisión curricular, de los libros de textos, de los antecedentes y desde la didáctica; la investigación aborda como objetivo, la comprensión de la derivada que tienen un grupo de estudiantes universitarios de pedagogía en matemática y física. La aproximación al fenómeno didáctico se realiza bajo los distintos modos de pensamiento; que va desde lo intuitivo, pensamiento práctico a lo formal, pensamiento teórico.

Palabras claves: Teoría Modos de Pensamiento, Derivada, Recta Tangente

“El verdadero problema al que se enfrenta la enseñanza no es el del rigor sino el problema del desarrollo del significado y de la existencia de los objetos matemáticos... si hay que elegir entre el rigor y el significado, sin duda elijo el significado.”

René Thom

## INTRODUCCIÓN

El cálculo en la educación escolar y superior es cada día más relevante toda vez que sustenta investigaciones en distintas áreas del conocimiento científico. Sin embargo en su proceso enseñanza-aprendizaje es más bien conocido por los bajos rendimientos. (Hitt, 2003). En las prácticas docentes en la asignatura de cálculo los profesores de nuestro país, en general tienen un privilegio por lo algorítmico. (Ortega, Guzmán, Mena. s.f). Investigaciones en la misma línea señalan que conceptos fundamentales como la derivada no son de fácil comprensión por parte de los estudiantes, en el mayor de los casos refieren al enfoque asumido por los docentes a la hora del tratamiento del tema que con frecuencia se privilegia el aprendizaje de las técnicas de derivación y se considera que un estudiante ha aprendido cálculo si, al final del curso, éste logra dominar las fórmulas que le permiten encontrar la expresión analítica de la función derivada, independientemente del significado que de ella haya construido (Dolores, 2000). El concepto de derivada en esta investigación se presenta epistemológicamente desde lo geométrico o la denominada interpretación geométrica de la derivada; como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una curva; al respecto Dedekind expresaba “Considero que, desde el punto de vista didáctico, el recurso a la intuición geométrica en una primera presentación del cálculo diferencial es sumamente útil, e incluso indispensable si no se quiere perder demasiado tiempo. Pero también nadie puede negar que éste enfoque se ha de considerar como poco científico”. (Durán, 1996). La investigación se propone como objetivo en primer lugar la caracterización de los modos de pensamiento (Sierpínska, 2000) que se deberían activar en la comprensión de la derivada; para posteriormente identificar aquellos que se presentan en

las respuestas de los estudiantes. El marco especifica tres tipos de pensamiento; Sintético-Geométrico, Analítico-Aritmético y el Analítico Estructural.

El desarrollo de la investigación se ha organizado en capítulos. El capítulo I. Denominado Antecedentes, Problemática y Objetivos. Presenta los antecedentes del objeto derivada. En primer lugar el currículo (escolar y universitario) en que el concepto de derivada aparece como contenido dentro del proceso enseñanza –aprendizaje; en segundo lugar se establece una línea histórica –epistemológica del surgimiento y evolución del concepto derivada a través de los problemas que se planteaban desde la época griega en adelante y que dan origen al concepto; en particular la recta tangente a una curva y en tercer lugar es de importancia para la investigación la revisión de la literatura que tiene como objeto de estudio el concepto derivada, desde una perspectiva didáctica. A la luz de estos antecedentes es que surgen la problemática y los objetivos de la investigación. El capítulo II. Marco teórico. Nos da a conocer los fundamentos y propuestas del marco teórico que adhiere ésta investigación con el propósito de identificar el tipo de pensamiento que estudiantes de una universidad activan en la comprensión de la derivada. De cuyos componentes; Pensamiento Teórico y Pensamiento Práctico devienen los Modos de Pensamientos Sintético Geométrico (SG), Analítico Aritmético (AA) y el Pensamiento Analítico Estructural (AE). Marco teórico que tiene como investigadora principal a la Dr.<sup>a</sup>. Anna Sierpinska de la Universidad de Concordia, Canadá. El capítulo III presenta el Diseño Metodológico; metodología y método donde se recoge información relevante para los objetivos de la investigación. En este capítulo se presenta el fundamento del cuestionario que se presentó como instrumento para recoger las producciones de los estudiantes. Respecto al capítulo IV. Análisis de Datos. Éste detalla el análisis de los datos, que en la investigación corresponden a las respuestas de los informantes al cuestionario presentado. El capítulo V. Conclusiones y Reflexiones. Refiere a las conclusiones y reflexiones relativas a la comprensión que un grupo de estudiantes universitarios, de pedagogía en matemática y física, ha alcanzado de la derivada.

## CAPITULO I

### ANTECEDENTES

#### 1.1 Una mirada al currículo, textos escolares y libros especializados.

##### El currículo escolar

En Chile el concepto de derivada no aparece en los programas mínimos obligatorios como contenido en “Funciones y Procesos Infinitos”; en el subsector de Matemática en la formación diferenciada científico-humanista para Cuarto Medio. Sin embargo la Ley General de Educación, (2009) dispone que todos los establecimientos deban cumplir con los Objetivos de Aprendizaje establecidos en las Bases Curriculares y que puedan construir programas propios que cumplan con esos objetivos. Una característica importante de este Marco Curricular es la flexibilidad que posee, ya que permite que los establecimientos diseñen sus propios planes y programas de estudio, los cuales son presentados al Ministerio de Educación para su autorización. Desde esta flexibilidad es que algunas instituciones escolares han propuesto en sus currículos la enseñanza de la derivada en el plan diferenciado de la asignatura matemática (Anexo 1). Es evidente que esto es un avance de por sí dadas las diferencias curriculares con otros países, Francia por ejemplo. (Kuzniak, Estrella, Montoya, Delgado y Vivier, 2014).

El propósito de esta investigación es caracterizar los Modos de Pensamiento que los estudiantes activan en el aprendizaje de la derivada; en esta tarea dicho concepto se abordará desde la noción epistemológica de “pendiente de la recta tangente a la curva”; por ello es necesario revisar el marco curricular de tal manera de evidenciar si los contenidos del currículo escolar posibilitan la construcción de la derivada en el tiempo a través de conceptos como recta, tangente, pendiente y curva.

Según el decreto supremo de educación Ministerio de Educación (MINEDUC, 2009), se establecieron los objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de educación. A continuación se destacan los que revisten importancia para la investigación.

## PRIMERO BÁSICO

### **GEOMETRÍA:**

12. Reconocimiento de formas geométricas en el entorno y su descripción mediante un lenguaje geométrico básico; e, identificación de líneas rectas y curvas en estas formas.

## SEGUNDO BÁSICO

### **GEOMETRÍA:**

13. Identificación de ángulos menores, mayores e iguales al ángulo recto, así como también de rectas paralelas, perpendiculares y oblicuas.

## TERCERO BÁSICO

### **GEOMETRÍA:**

16. Exploración de pirámides, cilindros y conos para su caracterización en función de las superficies y líneas que los delimitan.

## SÉTIMO BÁSICO

### **GEOMETRÍA:**

12. Transporte de segmentos y ángulos, construcción de ángulos y bisectrices de ángulos, construcción de rectas paralelas y perpendiculares, mediante regla y compás o un procesador geométrico.

## OCTAVO BÁSICO

### **GEOMETRÍA:**

12. Caracterización de la circunferencia y el círculo como lugares geométricos y su representación mediante lenguaje conjuntista e identificación de sus elementos: arco, cuerda, secante y tangente.

(Fig.1.1 MINEDUC, 2012 programas de estudios)

## SEGUNDO AÑO MEDIO:

### GEOMETRÍA:

Aplicación de la noción de semejanza a la demostración de relaciones entre segmentos en cuerdas y secantes en una circunferencia y a la homotecia de figuras planas.

### ÁLGEBRA:

Reconocimiento de sistemas de ecuaciones lineales como modelos que surgen de diversas situaciones o fenómenos.

## TERCER AÑO MEDIO

### GEOMETRÍA:

12. Determinación de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

13. Deducción e interpretación de la pendiente y del intercepto de una recta con el eje de las ordenadas y la relación de estos valores con las distintas formas de la ecuación de la recta.

14. Análisis gráfico de las soluciones de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y su interpretación a partir de las posiciones relativas de rectas en el plano: condiciones analíticas del paralelismo, coincidencia y de la intersección entre rectas.

## CUARTO AÑO MEDIO

### GEOMETRÍA:

6. Identificación y descripción de puntos, rectas y planos en el espacio; deducción de la ecuación vectorial de la recta y su relación con la ecuación cartesiana.

(Fig.1.2 MINEDUC, 2012 programas de estudios)

De la revisión de los programas de estudios se deduce que en general, estos proponen contenidos que los profesores pueden trabajar con sus estudiantes permitiendo el

desarrollo en cada nivel habilidades para el estudio posterior en razón de la comprensión de la derivada. Aunque en Cuarto, Quinto y Sexto Básico no se verifican conceptos de interés para la investigación en cuanto a permitir la construcción en el tiempo de la derivada. En Primer año de Enseñanza Media, se plantea como objetivo de aprendizaje no como contenido la pendiente e intercepto con el eje y. En Segundo de Enseñanza Media, no se evidencia en forma explícita en los objetivos ni los contenidos el tratamiento en torno a los conceptos que propician el de derivada en cursos posteriores.

### **Textos escolares.**

Sólo cabe mencionar el texto escolar para el plan diferenciado en matemática de los autores Blanco, De las Heras, Fuenzalida y Riveros (1995), editado por Santillana (Fig.1.3); dado que no se encontró alguno más en el mercado, ni en bibliotecas.



(Fig.1.3 Portada Texto)

La revisión del texto escolar en el CAP. VII titulado “Derivadas de Funciones Reales”, da cuenta del tratamiento del tema de la siguiente manera:

- Una breve introducción histórica de los conceptos fundamentales del cálculo infinitesimal.
- Los objetivos para los estudiantes.
- Los contenidos.

El desarrollo del tema comienza con el concepto de límite por aproximación, propiedades, continuidad, recta tangente a una curva desde una aproximación sucesiva de la secante, ecuación de la recta tangente. El concepto de derivada se define (Santillana, pag.264)

Sea  $f$  una función real y sea  $x_0 \in \mathbb{R}$ , decimos que:

$f$  es derivable en  $x_0$  si y solo si existe el límite  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$  ;

$h = x - x_0$ . Este límite cuando existe, se denomina derivada de  $f$  en  $x_0$  y se denota  $f'(x_0)$ . Para continuar con aplicaciones de la derivada.


De acuerdo a lo propuesto por el texto escolar la comprensión de la derivada sigue su desarrollo más algebraico, aplicación de técnicas algorítmicas, en la resolución de tareas; no se observa el componente geométrico gráfico.

Ejemplo de tarea para resolver en el texto escolar: Determina los puntos de la curva asociada a la función  $y = x^2 + 2x + 1$  en los que la pendiente de la recta tangente a ella es 4. (Ejercicio 9, pag.282)

En su resolución se aplicará regla de derivación, obteniéndose la función pendiente de la recta tangente a  $y$ , reemplazar para  $m = 4$  y se determina el valor de  $x$  donde la pendiente es 4,  $x = 1$  abscisa reemplazar en la función para encontrar el valor de  $y$  la ordenada del punto. En efecto el punto es P (1,4). Se observa la rutina algebraica a la que se arriba en la resolución de la tarea, cuestión que se ha tratado de develar en este trabajo y que de acuerdo a los antecedentes que se presentan no ayuda de forma profunda a la comprensión del concepto derivada.

## Currículo enseñanza universitaria.

A continuación se presenta una muestra del programa que es parte del currículo plan común en ingeniería. U. de Chile (Fig.1.4).donde se da a conocer el tratamiento que se hace del concepto derivada.



Número	Nombre de la Unidad	Duración en Semanas
2	Derivabilidad de funciones	2.5 semanas
Contenidos	Resultados de Aprendizajes de la Unidad	Referencias a la Bibliografía
(1/3) Derivada en un punto y aproximación lineal. Dominio de diferenciabilidad. Ejemplos de no-diferenciabilidad. (1/3) Álgebra de derivadas: suma, producto, cociente, regla de la cadena, derivada de funciones inversas, derivación implícita. (1/2) Derivabilidad de funciones básicas: polinomios, funciones racionales, trigonométricas y sus inversas, exponencial y logaritmo, funciones hiperbólicas y sus inversas. (1/3) Regla de Fermat para máximos y mínimos. Aplicaciones. (1/3) Método de Newton para resolución de ecuaciones. (1/3) Teorema del Valor Medio y aplicaciones: regla de l'Hôpital, derivadas y monotonía, derivadas y convexidad. (1/3) Derivadas de orden superior. Desarrollos limitados y fórmula de Taylor con resto de Lagrange. Caracterización de puntos críticos.	El estudiante: 1. Comprende el concepto de derivada. 2. Reconoce funciones derivables. 3. Opera con las reglas de cálculo. 4. Entiende el Teorema del Valor Medio y su aplicación al estudio de funciones (crecimiento, convexidad, máximos y mínimos, puntos críticos). 5. Aplica la fórmula de Taylor para obtener desarrollos limitados.	[1] Capítulos 5 y 6 [2] Capítulos 9 al 12 [3] Capítulos 2, 3 y 8 [4] Capítulo 5 [5] Capítulos 4 y 6 [7] Capítulo 1 [8] Capítulos 2 y 3 [9] Capítulos 3, 4 y 6 [10] Capítulos 3 al 5

(Fig.1.4 Departamento de Pregrado Vicerrectoría de Asuntos Académicos, 2015)

La figura (1.4) permite deducir en general el carácter algorítmico y algebraico en relación al tratamiento de la derivada, lo que de acuerdo Artigue 1998 (citado por Pino et al. 2013) señalan que las investigaciones didácticas en este sentido evidencian que es difícil para los estudiantes entrar en el campo conceptual del Análisis, cuando éste no se reduce a su parte algebrizada, sino que pretende el desarrollo de los modos de pensamiento y de las técnicas

que hoy en día están fundamentadas en él. De esta forma, algunos estudiantes son capaces de resolver ejercicios con la aplicación de las reglas de derivación, no obstante, manifiestan dificultades cuando se les pide usar la derivada, y sus diversos significados, en situaciones no procedimentales.

La figura (1.5) presenta un extracto del plan de estudio en que la asignatura Calculo I es parte del mismo. La aprobación del plan, permite la obtención del grado de licenciatura en educación y conduce al título de profesor de Educación Media en Matemática y Física de la Facultades de Filosofía y Humanidades de la U. de Chile.

<b>Plan de estudios</b>				
Nota: Los planes de estudios podrán ser modificados en función del mejoramiento continuo de la carrera.				
La Licenciatura en Ciencias Exactas de la Facultad de Ciencias conduce al grado de Licenciado en Ciencias Exactas, y al grado de Licenciado en Educación y Título Profesional de Profesor de Educación Media en Matemática y Física de la Facultad de Filosofía y Humanidades.				
<b>Primer Año</b>				
<b>Asignaturas y Actividades Curriculares</b>	<b>Hrs.</b>	<b>Cred.</b>	<b>Sem.</b>	<b>Régimen</b>
ALGEBRA Y GEOMETRIA I	7,5	10	I	Semestral
<b>CALCULO I</b>	7,5	10	I	Semestral
MECANICA I	7,5	8	I	Semestral
ALGEBRA Y GEOMETRIA II	7,5	9	II	Semestral
CALCULO II	7,5	9	II	Semestral
MECANICA II	7,5	8	II	Semestral
METODOS EXPERIMENTALES I	4,5	6	II	Semestral

(Fig. 1.5 Departamento de Pregrado Vicerrectoría de Asuntos Académicos, 2015)

La figura (1.6) presenta un extracto del programa de la asignatura calculo I. De la carrera Licenciatura en ciencias de la computación U. de Santiago de Chile.

<p><b>UNIDAD 2. La derivada y sus aplicaciones.</b></p> <p>2.1. Definición y fórmulas básicas de la derivada</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* Definiciones básicas.</li> <li>* Fórmulas elementales.</li> <li>* Las derivadas de las funciones trigonométricas.</li> <li>* Las derivadas de orden superior.</li> </ul> <p>2.2 Propiedades de las funciones derivables</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* Los Teoremas de Rolle y del Valor Medio y sus consecuencias.</li> <li>* Derivadas de las inversas de las funciones trigonométricas.</li> <li>* Crecimiento, convexidad, concavidad, puntos críticos: máximos, mínimos, inflexiones de una función.</li> <li>* Análisis del comportamiento de una función. Gráficos.</li> </ul> <p>2.3. Aplicaciones de la derivada I. L'Hôpital.</p> <p>2.4 . Aplicaciones de la derivada II. Gráficos.</p> <p>2.5. Aplicaciones de la derivada III. Análisis de curvas expresadas en:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* Coordenadas rectangulares; formas explícita e implícita.</li> <li>* Forma paramétrica.</li> <li>* Coordenadas polares.</li> </ul> <p>2.6. Aplicaciones IV. Problemas de máximo y mínimo.</p> <p>2.7. Aplicaciones V. Razón de cambio y diferenciales.</p>
--

(Fig.1.6 Programa Calculo I, Derivada y aplicaciones. (Bobadilla, G. (s.f))

De la figura (1.6) se observa un tratamiento de la derivada desde su fórmula y sus propiedades, nada dice relación con respecto al enfoque geométrico; para luego pasar a sus aplicaciones en la resolución de problemas; esta revisión sugiere que el concepto matemático derivada, se expresa operacionalmente. Investigaciones anteriores han reportado un enfoque de procedimiento, más que conceptual en la universidad respecto al curso de cálculo (Challita, 2013).

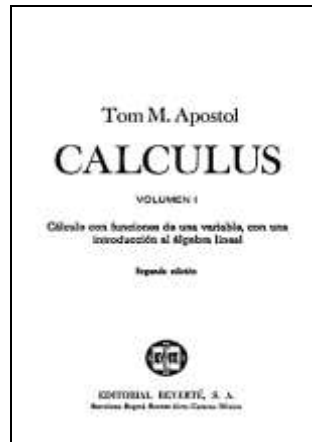
Ballester, Arango & Rodríguez (citado en García, 2012) señala que una de las dificultades de la escuela es que los estudiantes asimilan sólo la forma para expresar conceptos y no su contenido, de esta manera conoce conceptos, distintas definiciones; pero no pueden explicarlos, predomina la expresión mecánica del hecho matemático sobre el contenido en conciencia y en la memoria de los estudiantes.

### **Los libros de texto especializados**

Respecto a cómo se aborda el concepto de la derivada en los libros de textos especializados se hace referencia a continuación.

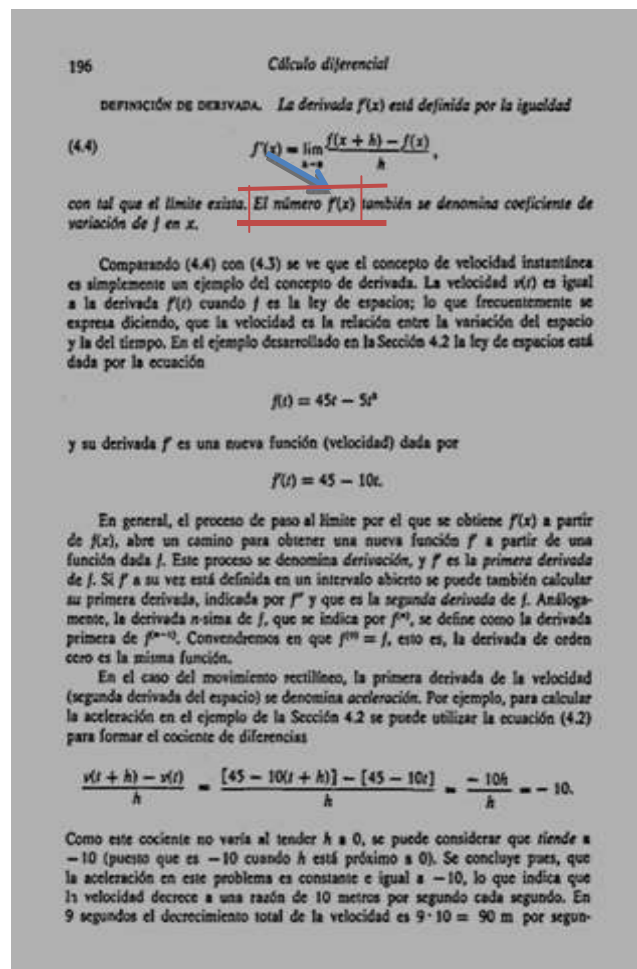
Los libros de textos son un aliado importante a la hora del estudio de cualquier concepto; por tanto la revisión de textos será necesaria para determinar el tratamiento que se les está dando a los contenidos del cálculo y en particular al concepto de derivada. De los contenidos en los diferentes textos, se confirma lo que distintas investigaciones han desarrollado respecto del tema; es decir que la tendencia en la presentación del concepto de derivada es la siguiente: números reales, tratamiento con funciones, teoría de límites y continuidad, derivada de funciones. “El concepto de límite predomina como un tema que antecede al estudio del concepto de la derivada” (Barrera, 2002 pag.71). Al respecto sobre como presentan los libros de textos la noción de derivada se evidencian los conflictos semióticos que se producen en los estudiantes, por ejemplo el causado por la introducción implícita de la función derivada en la definición de la derivada en un punto al usar la notación incremental  $f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , en  $x = a$  como primera notación para definir la derivada en un punto como señala Font.(citado por Pino , 2010).Leibniz interpreta la derivada como cociente de los infinitésimos  $\frac{dy}{dx}$ ;Cauchy distinguió entre  $dy$  y  $\Delta y$  entendiendo  $\Delta y$  como variación de los valores de la función. La revisión de los textos en general da cuenta del tratamiento algebraico y algorítmico de la derivada entregando una definición que los estudiantes en forma memorística y mecánica deberán concebir las más de las veces para resolver cuestiones relacionadas con la derivada. La mayoría de los ejercicios en estos libros de texto puede ser resuelto sin tener en cuenta las propiedades matemáticas básicas subyacentes a los conceptos involucrados en los ejercicios y sus soluciones (Lithner, 2004) y sólo requieren la aplicación de algún procedimiento rutinario. Una consecuencia de esto parece ser que los estudiantes utilizan ejemplos resueltos como plantillas para resolver ejercicios; es decir copian soluciones a los ejemplos resueltos, por lo que sólo los pequeños ajustes serán necesarios. Al respecto señala Hardy la dependencia de los estudiantes en las técnicas " algorítmicas " por el que recuerdan un conjunto de "instrucciones" o "pasos" que fueron proporcionados por el instructor o libro de texto (como se cita en Challita, 2013).

A continuación se presenta una muestra de un libro de texto de cálculo utilizado por estudiantes universitarios en nuestro país (Fig.1.7)



( Fig.1.7 Portada libro de texto )

En la figura (1.8) se identifica el tratamiento que de la derivada da el autor desde un problema de física.



( Fig.1.8 Tom M. Apostol ,Reimpresión 2001)

Como se observa, el texto presenta la definición de derivada formalmente para luego dar una aplicación de la misma en un problema de movimiento. La línea investigativa de la presente tesis hará referencia, en los antecedentes epistemológicos, de la necesidad de diferenciar  $f'(a)$  *derivada en un punto* y  $f'(x)$  *función derivada*, cuando se dice en la muestra del texto anterior que “ $f'(x)$  es un número o el coeficiente de variación”; no colabora para la mejor comprensión de  $f'(a)$  y  $f'(x)$ , dado que define simultáneamente derivada en un punto y función derivada. La diferencia entre las dos notaciones y concepciones se hará con mayor profundización en los antecedentes epistemológicos. En efecto;  $f'(x)$  refiere más bien a la de función derivada; esto es “la función derivada como la función pendiente de todas las posibles rectas tangentes a la curva en un intervalo determinado” y  $f'(a)$  es la derivada de la recta tangente en un punto de la curva.

Si bien, el tratamiento de la derivada en contexto de problemas de física presenta una línea de desarrollo del concepto y que de acuerdo a los antecedentes se señala que un hallazgo importante en el estudio de la derivada de una función es que la pendiente o inclinación de la recta tangente a la curva en un punto representa la rapidez de cambio instantáneo; esto es identificar la pendiente de la recta con la variación de la rapidez en el tiempo; lo que significa pasar de la geometría al campo de las ciencias naturales; cuestión que sin duda reviste importancia, toda vez que esta vinculación fue el impulso mayor en el desarrollo del cálculo infinitesimal (Flores, Valencia, Dávila y García, 2008).

### **1.1.2 Antecedentes históricos-epistemológicos.**

El cálculo infinitesimal surge a partir del siglo XVII para resolver problemas de ese tiempo; entre otros los de mecánica, precedidos por los de índole geométrica que venían de la época griega. Entre ellos trazar la recta tangente a una curva en cualquier punto de ella y en este sentido la derivada será la epifanía que vendrá a dar solución a los problemas que emergieron en la antigüedad y que tanto Newton como Leibniz dieron respuestas a ellos. En efecto todos los grandes problemas que dieron origen a la construcción del cálculo fueron resueltos por ambos matemáticos en términos de derivación o integración (antiderivación). Es así que nuestro tiempo se verá favorecido con los aportes de estos grandes pensadores. La visión de Newton y Leibniz fue relacionar los problemas del

movimiento y las tangentes como uno solo proporcionando una herramienta clave en el cálculo, la derivada (Dolores, 1996).

A continuación se presenta una breve reseña de la evolución histórica –epistemológica del objeto matemático derivada la que está guiada por dos interrogantes:

¿Cómo se concibe el concepto de derivada? , ¿Cuáles son los aportes anteriores en la construcción de la derivada, para la época en que hace su aparición el cálculo?.

A Newton y a Leibniz se les llama fundadores del cálculo ya que fueron los primeros en estudiar el problema geométrico fundamental del cálculo diferencial, que se denomina “Problema de las Tangentes”. Donde se pide hallar las rectas tangentes a una curva dada; dicho propósito favorece el estudio del comportamiento de la curva en cualesquiera de sus puntos en un intervalo de ella. Por tanto; la pendiente, más adelante la derivada de la función, será crucial para determinar dicha recta tangente. En efecto para determinar la recta tangente en un punto de la curva se debe calcular la pendiente de la recta en ese punto de la curva; y de acuerdo con Leibniz la recta tangente será la mejor aproximación lineal a la curva en ese punto.

Pero ¿qué se entiende por recta tangente a una curva? para los propósitos de la investigación es importante responder a la pregunta dado el obstáculo que presenta dicho concepto en la comprensión de la derivada (Canul et al. ,2011).

Según Boyer (citado por Pino fan, 2010) los griegos tenían la idea que la tangente a una curva era una recta que “tocaba” a la curva sin “cortarla”; los matemáticos griegos no disponían de una definición muy satisfactoria de la tangente a una curva  $C$  en un punto  $P$  , considerándola como una recta  $L$  que tiene el único punto  $P$  común con la curva, y tal que no pueda trazarse ninguna otra recta pasando por  $P$  e incluida entre la recta  $L$  y la curva  $C$  . En este sentido Euclides según Vera, (como se cita en Pino-Fan et al. ,2011) determina las propiedades que constituían las características de la tangente:

- a) “La recta sólo tiene en común un punto con la curva”
- b) “Es imposible interponer otra línea entre esa recta y la curva”

En el siglo III a.C., Apolonio definió la tangente a una sección cónica, logró así extender la concepción de tangente que Euclides había establecido para el círculo. Hubo dificultades, sin embargo, para aplicar los métodos euclidianos a otra clase de figuras geométricas planas

conocidas también por los griegos, como, por ejemplo, la espiral de Arquímedes. Este matemático del siglo III a.C. pudo encontrar la tangente a la curva, siguiendo posiblemente consideraciones de tipo cinemático, que le permitieron determinar la dirección instantánea del movimiento del punto mediante el cual se genera la curva (Alarcón, et al. ,2005).

Se tuvo que esperar veinte siglos para con Leibniz y sus infinitesimales definir lo siguiente “una poligonal curva está constituida por infinitos lados rectos” (fig.1.9), por tanto una tangente será la prolongación de uno de sus lados cualesquiera.

En el primer libro de cálculo, “*Analyse des infiniment petits pour l’intelligence des lignes courbes*”, de 1696 cuyo autor es L’Hopital se define:

“Si se prolonga uno de los pequeños lados  $Mm$  de la poligonal que compone a una línea curva, éste pequeño lado, así prolongado, será llamado la tangente de la curva en el punto  $M$  o  $m$ ”

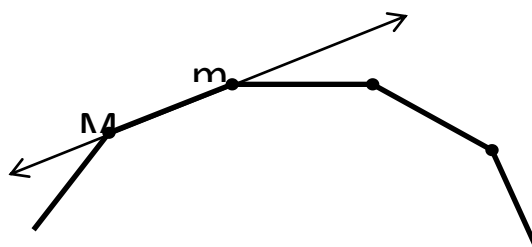


Fig.1.9 curva Leibniziana

En los libros de textos se pone demasiado énfasis en el punto de contacto quedando una idea errónea de que la derivada es la recta tangente en un solo punto y por lo tanto no puede volver a tocarla, tal y como es evidenciado en Castañeda (2004). En efecto, será esta definición no euclidiana de tangente la que soslayará el obstáculo en la comprensión de derivada que sostiene ésta investigación.

Según los antecedentes y de acuerdo a la experiencia como profesor se advierte que tradicionalmente se define la derivada desde la interpretación geométrica; es decir como la pendiente de la recta tangente en un punto a la curva y en seguida se deja de lado; para dar paso a los ejercicios y problemas de aplicación, que generalmente son aquellos referidos al campo de la física, las ciencias económicas o la biología; esto de acuerdo al interés

disciplinar de las instituciones de educación superior. Sin que los estudiantes hayan corregido o ampliado en particular el concepto de tangente en el nuevo escenario del cálculo moderno; esto es desde una visión global estática Euclidiana a una local dinámica Leibniziana.

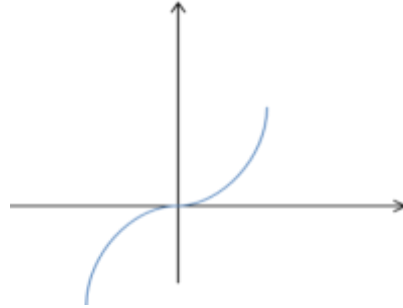
De acuerdo a Guzmán y Rubio (1992, pág. 179) en el siglo XVII

“La noción de derivada surge al pretender determinar la inclinación de la tangente a una curva en un punto de ella, y al dar sentido matemático al concepto de velocidad instantánea. Las aproximaciones a la resolución de estos dos problemas tienen una formulación matemática común [...]”

(Citado por García, Moreno, Badillo, Azcárate, 2011).

Según González (como se cita en Pino-Fan, 2010), Descarte concibió tres métodos para calcular las normales (o equivalentemente las tangentes) el primer método llamado el “Método del círculo” es un método para el trazado de las tangentes a las líneas curvas mediante la construcción previa de la recta normal. El segundo consistía en determinar la tangente a una curva considerándola como la posición particular de una secante que gira en torno al pie de la tangente, hasta que dos de sus puntos de intersección con la curva llegan a coincidir. El tercer método expresa la manera de introducir en la actualidad el concepto de derivada en un punto: La tangente está determinada por una recta que gira alrededor del punto de contacto dado, hasta que el otro punto en el que aquella corte a la curva, coincida con el primero.

Con los aportes de Descartes – Fermat a la geometría analítica se clarificó la relación entre las curvas y las ecuaciones, y el hecho de que toda ecuación en dos variables determinara una curva en el plano produjo una verdadera explosión de nuevas curvas, con algunas de las cuales resultaba inadecuado el concepto griego de tangente; por ejemplo para la curva cúbica (Fig.1.10).



(Fig.1.10 Curva cúbica)

En la fig. (1.11) se ve una aproximación en lenguaje actual al procedimiento de Fermat para el trazado de tangente a una curva algebraica. Aplicación del método de máximos y mínimos al trazado de la tangente.

**EL MÉTODO DE FERMAT PARA LAS TANGENTES EN TÉRMINOS INFINITESIMALES DE LÍMITES Y DERIVADAS**

Sea la curva algebraica  $y=f(x)$ .

Llamemos:  $DB=a$ ,  $BF=e$ .

La *adigualdad*  $FI \cong FE$  y la semejanza de triángulos  $\triangle ABD$ ,  $\triangle IFD$ , conduce a la *adigualdad*:

$$\frac{a}{f(x)} \cong \frac{a+e}{f(x+e)}$$

sobre la que se aplicarán los pasos habituales de la regla del *Methodus*.

A partir de

$$\frac{a}{f(x)} \cong \frac{a+e}{f(x+e)} \cong \frac{e}{f(x+e)-f(x)}$$

se deduce:  $\frac{f(x)}{f(x+e)-f(x)} \cong a$ .

donde la expresión  $f(x+e)-f(x)$  resulta ser divisible por  $e$  y si  $f(x)$  es una función algebraica. Simplificando y haciendo  $e$  igual a cero, se obtiene para la subtangente  $a$ , una expresión que es equivalente a  $\frac{f(x)}{f'(x)}$ , donde  $f'(x)$  es la derivada formal de la función algebraica  $y=f(x)$ . Pero como la pendiente de la recta tangente es precisamente  $m = \frac{f(x)}{a}$ , resulta que el desarrollo de Fermat identifica la pendiente de la recta tangente a la curva  $y=f(x)$  con la derivada formal  $f'(x)$ .

---

Apliquemos el método a la parábola  $y=f(x)=x^2$ .

Escribimos la primera *adigualdad*:  $\frac{a}{f(x)} \cong \frac{a+e}{f(x+e)}$ ,  
y hacemos operaciones:

$$\frac{a}{x^2} \cong \frac{a+e}{(x+e)^2} \cong \frac{e}{(x+e)^2 - x^2} = \frac{e}{e^2 + 2xe} = \frac{1}{e + 2x}$$

Ahora, al hacer  $e=0$ , resulta el valor para la subtangente  $a=x/2$ .

Luego la pendiente de la tangente, equivalente a nuestra derivada, es:

$$m = \frac{f(x)}{a} = \frac{x^2}{x/2} = 2x = f'(x)$$

fig.1.11 (González. 1992, Pag.172)

Newton y Leibniz bajo concepciones y métodos infinitesimales diferentes fueron capaces de mantener el rigor euclídeo, de esta manera las demostraciones que se agilizaban usando cantidades infinitesimales vuelven a tener el rigor de lo geométrico; con este método de sumas y razones últimas de cantidades evanescentes son claramente un precursor del concepto de límite, mediante el cual Cauchy y Weierstrass, ya en el siglo XIX, darán completo rigor al cálculo infinitesimal.

Newton con su invención del método de fluxiones en 1671 nos entrega una noción de la derivada que es descrita a continuación con un ejemplo sencillo. Calcular la tangente a la parábola  $y^2 = ax$  en un punto  $M(x, y)$  Dada la relación entre fluentes  $y^2 = ax$  Newton calcula la relación entre sus fluxiones:

$$\begin{aligned}
 (y + 0\dot{y})^2 &= a(x + 0\dot{x}) && \text{Desarrollando el cuadrado} \\
 y^2 + 2y0\dot{y} + 0^2\dot{y}^2 &= ax + a0\dot{x} && \text{simplificando y dividiendo por } 0 \\
 2y\dot{y} + 0\dot{y}^2 &= a\dot{x} && \text{Cancelando los términos en } 0 \\
 \frac{\dot{y}}{\dot{x}} &= \frac{a}{2y} && \text{Que nos da la pendiente de la tangente}
 \end{aligned}$$

**Notación utilizada: fluentes  $x, y$ ; fluxiones  $\dot{x}, \dot{y}$  ;  $0$  parte infinitesimal en la que un fluente se incrementa.**

(Barceló, sf., Pag.22)

Los métodos utilizados por Newton y Leibniz no difieren esencialmente de los empleados por sus predecesores. Pero lo que en Fermat, Descartes y Roverbal eran una serie de reglas particulares para resolver unos problemas concretos, se transforma en manos de Newton y Leibniz en un método muy general para la determinación de tangentes y cuadraturas, junto con el desarrollo de algoritmos formales para el cálculo con magnitudes infinitesimales. (Bombal, 2010).

Leibniz desarrolló el cálculo infinitesimal con preocupación por lo formal lo que permitió crear un simbolismo adecuado. Según Pastor y Babini (1985) las consideraciones infinitesimales de Leibniz parten del “triángulo característico” (Fig.1.12) de Pascal. Mediante consideraciones sobre el triángulo y sus semejantes; en efecto éste triángulo

muestra que en el problema de la tangente interviene el incremento, es decir la diferencias de las ordenadas.

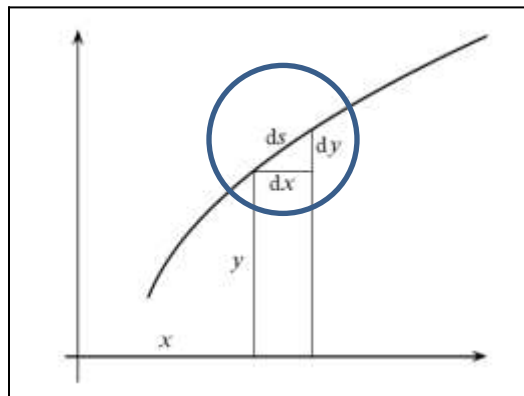


Fig.1.12 Triángulo característico.

El triángulo de la figura 1.12 tiene lados infinitesimales  $dx, dy, ds$  y se verifica la relación  $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ . El lado  $ds$  sobre la curva o polígono se hace coincidir con la tangente a la curva en el punto  $(x, y)$ . La pendiente de dicha tangente viene dada por  $\frac{dy}{dx}$ , que es un cociente de diferenciales al que Leibniz llamó cociente diferencial; hay que consignar que Leibniz nunca consideró la derivada como un límite. Leibniz tardó un tiempo en presentar sus ideas dado que tenía el problema de trabajar con cantidades infinitamente pequeñas y esto no estaba rigurosamente definido; por tanto no era aceptado en matemática. Será Cauchy prescindiendo tanto de la geometría como de los infinitésimos y de las velocidades de cambio que formula la definición de límite y a partir de ella la de derivada junto con sus propiedades fundamentales. Para definir la derivada de una función  $y = f(x)$  con respecto a  $x$ , le da a la variable  $x$  un incremento  $\Delta x = i$  y forma el cociente  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$  y al límite cuando  $i \rightarrow 0$  lo define como la derivada de  $y$  con respecto a  $x$ , que es la definición de derivada tal y como se usa hoy. La notación  $f'(x)$  fue introducida por Lagrange (1736-1813).

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Es importante señalar que la investigación presente considera las funciones reales continuas para el estudio del concepto derivada.

### **1.1.2.1 $f'(a)$ y $f'(x)$ .Una necesaria distinción.**

Las nociones de derivada en un punto y de función derivada son tradicionalmente difíciles de comprender para muchos de los estudiantes en el momento del primer encuentro con ellas. Diferentes investigaciones han puesto de manifiesto que estas dificultades de comprensión están relacionadas con las definiciones de estas nociones usando límites, y no tanto, por ejemplo, con el uso de las reglas de derivación (Badillo ,2003). En efecto lo que el estudiante debe por tanto conectar es la derivada con el comportamiento puntual y la función derivada con el comportamiento global de la función.

El problema de calcular la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado es un problema local es decir se pretende que el alumno identifique que la derivabilidad en un punto está relacionada con un valor real único de la pendiente de la recta tangente en dicho punto,  $f'(a)$  y por otro lado respecto a su sentido global ya no referido a un punto en específico así su significado no dependerá de dicho punto; por tanto será la pendiente  $f'(x)$  de la recta tangente a cualquier punto perteneciente a la gráfica de la función a lo menos en un intervalo abierto cualesquiera de ésta; donde la derivada adquiere un significado global y dinámico (Jimenez,2003).

En síntesis si el cálculo del límite que define la derivada se efectúa en un punto genérico  $x$  en lugar de hacerlo en uno específico  $x_0$  el resultado es la Función Derivada, que en cada punto donde está definida da el valor numérico de la derivada en ese punto. Se debe ser cuidadoso en la consideración de los intervalos en que esa función está definida.

### **1.1.3 Antecedentes desde el punto de vista de la didáctica.**

La presente tesis destaca el trabajo de Robles, Del Castillo y Font (2011).En dicha investigación asume las dificultades de comprensión de la derivada en un punto y de función derivada, desde el enfoque teórico Ontosemiótico y proponen una secuencia didáctica para superarlas asistidas por computadora. Se utiliza el Applet Descartes como herramienta que posibilita la visualización de la linealidad local; de tal manera que el

estudiante se ponga en contacto con la noción de la recta tangente como la recta que más se parece a la curva en las cercanías del punto de tangencia. Dicha investigación por cierto se consigna dado que es afín a la propuesta en la comprensión de la derivada desde la noción geométrica. Por otro lado el trabajo realizado por Montoya y Vivier, (2015) en el cual los investigadores dan a conocer resultados respecto a que la noción intuitiva que los estudiantes tienen de la tangente no es suficiente para la construcción del concepto derivada; el análisis realizado lo sustentan desde el marco teórico Espacio de Trabajo Geométrico de Kuzniack (2011). A las autoras les parece interesante el fenómeno que la derivada repose sobre la idea geométrica de la recta tangente, noción que de acuerdo a las evidencias no es estudiada en los currículum, y solo se estudia empíricamente como un elemento auxiliar de la circunferencia y donde existe la idea “intuitiva” que la recta tangente solo tiene un punto en común con la curva; cuestión que se ha detallado en páginas anteriores. Por último se reseña el trabajo realizado por Matamoros, García y Llinares, (2008), donde los autores dan muestra de la variedad de marcos en los que es posible el análisis de la comprensión de la derivada, donde se destacan entre otros el marco cognitivo piagetiano sobre el desarrollo de esquema a través de sus fases *Intra*, *Inter* y *Trans*. En el que se define esquema por la estructura matemática formada por relaciones lógicas que se establecen entre elementos matemáticos que constituyen una noción matemática; en este caso el de derivada y que puede ser evocado para la resolución de un problema.

En síntesis, distintas teorías desarrolladas por la Didáctica de la Matemática han posibilitado el estudio de fenómenos didácticos presentes en el proceso de enseñanza de conceptos matemáticos. Es en este contexto que la presente investigación aborda el objeto “Derivada”, aproximación que se realiza desde el marco teórico “Modos de Pensamiento” elaborado por Anna Sierpinska. Investigadora de la Universidad de Concordia, Australia.

## 1.2 PROBLEMÁTICA

La problemática que se presenta en esta investigación se evidencia al indagar el tratamiento que se da al concepto de derivada ya referido en los antecedentes, y sus implicancias en la comprensión de dicho concepto. En este trabajo, se entiende por comprensión al proceso mental; esto es una forma de ver las cosas, Sierpinska (1985); es decir para determinar la comprensión lograda por un estudiante se observará atentamente las distintas maneras que tiene de percibir un concepto, determinando así, su comprensión.

Una de las mayores dificultades que tienen los estudiantes que comienzan a estudiar la derivada de una función es la comprensión de su significado geométrico. Mientras que el cálculo de derivadas les suele resultar sencillo, la interpretación geométrica de la derivada en un punto se convierte en un problema complejo más aún su relación con la función derivada.

En este proceso de comprensión Sierpinska (2000), concibe el necesario tránsito entre dos tipos de pensamiento el práctico y el teórico; en este sentido las evidencias que dan cuenta en el tratamiento de la derivada tanto desde la enseñanza (secundaria y superior), como en los libros de textos muestran un exceso de Mecanización, que de acuerdo a Sierpinska (1985), dificultaría el tránsito entre ambos tipos de pensamiento.

Por lo descrito anteriormente, surgen las siguientes interrogantes a saber:

¿Cuáles son los modos de pensamiento que surgen en la comprensión de la derivada en estudiantes de pedagogía en matemática y física? , ¿Cuál es la caracterización del pensamiento práctico y teórico que permiten construir el concepto derivada?,

¿Cuál es la matemática que permite el tránsito entre los modos de pensamiento?.

En esta investigación la noción de derivada que se adopta es la “pendiente de la recta tangente a una curva” lo que implica situar el estudio desde uno de los problemas del objeto matemático que lo originaron, esto es “determinar la recta tangente a una curva” lo que permitiría promover una comprensión más profunda de la derivada.

## **1.3 OBJETIVOS**

### **1.3.1 Objetivo general**

Estudiar las estrategias cognitivas puestas en juego por estudiantes universitarios de Pedagogía en Matemática y Física en relación al concepto de derivada, desde una aproximación teórica de los Modos de Pensamiento.

### **1.3.2 Objetivos específicos:**

- a) Caracterizar el proceso de comprensión de la derivada bajo el marco teórico los Modos de Pensamiento.
- b) Describir y analizar los Modos de Pensamientos que emergen en estudiantes de Pedagogía en Matemática y Física de una universidad pública en Santiago de Chile en torno al concepto de la derivada.

## CAPITULO II

### MARCO TEÓRICO

#### 2.1 Pensamiento Teórico y Pensamiento Práctico.

Sierpinska (et al. 2000) manifiesta que, a pesar de los esfuerzos por mejorar la enseñanza del álgebra lineal, persistían las dificultades en los estudiantes con los cuales le correspondía desarrollar aprendizajes en esta área. Ante esta situación, el grupo de investigadores conjeturó que quizá los alumnos no entendían la teoría porque querían comprenderla de forma más práctica que teórica. A partir de ahí, comenzaron a caracterizar el pensamiento teórico y el pensamiento práctico (Uicab y Asuman, 2006). El pensamiento teórico se caracteriza por una reflexión profunda en conciencia sobre significados semióticos de representación del conocimiento, así como sobre sistemas de conceptos y no sólo de acumulación de ideas. En particular, las definiciones de los conceptos, comparaciones entre conceptos y sus diferencias se construyen sobre la base de las relaciones entre estos conceptos con conceptos más generales y no, por ejemplo, sobre la base de sus ejemplos más comunes (Sierpinska, 2000). La característica del pensamiento teórico es la conciencia de los conceptos con los que opera, mientras que el pensamiento práctico centra su atención en los objetos concretos y no repara en sus conceptos relacionados. Entonces, las conexiones entre conceptos sólo podrán hacerse cuando el estudiante tome conciencia de los conceptos con los que opera; es decir, cuando adquieran significado para él. En este sentido el pensamiento práctico opera siempre a nivel de acción, externo al pensamiento en sí mismo, mientras que el pensamiento teórico piensa sobre los conceptos y sobre su razón de ser: se preocupa por las notaciones simbólicas y formas de representación, pero también sobre las reglas y principios que les dan razón y validan su uso (Sierpinska et al., 2002).

## 2.2 Modos de pensamiento para la derivada.

Los Modos de Pensamiento son una forma de tipificar el razonamiento que los estudiantes activan al momento de la comprensión de algunos objetos matemáticos. Sierpinska (2000) los desarrolla específicamente para conceptos del álgebra lineal. En esta investigación aproximamos el marco teórico al campo del cálculo, concretamente en la comprensión de la derivada.

La investigadora Anna Sierpinska, menciona la coexistencia de tres tipos de lenguaje en algebra lineal: **Lenguaje geométrico**: el que se usa para ilustrar las representaciones y propiedades de los vectores en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ ; **Lenguaje aritmético**: usado para describir las operaciones entre matrices, soluciones de ecuaciones, etc. y **Lenguaje algebraico**: usado para formalizar y simbolizar entes como espacios vectoriales, transformaciones lineales, etc. Sierpinska (1996 citado por Miranda, 2004). A su vez cada uno de estos lenguajes desarrolla, en correspondencia, una forma de pensamiento.

- a) Sintético geométrico (SG)
- b) Analítico aritmético (AA)
- c) Analítico estructural (AE)

**Pensamiento sintético geométrico**: Este tipo de pensamiento se da en una persona, por ejemplo, cuando piensa con ayuda de figuras, conjuntos de puntos, operaciones entre conjuntos como la unión o intersección. En este trabajo un ejemplo de pensamiento S.G se da cuando un estudiante es capaz de determinar si la recta que toca a la curva en un punto y que mejor se aproxime a la curva cerca de ese punto es tangente o no desde la sola acción de observación (elemento que se asoma como perteneciente a la ampliación del concepto tangente que viene de la geometría euclidiana) ; es así que se tendrá una idea intuitiva de la pendiente de dicha recta en tanto la dirección que ésta presenta respecto a la curva.

**Pensamiento analítico – aritmético**. En este modo de pensar, la persona se centra en relaciones numéricas, en otorgar categoría de números a los elementos con los que trabaja, por ejemplo una recta será vista como una ecuación. En el caso de la derivada, un estudiante se da cuenta de que todas las rectas que pasan por un punto ahora identificado por  $(a; f(a))$ , excepto la que es paralela al eje  $y$ , son de la forma  $y = f(a) + m(x - a)$

donde el valor de  $m$ , la pendiente de la recta, es lo que distingue a unas rectas de otras ;en consecuencia se trata en definitiva de escoger el valor de  $m$  que hace que la recta sea la mejor aproximación posible a la gráfica de la curva  $f(x)$  cuando el valor de  $x$  esta cerca de  $a$  esto es :

$$m \approx \frac{f(x) - f(a)}{x - a} ; \text{cuando } x \text{ esta cerca de } a$$

Una forma de pensamiento AA se presenta cuando el estudiante evalúa una expresión sucesivamente y construye una tabla de valores; en este caso se pedirá determinar la pendiente ( $m$ ) de la recta que mejor se aproxima a la curva en un punto, diremos entonces, que la derivada de  $f(x)$  en  $a$  es la pendiente de la recta tangente en ese punto.

***Pensamiento analítico- estructural:*** En este modo, los objetos son comprendidos a partir de los axiomas y propiedades que los sustentan. En este trabajo, cuando se piensa el problema anterior en términos de las propiedades de la pendiente; en adelante la función derivada:

$$f'(x) \text{ cuando } h \rightarrow 0 ; (x = a) \text{ donde } m_t = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} ;$$

por tanto, el análisis del comportamiento de la función  $f$  en cualquier valor de  $x$  del dominio de la función, será determinado por la nueva función de pendientes de rectas tangentes a la curva, definida como la función derivada, que es el proceso de generalización de la derivada en un punto.

En efecto desde el punto de vista geométrico muchos problemas importantes dependen de la determinación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto específico, a continuación se introduce el concepto analítico de la pendiente de recta tangente a una función en un punto y luego el concepto de derivada de una función. De acuerdo a la autora del marco teórico elegido, diversas maneras de pensar los objetos matemáticos, permiten una comprensión profunda de los mismos (Sierpiska, 2000).

Es preciso reiterar que este constructo teórico “Modos de Pensamiento” es ideado para el estudio del álgebra lineal y el propósito de la investigación es aproximar el marco teórico a un objeto matemático dentro del ambiente del cálculo, es decir una aproximación desde

los Modos de Pensamiento para la comprensión del concepto derivada. Además recalcar que dicho concepto se caracterizará de acuerdo a la interpretación geométrica de ésta; entender que el límite de una familia de secantes (Fig.2.1) es la pendiente de la tangente, esto es desde los conceptos recta tangente ( $Lm_t$ ), función derivada  $f'(x)$ , función derivable, derivada puntual  $f'(a)$ .

En efecto la definición de pendiente de la recta tangente que se formaliza mediante la derivada y que viene a ajustar el concepto de tangente que todos nos formamos en el estudio de la geometría euclidiana.

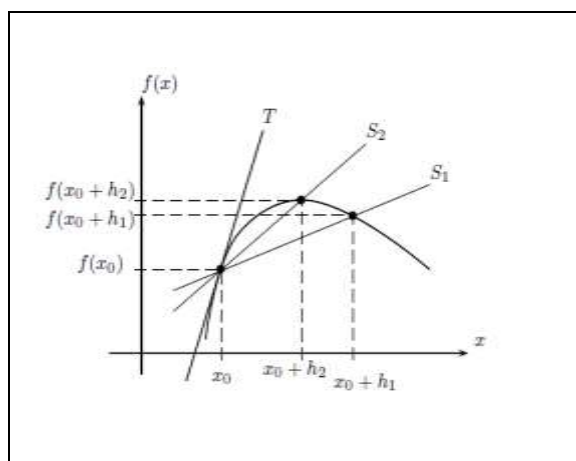
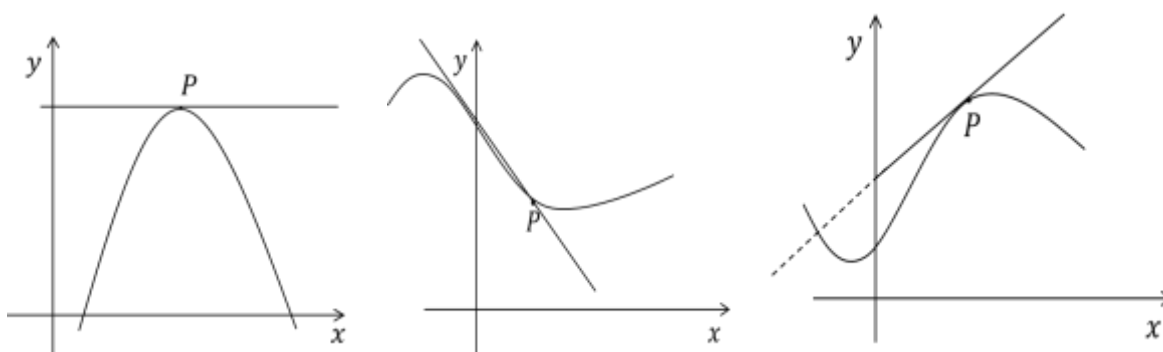


Fig.2.1 Las secantes  $S_1, S_2, \dots$ , tienden a  $T$ , recta tangente a la gráfica en el punto  $(x_0, f(x_0))$ , cuando  $h \rightarrow 0$  (Flores, García, Valencia y Dávila. 2008, pag.94)

## 2.3 Síntesis ilustrativa de los Modos de pensamiento de la derivada en esta investigación

### SINTÉTICO- GEOMÉTRICO



Asociar en forma intuitiva la dirección de la recta tangente con la pendiente de dicha recta. La tangente a la curva en  $P$ , es la recta que pasa por  $P$  y que tiene la misma dirección que la curva alrededor de  $P$ . La curva tiene un comportamiento que es posible de caracterizar mediante una recta tangente en cada uno de sus puntos. El estudiante examina una imagen mental y determina atributos asociados a dicha imagen y observa sus características ampliando el concepto euclidiano de recta tangente a una curva.

### ANALÍTICO- ARITMÉTICO

$$m = f'(a)$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} ; \text{ siempre que el límite exista}$$

El estudiante hará la correspondencia entre: La pendiente de la recta tangente en un punto con la derivada en dicho punto. Que incluye el cálculo del valor específico de dicho límite en un punto de la curva.

## ANALÍTICO – ESTRUCTURAL

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
; siempre que el límite exista en todo el dominio de  $f$  o en el intervalo  $]a; b[$  de  $f$

El estudiante deberá identificar la correspondencia entre:

- a) La función de pendientes de rectas tangentes a la curva con la función derivada.
- b) La función derivada como objeto matemático que permite determinar la pendiente de la recta que es tangente a la gráfica de una función  $f$  en cualquier punto de abscisa  $x$ .

La matemática que permite una aproximación al concepto derivada y que en algunos casos se vuelve obstáculo epistemológico para la comprensión del concepto desde una interpretación geométrica, esto evidenciado en los antecedentes respecto a la recta tangente y particularmente en Sierpínska (1990), plantea el obstáculo epistemológico relativo al concepto de límite. Por tanto los conocimientos previos de los estudiantes permiten o no activar los Modos de Pensamiento.

### Conceptos que permiten aproximarnos al objeto Derivada:

- a) La noción de recta tangente a una curva
- b) Recta secante
- c) Concepto de función
- d) Cálculo de límites
- e) Definición formal a través del límite de la derivada
- f) Distinguir  $f'(a)$  de  $f'(x)$
- g) Gráfica de funciones
- h) Gráfica de la función derivada

## CAPITULO III

### DISEÑO METODOLÓGICO

#### 3.1 Metodología cualitativa. Estudio de caso

De acuerdo a los objetivos de investigación, esto es la descripción y caracterización de los modos de pensamiento que se evidencian en la comprensión de la derivada en estudiantes universitarios de la carrera de Pedagogía en Matemática y Física; el estudio cualitativo aparece como metodología de investigación apropiada y particularmente el estudio de caso. El enfoque cualitativo se fundamenta en una perspectiva interpretativa centrada en el entendimiento del significado de las acciones de seres vivos, sobre todo de los humanos y sus instituciones; lo que se busca por tanto es interpretar la realidad de cada individuo. (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). El propósito consiste en (reconstruir) la realidad, tal como lo observan los actores de un sistema social previamente definido. Las indagaciones cualitativas no pretenden generalizar de manera probabilística los resultados a poblaciones más amplias ni necesariamente obtener muestras representativas; incluso, regularmente, no buscan que sus estudios lleguen a replicarse. La realidad se define a través de las interpretaciones de los participantes en la investigación respecto de sus propias realidades (Hernández, Fernández y Baptista 2006). El tipo de investigación propuesto en este trabajo es de naturaleza descriptiva; pues tal metodología permite abordar aspectos del pensamiento en estudiantes al responder un cuestionario en contexto de la derivada en un tiempo determinado. En efecto; no es pretensión de la investigación representar a todos los estudiantes de pedagogía respecto a la comprensión que tienen de la derivada, sin embargo es factible transferir del estudio de caso que los estudiantes de pedagogía en general, futuros profesores refuercen la idea que el conocimiento profundo de los objetos matemáticos pasa necesariamente por su comprensión. Y tal comprensión, dependerá de las distintas formas de pensar el objeto matemático. Según la investigadora Anna Sierpiska (2000), los pensamientos **prácticos y teóricos** que son tipificados como Sintético-Geométrico, Analítico-Aritmético y Analítico Estructural, serán la vía para alcanzar una comprensión más profunda de variados objetos de la Matemática.

De acuerdo al enfoque cualitativo los métodos de recolección de datos no estandarizados ni completamente predeterminados. No se efectúa a través de una medición numérica, por lo cual el análisis no es estadístico. La recolección de los datos consiste en obtener las perspectivas y puntos de vistas de los participantes (sus emociones, prioridades, experiencias, significados y otros aspectos subjetivos). También resultan de interés las interacciones entre individuos, grupos y colectividades. El investigador pregunta cuestiones abiertas, recaba datos expresados a través del lenguaje escrito, verbal y no verbal, así como visual, los cuales describe y analiza y los convierte en temas que vincula y reconoce sus tendencias personales (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). Por ello se estima que el cuestionario como instrumento de recolección de datos es apropiado para el presente trabajo.

Con el cuestionario diseñado, se pretende indagar sobre el modo de pensamiento que los estudiantes movilizan al momento de dar respuesta a los problemas escogidos.

### **3.2 Contexto y sujetos**

La presente investigación describe los Modos de Pensamiento (Sierpiska2000) en que el concepto derivada es comprendido por siete estudiantes universitarios que han cursado la asignatura Cálculo I en la carrera de Pedagogía en Matemática y Física impartida en una universidad chilena.

#### **3.2.1 Criterios de selección de los sujetos**

- a) Estudiantes de pedagogía en matemática y física. Actualmente cursando cuarto año.
- b) La disposición de participar en esta investigación.
- c) El acceso directo a algunos de ellos dado su calidad de estudiantes en práctica profesional en el instituto donde el autor dicta la asignatura de matemática, siendo además el profesor guía de dichos estudiantes.

### 3.3 Proceso recogida de información

Este proceso se efectuó en un encuentro de los estudiantes y el profesor investigador en la primera semana de diciembre 2014 en que se aplicó el cuestionario que contiene preguntas relativas al concepto derivada desde la interpretación pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función. Las respuestas fueron clasificadas de acuerdo al tipo de pensamiento que los participantes, distinguidos por  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$  y  $E_7$  activaron al momento de su resolución, según la caracterización de SG, AA y AE definidos en el capítulo anterior.

Tabla 1. Resumen de informantes y técnicas de recogida de información.

Tipo Estudiantes	Carrera	Curso	Recogida información	Caso
Universitarios	Pedagogía Mat. y Física.	4º año Cálculo I aprobado.	Producción actividades del cuestionario	7 estudiantes

### 3.4 Diseño del cuestionario.

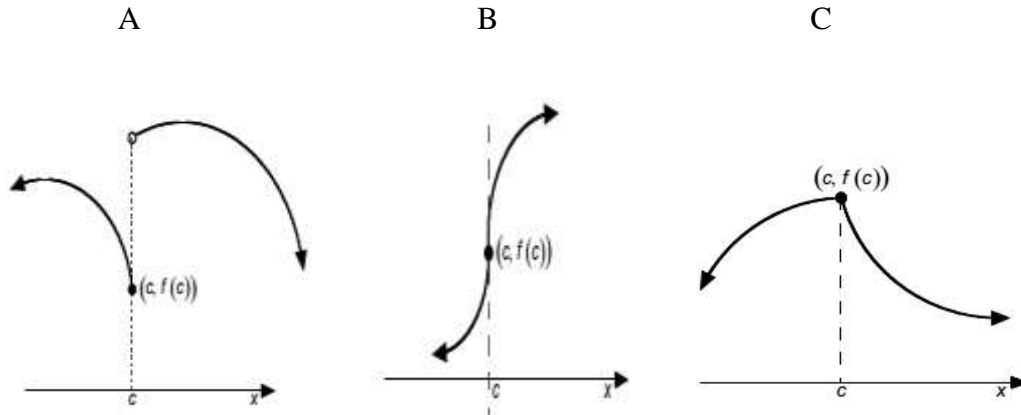
El instrumento que permite la recolección de información es un cuestionario que incluye doce problemas para que el estudiante resuelva por escrito, algunos de estos problemas fueron diseñados por el autor de este trabajo, in experiencia como profesor de la asignatura plan diferenciado matemática cuarto medio : ( $P_2, P_4, P_9, P_{10}$  y  $P_{11}$ ) y otros extraídos intencionadamente del libro de texto de cálculo ( $P_1$ , citado de Larson, Vol.2, Cap. II, Pag.96) de uso habitual por estudiantes universitarios de primeros años de la carrera, e investigaciones y apuntes respecto a la derivada(  $P_{12}$ , citado de Robles, 2010,  $P_5$  de Benedicto, 2012,  $P_7$  y  $P_8$  , de López de Aguilaz, 2014, pag.34-36) y ( $P_3$  Zaragoza, 2015) Lo que permitirá indagar los modos de pensamiento que emergen en la resolución de los mismos, cuya comprensión del concepto derivada es a través de su interpretación geométrica.

### Problemas seleccionados para diseñar el cuestionario

P1: ¿Qué quiere decir que una recta es tangente a una curva en un punto?

P2: Con sus propias palabras explique el concepto derivada desde un enfoque geométrico.

P3: Las siguientes graficas son o no derivables en  $(c; f(c))$ ; justifique su respuesta



P4: Explica por qué la derivada de una función constante siempre es igual a cero.

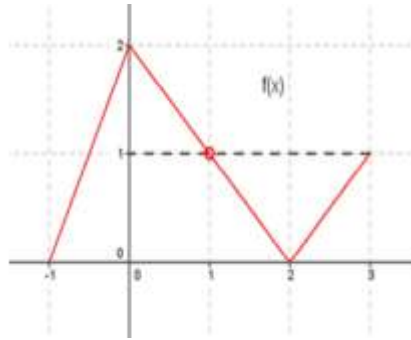
P5: Calcula la pendiente de la recta secante en función de  $a$  y  $h$ .

P6: Se sabe que la derivada de una función  $f$  en  $x = 2$  es  $f'(2) = 0$ . Indica cuál de las afirmaciones es cierta. Explica tu respuesta:

- a) La recta tangente a la curva en el punto  $x = 2$ ; es horizontal.
- b) La función pasa por el punto  $(2; 0)$

P7: La característica de una carretera viene dada en un tramo de montaña por la función  $f(x) = \sqrt{x}$ . ¿Qué señal de tráfico habrá que poner en  $x=20$ , estando  $x$  medido en metros?

P8: Recordando el concepto geométrico de derivada y sin calcular la expresión analítica de  $f(x)$ , obten la representación grafica de  $f'(x)$ , siendo la gráfica de  $f(x)$  la siguiente:



*en  $x = 1$  ;  $f(x)$  no está definida*

P9: Dada la función  $f(x) = x^2 - 8x + 1$  ; ¿existe algún punto de la curva con tangente paralela a la recta  $y = 1$ ?

P10: Calcular la derivada (por definición)  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$  ; y como aplicación estudiar  $f'(0)$

P11: Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la función  $y = x^2$  ; que pasen por el punto  $(0, -1)$

P12: ¿Por qué, si la derivada de la función  $f(x) = x^2$  es  $f'(x) = 2x$  , cuando construimos la graficas correspondientes la recta no resulta ser tangente a la parábola en ningún punto? Explica.

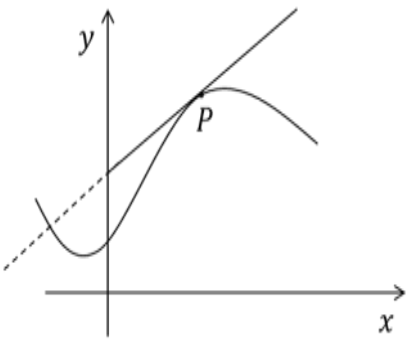
Es necesario destacar que las preguntas anteriores incluidas en el diseño del cuestionario fueron escogidas dadas su pertinencia epistemológica de la derivada asumida en este trabajo, esto es la derivada desde su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente a la curva y por otro lado, en algunos problemas que permiten el tránsito entre los modos de pensamiento; por ejemplo para la pregunta N° 10 se espera que los estudiantes apliquen la definición al momento de determinar la función derivada  $f'(x)$  de  $f(x)$ ; para luego evaluar y analizar  $f'(0)$ . Sin embargo, cabe la posibilidad que dicho reconocimiento sea mecánico, que no incluye el significado de las distintas expresiones simbólicas que se articulan en la definición (función, pendiente, límite). La respuesta a la segunda parte pone a prueba el posible carácter memorístico de la respuesta. El estudiante debe identificar la función de: Pendientes de rectas tangentes a una curva o pendientes de una curva, con la

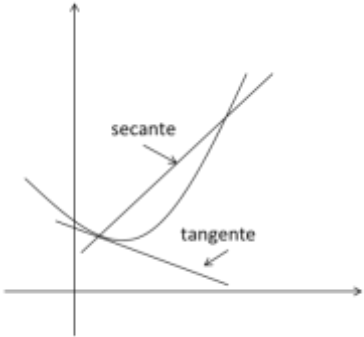
función derivada. Y el valor de la pendiente de la recta tangente a una curva o el valor de la pendiente de una curva en un punto, como la derivada de la función en dicho punto.



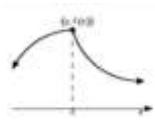
El pensamiento activado debe ser AE al solicitarle al estudiante que determine la función derivada por definición y AA al momento de evaluar para obtener la derivada en  $f'(0)$ ; el estudiante podría transitar a SG si entrega una gráfica aproximada de la solución para  $f'(0)$ , que es la tangente vertical a  $f$ .

### 3.4.1 Ejemplos de posibles respuestas categorizadas según los tipos de pensamiento definidos.

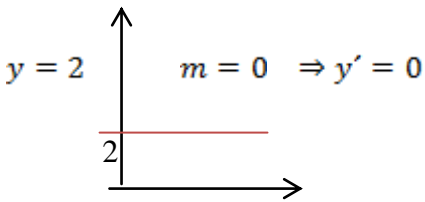
A continuación se presentan cuadros explicativos de las posibles respuestas a cada una de las preguntas del cuestionario, de acuerdo al tipo de pensamiento que podrían activarse al momento de su solución.

Pregunta	Modos de Pensamiento	Posibles respuestas
P1: ¿Qué quiere decir que una recta es tangente a una curva en un punto?	SG	
	AA	Una recta $L$ que pase por $P(a, f(a))$ , se denomina recta tangente a la gráfica de $f$ en $P$ , si $L$ es la mejor aproximación lineal de $f$ cerca de $P$ .
	AE	La recta $y = mx + b$ es tangente a la gráfica de un polinomio $p(x)$ en $x = a$ si y sólo si $mx + b$ es el resto del cociente $p(x)/(x - a)^2$

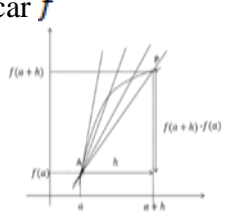
Pregunta	Modos de Pensamiento	Posibles respuestas
P2: Con sus propias palabras explique el concepto derivada desde un enfoque geométrico.	SG	 <p>la inclinación de la tangente en el punto será la derivada</p>
	AA	<p>El valor de la pendiente de la tangente en un punto</p> $local : f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
	AE	$global : f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

Pregunta	Modos de Pensamiento	Posibles respuestas
<p>P3: Las siguientes graficas son o no derivables en <math>(c; f(c))</math>; justifique su respuesta</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: center;">  <p>A)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>B)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>C)</p> </div> </div>	SG	<p>A, No posee derivada es discontinua en el punto, B es continua en el punto, pero la gráfica tiene una tangente vertical en dicho punto, entonces no es derivable. C es continua en el punto, sin embargo no tiene recta tangente en el punto ya que tiene punta angulosa; por tanto no es derivable.</p>

	AA	En el caso de la gráfica B se da un punto cualquiera y se calcula el límite, obteniendo que el valor de este es indeterminado lo que implica una tangente vertical. Como ejemplo en la función $y = x^{\frac{1}{3}}$ ; en $x = 0$
	AE	Aplicar propiedades de las derivadas

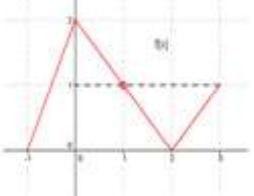
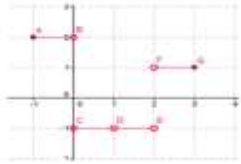
Pregunta	Modos de Pensamiento	Posibles respuestas
P4: Explica por qué la derivada de una función constante siempre es igual a cero.	SG	
	AA	<p>Sea <math>f(x) = 2</math> ;</p> $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2-2}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} 0 \quad ; \text{ por tanto}$ $f'(x) = 0$
	AE	<p>Sea <math>f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0 ; k \in \mathbb{R}</math>  Por definición de derivada, se tiene que al Sustituir <math>f(x) = k</math> en la definición  <math>f(x+h) = k</math>  <i>k , al ser cte. en cualquier punto del dominio</i></p>

		<p>Su imagen es la misma; por tanto:</p> $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0; \text{ entonces}$ $\text{si } f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0 ; k \in \mathbb{R}$
--	--	---

Pregunta	Modos de Pensamiento	Posibles respuestas
<p>P5: Calcula la pendiente de la recta secante en función de <math>a</math> y <math>h</math>.</p>	<p>SG</p> <p>AA</p> <p>AE</p>	<p>Graficar <math>f</math></p>  <p>Dados los puntos <math>A(a; f(a))</math> y <math>P(a+h; f(a+h))</math> de la curva trazar la secante por A y P, para luego determinar la expresión analítica de la pendiente de la secante.</p> <p>La recta secante pasa por los puntos <math>A(a; f(a))</math> y <math>P(a+h; f(a+h))</math> ;  calcular el vector director <math>\overrightarrow{AP}(h, f(a+h) - f(a))</math> ; con A y <math>\overrightarrow{AP}</math> determinamos la ecuación de la recta:</p> $(1) \frac{x-a}{h} = \frac{y-f(a)}{f(a+h)-f(a)}$ <p>Obtener la ecuación punto-pendiente de (1) y determinamos <math>m</math></p> $m = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$





Pregunta	Modos de Pensamiento	Posibles respuestas
<p>P8: Recordando el concepto geométrico de derivada y sin calcular la expresión analítica de <math>f(x)</math>, obten la representación grafica de <math>f'(x)</math>, siendo la gráfica de <math>f(x)</math> la siguiente:</p>  <p>En <math>x=1</math> la función no está definida</p>	<p>SG</p> <p>AA</p> <p>AE</p>	 <p>Podemos observar que la gráfica de la función <math>f(x)</math> posee diferentes pendientes a lo largo de su dominio, por lo que, recordando que la derivada de una función hace referencia a la pendiente de la misma en un punto, debemos de analizar la función por tramos.</p>



Pregunta	Modos de Pensamiento	Posibles respuestas
P10: Calcular la derivada (por definición) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ; y como aplicación estudiar $f'(0)$	SG  AA          AE	<p>Pueden graficar la función y la función derivada.</p> <p>Se pide estudiar la función derivada en <math>x = 0</math>; se tiene:</p> $f'(0) = \frac{1}{3 \cdot 0^{\frac{2}{3}}}$ $f'(0) = \frac{1}{0} = \infty$ <p>Por lo tanto, en <math>x = 0</math> la curva <math>f(x) = \sqrt[3]{x}</math> tiene tangente vertical.</p> <p>La definición de la derivada de una función es: la derivada de una función <math>f</math> en <math>x</math> viene dada por <math>f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}</math>; siempre que exista ese límite. Para todos los <math>x</math> para que exista este límite, <math>f'</math> es una función de <math>x</math>.</p> <p>Utilizamos la definición para la función <math>f(x) = x^{\frac{1}{3}}</math></p> $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{h}; \text{ se multiplica y divide por la diferencia de cubos}$ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}})((x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}})}{h((x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}})}; \text{ factorizamos el numerador}$ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^{\frac{3}{3}} - x^{\frac{3}{3}}]}{h((x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}})}; \text{ se simplifica}$ $f'(x) = \frac{(x+h) - x}{h((x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}})}; \text{ cancelan términos semejantes}$ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h((x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}})}$ <p>cancelar <math>h</math> para levantar la indeterminación</p> $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}; \text{ se evalúa para } h = 0$ $f'(x) = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}$ <p>Entonces la función derivada de <math>f</math> es <math>f'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}</math></p>

Pregunta	Modos de Pensamiento	Posibles respuestas
P11: Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $y = x^2$ ; que pasen por el punto $(0, -1)$	<p>SG</p> <p>AA</p> <p>AE</p>	<p>Puede realizar grafica estimada, para describir la situación (sin dar por cierto con las expresiones algebraicas de las ecuaciones de las rectas)</p> <p>La ecuación punto pendiente está definida:  <math>y - y_1 = m(x - x_1)</math>  Se sabe que la recta pasa por el punto <math>(0, -1)</math>; supongamos que la recta es tangente en el punto de coordenadas <math>(a, a^2)</math>. Determinemos la pendiente de la recta que pasa por <math>(0, -1)</math> y es tangente en <math>(a, a^2)</math></p> <p>resolviendo la ecuación se tiene <math>a = 1</math> o <math>a = -1</math>  En efecto <math>m = 2(1) \rightarrow m = 2</math> o <math>m = 2(-1) \rightarrow m = -2</math>  Entonces la ecuación de la recta tangente a la función <math>f(x) = x^2</math> es:</p> <p>i) <math>y - (-1) = 2(x - 0)</math>  <math>y + 1 = 2x</math>  <math>2x - y - 1 = 0</math></p> <p>ó</p> <p>ii) <math>y - 1 = -2(x - 0)</math>  <math>y + 1 = -2x</math>  <math>-2x - y - 1 = 0</math></p> <p>Derivamos <math>y = x^2</math> , se tiene <math>y' = 2x</math> ; que es la pendiente de la recta tangente en el punto <math>(a, a^2)</math>. Luego <math>y' = 2a</math>  Por otro lado <math>m = \frac{a^2 - (-1)}{a - 0} \rightarrow m = \frac{a^2 + 1}{a}</math> ; pero <math>y' = m</math>  Por tanto <math>\frac{a^2 + 1}{a} = 2a</math> , con <math>a \neq 0</math></p>



## CAPITULO IV

### Análisis de Resultados

El análisis de resultados se realiza de acuerdo a las respuestas emitidas por los estudiantes a los problemas que se presentaron en el cuestionario, lo que permite describir los modos de pensamiento que se han activado en la comprensión del concepto derivada.

#### 4.1 Pregunta N°1

¿Qué quiere decir que una recta es tangente a una curva en un punto? Explique.

Tabla N°1. Resumen de resultados referidos a la pregunta N° 1

ESTUDIANTES	MODOS DE PENSAMIENTO		
	SG	AA	AE
E <sub>1</sub> , E <sub>2</sub> , E <sub>3</sub> , E <sub>4</sub> , E <sub>5</sub> , E <sub>6</sub>	x	-	-
E <sub>7</sub>	-	x	-

De acuerdo a la tabla resumen de las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta N°1 se puede inferir que éstas en su mayoría corresponde a una visión geométrica estática de la recta tangente, es decir que un punto de la recta y la curva coinciden sin que la recta toque o corte en otro punto cualquiera de la misma; por tanto los estudiantes están respondiendo al tipo curvas de Apolonio. Lo que según Dolores (1988) nos encontramos con un obstáculo que impedirá la comprensión más profunda de la derivada. Por otro lado, todas las explicaciones de la mayoría de los participantes son verbales con pensamiento SG dado como en el ejemplo de respuesta en E<sub>1</sub> dado que evoca puntos, recta que es propio de este tipo de pensamiento; aunque insinúa pensamiento AA al enunciar “a la función”; Sin embargo E<sub>7</sub> lo hace desde el pensamiento AA toda vez que explica desde el concepto de

límite como aproximación sucesiva de puntos a un punto fijo, esto a su vez implica evaluar pendientes. (Figs. 4.1 y 4.2). No se observa pensamiento AE en los estudiantes.

Ejemplos de respuestas de los estudiantes.

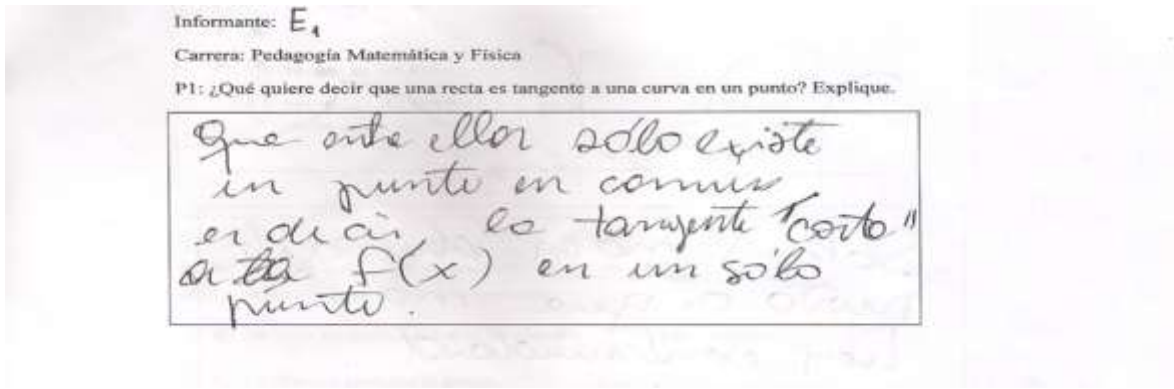


Fig.4.1 respuesta E<sub>1</sub>

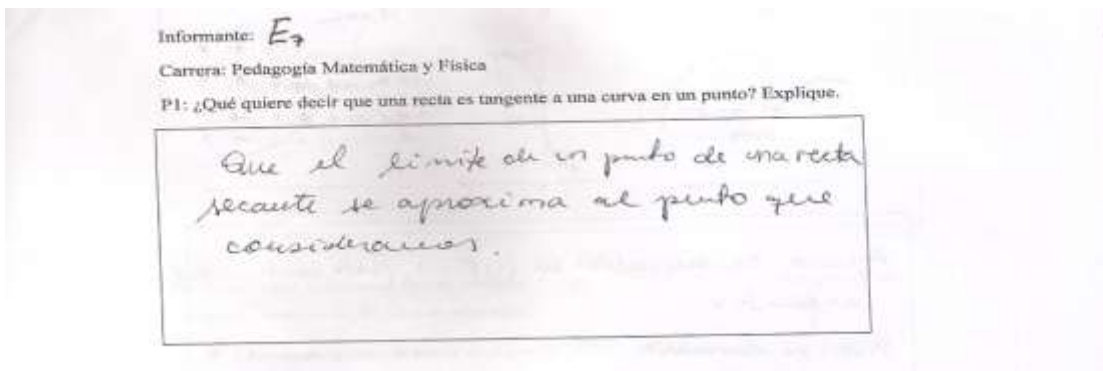


Fig. 4.2 respuesta E<sub>7</sub>

#### 4.2 Pregunta N°2

Con sus propias palabras explique el concepto derivada desde un enfoque geométrico.

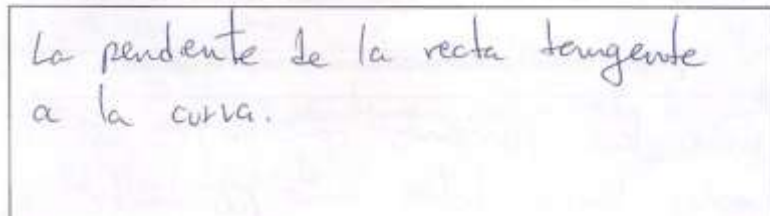
Tabla N°2. Resumen de resultados referidos a la pregunta N° 2

ESTUDIANTES	MODOS DE PENSAMIENTO		
	SG	AA	AE
E <sub>1</sub> , E <sub>2</sub> , E <sub>3</sub> , E <sub>4</sub> , E <sub>5</sub> , E <sub>6</sub>	x	-	-

Los estudiantes señalados en la tabla resumen N°2 entregan respuestas respecto del concepto derivada en forma escrita y a través de una gráfica que complementa su explicación desde la interpretación pendiente de la recta tangente; lo que evidencia algún tipo de pensamiento Sintético Geométrico en la comprensión de derivada. Los estudiantes no presentan evidencias de pensamientos AA, ni AE, sin embargo E<sub>7</sub> definitivamente no responde.

Ejemplo de respuesta de los estudiantes.

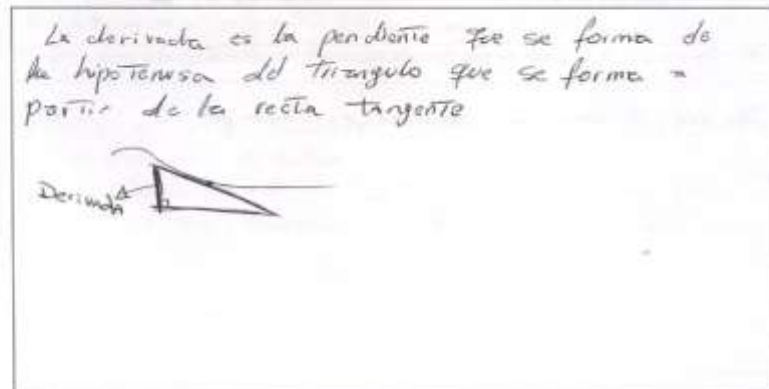
P2: Con sus propias palabras defina el concepto derivada desde un enfoque geométrico.



La pendiente de la recta tangente a la curva.

Fig.4.3 respuesta E<sub>2</sub>

P2: Con sus propias palabras defina el concepto derivada desde un enfoque geométrico.



La derivada es la pendiente que se forma de la hipotenusa del triángulo que se forma a partir de la recta tangente

Derivada

Fig.4.4 respuesta E<sub>5</sub>

### 4.3 Pregunta N°3

P3: Las siguientes graficas son o no derivables en  $(c; f(c))$ ; justifique su respuesta

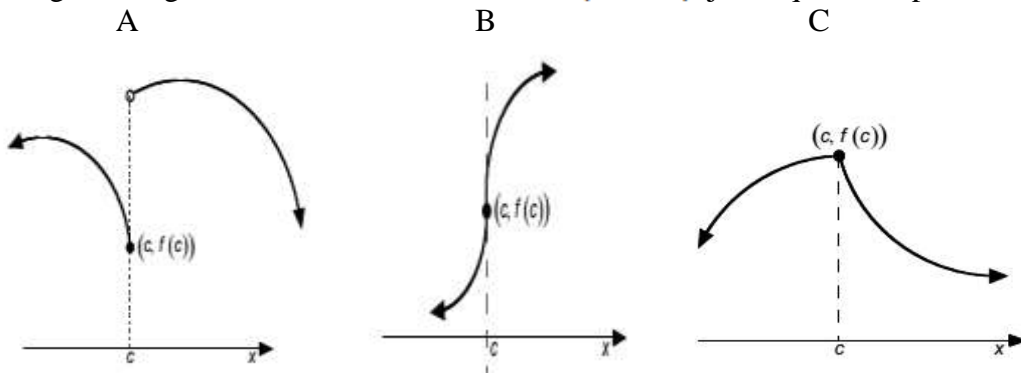


Tabla N°3. Resumen de resultados referidos a la pregunta N° 3

ESTUDIANTES	MODOS DE PENSAMIENTO		
	SG	AA	AE
E <sub>1</sub> , E <sub>3</sub> , E <sub>4</sub> , E <sub>5</sub> , E <sub>7</sub>	x	-	-
E <sub>2</sub> , E <sub>3</sub> , E <sub>6</sub>	-	x	-

Las gráficas A, B y C no poseen derivada. De acuerdo a la resolución en 3.4. E<sub>1</sub> responde sólo que A no es derivable pues la curva es discontinua en el punto, lo que demuestra un desconocimiento de propiedades de la derivada en un punto de la curva independiente de la continuidad de la curva, pues la función puede ser continua en  $(c, f(c))$  pero no necesariamente es derivable, en los ejemplos las gráficas B y C son continuas sin embargo se observa que una tiene tangente vertical y la otra el punto referido es angular; ambos casos de no derivabilidad que se pueden mostrar aplicando límites; lo que evidenciaría un pensamiento AA en el estudiante si este resuelve para un punto determinado. E<sub>2</sub> contesta enunciando sus respuestas sin justificar, errando en la función B. E<sub>3</sub>, E<sub>4</sub>, E<sub>5</sub>, E<sub>7</sub> también arguyen motivos de continuidad de la función activando pensamiento SG, los estudiantes responden directamente que sí son derivables B y C según la continuidad de sus gráficas, no así la A, en ambas las respuestas son incorrectas. E<sub>6</sub> explica la derivabilidad en A y C

por acercamientos sucesivos por izquierda y derecha determinado que sus pendientes son distintas por tanto no poseen derivada, en la función B concluye erróneamente que la función tiene derivada porque las pendientes son iguales. De lo anterior se puede inferir que E<sub>6</sub> tiende al pensamiento AA aunque equivocado trata de contestar bajo esa forma de pensar; no adhiriendo a un pensamiento AE toda vez que podían aplicar propiedades de la derivada (Continuidad, pendiente vertical, punto anguloso).

Ejemplos de respuestas de los estudiantes.

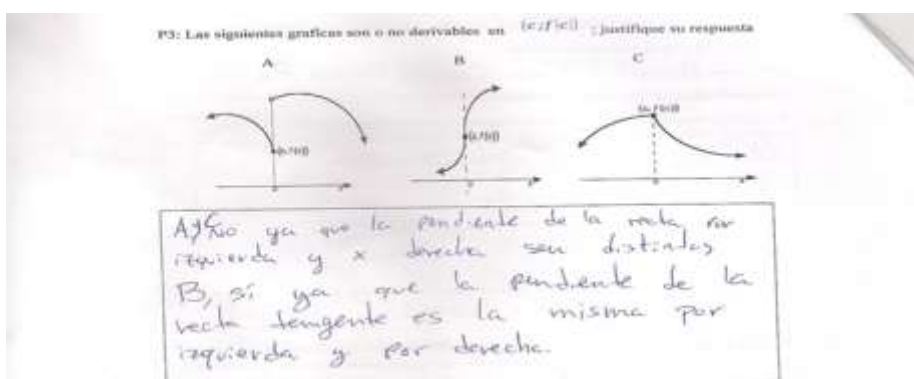


Fig.4.6 respuesta E<sub>6</sub>

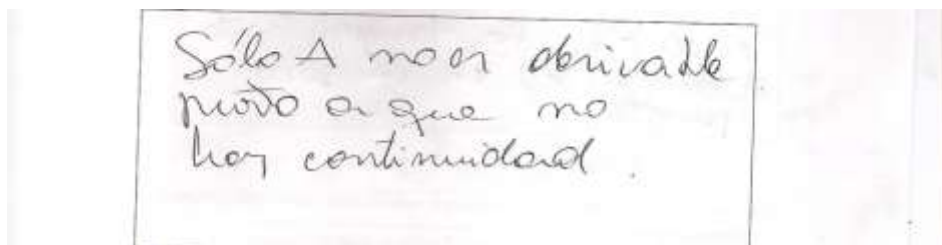


Fig.4.7 respuesta E<sub>1</sub>

#### 4.4 Pregunta N° 4

P4: Explica por qué la derivada de una función constante siempre es igual a cero

Tabla N° 4. Resumen de resultados referidos a la pregunta N° 4

ESTUDIANTES	MODOS DE PENSAMIENTO		
	SG	AA	AE
E <sub>2</sub> ,E <sub>3</sub> ,E <sub>4</sub>	x	-	-
E <sub>6</sub>	x	x	-
E <sub>1</sub> ,E <sub>5</sub> ,E <sub>7</sub>	-	x	-

Los informantes explican en forma escrita, sin recurrir a gráficas, sin embargo evidencian presencia de pensamiento SG. E<sub>7</sub>, E<sub>5</sub>, E<sub>1</sub> responden que la variación vertical es siempre cero no haciendo alusión a la recta tangente o a la pendiente de la “función constante”. Se constata que los estudiantes argumentan según el pensamiento AA esto es por ejemplo aplicar la definición de derivada por medio del límite, Por su parte E<sub>6</sub> realiza un dibujo mostrando un pensamiento SG (fig. 4.8)

Ejemplo de respuesta de estudiante.

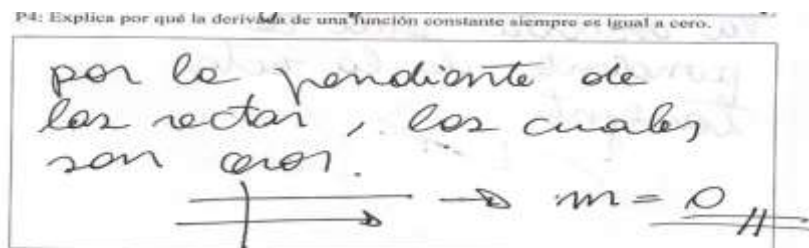


Fig.4.8 respuesta E<sub>6</sub>

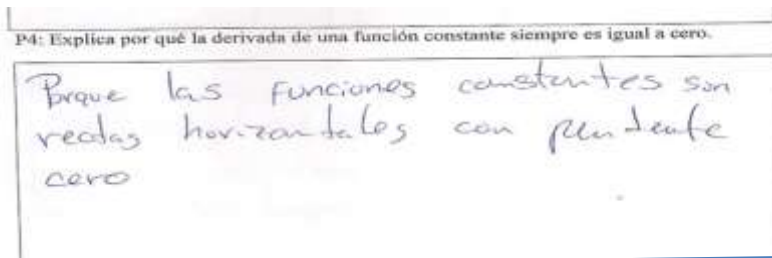


Fig.4.9 respuesta E<sub>2</sub>

#### 4.5 Pregunta N° 5

P5: Calcula la pendiente de la recta secante en función de  $a$  y  $h$ .

No hubo respuesta de los participantes. Según plantearon en el cuestionario no se entendió la pregunta. Los estudiantes al no existir mayor información por ejemplo que *a es la abscisa y h el diferencial* o haberles entregado una gráfica explicativa, lo que en este caso sería dirigir el tipo de pensamiento. Por lo anterior no se le entregó más información. Sin embargo estudiantes de curso superior universitario debieron reconocer los signos  $a$  y  $h$ .

#### 4.6 Pregunta N° 6

P6: Se sabe que la derivada de una función  $f$  en  $x = 2$  es  $f'(2) = 0$ . Indica cuál de las afirmaciones es cierta. Explica tu respuesta:

- a) La recta tangente a la curva en el punto  $x = 2$ ; es horizontal.
- b) La función pasa por el punto (2; 0)

Tabla N°5. Resumen de resultados referidos a la pregunta N°6

ESTUDIANTES	MODOS DE PENSAMIENTO		
	SG	AA	AE
E <sub>1</sub> , E <sub>4</sub> , E <sub>7</sub>	-	-	-
E <sub>2</sub> , E <sub>3</sub>	-	x	-

E <sub>5</sub>	-	x	x
E <sub>6</sub>		x	

El informante E<sub>1</sub>, responde que las afirmaciones son ciertas sin argumentar, E<sub>2</sub> contesta correctamente las afirmaciones en ambos casos sus respuestas se advierte pensamiento AA, toda vez que recurre al análisis de las pendientes en el caso de la afirmación a) y a evaluar la función  $f(2) \neq 0$  en el caso de la afirmación b). E<sub>3</sub> sólo insinúa una respuesta verbalizando una definición en pensamiento AA para a) no contestando la afirmación b). E<sub>4</sub> responde con verdadero en ambos casos, sin dar explicaciones del porqué de sus respuestas, el informante E<sub>5</sub> contesta de manera correcta ambas afirmaciones; en a) se evidencia pensamiento AE dado que determina una posible  $f$  para  $f'$ , luego evalúa para un punto del dominio de la función derivada ( $x = 2$ ) y utilizando a) responde la afirmación b) esto es pensamiento AA al evaluar la función encontrada para  $x = 2$ , determina  $y = -2$  lo que contradice la afirmación. E<sub>6</sub> responde de manera correcta la afirmación a) no así la b) en la primera aplica la propiedad de la recta horizontal con pendiente cero lo que corresponde con argumentos de la interpretación geométrica de la derivada; en pensamiento del tipo AA dado que el estudiante evalúa  $m = 0$  y concluye que ésta es la derivada. E<sub>7</sub> contesta sólo por la validez de las afirmaciones sin dar explicaciones.

Ejemplo de respuestas de estudiantes.

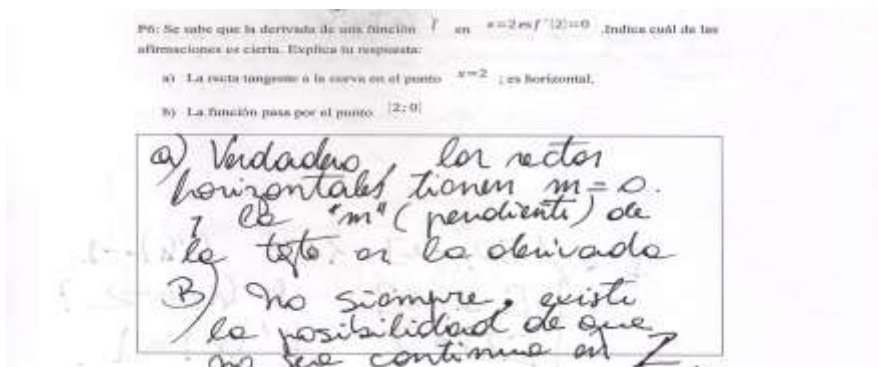


Fig.4.10 respuesta E<sub>6</sub>

la función  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$  corresponde  
 a la función indicada pues  $f'(x) = x - 2$   
 $\Rightarrow f'(2) = 0 //$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$   
 $f' = x - 2$

A partir de esto tenemos si  $x=2$  entonces  $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 4 - 2 \cdot 2$   
 por lo que b) es falsa.  
 $= 2 - 4 = -2$

Como cuando  $x=2 \Rightarrow y=-2$  este punto no puede  
 tener una tang. horizontal o si no cortaría en dos  
 puntos.

Fig.4.11 respuesta E<sub>5</sub>

#### 4.7 Pregunta N° 7

P7: La característica de una carretera viene dada en un tramo de montaña por la función  $f(x) = \sqrt{x}$ . ¿Qué señal de tráfico habrá que poner en  $x=20$ , estando  $x$  medido en metros?

Tabla N° 6. Resumen de resultados referidos a la pregunta N° 7

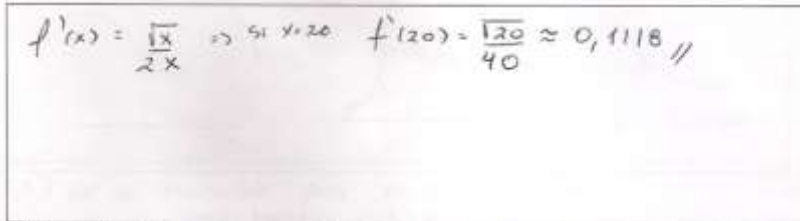
ESTUDIANTES	MODOS DE PENSAMIENTO		
	SG	AA	AE
E <sub>1</sub> ,E <sub>3</sub> ,E <sub>6</sub>	x	-	-
E <sub>2</sub> ,E <sub>5</sub>	-	x	x

E<sub>1</sub> realiza una gráfica de la función lo que avizora presencia de pensamiento SG sin embargo no es capaz de conectar ésta con la pendiente por tanto con la derivada; no entregando una solución clara al contexto del problema. E<sub>2</sub> obtiene la derivada de  $f$  lo que evidencia pensamiento AE para luego establecer relación con la pendiente de la recta a la curva en el km 20 lo que significa pensamiento AA. E<sub>3</sub> dibuja la situación pensamiento SG, sin embargo no responde al problema. E<sub>4</sub> definitivamente no responde al problema. E<sub>5</sub> determina la función derivada de la función raíz cuadrada y evalúa para  $x = 20$ ,

obteniendo el resultado esperado se evidencia activación de los pensamiento AA y AE; sin embargo no especifica la señalética de tránsito a ubicar en el lugar. El informante E<sub>6</sub> (Fig.4.12) realiza un gráfico aproximado de la función, activación del pensamiento SG; sin dar respuesta al problema planteado dado que no asocia lo pedido en el problema con la pendiente en un punto de la curva; esto es con la derivada. E<sub>7</sub> no responde correctamente. De lo anterior se observa un insipiente pensamiento del tipo SG en los estudiantes E<sub>1</sub>, E<sub>3</sub>, E<sub>6</sub> dadas las grafica de función pero no son capaces de relacionar la misma con el problema planteado esto es, la pendiente de la recta a la curva en el punto; que se sintetiza en la derivada de la función. Con respecto al estudiante E<sub>2</sub> su pensamiento se sitúa entre AA y AE aplica reglas de derivación a la función obteniendo la función derivada pero no se devuelve al AA para evaluar la función derivada en el punto  $x = 0$  ; por el contrario quien sí lo hace es el informante E<sub>5</sub> (Fig.4.13)

Ejemplos de respuestas de estudiantes.

P7: La característica de una carretera viene dada en un tramo de montaña por la función  $f(x) = \sqrt{x}$ . ¿Qué señal de tráfico habrá que poner en  $x = 20$ , estando  $x$  medido en metros?



$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \text{si } x=20 \quad f'(20) = \frac{\sqrt{20}}{40} \approx 0,1118 //$$

Fig.4.12 respuesta E<sub>5</sub>

P7: La característica de una carretera viene dada en un tramo de montaña por la función  $f(x) = \sqrt{x}$ . ¿Qué señal de tráfico habrá que poner en  $x = 20$ , estando  $x$  medido en metros?

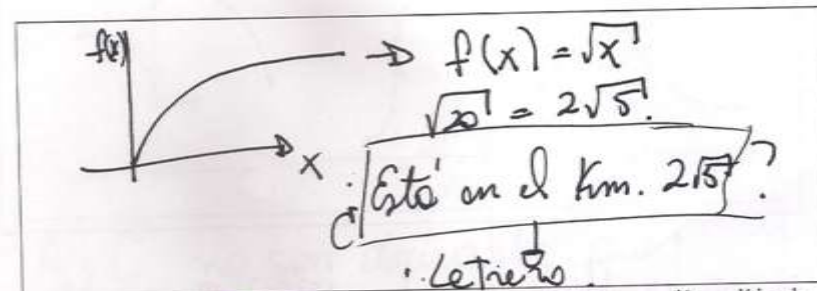
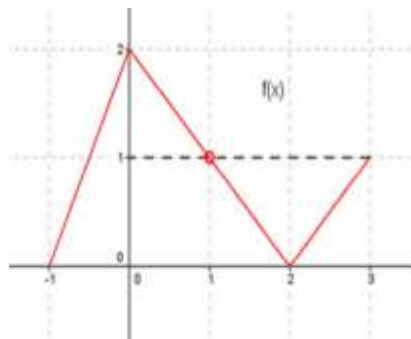


Fig.4.13 respuesta E<sub>6</sub>

#### 4.8 Pregunta N° 8

P8: Recordando el concepto geométrico de derivada y sin calcular la expresión analítica de  $f(x)$ , obten la representación grafica de  $f'(x)$ , siendo la gráfica de  $f(x)$  la siguiente:



en  $x = 1$ ;  $f(x)$  no está definida

Tabla N°7. Resumen de resultados referidos a la pregunta N° 8

ESTUDIANTES	MODOS DE PENSAMIENTO		
	SG	AA	AE
E <sub>3</sub> , E <sub>6</sub>	-	x	-
E <sub>2</sub>	x	x	-

Los informantes E<sub>1</sub>, E<sub>4</sub>, E<sub>5</sub>, E<sub>7</sub> no responden la pregunta evidenciando por un lado debilidad en la comprensión de la gráfica de la función derivada. E<sub>3</sub>, E<sub>6</sub> lo hacen analíticamente activando el pensamiento AA y no obtienen la gráfica de la función derivada lo que se debe responder. E<sub>2</sub> es el informante que responde de acuerdo a los requerimientos del problema N°8; con presencia de los pensamiento SG es decir el estudiante grafica la función derivada, pero no con exactitud a raíz de su análisis por tramos de la función con la presencia del pensamiento AA. Recordemos que la gráfica de la función derivada muestra las pendientes de la función original. La pregunta ciertamente estaba dirigida para activar el pensamiento SG y AA; lo que sólo el informante E<sub>2</sub> logra (Fig.4.14), y los E<sub>3</sub> y E<sub>6</sub> el pensamiento AA.

Ejemplo de respuesta estudiante.

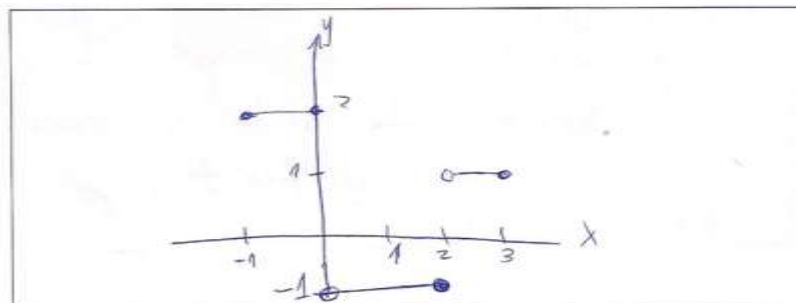


Fig.4.14 respuesta E<sub>2</sub>

$$f = \begin{cases} [0, -2] & f'(x) = -1 \\ [-1, 0] & f'(x) = -2? \\ [2, 3] & f'(x) = 1. \end{cases}$$

Fig.4.15 respuesta E<sub>6</sub>

#### 4.9 Pregunta N° 9

P9: Dada la función  $f(x) = x^2 - 8x + 1$  ; ¿existe algún punto de la curva con tangente paralela a la recta  $y = 1$ ?

Tabla N°8. Resumen de resultados referidos a la pregunta N° 9

ESTUDIANTES	MODOS DE PENSAMIENTO		
	SG	AA	AE
E <sub>1</sub> ,E <sub>4</sub> ,E <sub>5</sub> ,E <sub>7</sub>	x	-	-
E <sub>2</sub> ,E <sub>6</sub>	-	x	x

El informante E<sub>1</sub> y E<sub>7</sub> (Fig.4.16 ) responden de acuerdo a un tipo de pensamiento que se inscribe en el SG dado que muestran gráficamente, así como también E<sub>4</sub> y E<sub>5</sub> en tanto verbalizan una respuesta en el pensamiento SG sin embargo sus respuestas no especifican el punto de la función donde la recta tiene  $m = 0$  y es paralela a  $y = 1$ , lo que implicaría un tránsito al pensamiento AA. E<sub>2</sub> y E<sub>6</sub> (Fig.4.17 ) resuelven de acuerdo al pensamiento AE obteniendo la función derivada a través de una regla de derivación; así determina el punto en que la recta tangente a la curva es paralela a  $y = 1$ , activando el pensamiento AA. E<sub>3</sub> no responde correctamente igualando  $f(x) = 1$  , pues hace inferencias equivocadas. E<sub>4</sub> intenta dar solución a través del pensamiento SG; pero no es convincente en su respuesta. E<sub>5</sub> responde verbalmente e incorrectamente de acuerdo al pensamiento SG.

Ejemplo de respuestas estudiantas.

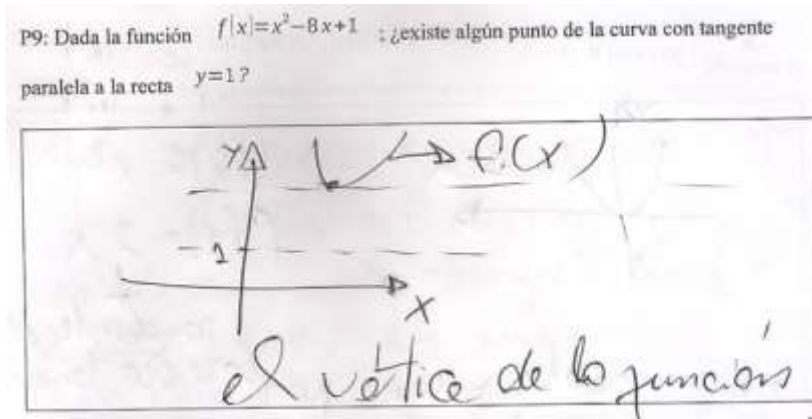


Fig.4.16 respuesta E<sub>1</sub>

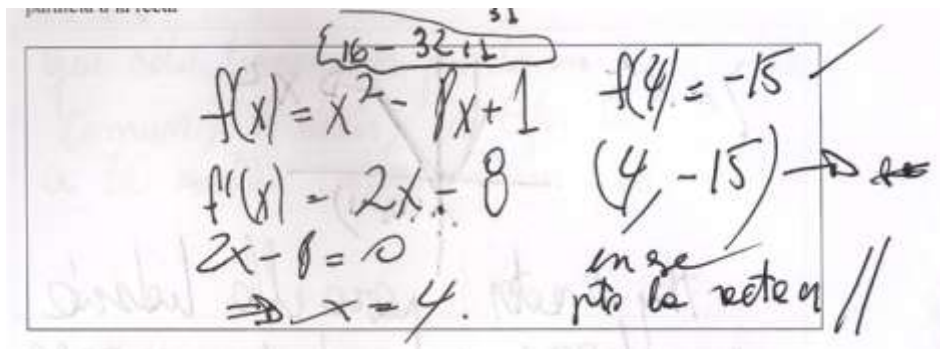


Fig.4.17 respuesta E<sub>2</sub>

4.10 Pregunta N°10

P10: Calcular la derivada (por definición)  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$  ; y como aplicación estudiar  $f'(0)$ .

Tabla N° 9. Resumen de resultados referidos a la pregunta N° 10

ESTUDIANTES	MODOS DE PENSAMIENTO		
	SG	AA	AE
E <sub>1</sub> , E <sub>2</sub> E <sub>3</sub> , E <sub>4</sub> , E <sub>6</sub> , E <sub>7</sub>		x	

Es preciso señalar que ninguno responde la pregunta de acuerdo a las condiciones exigidas, sin embargo se puede evidenciar cierto pensamiento AA en todos los estudiantes. Ninguno graficó la función para que en consecuencia se explicitara el pensamiento SG.

Ejemplo respuesta de estudiante.

P10: Calcular la derivada (por definición)  $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$  ; y como aplicación estudiar  $f'(0)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \dots \text{ no se como seguir}$$

Fig. 4.18 Respuesta E<sub>2</sub>

#### 4.11 Pregunta N°11

P11: Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la función  $y = x^2$  ; que pasen por el punto  $(0, -1)$ .

Tabla N° 10. Resumen de resultados referidos a la pregunta N° 11

ESTUDIANTES	MODOS DE PENSAMIENTO		
	SG	AA	AE
E <sub>1</sub> , E <sub>7</sub>	x	-	x
E <sub>2</sub>	-	x	-

E <sub>3</sub>	x	-	x
E <sub>4</sub>	-	-	x
E <sub>5</sub> ,E <sub>6</sub>	x	-	-

Al solicitar en la pregunta que determinen las rectas tangentes a la función, se les induce a los estudiantes en activar el pensamiento AA; toda vez que se precisa recordar la estructura de la ecuación de la recta que pasa por un punto y su pendiente. Sin embargo pueden activar por sí solos el SG, para dar así una respuesta intuitiva a tal problema. En este sentido E<sub>1</sub> grafica aproximadamente la función, obtiene la derivada con uso de regla pensamiento AE y concluye erróneamente que el eje x es la recta tangente. E<sub>2</sub> (fig.4.19) resuelve por medio de la pendiente funcional para luego evaluarla en el punto dado; que en efecto pertenece a la recta tangente solicitada. El estudiante deja ver el tipo de pensamiento AA en su cometido. E<sub>3</sub> atisba una solución dentro del pensamiento SG, determina la derivada por regla, pensamiento AE e induce a un posible procedimiento para dar su respuesta. E<sub>4</sub> no responde cabalmente y se limita a derivar la función activa pensamiento AE. E<sub>5</sub> (fig.4.20) y E<sub>6</sub> responden gráficamente por tanto en pensamiento SG; no determinan las ecuaciones lo que implica el tránsito necesario al pensamiento AA que se espera el estudiante active. Es necesario consignar que los estudiante determinan gráficamente la recta tangente con pendiente infinita; como una tercera recta tangente a la función. E<sub>7</sub> determina la función pendiente AE, evalúa en  $x = 0$ , AA y concluye que la pendiente es cero y la recta tangente es el eje  $x$  que es una solución equivocada. Es necesario consignar que E<sub>7</sub> presenta una confusión grave al asociar la recta tangente con la derivada cuestión que es común según estudios al respecto.

Ejemplo de respuesta de estudiantes

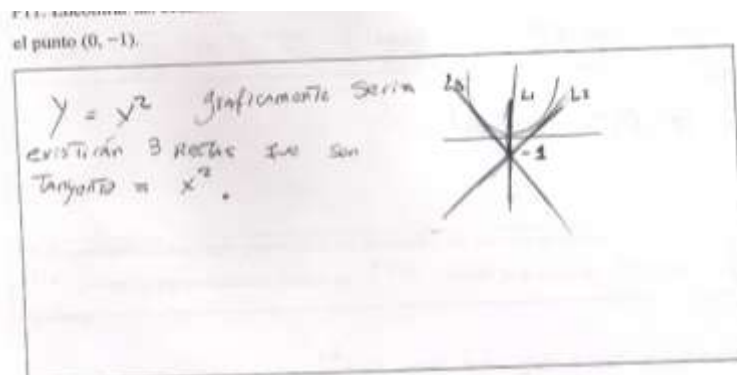


Fig.4.19 respuesta E<sub>5</sub>

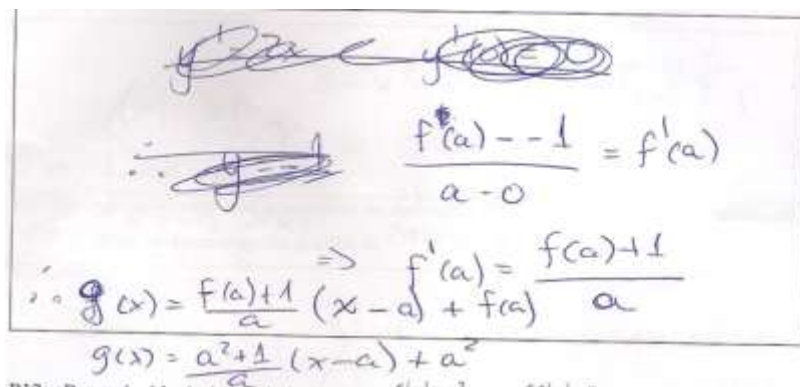


Fig.4.20 respuesta E<sub>2</sub>

4.12 Pregunta N°12

P12: ¿Por qué, si la derivada de la función  $f(x) = x^2$  es  $f'(x) = 2x$ , cuando construimos la graficas correspondientes la recta no resulta ser tangente a la parábola en ningún punto? Explica.

Tabla N° 11. Resumen de resultados referidos a la pregunta N° 12

ESTUDIANTES	MODOS DE PENSAMIENTO		
	SG	AA	AE
E <sub>1</sub> ,E <sub>4</sub> ,E <sub>5</sub> ,E <sub>6</sub> ,E <sub>7</sub>	x	-	-
E <sub>2</sub>	x		x
E <sub>3</sub>			x

Los estudiantes deberán resolver de acuerdo a la comprensión que del concepto de derivada poseen. E<sub>1</sub>, E<sub>5</sub>, E<sub>6</sub>, E<sub>7</sub> argumentan o no con un dibujo esgrimiendo que la derivada de la función es una recta secante pensamiento SG. E<sub>2</sub> verbaliza una respuesta de forma correcta desde un pensamiento SG pasando al AE. E<sub>4</sub> realiza un dibujo de una parábola no siendo la función de la pregunta. E<sub>5</sub> responden que la recta es secante

... ¿Por qué? Si la derivada de la función  $f(x) = x^2$  es  $f'(x) = 2x$  cuando construimos las gráficas correspondientes la recta no resulta ser tangente a la parábola en ningún punto? Explica.

Porque la grafica de la derivada no grafica las rectas tangentes, grafica los valores numericos de las pendientes de las rectas tangentes.

Fig. 4.21 respuesta de E<sub>2</sub>

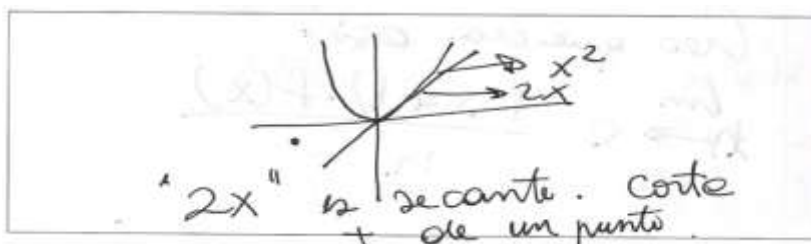


Fig.4.22 respuesta de E<sub>6</sub>

## CAPITULO V

### 5.1 Conclusiones y reflexiones.

El presente trabajo fue pensado e implementado para dar cuenta del tipo de pensamiento en el sentido de Sierpinska (2000), que siete estudiantes de educación superior de la carrera de Pedagogía en Matemática y Física, activan al momento de resolver un cuestionario en torno al concepto y aplicación de la derivada. Para dicho objetivo se planteó, caracterizar de acuerdo al marco teórico sustentado por Sierpinska los distintos modos de pensamiento que se deben activar en un individuo en la comprensión de la derivada. La presente investigación adopta este marco con toda la dificultad que significa aplicar un constructo teórico creado en sus inicios para objetos matemáticos del álgebra lineal, cuya formulación señala que un estudiante tendrá una mejor comprensión de un concepto si es capaz de activar tres modos de pensamiento SG, AA y AE en el momento de aprehender dicho concepto. Dentro de otras dificultades se pueden establecer aquellas presentes en los antecedentes, el enfoque en el tratamiento que se da a la derivada desde los currículos y en los libros de textos, y que en definitiva determinan la enseñanza del concepto; por tanto su aprendizaje.

Las evidencias aportadas en la resolución del cuestionario, permiten concluir que no existe comprensión profunda de la derivada, no obstante hay indicios de movilización de distintos modos de pensamiento.

La investigación se abordó desde la metodología cualitativa y su método el estudio de caso. La información de análisis y que sirve para obtener algunas conclusiones fue extraída a través de un cuestionario de 12 preguntas referidas al concepto derivada, todas ellas desde la interpretación geométrica de la misma; esto es desde la pendiente de la recta tangente a una curva, noción trabajada por Leibniz.

Estando en esta investigación de acuerdo con Pinto (2014) que señala:

Es un tanto paradójico que siendo la concepción de tangencia el problema fundamental que origina desde la historia el concepto de derivada, en los programas de estudio no es abordado el tema de la tangencia a una curva en un punto dado. Se considera un concepto sabido por los estudiantes.

Es por ello se sugiere que el tratamiento de la derivada, sea en torno a la interpretación geométrica, dado que al dotar de historicidad – epistemológica al concepto, permitirá a su vez dotar de significado a la derivada. Por lo que la propuesta de tesis es que se trate la derivada primero desde un enfoque geométrico y luego sus aplicaciones físicas, económicas, biológicas, etc.

Los resultados del análisis de la información recogida desde el instrumento cuestionario y que se presentan en detalle en el capítulo IV nos muestran que los estudiantes que conforman el caso de la investigación no han abandonado la noción Euclidiana de la recta tangente a una curva, pregunta N°1 del cuestionario necesaria para activar el pensamiento SG. Cabe señalar que ésta condición es evidenciada en investigaciones anteriores y que son parte de los antecedentes en ésta tesis; y que aún hoy no se ha podido superar de acuerdo a las evidencias presentadas en esta y otras investigaciones citadas. También se hace notoria la dificultad de los estudiantes en diferenciar  $f'(a)$  y  $f'(x)$ , paso necesario para transitar los modos SG y AA sugeridos en este trabajo y que son parte de la pregunta N°11 del cuestionario. Los resultados que emanan de la pregunta N°10 profundizan más las dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión de la derivada desde su definición formal, ninguno de ellos responde la pregunta. El problema permitía activar los tres modos de pensar SG, AA y AE cuando se le pide que determine la derivada por definición usando límite se aprecia falta de conocimiento de propiedades y manejo algebraico, nadie aventuro una gráfica de la situación y por tanto tampoco se observó el proceso de evaluar la función derivada para el cierre del problema. Como se señala en el análisis de la pregunta N°10 la función en cuestión  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ; obviamente era más

sencillo aplicar reglas de derivación para determinar su derivada, lo que también es evidenciable por otros estudios que son parte de los antecedentes de esta investigación que señalan "...los estudiantes están más familiarizados con procesos mecánicos y rutinarios en la resolución de problemas...". Por lo anterior y de acuerdo a investigaciones los estudiantes parecen inclinados a reproducir las reglas de derivación y por ende pierden incluso manejo algebraico en este empeño. Respecto al tránsito entre los modos de pensamiento condición necesaria para la mejor comprensión según la autora del marco teórico se señaló la pregunta N°11; pero en la pregunta N°9 también es posible el tránsito entre SG a AA y AE; sin embargo hubo paso entre AA y AE en los estudiantes E<sub>2</sub> y E<sub>6</sub>. Es de importancia señalar que el estudiante E<sub>7</sub> en particular confunde la recta tangente con la derivada observación detectada en la pregunta N°12 del cuestionario; será preciso profundizar en los programas de estudios en este sentido. El presente trabajo sugiere que en lo posible se tengan presentes intencionadamente los Modos de Pensamiento en el proceso enseñanza–aprendizaje.

## REFERENCIAS

- Apóstol, T., *Calculo*, (2001), Reverté 2da Edición, vol. 2 pág.196
- Alarcón, S. (2005). El método de las tangentes de Fermat .*Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, vol. XIII, núm. 2, pp. 101-123
- Barceló, B .El descubrimiento del cálculo (s.f.) Recuperado el 8 de septiembre 2015  
[https://www.uam.es/personal\\_pdi/ciencias/barcelo/.../calculo.pdf](https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/.../calculo.pdf)
- Barrera, J. (2002). *La construcción de la derivada a través de la noción de variación en estudiantes de Nivel Superior*. Acta Latinoamericana Vol.15, Universidad Autónoma del Estado de Herrero, México.
- Benedicto, C. (2012). *Estudio de funciones con geogebra*. Tesis de maestría no publicada, Universitat de València, España.
- Bombal, F. (2010). Rigor y Demostración en Matemáticas.  
*Revista Real Academia Ciencias Exactas Físicas y Naturales*. Vol. 104, Nº. 1, Pág. 61-79
- Badillo, E., Azcárate, C., Moreno, M., García, L., (2011) *Historia y aplicaciones de la derivada en las ciencias económicas: Consideraciones didácticas Economía*. Recuperado 7 octubre, 2015 de:  
<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=195621325006>.
- Blanco, De las Heras, Fuenzalida y Riveros (1995).*Matemática Educación Media* (pp.238-291), Santillana del Pacifico S.A. Chile.
- Bobadilla, G. (s.f.) Programa Asignatura Calculo I, Departamento Matemática y Ciencias de la Computación, U de Santiago. Chile
- Canul, Dolores, Martínez-Sierra, (2011) *De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática*.  
*Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol.14 Nº.2
- Castañeda, (2004) .Construcción de la recta tangente variacional a través de los usos del conocimiento del siglo XVII y XVIII., *Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada*, México.
- Contreras, L. (2011) *El fracaso de estudiantes de primeros años de carrera universitaria y*

*las matemáticas ¿hay algo que decir? ”. U. Federico Santa María. Chile*

- Challita, D. (2013) *Providing College Level calculus Students with Opportunities to Engage in Theoretical Thinking*. Tesis de maestría no publicada, Canadá.
- Dolores, C. (1996). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el Bachillerato*. Tesis de doctorado no publicada, Instituto Pedagógico Enrique José Varona. Cuba
- Dolores, C. (2000) *El futuro del cálculo infinitesimal. Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada*. Centro de investigación en matemática educativa. Capítulo V, pp. 155-181: -8, España.
- Estrella, S., Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Vivier, L. (2014). *El trabajo matemático en el análisis: una aproximación a los ETM en Francia y Chile*. Cuarto Simposio Internacional, Universidad Complutense de Madrid.
- Flores, R. Valencia, M. Dávila, G. García, M (2008). *Fundamentos del cálculo*. Proyecto Fondos Mixtos. México.
- Flores, W. Salinas, M. (2013) *Metodología de la enseñanza de la derivada*. Ciencia e Interculturalidad, Vol. 12, año 12, N°1. pág. 39-49, Nicaragua.
- García, M., Dolores, C., (2012) *Una propuesta para contribuir a la comprensión de la derivada*. Centro de investigación educativa, Universidad Autónoma de Guerrero, Cap.2 (pp. 385-393), México.
- Gutiérrez, L., Valdivé, C., (2012) *Una descomposición Genética del concepto Derivada*. Gestión y Gerencia, Vol. 6, N° (3), (pp.104-122), Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Venezuela.
- González, P. *Orígenes y evolución histórica del cálculo infinitesimal*. Recuperado octubre 2015. [pgonzale@pie.xtec.es](mailto:pgonzale@pie.xtec.es)
- Hernández, R.; Fernández, C.; Baptista. P. (2006) *Metodología de la Investigación*. M<sup>c</sup> Graw Hill. Tercera parte el proceso de la investigación cualitativa.
- Ímaz, C., Moreno, L., (2009), *Sobre el Desarrollo del Cálculo y su Enseñanza*, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada-JPN, México.
- Jiménez, J. (2003), *La naturaleza Global y Dinámica de la Derivada como Objeto*

- Matemático y de Enseñanza*. Mosaicos Matemáticos No. 11 (pp. 95-101)  
Departamento de Matemáticas .Universidad de Sonora.
- Larson, R., Hostetler, R. & Edwards, B. (1997). Cálculo y geometría analítica.  
McGraw Hill. España.
  - Lithner, J. (2004). *Razonamiento matemático en los ejercicios del libro de texto de cálculo*. Comisión de Estudio de Comportamiento Matemático, Proyecto Madison, Elsevier, Estados Unidos.
  - López de Aguílaz, I. (2014) *.Introducción a la derivada una propuesta didáctica para Bachillerato*. Tesis de maestría no publicada, España
  - Matamoros, G. García, M. Llinares, S. (2008).*La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática*. Revista Latinoamericana de Investigación Educativa 11(2): 267-296
  - Ministerio de Educación (MINEDUC) 2009. Ley General de Educación. Chile.
  - Miranda, E., (2004) *.Generación de modelos de enseñanza – aprendizaje en el álgebra lineal Primera Fase: Transformaciones Lineales*. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente. México. (pp. 397-403).
  - Montoya, E. Vivier, L. (2015). *ETM de la noción de tangente en un ámbito gráfico. Cambio de dominio y punto de vista*. XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática. México
  - Ortega, L., Guzmán, I., Mena, A. (s.f). *¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?*. Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática, del Instituto de Matemáticas de la Universidad Católica de Valparaíso. Chile.
  - Pastor, R, Babini, J. (1985) Historia de la matemática Vol. 2 del renacimiento a la actualidad. (pp.134-138).Barcelona: Gedisa SA.
  - Pinto, I (2014). *El concepto de derivada desde la teoría Los Modos de Pensamiento sustentada en la epistemología de Cauchy*. Tesis de Magister no publicada Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
  - Pino-Fan, L. Castro, F. Godino, J. Font, V. (2013). *Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato*. Paradigma vol.34 N°2 . Venezuela.
  - Pino, L. (2010). *Faceta epistemológica del conocimiento didáctico-matemático sobre la*

*derivada*. Granada.

- Pino, L., Godino, J. D. y Font, V. (2015). *Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas*. Boletín de Educación Matemática 29(51) ,60-89
- Robles, M. Del Castillo, A. Font, V. (2010). *La función derivada a partir de una visualización de la linealidad local*. Investigación en Educación Matemática, (pp.523-532)
- Robles, M. Del Castillo, A. Font, V. (2012). Análisis y Valoración de un Proceso de Instrucción sobre la Derivada. Revista de Educación Matemática, Vol. 24, Núm. 1
- Sierpinska, A. (2000). *On some aspects of students' thinking in linear algebra*. In J.-L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publishers, (pp. 209 - 246)
- Uicab, R. Asuman, O. (2006) *Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. vol.9 N°.3, México.

## **ANEXOS:**

### **ANEXO 1: Colegios que han incluido en sus Mallas Curriculares el estudio de la Derivada.**

(Fuentes Páginas Web de cada colegio).

SAINT GEORGE'S COLLEGE DIRECCIÓN DE ESTUDIOS

Plan Científico Matemático.

Geometría analítica e introducción al cálculo.

a) Geometría analítica: Recta. Circunferencia. Parábola. Elipse. Hipérbola.

b) Introducción al cálculo. Sucesiones. Límites y continuidad. Derivadas y sus aplicaciones.

INSTITUTO LA SALLE

MATEMÁTICA IV° MEDIO (FORMACIÓN DIFERENCIADA)

Unidad: Límite de funciones

Propiedades de los límites Cálculo de límites. Funciones continuas

Unidad: Derivadas

Derivada: concepto y propiedades Cálculo de derivadas

Resolución de problemas.

## THE NEWLAND SCHOOL



### **Plan diferenciado 1**

#### 1.- Funciones.

- Modelos matemáticos y su análisis.

#### 2.- Procesos infinitos.

- Estructura Conjunto R.
- Sucesiones de números reales.
- Sumatoria.
- Progresiones, geometría, aritmética, armónica.
- Inducción matemática.
- Límite de sucesiones.
- Límite de funciones.
- Continuidad.
- Derivada y su aplicación.

## ANEXO 2: Respuestas al cuestionario por parte de los estudiantes.

Estudiante E<sub>1</sub>

CUESTIONARIO: INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DERIVADA

El cuestionario es de carácter individual:

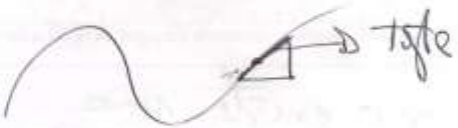
Informante: E<sub>1</sub>

Carrera: Pedagogía Matemática y Física

P1: ¿Qué quiere decir que una recta es tangente a una curva en un punto? Explique.

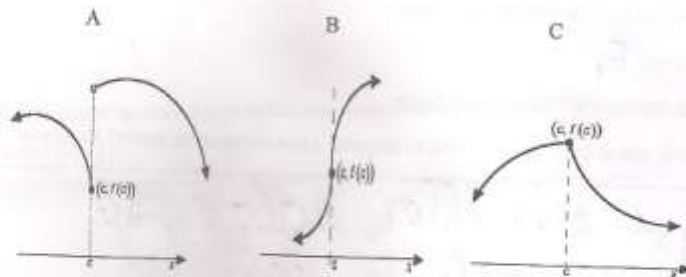
Que ante ella solo existe un punto en común es decir la tangente "corta" a la  $f(x)$  en un solo punto.

P2: Con sus propias palabras defina el concepto derivada desde un enfoque geométrico.



La derivada sería la "pendiente" de la recta tangente.

P3: Las siguientes graficas son o no derivables en  $(c, f(c))$ ; justifique su respuesta

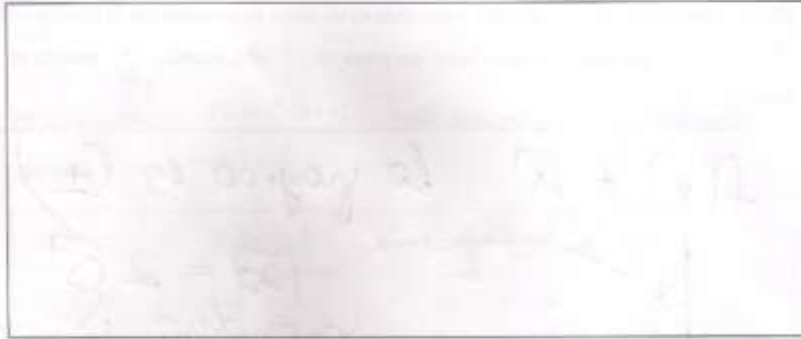


Sólo A no es derivable  
puesto a que no  
hay continuidad.

P4: Explica por qué la derivada de una función constante siempre es igual a cero.

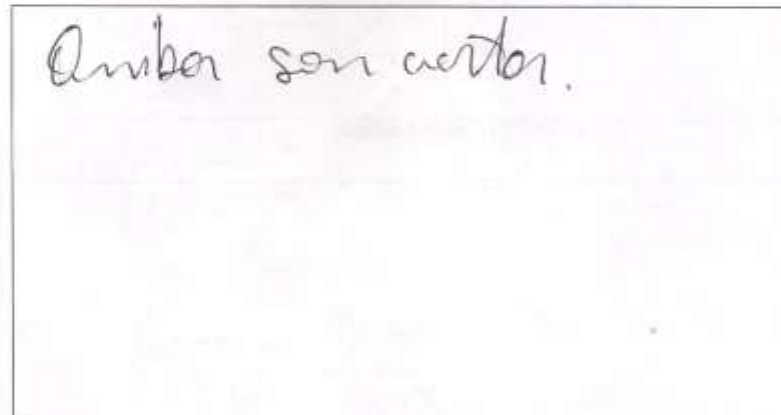
Porque no existe una  
variable independiente.

P5: Calcula la pendiente de la recta secante en función de  $a$  y  $h$ .



P6: Se sabe que la derivada de una función  $f$  en  $x=2$  es  $f'(2)=0$ . Indica cuál de las afirmaciones es cierta. Explica tu respuesta:

- a) La recta tangente a la curva en el punto  $x=2$  ; es horizontal.
- b) La función pasa por el punto  $(2;0)$

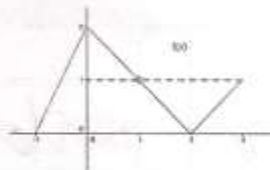


P7: La característica de una carretera viene dada en un tramo de montaña por la función  $f(x) = \sqrt{x}$ . ¿Qué señal de tráfico habrá que poner en  $x = 20$ , estando  $x$  medido en metros?

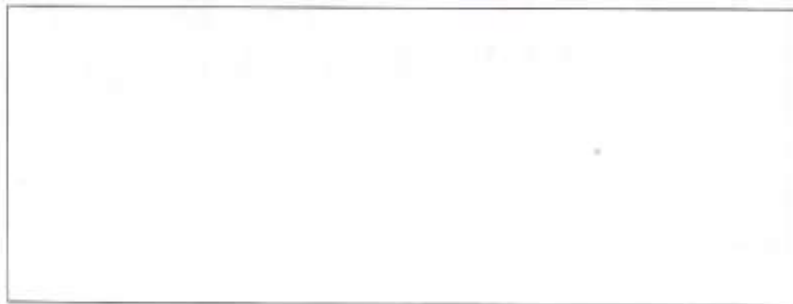
$f(x) = \sqrt{x}$  lo gráfico es  $(\pm)$

$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$   
pendiente el kilometro en el cual se encuentra

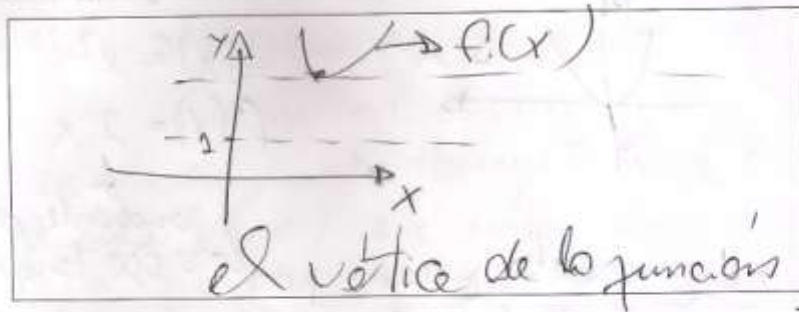
P8: Recordando el concepto geométrico de derivada y sin calcular la expresión analítica de  $f(x)$ , obten la representación gráfica de  $f'(x)$ , siendo la gráfica de  $f(x)$  la siguiente:



en  $x=1$ ;  $f(x)$  no está definida



P9: Dada la función  $f(x) = x^2 - 8x + 1$  ; ¿existe algún punto de la curva con tangente paralela a la recta  $y = 1$ ?

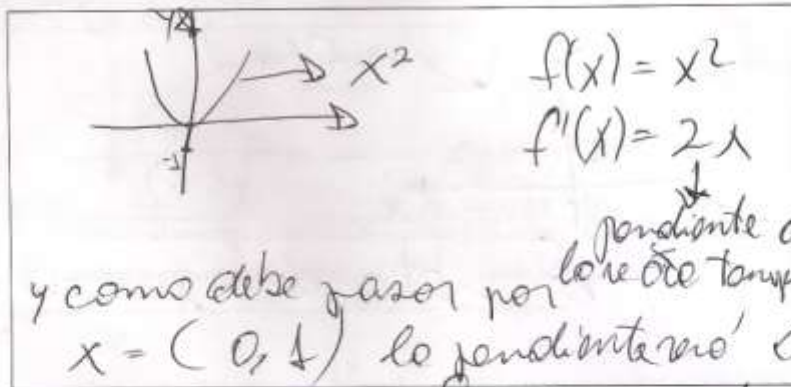


P10: Calcular la derivada (por definición)  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$  ; y como aplicación estudiar

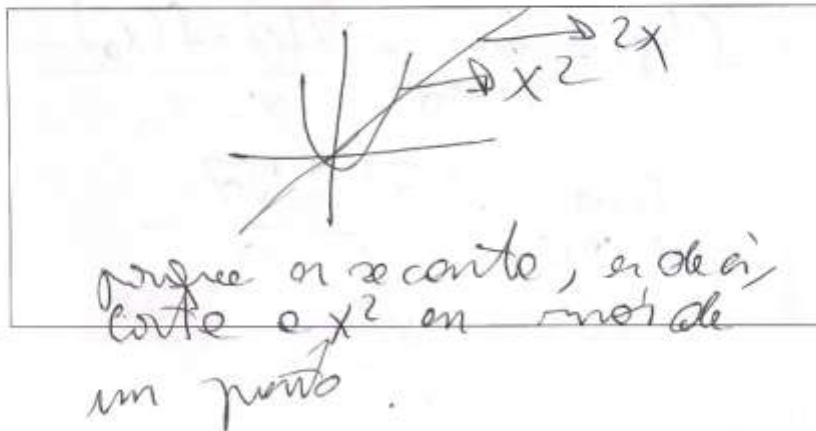
$f'(0)$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{1/3}}{x} = x^{-2/3} = 0 \neq \frac{0}{0}
 \end{aligned}$$

P11: Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la función  $y=x^2$ , que pasen por el punto  $(0, -1)$ .



P12: ¿Por qué, si la derivada de la función  $f(x)=x^2$  es  $f'(x)=2x$ , cuando  $f(x)$  construimos las gráficas correspondientes la recta no resulta ser tangente a la parábola en ningún punto? Explica.



Estudiante E<sub>2</sub>

CUESTIONARIO: INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DERIVADA

El cuestionario es de carácter individual:

Informante: Hombre / 4<sup>o</sup> año Ciencias Exactas E<sub>2</sub>

Carrera: Pedagogía Matemática y Física

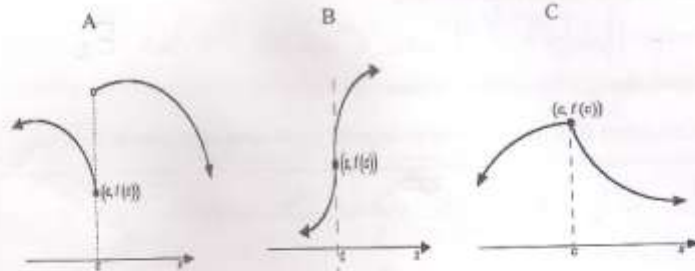
P1: ¿Qué quiere decir que una recta es tangente a una curva en un punto? Explique.

Que sólo tiene un punto en común con la curva.

P2: Con sus propias palabras defina el concepto derivada desde un enfoque geométrico.

La pendiente de la recta tangente a la curva.

P3: Las siguientes graficas son o no derivables en  $(c; f(c))$ ; justifique su respuesta



A) No ya que la pendiente de la recta por izquierda y x derecha son distintos  
 B) sí ya que la pendiente de la recta tangente es la misma por izquierda y por derecha.

P4: Explica por qué la derivada de una función constante siempre es igual a cero.

Porque las funciones constantes son rectas horizontales con pendiente cero

P5: Calcula la pendiente de la recta secante en función de  $a$  y  $h$ .

$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$   ~~$\frac{f(a+h) - f(a)}{a+h}$~~  <sup>ff</sup> ¿Qué es  $a$   
y qué es  $h$ ?

P6: Se sabe que la derivada de una función  $f$  en  $x=2$  es  $f'(2)=0$ . Indica cuál de las afirmaciones es cierta. Explica tu respuesta:

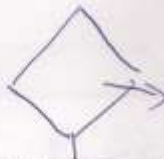
- a) La recta tangente a la curva en el punto  $x=2$  es horizontal.  
b) La función pasa por el punto  $(2;0)$

a) Cierto, rectas horizontales tiene pendiente cero y la pendiente de la recta tangente es la derivada

b) No necesariamente puede no ser continua en  $x=2$  o  $f(2) \neq 0$  no queda explícito.

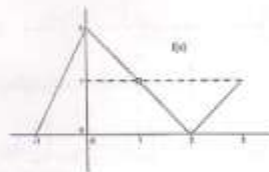
P7: La característica de una carretera viene dada en un tramo de montaña por la función  $f(x) = \sqrt{x}$ . ¿Qué señal de tráfico habrá que poner en  $x = 20$ , estando  $x$  medido en metros?

$$f(20) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

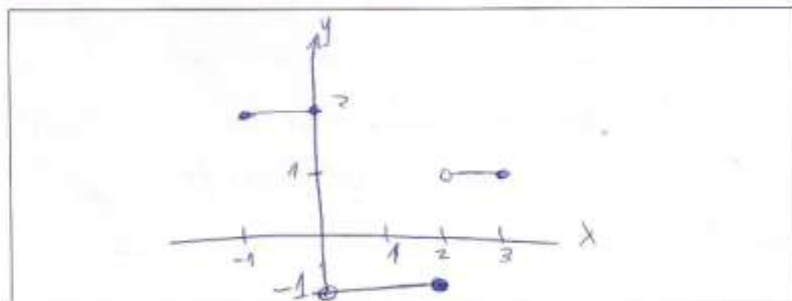
$$f'(20) = \frac{1}{4\sqrt{5}} < \frac{1}{4}$$


Fin del camino empinado

P8: Recordando el concepto geométrico de derivada y sin calcular la expresión analítica de  $f(x)$ , obten la representación gráfica de  $f'(x)$ , siendo la gráfica de  $f(x)$  la siguiente:



en  $x=1$ ;  $f(x)$  no está definida





P11: Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la función  $y=x^2$ , que pasen por el punto  $(0, -1)$ .

$$\begin{aligned} & \text{Dado } y = x^2 \\ \therefore & \frac{f(a) - (-1)}{a - 0} = f'(a) \\ \therefore & g(x) = \frac{f(a)+1}{a} (x-a) + f(a) \Rightarrow f'(a) = \frac{f(a)+1}{a} \\ & g(x) = \frac{a^2+1}{a} (x-a) + a^2 \end{aligned}$$

P12: ¿Por qué, si la derivada de la función  $f(x)=x^2$  es  $f'(x)=2x$ , cuando construimos las gráficas correspondientes la recta no resulta ser tangente a la parábola en ningún punto? Explica.

Porque la gráfica de la derivada no grafica las rectas tangentes, grafica los valores numéricos de las pendientes de las rectas tangentes.

CUESTIONARIO: INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DERIVADA


El cuestionario es de carácter individual:

Informante: E<sub>3</sub>

Carrera: Pedagogía Matemática y Física

P1: ¿Qué quiere decir que una recta es tangente a una curva en un punto? Explique.

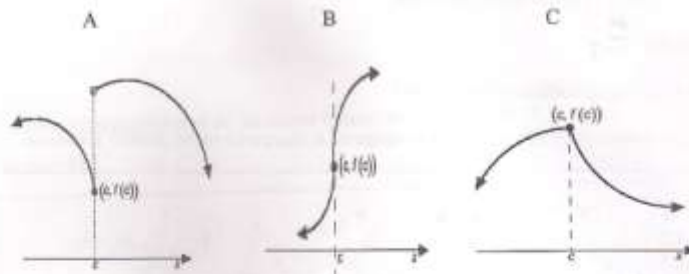
Una recta que toca a la curva  
en un punto



P2: Con sus propias palabras defina el concepto derivada desde un enfoque geométrico.

Representa <sup>el valor</sup> <sup>de</sup> la pendiente de la  
recta tangente a la  
curva en un punto

P3: Las siguientes graficas son o no derivables en  $(c; f(c))$  ; justifique su respuesta



- a) NO ES CONTINUA  
 b) DERIVABLE  
 c) ~~NO ES DERIVABLE~~ EL LIMITE NO EXISTE  
 POR LA FORMA ~~DE LA~~ TANGENTE

P4: Explica por qué la derivada de una función constante siempre es igual a cero.

POUNQUE AL SER UNA CONSTANTE  
 LA TANGENTE FUNCION ES UNA  
 RECTA PARALELA AL EJE X DE PENDIENTE 0  
 EL ~~VALOR~~ LA TANGENTE ES IGUAL  
 POR LO QUE LA DERIVADA ES 0

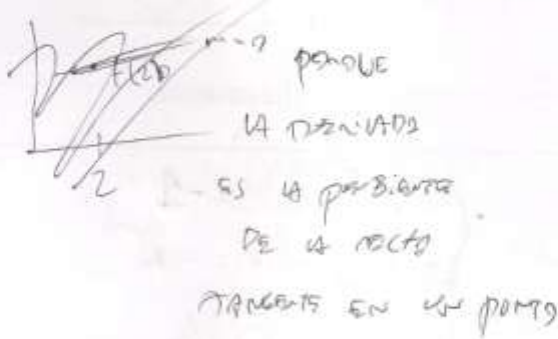
P5: Calcula la pendiente de la recta secante en función de  $a$  y  $h$ .

No es claro -

P6: Se sabe que la derivada de una función  $f$  en  $x=2$  es  $f'(2)=0$ . Indica cuál de las afirmaciones es cierta. Explica tu respuesta:

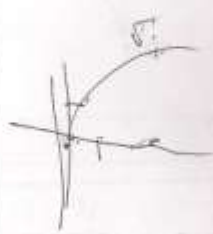
- a) La recta tangente a la curva en el punto  $x=2$ ; es horizontal.
- b) La función pasa por el punto  $(2;0)$

a)



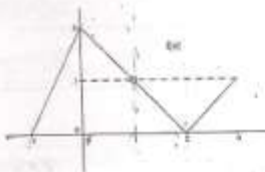
porque  
LA DERIVADA  
ES LA PENDIENTE  
DE LA RECTA  
TANGENTE EN EL PUNTO

P7: La característica de una carretera viene dada en un tramo de montaña por la función  $f(x) = \sqrt{x}$ . ¿Qué señal de tráfico habrá que poner en  $x = 20$ , estando  $x$  medido en metros?



Kilometros 25 2,2...  
 O Ve (curva de pacos)  
 (cuidado con las vacas)  
 tiempos trabajando

P8: Recordando el concepto geométrico de derivada y sin calcular la expresión analítica de  $f(x)$ , obten la representación gráfica de  $f'(x)$ , siendo la gráfica de  $f(x)$  la siguiente:



en  $x=1$ ;  $f(x)$  no está definida

$f'$

$\sqrt{[0, 2]}$	$f'(x) = -2$
$\sqrt{[1, 0]}$	$f'(x) = -2$
$\sqrt{[2, 3]}$	$f'(x) = 0$

P9: Dada la función  $f(x) = x^2 - 8x + 1$ ; ¿existe algún punto de la curva con tangente paralela a la recta  $y = 1$ ?

$$\begin{aligned} f'(x) = 2x - 8 &= 1 \\ 2x &= 9 \\ x &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$


P10: Calcular la derivada (por definición)  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ; y como aplicación estudiar  $f'(0)$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

∅

P11: Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la función  $y=x^2$ , que pasen por el punto  $(0, -1)$ .

$y=x^2$   $f'(x)=2x$



Sistema  
de ecuaciones  
para encontrar  
el punto.  
Luego

P12: ¿Por qué, si la derivada de la función  $f(x)=x^2$  es  $f'(x)=2x$ , cuando construimos las gráficas correspondientes la recta no resulta ser tangente a la parábola en ningún punto? Explica.

Porque la función derivada  
representa los valores de las pendientes  
de las rectas tangentes  
No es la recta tangente.

CUESTIONARIO: INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DERIVADA

El cuestionario es de carácter individual:

Informante: E<sub>4</sub>

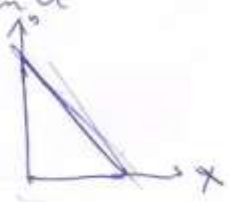
Carrera: Pedagogía Matemática y Física

P1: ¿Qué quiere decir que una recta es tangente a una curva en un punto? Explique.

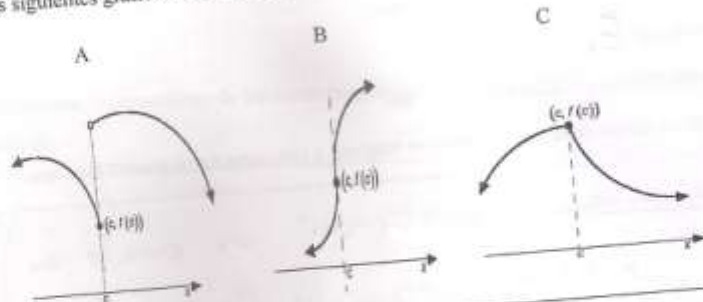
~~que se~~ que se ven un punto en  
común, es decir, la recta y la  
curva se tocan en un solo  
punto.

P2: Con sus propias palabras defina el concepto derivada desde un enfoque geométrico.

con el triángulo  
formado con el punto  
tangente



P3: Las siguientes graficas son o no derivables en  $(c; f(c))$ ; justifique su respuesta



No B y C ya que son continuas.  
 ambas dos.  
 A no lo es por que no es  
 continua.

P4: Explica por qué la derivada de una función constante siempre es igual a cero.

por que no tiene variable inde-  
 pendiente.

P5: Calcula la pendiente de la recta secante en función de  $a$  y  $h$ .

No se sabe de  $h$   
pregunta  
que es  $h$ ? definición

P6: Se sabe que la derivada de una función  $f$  en  $x=2$  es  $f'(2)=0$ . Indica cuál de las afirmaciones es cierta. Explica tu respuesta:

- a) La recta tangente a la curva en el punto  $x=2$  es horizontal.
- b) La función pasa por el punto  $(2;0)$ .

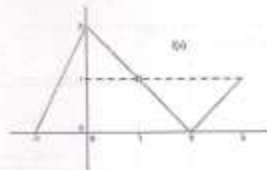
a) verdadera  $\rightarrow$

b) falsa  $\rightarrow$  no la función.

P7: La característica de una carretera viene dada en un tramo de montaña por la función  $f(x) = \sqrt{x}$ . ¿Qué señal de tráfico habrá que poner en  $x = 20$ , estando  $x$  medido en metros?

~~km~~  
 141,42135623730951 km  $\sqrt{20}$

P8: Recordando el concepto geométrico de derivada y sin calcular la expresión analítica de  $f(x)$ , obten la representación gráfica de  $f'(x)$ , siendo la gráfica de  $f(x)$  la siguiente:



en  $x=1$ ;  $f(x)$  no está definida

P9: Dada la función  $f(x) = x^2 - 8x + 1$ ; ¿existe algún punto de la curva con tangente paralela a la recta  $y = 1$ ?

al valor  $\rightarrow$  al  $y = 1$ .

P10: Calcular la derivada (por definición)  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ; y como aplicación estudiar  $f'(0)$ .

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 0^{\frac{1}{3}}}{x - 0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} x^{-\frac{2}{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2} = \infty
 \end{aligned}$$

P11: Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la función  $y=x^2$ , que pasen por el punto  $(0, -1)$ .

$$y = x^2 \quad y' = 2x.$$

para lo que se puede de la  
recta tangente a  $x < 0$  ... y como  
el punto  $(0, -1)$

P12: ¿Por qué, si la derivada de la función  $f(x)=x^2$  es  $f'(x)=2x$ , cuando construimos las gráficas correspondientes la recta no resulta ser tangente a la parábola en ningún punto? Explica.



CUESTIONARIO: INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DERIVADA

El cuestionario es de carácter individual:

Informante: E<sub>5</sub>

Carrera: Pedagogía Matemática y Física

P1: ¿Qué quiere decir que una recta es tangente a una curva en un punto? Explique.

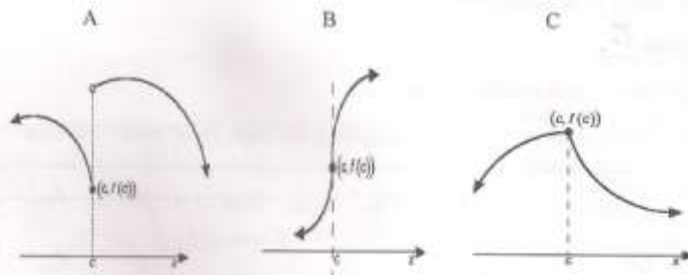
Quiere decir que la recta solo toca un punto de esa curva.

P2: Con sus propias palabras define el concepto derivada desde un enfoque geométrico.

La derivada es la pendiente que se forma de la hipotenusa del triángulo que se forma a partir de la recta tangente



P3: Las siguientes graficas son o no derivables en  $(c; f(c))$ ; justifique su respuesta



A) no es derivable por no es continua  
B) y c) son derivable por son continuas.

P4: Explica por qué la derivada de una función constante siempre es igual a cero.

Por que su variación vertical es siempre 0.

P5: Calcula la pendiente de la recta secante en función de a y h.



P6: Se sabe que la derivada de una función  $f$  en  $x=2$  es  $f'(2)=0$ . Indica cuál de las afirmaciones es cierta. Explica tu respuesta:

- a) La recta tangente a la curva en el punto  $x=2$  es horizontal.
- b) La función pasa por el punto  $(2;0)$

la función  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$  corresponde a la función indicada pues  $f(x) = x - 2 \Rightarrow f'(x) = 1 \neq 0$

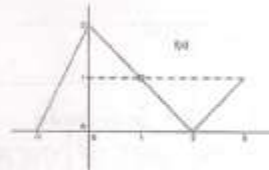
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$   
 $f'(x) = x - 2$

A partir de esto tenemos si  $x=2$  entonces  $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 2 - 4 = -2$   
por lo que b) es falsa.  
Como cuando  $x=2 \Rightarrow y=-2$  este punto no puede tener una tang. horizontal o si no cortaría en dos puntos.

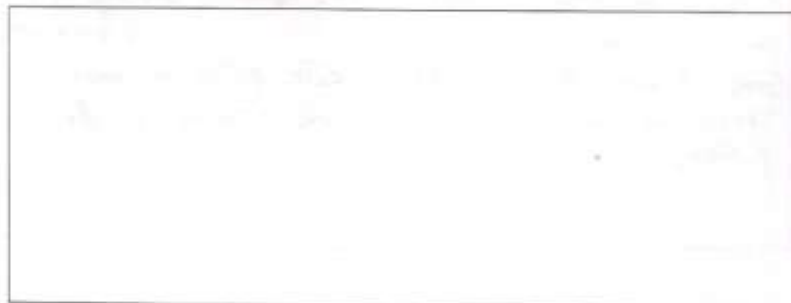
P7: La característica de una carretera viene dada en un tramo de montaña por la función  $f(x) = \sqrt{x}$ . ¿Qué señal de tráfico habrá que poner en  $x = 20$ , estando  $x$  medido en metros?

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \text{si } x=20 \quad f'(20) = \frac{1}{2\sqrt{20}} \approx 0,1118 //$$

P8: Recordando el concepto geométrico de derivada y sin calcular la expresión analítica de  $f(x)$ , obten la representación gráfica de  $f'(x)$ , siendo la gráfica de  $f(x)$  la siguiente:



en  $x=1$ ;  $f(x)$  no está definida



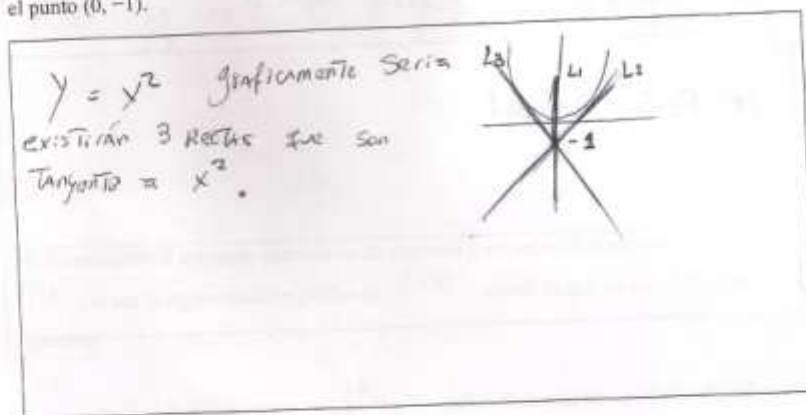
P9: Dada la función  $f(x) = x^2 - 8x + 1$ ; ¿existe algún punto de la curva con tangente paralela a la recta  $y = 1$ ?

↗ Recta Vertical.

P10: Calcular la derivada (por definición)  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ; y como aplicación estudiar  $f'(0)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 0^{\frac{1}{3}}}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x^{-2/3} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^{-2}} = 0 \end{aligned}$$

P11: Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la función  $y=x^2$ , que pasen por el punto  $(0, -1)$ .



P12: ¿Por qué, si la derivada de la función  $f(x)=x^2$  es  $f'(x)=2x$ , cuando construimos las gráficas correspondientes la recta no resulta ser tangente a la parábola en ningún punto? Explica.

por que es secante a este .

CUESTIONARIO: INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DERIVADA

El cuestionario es de carácter individual:

Informante: *Hombre E<sub>6</sub>*

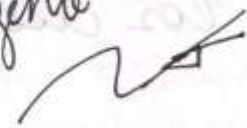
Carrera: Pedagogía Matemática y Física

P1: ¿Qué quiere decir que una recta es tangente a una curva en un punto? Explique.

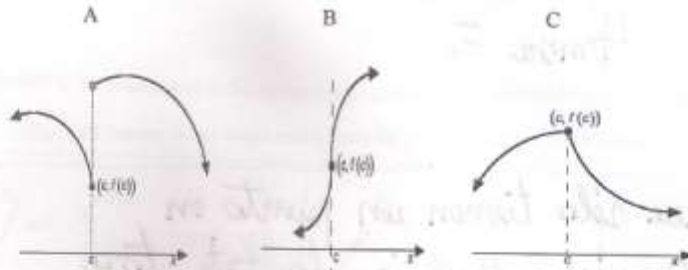
*que sólo tienen un punto en  
común, o decir, la recta toca  
a la ~~recta~~ curva en un pto.*

P2: Con sus propias palabras defina el concepto derivada desde un enfoque geométrico.

*la derivada sería la  
pendiente de la recta  
tangente*



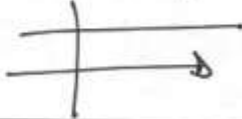
P3: Las siguientes graficas son o no derivables en  $(c; f(c))$ ; justifique su respuesta



A, C no son derivables, pues al acercarnos por derecha e izquierda las pendientes de las rectas son  $\neq$ .  
 B si lo es por la pendiente de la  $y$  y de hecho son  $=$ .

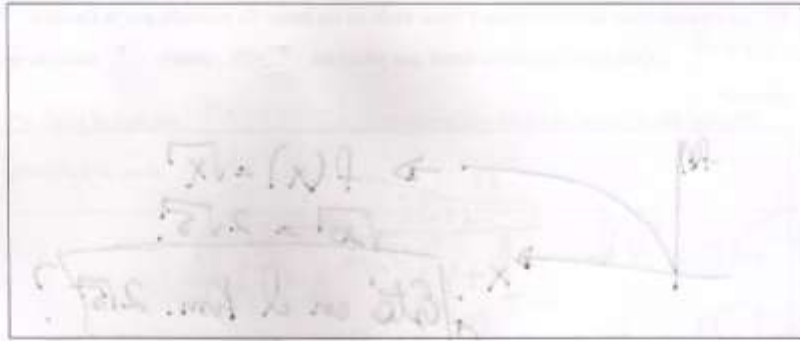
P4: Explica por qué la derivada de una función constante siempre es igual a cero.

por la pendiente de las rectas, las cuales son cero.



$\rightarrow m = 0$

P5: Calcula la pendiente de la recta secante en función de  $a$  y  $h$ .



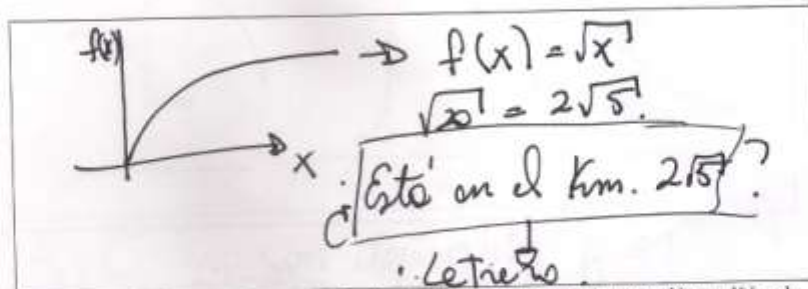
P6: Se sabe que la derivada de una función  $f$  en  $x=2$  es  $f'(2)=0$ . Indica cuál de las afirmaciones es cierta. Explica tu respuesta:

- a) La recta tangente a la curva en el punto  $x=2$ ; es horizontal.
- b) La función pasa por el punto  $(2;0)$

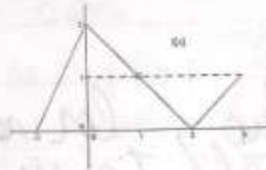
a) Verdadero, los rectos horizontales tienen  $m=0$ .  
El "m" (pendiente) de la recta es la derivada.

b) No siempre, existe la posibilidad de que no sea continuo en  $\mathbb{Z}$ .

P7: La característica de una carretera viene dada en un tramo de montaña por la función  $f(x) = \sqrt{x}$ . ¿Qué señal de tráfico habrá que poner en  $x = 20$ , estando  $x$  medido en metros?



P8: Recordando el concepto geométrico de derivada y sin calcular la expresión analítica de  $f(x)$ , obten la representación gráfica de  $f'(x)$ , siendo la gráfica de  $f(x)$  la siguiente:



en  $x=1$ ;  $f(x)$  no está definida

$$f = \begin{cases} [0, -2] & f'(x) = -1 \\ [-1, 0] & f'(x) = -2 \\ [2, 3] & f'(x) = 1 \end{cases}$$

P9: Dada la función  $f(x) = x^2 - 8x + 1$ ; ¿existe algún punto de la curva con tangente paralela a la recta  $y = 1$ ?

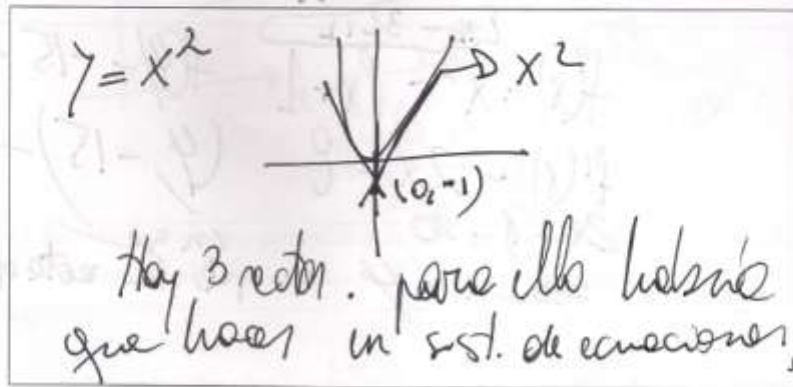
$$\begin{aligned}
 & \text{Ejemplo: } f(x) = x^2 - 8x + 1 & f(4) = -15 \\
 & f'(x) = 2x - 8 & (4, -15) \rightarrow \text{punto} \\
 & 2x - 8 = 0 & \text{en este punto la recta es } // \\
 & \Rightarrow x = 4.
 \end{aligned}$$

P10: Calcular la derivada (por definición)  $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ ; y como aplicación estudiar  $f'(0)$

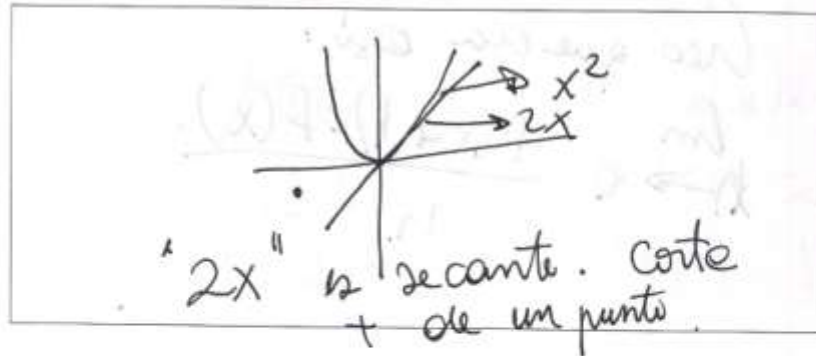
Creo que era así:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

P11: Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la función  $y=x^2$ , que pasen por el punto  $(0, -1)$ .



P12: ¿Por qué, si la derivada de la función  $f(x)=x^2$  es  $f'(x)=2x$ , cuando construimos las gráficas correspondientes la recta no resulta ser tangente a la parábola en ningún punto? Explica.



CUESTIONARIO: INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DERIVADA

El cuestionario es de carácter individual:

Informante: E7

Carrera: Pedagogía Matemática y Física

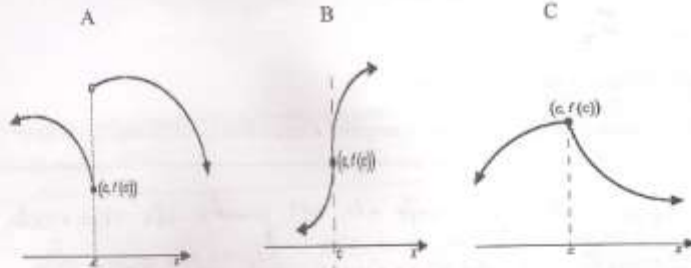
P1: ¿Qué quiere decir que una recta es tangente a una curva en un punto? Explique.

Que el límite de un punto de una recta secante se aproxima al punto que consideramos.

P2: Con sus propias palabras defina el concepto derivada desde un enfoque geométrico.

Indefinido por no haberse escrito nada.

P3: Las siguientes graficas son o no derivables en  $(c, f(c))$ ; justifique su respuesta



A no es derivable en  $(c, f(c))$ . falta continuidad en punto  $c$ .

B si es derivable.

C no es derivable.

P4: Explica por qué la derivada de una función constante siempre es igual a cero.

~~Porque~~ porque su variación vertical siempre es cero.

P5: Calcula la pendiente de la recta secante en función de  $a$  y  $h$ .

c - ¿qué es  $a$  y  $h$ ?

P6: Se sabe que la derivada de una función  $f$  en  $x=2$  es  $f'(2)=0$ . Indica cuál de las afirmaciones es cierta. Explica tu respuesta:

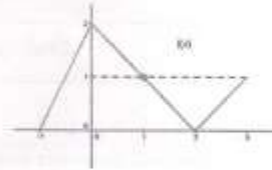
- a) La recta tangente a la curva en el punto  $x=2$  es horizontal.
- b) La función pasa por el punto  $(2;0)$

a) es cierto  
b) no es cierto.

P7: La característica de una carretera viene dada en un tramo de montaña por la función  $f(x) = \sqrt{x}$ . ¿Qué señal de tráfico habrá que poner en  $x = 20$ , estando  $x$  medido en metros?

~~20~~ este el metro 205.

P8: Recordando el concepto geométrico de derivada y sin calcular la expresión analítica de  $f(x)$ , obten la representación gráfica de  $f'(x)$ , siendo la gráfica de  $f(x)$  la siguiente:



en  $x=1$ ;  $f(x)$  no está definida



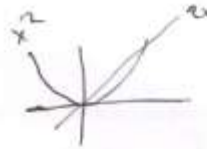
P9: Dada la función  $f(x) = x^2 - 8x + 1$ ; ¿existe algún punto de la curva con tangente paralela a la recta  $y = 1$ ?

el vértice de  $f(x)$ .

P10: Calcular la derivada (por definición)  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ; y como aplicación estudiar  $f'(0)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} : x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{3}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3} - 1$$



P11: Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la función  $y=x^2$ , que pasen por el punto  $(0, -1)$ .

La pendiente de esa recta tangente será  $2x$  y como debe pasar  $x(0, -1)$  la pendiente será 0.

$\therefore$  el eje  $x$  es ~~es~~ la tangente a  $f(x)$

P12: ¿Por qué, si la derivada de la función  $f(x)=x^2$  es  $f'(x)=2x$ , cuando construimos las gráficas correspondientes la recta no resulta ser tangente a la parábola en ningún punto? Explica.

porque es secante.