FACULTAD DE EDUCACIÓN, DEPARTAMENTO DE PEDAGOGÍA MEDIA Y DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS, PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA

SEMINARIO DE TÍTULO

ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR ESTUDIANTES DE 14 A 16 AÑOS EN PROBLEMAS NO RUTINARIOS SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

Autores: Valeria Ibáñez, Denisse Molina y Luis Muñoz

Profesor guía: Dra. María Soledad Montoya-González

Dr. Marcos Barra Becerra

Noviembre del 2022.

Santiago de Chile.

AGRADECIMIENTOS

He llegado al proceso final e inicial de mi formación profesional; final porque la parte formativa institucional se está cerrando mientras se comienza a abrir mi camino al desarrollo como docente, donde le doy iniciación a mis competencias, a los nuevos desafíos y experiencias que marcarán para siempre mi destino. Antes de llegar acá y al ver hacia atrás puedo recordar que he pasado por frustraciones, cansancio, nerviosismo y muchos desvelos. Pero, por otra parte, me he visto enfrentar emociones que me hacen sentido a todo el esfuerzo, superación y alegría, porque he llegado a una de mis metas, con constancia, perseverancia y resiliencia.

Es por esto, que quiero darle gracias a Dios, a mi familia, amigos, compañeros y profesores por ser un pilar fundamental dentro de mi proceso de formación, por creer en mí y acompañarme en los buenos y malos momentos. Quiero destacar a quienes me acompañan desde el cielo también, María Isabel y Ovidio, pese a que me hubiese gustado tenerlos físicamente, sé que están presente en cada etapa de mi vida.

Para terminar, solo me queda dar gracias por esta etapa superada… porque este camino que me llena de orgullo recién comienza.

Valeria Ibáñez Rodríguez

Una vez leí, que el logro de nuestras metas cobraba mayor valor cuando el camino para llegar a ellas se ve imposible de transitar. Y en esa dificultad, nos damos cuenta que necesitamos de otros para recorrerlo. Hoy, quiero agradecer a esos otros que me ayudaron a terminar este proceso. Gracias a mis “pollos” que partieron primero, pero que mientras estuvieron me alentaron a seguir; a mis profesores gracias por esas excepciones que me permitieron llegar hasta el final; a los amigos de siempre; a mis mascotas, por su fiel y leal compañía en todo este camino; a Dios pues sin ti nada hubiese sido posible;

a mi hermana Tania por luchar, estar y seguir a mi lado; a mi hermano Alexis por permanecer aún en la distancia; a los Carlotos, por sus constantes oraciones. Pero hoy, dedico este trabajo de título a mi hermana del corazón Claudia, por ser la primera que creyó en mí de principio a fin. Ustedes fueron las personas precisas en los momentos indicados.

Denisse Molina Tapia

Primero agradezco a Dios, por darme la fuerza para no rendirme en este proceso tan difícil que solo Él y yo sabemos que estoy viviendo.

En una segunda instancia, me gustaría agradecer a mi papá, que desde el cielo debe estar orgulloso y alegre de que esté terminando mis estudios, y a mi mamá que oró sin cesar todos estos años pidiéndole a Dios sabiduría para mí. Sin su apoyo y confianza hubiese sido mucho más difícil llegar hasta esta etapa, MIL GRACIAS.

También quiero agradecer a Estrella y Benjamín por acompañarme en todo este proceso, brindándome su alegría y apoyo en cada momento, espero que sigamos siendo tan unidos como siempre.

Por último, quiero reconocer a todos mis familiares y a mi amiga Stefi que siempre estuvieron pendiente de mí cuando lo necesité, aconsejándome y dándome ánimos a lo largo de toda mi carrera.

Mención especial para todos los profesores de la carrera, en especial al profesor Marcos Barra y a la profesora María Soledad Montoya, que gracias a sus retroalimentaciones y guía logramos entregar este trabajo de título.

Luis Muñoz

RESUMEN

Esta investigación tiene por objetivo caracterizar y analizar las estrategias utilizadas por estudiantes de 2do Medio en problemas no rutinarios presente en la enseñanza de las razones trigonométricas del seno y coseno en triángulos rectángulos. Para esto, se realiza una secuencia didáctica considerando seis sesiones de clases, basándose en el enfoque teórico de la Teoría de Situaciones Didáctica (TSD), la metodología de la Ingeniería Didáctica (ID) y el Estudio de Clases (EC), con la finalidad de diseñar y mejorar las prácticas educativas constantemente, generando un aprendizaje significativo en los estudiantes, sin caer en los fenómenos didácticos presentes en la enseñanza de este contenido, como lo son el deslizamiento metacognitivo a través de técnicas como la memorización y la mnemotecnia.

En paralelo a la implementación de la secuencia didáctica, se analizan las situaciones de aprendizajes claves de algunas clases para evaluar el efecto de esta en la comprensión de los estudiantes y así generar conclusiones en base a las evidencias obtenidas.

INTRODUCCIÓN

En esta investigación se presentarán los resultados de la implementación de una secuencia didáctica relacionada al contenido de razones trigonométricas de seno y coseno en el triángulo rectángulo, para así analizar las estrategias utilizadas por los estudiantes en problemas no rutinarios que involucren este contenido. Con el fin de llevar a cabo esto, se presenta la problemática con sus respectivos antecedentes y objetivos a lograr, posteriormente se trabaja el objeto matemático, tanto su epistemología como definiciones, teoremas fundamentales y las relaciones presentes. Luego se expone el marco de referencia, metodología de investigación y los respectivos planes de clases con sus guías de trabajo. Finalmente, se realiza el estudio de clases, los análisis y las conclusiones obtenidas luego de la implementación ya culminada la secuencia de clases.

En la educación escolar es frecuente que el contenido relacionado con razones trigonométricas se enseñe a través de fenómenos didácticos como el deslizamiento metacognitivo proponiendo actividades de bajo nivel cognitivo. Por consiguiente, para generar un aprendizaje significativo en los estudiantes se realizará una secuencia didáctica que contenga el subtema analizando las estrategias obtenidas en ella, estableciendo objetivos generales y específicos. Luego, se presenta el objeto matemático con su epistemología y estatus actual, junto con las definiciones y teoremas necesarios para la enseñanza.

Esta secuencia didáctica tiene como marco de referencia la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau, mencionando su aplicación y señalando las clases donde se utilizaron los aspectos claves de esta. En paralelo se trabaja con la metodología de Ingeniería Didáctica (ID) y el Estudio de Clases (EC) para mejorar continuamente las prácticas docentes y generar conclusiones respecto al proceso de enseñanza y aprendizaje.

Una vez detectada la problemática y realizada la investigación se planificará la enseñanza por medio de una secuencia didáctica presentando los planes de clases diseñados para cada sesión de manera detallada con el respectivo material utilizado. Posteriormente, se discute entre pares de manera general el diseño, reflexionando sobre todos los aspectos de la secuencia y realizando propuestas de mejora. Finalmente se ejecutará el Estudio de Clases con el objetivo de tener considerar cómo se llevó a cabo la sesión, confrontando los análisis apriori y posteriori de las situaciones de enseñanza y aprendizajes claves de la secuencia didáctica para así generar conclusiones pertinentes con las evidencias obtenidas en la aplicación.

CAPÍTULO I

PROBLEMÁTICA, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS

En este capítulo, se presentan los antecedentes que argumentan la problemática que se abordará en la investigación, el fenómeno didáctico del deslizamiento metacognitivo además de la mnemotecnia como recurso de enseñanza no idóneo para lograr el aprendizaje en razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos. Así como, el análisis de los textos escolares que abordan el contenido estudiado y los objetivos de la investigación.

1.1 Problemática

En el proceso de enseñanza-aprendizaje se presentan diversos acontecimientos o hechos que cuando se interpretan por medio de una teoría se convierten en un fenómeno singular y cuando se produce una generalización nos encontramos con los fenómenos didácticos, los cuales generan una dificultad en el estudiantado ya que interrumpen y/o obstaculizan la construcción del conocimiento.

Cuando un intento de la enseñanza y aprendizaje fracasa; es decir, cuando el profesor no logra transmitir el objetivo de aprendizaje, se ve obligado a retomar el contenido para explicarlo nuevamente y completarlo. Es así como, el primer intento que originalmente es un recurso para enseñar, se convierte en un objeto de estudio e incluso de enseñanza, luego la forma sustituye al fondo y la actividad propuesta en un principio por un profesor no se ha logrado transmitir y pasa a ser el único objetivo del profesor, esto es lo que conocemos como el deslizamiento metacognitivo, que consiste cuando “en ciertas circunstancias, el profesor puede realizar la enseñanza tomando las explicaciones y medios heurísticos como objetos de estudio en lugar del verdadero conocimiento matemático” (Ávila, 2001, p.12), es decir, solo se presenta la técnica para que resuelvan ejercicios pero no se estudia la razón del porqué ni para qué se trabaja.

Considerando lo anterior, en la enseñanza de razones trigonométricas en segundo medio, el deslizamiento metacognitivo es uno de los fenómenos didácticos más comunes, pues se recurre a recursos de enseñanza basado en la mnemotecnia, mecanización y algoritmización de conceptos y fórmulas. Se presentan las razones trigonométricas a los estudiantes con estas técnicas, se les entregan todos los datos y ellos solo sustituyen realizando las operaciones pertinentes. Otro aspecto a tener en cuenta sobre este tipo de recursos, es que en la actualidad no se justifica el uso de técnicas en la que los estudiantes deban memorizar o aprender para lograr el objetivo propuesto por el profesor, pues con la incorporación de diversos recursos tecnológicos y las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC), los estudiantes pueden encontrar fácilmente en la web, software, aplicaciones, programas, calculadoras y hasta en sus dispositivos móviles cómo aplicar las diferentes técnicas para obtener en forma inmediata los resultados. Entonces, se vuelve trivial enseñar mnemotécnicas, mecánicas o algoritmos para cumplir con el objetivo de enseñanza. Por el contrario, el profesor puede hacer uso de las tecnologías para profundizar de mejor forma la unidad de enseñanza y de este modo lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes.

Sobre las técnicas mencionadas, la mnemotecnia es una de las más utilizadas en razones trigonométricas, y consiste en “el uso de elementos, o símbolos asociados, con características especiales o específicas (que pueden caer en lo exagerado), de tal manera que llame la atención y se pueda retener en la memoria fácilmente un dato” (Carrillo, 2006, p.60), de esta forma el objetivo de enseñanza se enfoca en el recurso y no el contenido. Pues, como se trata de retener y memorizar las fórmulas, las gráficas, los conceptos o definiciones, sin comprensión o razonamiento alguno; se puede “facilitar” en el estudiante una “comprensión momentánea o desechable”, pues solo servirá para aplicar en ejercicios que no requieran un mayor razonamiento y que solo tengan que sustituir y resolver.

En las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, ya sean del seno y coseno o las seis razones, algunos de los ejemplos más comunes de técnicas mnemotécnicas son:

1. SohCahToa: Se refiere a las razones del seno, coseno y la tangente en un triángulo rectángulo, y consiste en que el Seno **Soh**, está dado por la razón del cateto Opuesto y la Hipotenusa, Coseno **Cah** está dado por la razón del cateto Adyacente y la Hipotenusa y finalmente, la Tangente **Toa** que estará dado por la razón entre el cateto Opuesto y el cateto Adyacente. Las letras en mayúscula corresponden a la razón y en minúscula a los catetos o a la hipotenusa, esta técnica consiste en memorizar de forma escrita, pues no hace mención del “cateto” solo a su característica si es opuesto o adyacente. De la palabra memorizada permite recordar la fórmula de razón para el cálculo de estas.

2. CocaCocaHipHip: Es una técnica similar a la anterior, usada con mucha frecuencia para lograr que los estudiantes recuerden con facilidad la definición de las razones trigonométricas, sin embargo, esta es más fácil de memorizar al vocalizarla pues se aprende con un tono fonético que ayuda a su memorización. Luego, las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo respecto a un ángulo α se acostumbra a listarlas de la siguiente manera:
   $Sen\ \alpha = \frac{co}{hip}; Cos\ \alpha = \frac{ca}{hip}; \tan\alpha = \frac{co}{ca}; \cot\alpha = \frac{ca}{co}; \sec\alpha = \frac{hip}{ca}; cosec = \frac{hip}{co}$
   Donde podemos visualizar de izquierda a derecha en el antecedente y luego de derecha a izquierda en el consecuente como se produce la técnica aplicada.

3. Coca-Coca con dos hielos: Al igual que la anterior, es una regla mnemotécnica para memorizar las razones trigonométricas. También se observa que lo pretendido tras esta regla es que el estudiante memorice enunciando la oración, pero recordar y aplicar no implica un aprendizaje significativo, es más bien la memorización melódica de un estribillo.

Estas reglas mnemotécnicas definidas como el “conjunto de estrategias artificiales que ayudan a la memoria, facilitando los procesos de aprendizaje, o bien la posterior recuperación de la información” (Carrillo, 2006, p.60) si bien presentan una ayuda en recordar ciertas fórmulas y conceptos, genera dificultades y obstáculos en la comprensión de este, además de no tener una contextualización ni saber el porqué de ello. Es necesario mencionar que al aplicar estas técnicas se enfatiza el deslizamiento metacognitivo, pues aprender la técnica se vuelve el foco de aprendizaje y de este modo no se produce un aprendizaje significativo en los estudiantes.

Finalmente, aplicar las etapas de Secuencia Didáctica desde la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007) permite obtener un aprendizaje significativo en los estudiantes, pues los alumnos del segundo medio, protagonistas de la implementación de este seminario, serán el centro del proceso de enseñanza aprendizaje y que todo lo que resuelva, gire en torno a sus necesidades y conocimientos. Esto incide en la Resolución de problemas matemáticos no rutinarios, que implica el uso de diversos materiales no estructurados que permitan la manipulación necesaria para la construcción del conocimiento de razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos. Por todo lo anteriormente expuesto, queda planteada la siguiente interrogante: ¿Qué estrategias utilizan los estudiantes frente a problemas no rutinarios que involucren el contenido de razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos?

1.2 Antecedentes

1.2.1 Antecedentes Didácticos

La geometría, según los resultados de la última prueba END aplicada el año 2021, muestra que los futuros profesores chilenos de matemáticas tienen un déficit en el conocimiento de este eje temático, pues solo el 36,8% es el porcentaje de logro en este contenido (p.5), lo que puede ser un indicio o no, de que al aprendizaje se adquirió sin un nivel de comprensión significativo o bien es un conocimiento de un grado de complejidad considerable que requiere mayor aprehensión. Debido a esto, se puede generar una premisa sobre la enseñanza de la trigonometría como un tema difícil de abordar o enseñar, particularmente las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, lo que se encuentra evidenciado en algunas investigaciones en matemática educativa que muestran las dificultades en el aprendizaje que tienen los estudiantes de distintos niveles escolares al interpretar y significar a las razones vinculadas a las relaciones trigonométricas. De Kee, Mura y Dionne (1996) citado por Cortes, G & Espinosa, G (2007) mencionan que el estado de comprensión del seno y coseno no están bien establecidos en los estudiantes, indican que generalizan las propiedades de los triángulos rectángulos a cualquier tipo de triángulo, o aseguran un cambio de escala en el seno y el coseno al cambiar de escala un triángulo.

Lo anterior, permite poner especial atención en el estudio de los fenómenos didácticos que ocurren al interior del aula en el proceso de enseñanza aprendizaje de las nociones y conceptos de razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en el triángulo rectángulo. Para ello, la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, y los fenómenos didácticos que acontecen en la situación didáctica son un marco de referencia de gran consistencia. Según Brousseau (1997), al interior de las interacciones que ocurren en la Situación Didáctica, se establecen algunos efectos que sustituyen, impiden o interrumpen el aprendizaje que efectúa el estudiante dentro del medio didáctico diseñado por el profesor. Esto es lo que según el Contrato Didáctico, se identifican como los efectos o fenómenos didácticos, algunos de los que se observan con mayor frecuencia son el efecto Topaze, el profesor sugiere de forma "disimulada" la respuesta, induciendo al estudiante por medio de preguntas sencillas a una respuesta que tiene el fin de que sea correcta sin necesariamente estar relacionada con el objetivo del contenido; el efecto Jourdain, se refiere a la actitud que puede tomar el profesor frente a respuestas incorrectas de los estudiantes, las que intelectualiza o sacraliza con el fin de reconocer indicios de conocimiento, a pesar de que las respuestas sean triviales ya que de este modo evita la desmotivación en los alumnos; el uso abusivo de la analogía, utilizado con mayor frecuencia en la resolución de problemas pues se recurre a analogías para su enseñanza, pero el estudio de la analogía termina siendo el fin por sobre el problema original. Por último, sumado a los anteriores y dentro de los fenómenos didácticos más frecuentes, está el deslizamiento metacognitivo, el que surge ante el fracaso de enseñanza o comprensión de una actividad y el profesor recurre a medios heurísticos como objeto de estudio en lugar del verdadero conocimiento matemático.

Luego, el profesor, quien es parte de la interrelación entre estudiante y medio didáctico, con o sin un conocimiento acabado del contenido a enseñar, según Brousseau (2007) en su teoría de situaciones didácticas, debe transmitir el saber, adaptando, reformulando, modificando o reorganizándolo, surgiendo así muchos de los fenómenos didácticos que conocemos, los que inhiben o interrumpen la construcción del conocimiento que lleva a cabo el estudiante. Es así como, el deslizamiento Metacognitivo, enunciado por Retamal, Pino-Fan y Arredondo (2020) como el efecto que "Generalmente se presenta cuando un profesor tiene dificultades para lograr la comprensión y el logro de los alumnos de un objeto matemático que ha previsto; entonces, cambia el objetivo de su enseñanza y lo reduce a la enseñanza de un objeto de menor nivel cognitivo o al manejo de una técnica". (p.655), se presenta en la enseñanza de razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos debido a que es un contenido que se advierte como un conocimiento de alta dificultad para la comprensión por parte de los estudiantes, al respecto Fernández, Ruiz y Rico (2016) mencionan que "la trigonometría es un contenido escolar que resulta difícil de entender por los estudiantes" (De Kee, Mura y Dionne, 1996; Maldonado, 2005) "debido a factores diversos como son su complejidad, la conexión con numerosos fenómenos y las interconexiones con otras disciplinas" (Brown, 2005). Por ejemplo, en razones trigonométricas del seno o coseno en un triángulo rectángulo, el profesor sustituye la enseñanza de las razones del lado opuesto al ángulo y la hipotenusa como una razón constante del ángulo por la memorización de la técnica o "fórmula" $sen\ \alpha = \frac{CO}{HIP}$, $cos\alpha = \frac{CA}{HIP}$. Si bien, puede ser un recurso válido pues procura ganar tiempo y eficacia frente a un contenido que requiere un mayor trabajo para su enseñanza aprendizaje, se vuelve desfavorable cuando los docentes pierden de vista el objetivo del contenido abordado, y no es precisamente por la falta de habilidades de los estudiantes, pues más bien responden a prácticas escolares condicionadas sobre el propósito de la obtención de buenos resultados en las diferentes pruebas de medición de nuestro sistema educacional, "Este deslizamiento se produce, en particular, cuando el medio es inapropiado o cuando el sistema no puede ni abandonarlo ni rechazarlo, dado que ha sido impuesto por el medio. Es así como la enseñanza de la heurística fue más fácilmente controlada, dado que está subordinada a una comunidad menos vasta y dominante que lo que fue el proyecto de la "matemática moderna" o de la "regla del tres"" (Brousseau & D'amore, 2015, p.51). Luego, es así como estos fenómenos o efectos didácticos se transforman en una práctica escolar, pues según Brousseau y D'amore el deslizamiento metacognitivo de ser usado en primera instancia como un medio de control de los resultados, se transformó en objetivo, luego en medio de enseñanza y por último en objeto de enseñanza. De este modo, es como la técnica por sobre el análisis del contenido toma el rol protagónico en la enseñanza.

De los antecedentes anteriores se puede desprender que debido al nivel de dificultad que tiene el estudio de la trigonometría, y en este caso el de las razones del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos, el deslizamiento metacognitivo que se produce en la enseñanza de este contenido es evidenciado con el uso de diferentes recursos para lograr el aprendizaje. Las técnicas como la mecánica, rutina, memorización, algoritmización son utilizadas como las herramientas para que los estudiantes “aprendan” el contenido, pero tras técnicas de memoria como la Mnemotecnia, no surge el aprendizaje significativo que es parte del propósito de la enseñanza. Luego, la Mnemotecnia, del griego «mnéemee» (memoria) y «téchnee» (arte). Se define como el arte que procura aumentar la capacidad de retención de la memoria por medio de ciertas combinaciones o artificios. Es necesario realizar una distinción sobre los términos Mnemotecnia y mnemotécnica, pues el primero es la técnica definida anteriormente, mientras que la segunda es el uso de elementos, o símbolos asociados, con características especiales a veces exageradas, con el fin de llamar la atención y que se pueda memorizar fácilmente, como lo son colores asociados a productos o simbologías que representan profesiones o avisos, por mencionar algunos ejemplos.

Lo anterior forma parte de esta investigación, pues la Mnemotecnia es una de las técnicas más recurrentes en el estudio o enseñanza de las razones trigonométricas. Diferentes son las técnicas de memorización con las que se enseñan las razones del seno y coseno en triángulos rectángulos, el estudiante memoriza la razón del seno o la del coseno como $sen\, \alpha = \frac{CO}{Hip}\ o\ cos\alpha = \frac{CA}{HIP}$ sin hacer relación alguna entre la razón constante del ángulo con el cateto opuesto o adyacente respectivamente y la hipotenusa. Por lo demás, enseñar esta práctica es bastante limitado y solo se enfoca en el aprendizaje memorístico y se puede interpretar como una forma de estructurar de manera comprensible o descifrable contenidos complejos como la trigonometría. Sin embargo, claro es, que no conviene hacer demasiado uso de estos en la enseñanza, ya que su utilización puede provocar la simplificación de los conocimientos, el abandono de la reflexión, lógica, análisis y del razonamiento intelectual; y aún más importante la comprensión del contenido y el porqué de su enseñanza. En contraste a la enseñanza con recursos como la mnemotecnia, Guy Brousseau toma las hipótesis centrales de la teoría del desarrollo del conocimiento de Jean Piaget como marco para modelizar la producción de conocimiento, ya que el conocimiento matemático se va constituyendo a partir desde que reconocen, afrontan y resuelven problemas que son producidos a su vez de otros problemas. Es así como, la resolución de problemas matemáticos involucra la idea de interacción de variados procesos cognitivos, los que conllevan a seguir una adecuada línea de razonamiento en la que finalmente surge el lenguaje matemático. Es así como la resolución de problemas aproxima la matemática a las situaciones cotidianas vinculadas a diferentes contextos, y pone de manifiesto el tipo de control intelectual que el alumno puede realizar sobre cada situación. Dentro de la resolución de problemas, existen los problemas que son considerados rutinarios y aquellos considerados no rutinarios. Según Díaz y Poblete (1999) En los problemas rutinarios el alumno efectúa una serie de secuencias que involucra una comprensión de conceptos y algoritmos para llegar a soluciones válidas. La búsqueda de soluciones de contextos que no se han practicado que pertenecen a una categoría superior de análisis corresponde a los problemas no rutinarios. Luego, este tipo de problemas en razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos, salen de la rutina en cuanto a un método o la aplicación de una regla, sino que a fuerza de búsqueda y de intuición hay que llegar a elaborar una solución recurriendo al conjunto de conocimientos y experiencias anteriores.

En resumen, la aplicación de la Secuencia Didáctica de Brousseau por medio de problemas no rutinarios puede mejorar la deficiencia de la enseñanza por medio de la mnemotecnia como un recurso del efecto de deslizamiento metacognitivo. Brousseau (1999) señala que esta secuencia “Propone 4 fases de razonamiento que tiene como propósito fundamental entender e identificar los problemas que existen en los procesos de comunicación y reconstrucción de saberes del sistema didáctico de los estudiantes. Esto quiere decir que, ellos captan, interiorizan y comprenden una situación problemática; por lo que pueden actuar de manera correcta y premeditada frente a situaciones novedosas. A su vez, esta secuencia también permite el monitoreo constante sobre el avance del aprendizaje en los alumnos, ya que ellos pasan progresivamente por las 4 fases de las situaciones didácticas de Brousseau: Situación de Acción situación de Formulación, situación Validación e Institucionalización de manera secuencial.

1.2.2 Análisis descriptivo del Programa de Estudios

El antecedente didáctico corresponde al análisis descriptivo del programa de estudio 2016 y al análisis comparativo de dos textos escolares de distintos años. Para esto, el contenido se presenta en la Unidad 3 de Geometría de 2do medio donde se aborda cambio porcentual y razones trigonométricas, siendo esto último en el que se enfoca esta investigación.

El propósito de esta unidad es que los estudiantes sean capaces de comprender las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente por medio de la semejanza de triángulos rectángulos, y se espera que apliquen de forma adecuada cada razón trigonométrica según el contexto dado, además que usen las razones trigonométricas como medio para determinar la medida de los lados de un triángulo rectángulo o el ángulo involucrado en el contexto de resolución de problemas. Para esto, los conocimientos previos que necesita el estudiante son: triángulo rectángulo, teorema de Pitágoras y semejanza de triángulos para el contenido de razones trigonométricas.

Al enseñar este contenido, se espera que los estudiantes desarrollen las siguientes habilidades:

OA D: Describir relaciones y situaciones matemáticas usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos.

OA E: Explicar:

- Soluciones propias y los procedimientos utilizados.
- Demostraciones de resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas.
- Generalizaciones por medio de conectores lógicos y cuantificadores utilizándolos apropiadamente.

OA G: Realizar demostraciones simples de resultados e identificar en una demostración si hay saltos o errores.

OA I: Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y validez de estas.

Del mismo modo, las actitudes a desarrollar son las siguientes:

OA B: Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.

OA D: Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.

Los Objetivos de Aprendizaje (OA) tienen por finalidad definir los aprendizajes terminales esperables para una asignatura determinada y para cada año escolar. Cada uno de ellos conjuga habilidades, actitudes y conocimientos, en pro de lograr la formación integral de cada estudiante.

Razones trigonométricas pertenece al eje de geometría, en este eje, los y las estudiantes desarrollan sus capacidades espaciales y la comprensión del espacio y sus formas. Para ello, comparan, miden y estiman magnitudes, y analizan propiedades y características de diferentes figuras geométricas de dos dimensiones para razones trigonométricas en el triángulo rectángulo. En este eje, la habilidad de representar juega un rol especial. Al final de este ciclo, deberán ser capaces de apreciar y utilizar las propiedades y relaciones geométricas de manera adecuada y precisa, tendrán que ser competentes en mediciones geométricas y deberán relacionar la geometría con los números y el álgebra de manera armoniosa y concreta. Este eje presenta por primera vez las razones trigonométricas para que los y las estudiantes tengan más herramientas para resolver problemas. Es así, como en este proceso, deberán ser capaces de usar diferentes instrumentos de medida para visualizar ciertas figuras; se recomienda tanto las construcciones manuales como las tecnológicas.

La Planificación didáctica constituye una tarea fundamental para el desarrollo del trabajo docente, ya que es una herramienta útil para reflexionar sobre las intenciones didácticas con las que se espera se logren aprendizajes, y valorar los resultados de las acciones emprendidas. Es decir, en este proceso se ponen en juego las competencias de los actores educativos con el propósito de impulsar actividades que potencien el aprendizaje de los alumnos. Luego, para aprender matemática, se necesita comprender conceptos y encontrar relaciones, lo que supone la abstracción de acciones del medio y la habilidad para "hablar", "escribir" y "leer" en lenguaje cotidiano y en lenguaje matemático. En esta propuesta se plantea el aprendizaje de matemática como un tránsito desde lo concreto a lo pictórico, para luego llegar a lo simbólico. Esto significa que él o la estudiante como protagonista de su aprendizaje adquiere conocimientos mediante el "aprender haciendo" en situaciones concretas, que luego traduce a un nivel gráfico y después expresa en símbolos matemáticos. En esta propuesta se enfatiza el uso de representaciones, los y las estudiantes pueden resolver problemas en distintos niveles de abstracción, transitando en ambos sentidos desde representaciones reales, concretas, hasta representaciones simbólicas, y viceversa.

Dentro de las orientaciones didácticas, es importante que los profesores promuevan el diálogo, la discusión matemática y el desarrollo de habilidades matemáticas respecto de los contenidos, con el fin de despertar en las y los estudiantes la curiosidad y la capacidad de elaborar conceptos que permitan conectar la matemática con la vida diaria y las diferentes áreas del conocimiento.

Considerando lo anterior, para lograr el aprendizaje significativo, el docente debe tener en cuenta algunos recursos metodológicos como:

- Aprender haciendo: permite comenzar con una experimentación de fenómenos reales para acercarse a conceptos matemáticos por medio de experiencias reales y/o cotidianas, los estudiantes deben lograr formalizar el fenómeno en lenguaje puramente matemático. El profesor por medio de preguntas, explicaciones, observaciones y ejemplos de las actividades debe lograr el aprendizaje significativo. El concepto nuevo debe ser formalizado entre todos, pues así los estudiantes conectarán lo aprendido con experiencias vividas.
- Centrar el aprendizaje en el estudiante: El o la estudiante es quien hace la clase, el profesor guía el proceso de aprendizaje de modo tal que logre los objetivos propuestos. El aprendizaje se produce por medio de la acumulación de experiencia de los estudiantes, pues realizan las acciones y el docente es solo el gestor. Para ello, la resolución de problemas y el aprendizaje desde los errores son las oportunidades que permiten lograr el objetivo, sin dejar de lado la reflexión pues es la forma que se adquiere el conocimiento para aplicar en nuevas situaciones.
- Experiencias previas: consiste en que el conocimiento se construye sobre y a partir de los conocimientos previos. Ya que es relevante que la o el docente recurra a los conocimientos, destrezas, habilidades y experiencias previas de sus estudiantes. Estas experiencias son los fundamentos para desarrollar conceptos nuevos.
- Conexiones: para evitar que el aprendizaje sea fragmentado es importante que se establezcan conexiones entre matemática y otras asignaturas, de modo de alcanzar una comprensión profunda, con sentido, relevancia y utilidad.

- Recurrir frecuentemente a representaciones, analogías y metáforas: una manera de favorecer la comprensión y el significado de los conceptos es utilizar frecuentemente representaciones, analogías y metáforas para complementar el proceso de aprendizaje. Se estima que estos recursos son un aporte cognitivo y pedagógico, ya que, al representar situaciones de la vida cotidiana, permiten aclarar conceptos e introducir nuevas ideas haciéndolas más cercanas y significativas, lo que genera en las y los estudiantes mayor motivación y seguridad en relación con sus capacidades.
- Progresión de complejidad: sugiere que el aprendizaje debe ir desde lo más simple a lo más complejo de manera progresiva. La construcción de una base sólida de aprendizaje considera que cualquier nuevo aprendizaje se asimila a los aprendizajes previos. Por esto, es importante que él o la docente deba saber qué habilidades y conceptos han adquirido los estudiantes con anterioridad, para activarlos estratégicamente en función del aprendizaje futuro.
- Comunicación y aprendizaje cooperativo: es importante que él o la docente favorezca la comunicación y la colaboración entre sus estudiantes para elaborar las múltiples tareas de la asignatura. Analizar, evaluar y representar resultados en común son actividades esenciales en esta orientación, ya que profundizan y estimulan el pensamiento crítico y ponen a prueba el aprendizaje.
- El uso de tecnologías de información y comunicación (TIC): por una parte, la tecnología puede ayudar a las y los estudiantes a aprender matemática. Utilizando las herramientas tecnológicas los estudiantes pueden ejecutar los procedimientos rutinarios en forma rápida y precisa, utilizando el tiempo ahorrado para realizar acciones más complejas como razonar, elaborar modelos, buscar patrones, comprobar conjeturas que antes no eran accesibles para ellos. Por otra parte, la tecnología también ayuda a la evaluación, ya que permite a los y las

docentes examinar los procesos que han seguido sus estudiantes en sus investigaciones matemáticas y los resultados obtenidos.

- Repasar conceptos y ejercitar: esto con el fin de asegurar la comprensión; pero, a su vez, desde la repetición, incentivar a sus estudiantes a abordar problemas de mayor desafío y guiarlos(as) a realizar una verdadera actividad matemática.
- La retroalimentación: es relevante que las y los estudiantes desarrollen una visión positiva de las matemáticas y se sientan capaces de desempeñarse con una autoestima positiva y con seguridad. Para esto, conviene que él o la docente reconozca el esfuerzo de sus estudiantes, sus observaciones y su iniciativa para explorar nuevos conocimientos por sí mismos(as), en un ambiente que acoja todos los puntos de vista. Se debe aprovechar las oportunidades para generar discusiones sobre las vías de solución y respecto de la efectividad de las estrategias escogidas. En esta diversidad, el alumno o la alumna descubren cómo mejorar y superarse en su proceso de aprendizaje. Por otra parte, es importante que, de igual forma, el profesor apoye a cada estudiante en la revisión de su proceso, ayudándole a identificar las áreas que necesita mejorar y aquellas que ya están logradas ya sea de manera general como particular.

En resumen, todas estas orientaciones didácticas que entrega el programa de estudio van dirigidas a que los y las docentes puedan implementarlas en sus clases para así generar un aprendizaje significativo, profundo, con sentido y comprensible para los y las estudiantes.

El objetivo de aprendizaje es el **O.A. 8** que consiste en mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos:

- Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos.
- Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo.

- Aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados.
- Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.

Para abarcar el contenido perteneciente al objetivo mencionado se necesitan contenidos matemáticos tales como función medida, razones y proporciones, semejanza, teorema de Pitágoras, operaciones elementales.

Por tanto, como ya se ha trabajado anteriormente, los contenidos se pueden relacionar entre sí de tal forma que se puedan organizar en un esquema con el objetivo de favorecer el aprendizaje significativo y el desarrollo cognitivo de los estudiantes. Para esto, se presenta el siguiente esquema:

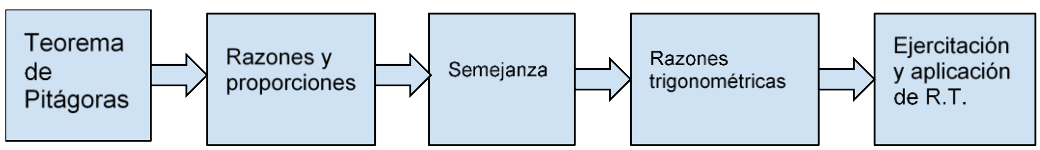


Ilustración 1: Esquema de contenidos

Para abordar este contenido se debe trabajar y/o recordar el teorema de Pitágoras (lo cual involucra trabajar con triángulos) y poder realizar relaciones entre ellos, de esta forma continuar con razones y proporciones entre lados de un triángulo u otras figuras geométricas. Posteriormente se enseña semejanza enfocándose en triángulos para finalmente comenzar con el contenido presente de razones trigonométricas. Cabe destacar que en cada tema se deben trabajar tanto ejercicios como problemas que lo involucren.

Por otra parte, el programa de estudio presenta diversas actividades las cuales se proponen al docente. Se sugieren 10 actividades, las que en su mayoría están conectadas con conocimientos relacionados a Ciencias Naturales en el nivel de 1ero medio y otras actividades relacionadas a la asignatura de Historia, Geografía y Ciencias Sociales de 2° medio.

De las 10 actividades, 3 son consideradas ejercicios ya que, a pesar de no contar con un ejemplo previo, en el enunciado del mismo se entregan todos los datos para que el estudiante solo resuelva. De esta forma 7 actividades son consideradas problemas, ya que para su desarrollo el estudiante debe encontrar datos realizando trabajos previos. Dentro de los problemas hay 2 actividades que mencionan que contenido utilizar en su desarrollo.

Cabe destacar, que una actividad propuesta en el programa de estudio va enfocada en desarrollar la habilidad de comunicar y argumentar y 9 de las actividades propuestas están enfocadas en desarrollar la habilidad de resolver problemas.

Finalmente, las actividades expuestas en el programa de estudio tienen relación con 2 de los 4 aprendizajes esperados en el OA8. A continuación se presentan los aprendizajes esperados que tienen relación con las actividades:

OA 8:

Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos:

Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos. Este aprendizaje esperado no está incluido en las actividades propuestas en el programa de estudio, ya que en ninguna actividad se necesita exclusivamente propiedades de la semejanza o ángulos para llegar al resultado correcto, sin embargo, en el texto del estudiante si se incorpora este aprendizaje esperado en las actividades diseñadas.

Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo. Este objetivo de aprendizaje en el programa de estudio no se trabaja completamente, ya que si bien existen actividades en las que se explican de manera pictórica y simbólica, encontramos que no se explican de manera manual y mediante el uso de software educativo.

Aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados. Las actividades si tienen relación con este objetivo de aprendizaje.

Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas. En las actividades del programa de estudio se presentan problemas geométricos, además también hay presencia de actividades vinculadas con otras asignaturas tales como Ciencias Naturales e Historia, Geografía y Ciencias Sociales.

1.2.3 Análisis comparativos de textos del estudiante.

Por otra parte, para realizar el análisis de los textos se trabajó en dos Textos Escolares de Matemática de la Editorial SM, en donde el primer texto es la edición 2019 mientras que el segundo texto es la edición 2021.

Con respecto al Texto del Estudiante Edición 2019 el contenido de razones trigonométricas se aborda en la Unidad 3, específicamente en la lección 8 (tema 1 y 2). Para esto, en el tema 1 se presentan las razones trigonométricas en triángulos rectángulos en base a la relación con el conocimiento previo (semejanza de triángulos). Para comenzar la lección, hay una actividad introductoria en la que se recuerdan contenidos trabajados anteriormente tales como: aplicación de teorema de Pitágoras, semejanza de triángulos. Posteriormente, se expone el contenido a través de una actividad que pone en práctica lo comprendido anteriormente, desarrollando preguntas de análisis. Luego, se llevan a cabo actividades de aplicación directamente a través del cálculo de medidas de ángulos utilizando las razones trigonométricas por medio de trabajos en grupo e individual. Al terminar este tema se desarrolla un taller de habilidades, que tal y como se menciona, se evalúa el desarrollo de la habilidad representar. En el tema 2 se presentan actividades de aplicación de las razones trigonométricas incluyendo el uso de calculadora para el cálculo de las medidas de ángulos. También, se incorpora el trabajo con recursos de software tanto para el uso de docente como para el uso de estudiantes.

En cuanto a las actividades presentadas, para introducir el contenido se presentan preguntas con respecto al conocimiento que se tiene sobre este, en este caso serán de razones trigonométricas. Luego de esto se ejercitan los conocimientos previos necesarios tales como semejanza de triángulos, teorema de Pitágoras, razones y proporciones a partir de actividades.

Finalmente, al presentar y formalizar el contenido se presenta una serie de ejercicios y problemas que se enfocan en representar, argumentar y comunicar.

Cabe destacar que las actividades propuestas en su mayoría son ejercicios, ya que se les entregan todos los datos para que los estudiantes solo apliquen el contenido y realicen operaciones básicas, al comienzo de cada actividad se presenta uno ya realizado para que el estudiante tenga una guía de cómo resolver. Sin embargo, se presentan 7 problemas en los que los estudiantes deben analizar y modelar la situación dada y a partir de ello poder resolver con los conocimientos adquiridos para finalmente desarrollar una respuesta a las preguntas dadas.

Por otra parte, analizando el Texto del Estudiante edición 2021 el contenido de razones trigonométricas se trabaja en la Unidad 3, específicamente en la lección 9 donde se realiza una actividad introductoria a partir de material concreto y aplicando contenidos trabajados previamente tales como teorema de Pitágoras y semejanza de triángulos. Para lo mencionado anteriormente se realizan preguntas de análisis con el fin de obtener conclusiones para comenzar con el contenido de razones trigonométricas.

Luego de presentar las razones mencionadas se realizan actividades de aplicación de contenidos y desarrollo de problemas, pero no solo se trabaja el triángulo rectángulo, sino que también se trabaja el triángulo isósceles. Finalizando, se realiza una evaluación para concluir el tema y verificar el aprendizaje de este contenido.

En cuanto a las actividades presentadas, para introducir se presentan preguntas con respecto al conocimiento que se tiene sobre el contenido a trabajar, en este caso serán de razones trigonométricas. Luego de esto se ejercitan los conocimientos previos necesarios tales como semejanza de triángulos, teorema de Pitágoras, razones y proporciones a partir de actividades. Finalmente, al presentar y formalizar el contenido se presenta una serie de ejercicios y problemas que se enfocan en representar, representar, argumentar y comunicar. En base a lo anterior, las actividades propuestas son mayormente ejercicios y se aplican razones trigonométricas haciendo la relación con el criterio de semejanza trabajado anteriormente, se entregan todos los datos para que los estudiantes solo realicen las operatorias básicas. Además, se presentan 5 problemas de los cuales se requiere de modelar y representar los enunciados entregados para así realizar un análisis y que sea el estudiante quien pueda identificar lo que se debe realizar para poder resolver el problema.

1.3 Objetivos

Objetivo General:

Caracterizar las estrategias que desarrollan los estudiantes en problemas no rutinarios en el transcurso del proceso de enseñanza-aprendizaje relacionado al contenido de las razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos.

Objetivos específicos:

1. Diseñar una propuesta didáctica que contenga problemas no rutinarios en el proceso de enseñanza-aprendizaje de razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos.
2. Aplicar la secuencia didáctica en el aula con los estudiantes.
3. Analizar las estrategias que utilizaron los estudiantes en los problemas no rutinarios presentados en la secuencia didáctica.
4. Evaluar el diseño didáctico considerando la caracterización de las estrategias presentadas por los estudiantes.

CAPÍTULO II

OBJETO MATEMÁTICO

Este capítulo, presenta el objeto matemático involucrado en la investigación, razones trigonométricas del seno y coseno en triángulos rectángulos. Expone una mirada epistemológica e histórica, y luego por medio de demostraciones matemáticas se expone la transición en la trigonometría hacia las razones del seno y coseno.

2.1 Elementos de la epistemología del objeto matemático

La palabra trigonometría epistemológicamente del griego *trigonon*, triángulo, y *metría*, medición, es la ciencia que estudia y plantea relaciones entre la medida de los lados de un triángulo rectángulo y un ángulo agudo de este. Esta investigación se enfocará en el estudio de las razones trigonométricas de seno coseno en el triángulo rectángulo, sin embargo, también se puede trabajar desde un triángulo cualquiera.

La trigonometría surge de la necesidad del ser humano en estudiar la astronomía y la observación del cielo en Grecia, a través del círculo trigonométrico donde diversas civilizaciones aportaron en el estudio de ella, “un ejemplo de ello consistió en el medir la distancia entre la Tierra y la Luna, el radio terrestre y su perímetro, entre otras medidas significativas” (Abonia, 2017, p. 46). Poco más de un siglo de desarrollo inicial por Hiparco (antes del segundo siglo D.C) se trabajó con mayor profundidad con el triángulo rectángulo “pero esto no fue totalmente desarrollado hasta el exhaustivo trabajo desarrollado por Al-Biruni en Las Sombras 1021” (Rueda, 2012, p.13) trabajando con razones trigonométricas y calculando alturas de montañas. Sin embargo “la trigonometría con el triángulo rectángulo y la interpretación de las funciones como proporciones de los lados de un triángulo rectángulo no tuvo relevancia hasta mediados del siglo XVI" (Rueda, 2012, p.13). Considerando los avances hasta ese entonces se comienza el estudio de la trigonometría a partir de la circunferencia unitaria, las funciones trigonométricas y el cálculo de medidas angulares.

Posteriormente se trabaja en base a las funciones trigonométricas las cuales a través de razones trigonométricas se estudia el comportamiento que tienen a partir de gráficos, identidades trigonométricas, etc. A raíz de esto se realiza un tratamiento del contenido en donde en el aula se enseñan las razones trigonométricas que consiste en la relación entre la medida de los lados de un triángulo rectángulo.

Es importante destacar, que las razones trigonométricas no son una disciplina de la matemática pura, sino que estas emergen tras transposiciones didácticas para impartirse en el aula, enseñando sólo las fórmulas que permiten el cálculo de la medida de los ángulos y relacionándolas solo con las razones que pueden existir entre lados de un triángulo rectángulo.

2.2 Objeto o contenido matemático

Nuestro trabajo apunta a problemas no rutinarios en el ámbito de la trigonometría específicamente con las razones trigonométricas de seno y coseno en el triángulo rectángulo, según esto, es habitual encontrar definiciones sobre el concepto de razones trigonométricas. Las definiciones naturalmente se pueden encontrar en diversos textos como, por ejemplo, en "Trigonometría y geometría analítica" de Masjuán (2013) que menciona:

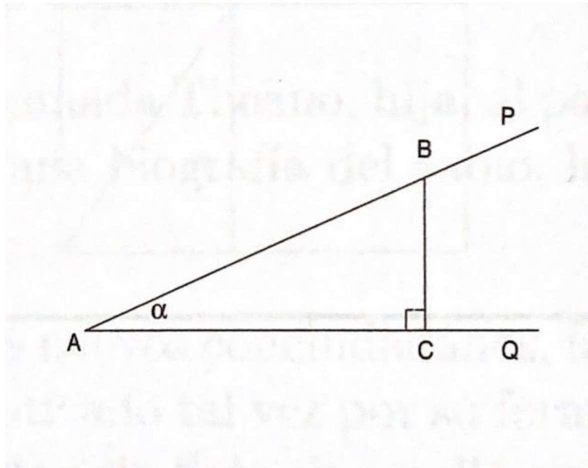


Ilustración 2 extraída del texto "Trigonometría y geometría analítica" (Masjuán, 2013, p.14)

Considerando la figura anterior, se define:

$$\cos \alpha = \frac{CA}{AB}$$

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan \alpha = \frac{BC}{CA}$$

$$\cot \alpha = \frac{CA}{BC}$$

$$\sec \alpha = \frac{AB}{CA}$$

$$\csc \alpha = \frac{AB}{BC}$$

Otro tratamiento de las razones trigonométricas se analiza desde el punto de vista de funciones trigonométricas, donde se extiende el concepto de razones, que aborda solo ángulos positivos, al de función trigonométrica o función circular, que sirve para ángulos de cualquier medida algebraica (positivos, negativos, agudos, obtusos, cóncavos, etc.) (Masjuán, 2013, p. 60). Cabe destacar que en este tratamiento se analizan aspectos de su gráfica, dominio, recorrido y variaciones.

Dentro del desarrollo de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo podemos identificar las relaciones con el teorema de Pitágoras, siendo razones establecidas en la proporcionalidad, obteniendo de esta forma las identidades fundamentales trigonométricas. Para esto, es importante demostrar el teorema particular de Pitágoras, el cual se presenta a continuación:

Hipótesis: Sea un triángulo rectángulo de catetos a y b, con hipotenusa c.

Tesis: $a^2 + b^2 = c^2$

A partir de una construcción geométrica con regla y compás se obtiene la siguiente figura:

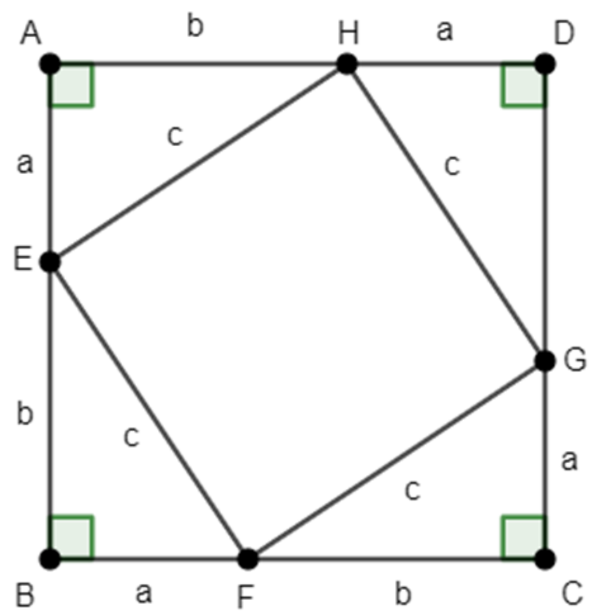


Ilustración 3: Elaboración propia.

Para poder obtener el área del cuadrado grande, se puede calcular mediante la suma de las áreas de las figuras que están inscritas, es decir:

$$Á_{[ABCD]} = Á_{\Delta HAE} + Á_{\Delta EBF} + Á_{\Delta FCG} + Á_{\Delta GDH} + Á_{[EFGH]} \qquad (1)$$

Como ya se tienen las medidas de los lados, se calculan obteniendo lo siguiente:

$$Á_{\Delta HAE}=\frac{ab}{2} \quad \wedge \quad Á_{\Delta EBF}=\frac{ab}{2} \quad \wedge \quad Á_{\Delta FCG}=\frac{ab}{2} \quad \wedge \quad Á_{\Delta GDH}=\frac{ab}{2} \quad \wedge \quad Á_{[EFGH]}=c\cdot c$$

Por simetría y sustituyendo en (1)

$$Á_{[ABCD]}=\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+c^2 \qquad (2)$$

$$Á_{[ABCD]}=4\left(\frac{ab}{2}\right)+c^2$$

Pero se sabe que:

$$Á_{[ABCD]}=(a+b)^2$$

Por simetría y sustitución en (2) se tiene:

$$(a+b)^2= \; 4\left(\frac{ab}{2}\right)+c^2$$

$$a^2+2ab+b^2=2ab+c^2$$

Resolviendo se obtiene:

$$a^2+2ab+b^2=2ab+c^2 \qquad /-2ab$$

$$a^2+2ab+b^2-2ab=2ab+c^2-2ab$$

$$a^2+b^2=c^2$$

Por lo tanto, se demuestra que la suma de los cuadrados de la longitud de los catetos (en este caso, a y b) es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa (que en este caso es c).

El teorema de Pitágoras ayuda a deducir lo que se conoce como identidades fundamentales en el triángulo rectángulo, las cuales se pueden encontrar en diversos textos, tales como en “Trigonometría y geometría analítica” de Masjuán (2013), por mencionar algunas:

1) Relación entre seno y coseno:

$$sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Sabemos por Teorema de Pitágoras que:

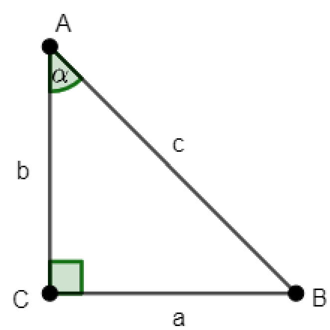


Ilustración 4: Elaboración propia

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Multiplicando por $\frac{1}{c^2}$ en ambos lados de la igualdad queda:

$$a^2 + b^2 = c^2 \, / \frac{1}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \left(\frac{c}{c}\right)^2$$

Por simetría:

$$\frac{a}{c} = sen(\alpha) \ \wedge \ \frac{b}{c} = \cos(\alpha)$$

Por transitividad y operatoria:

$$sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

2) Relación entre secante y tangente:

$$\sec^2(\alpha) - tg^2(\alpha) = 1$$

Sabemos por Teorema de Pitágoras que:

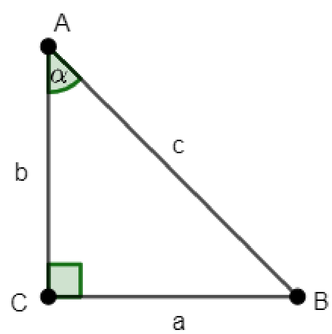


Ilustración 5: Elaboración propia

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Multiplicando por $\frac{1}{b^2}$ en ambos lados de la igualdad queda:

$$a^2 + b^2 = c^2 \, / \frac{1}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2$$

Por simetría:

$$\frac{a}{b} = tg(\alpha) \ \wedge \ \frac{c}{b} = \sec(\alpha)$$

Por transitividad y operatoria:

$$tg^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha)$$

Sumando $-tg^2(\alpha)$ en ambos lados de la igualdad queda:

$$tg^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha) \ / -tg^2(\alpha)$$
$$\Rightarrow 1 = \sec^2(\alpha) - tg(\alpha)$$

Por simetría:

$$\sec^2(\alpha) - tg^2(\alpha) = 1$$

3) Relación entre cosecante y cotangente:

$$\csc^2(\alpha) - \cot^2(\alpha) = 1$$

Sabemos por Teorema de Pitágoras que:

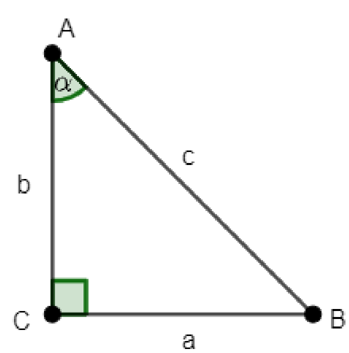


Ilustración 6: Elaboración propia

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Multiplicando por $\frac{1}{a^2}$ en ambos lados de la igualdad queda:

$$a^2 + b^2 = c^2 \,/\frac{1}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

Por simetría:

$$\frac{b}{a} = \cot(\alpha) \;\; \wedge \;\; \frac{c}{a} = \csc(\alpha)$$

Por transitividad y operatoria:

$$1 + \cot^2(\alpha) = \csc^2(\alpha)$$

Sumando $-\cot^2(\alpha)$ en ambos lados de la igualdad queda:

$$1 + \cot^2(\alpha) = \csc^2(\alpha) \;/\; -\cot^2(\alpha)$$
$$\Rightarrow 1 = \csc^2(\alpha) - \cot^2(\alpha)$$

Por simetría:

$$\csc^2(\alpha) - \cot^2(\alpha) = 1$$

De igual forma, como se mencionó al inicio, hay otras identidades tales como:

1) Seno del ángulo doble:

Por seno de la suma de ángulos se tiene:

$$sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot sen(\beta)$$

Sea $sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha+\alpha)$

Entonces:

$$sen(\alpha+\alpha) = sen(\alpha)\cdot\cos(\alpha)+\cos(\alpha)\cdot sen(\alpha)$$

$$\Rightarrow\ sen(2\alpha) = 2\cdot sen(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$$

Multiplicando $\frac{1}{\cos(\alpha)}$ en ambos lados de la igualdad queda:

$$\frac{sen(2\alpha)}{\cos(\alpha)} = 2\cdot sen(\alpha)$$

Multiplicando $\frac{1}{2}$ en ambos lados de la igualdad queda:

$$\frac{sen(2\alpha)}{\cos(\alpha)}\cdot\frac{1}{2} = 2\cdot sen(\alpha)\cdot\frac{1}{2}$$

Desarrollando se obtiene:

$$\frac{sen(2\alpha)}{2\cdot\cos(\alpha)} = sen(\alpha)$$

2) Coseno del ángulo doble:

Por coseno de la suma de ángulos se tiene:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-sen(\alpha)\cdot sen(\beta)$$

Sea $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\alpha)$

Entonces:

$$\cos(\alpha+\alpha) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\alpha)-sen(\alpha)\cdot sen(\alpha)$$

$$\Rightarrow \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha)-sen^2(\alpha)$$

Sumando $sen^2(\alpha)$ en ambos lados en ambos lados de la igualdad y desarrollando se obtiene:

$$\cos(2\alpha)+sen^2(\alpha) = \cos^2(\alpha)$$

Utilizando una aplicación de la identidad trigonométrica fundamental y sustituyendo se tiene:

$$\cos(2\alpha) + 1 - \cos^2(\alpha) = \cos^2(\alpha)$$

Desarrollando:

$$\cos(2\alpha) + 1 - \cos^2(\alpha) = \cos^2(\alpha)$$

$$\Rightarrow \cos(2\alpha) + 1 = 2 \cdot \cos^2(\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(2\alpha) + 1}{2} = \cos^2(\alpha)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\cos(2\alpha) + 1}{2}} = \cos(\alpha)$$

3) Tangente del ángulo doble:

Se sabe que la suma de tangente de dos ángulos es:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Sea $\tan(\alpha)$ y $\tan(\alpha)$, calculando el ángulo doble se tiene que:

$$\tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\alpha)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\alpha)}$$

$$\Rightarrow \tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

Entonces, se han demostrado diversas relaciones con el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas en triángulos rectángulos. Así mismo, para otro tipo de triángulos no rectángulos se establecen relaciones que utilizan razones trigonométricas en función de sus lados, como, por ejemplo:

1) Teorema del seno:

Hipótesis: Sea un triángulo ABC no rectángulo.

Tesis: $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$

Trazando la altura (h_A) desde el vértice A, a partir de la construcción geométrica y por razones trigonométricas:

$$i)\ \sin(B) = \frac{h_A}{c} \quad \Rightarrow \quad h_A = c \cdot \sin(B)$$

$$ii)\ \sin(C) = \frac{h_A}{c} \quad \Rightarrow \quad h_A = b \cdot \sin(C)$$

Por simetría y transitividad en i) e ii) se tiene:

$$h_A = c \cdot \sin(B) \quad \wedge \quad h_A = b \cdot \sin(C)$$

$$\Rightarrow c \cdot \sin(B) = b \cdot \sin(C)$$

Por operatoria se obtiene:

$$\frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} \quad (a)$$

Por otra parte, trazando la altura del vértice B (h_B) se puede establecer que:

$$iii)\ \sin(A) = \frac{h_B}{c} \quad \Rightarrow \quad h_B = c \cdot \sin(A)$$

$$iv)\ \sin(C) = \frac{h_B}{a} \quad \Rightarrow \quad h_B = a \cdot \sin(C)$$

Por simetría y transitividad en iii) y iv) se tiene:

$$h_B = c \cdot \sin(A) \quad \wedge \quad h_B = a \cdot \sin(C)$$

$$c \cdot \sin(A) = a \cdot \sin(C)$$

Por operatoria se tiene:

$$\frac{c}{\sin(C)} = \frac{a}{\sin(A)} \quad (b)$$

Finalmente, por (a) y (b):

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

2) Teorema del coseno:

Hipótesis: Sea un triángulo ABC no rectángulo.

Tesis: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$

Sea un triángulo ABC cualquiera, se traza la altura desde el vértice B ((h_B) formando así dos triángulos rectángulos, de esta forma, se puede establecer que:

$$c^2 = x^2 + h_B^2$$

Pero h_B^2 se puede expresar en función un cateto del triángulo rectángulo, obteniendo así:

$$c^2 = x^2 + (a^2 - (b-x)^2)$$
$$\Leftrightarrow c^2 = x^2 + a^2 - (b^2 - 2bx + x^2)$$
$$\Leftrightarrow c^2 = x^2 + a^2 - b^2 + 2bx - x^2$$
$$\Leftrightarrow c^2 = a^2 - b^2 + 2bx$$

Despejando a^2 se tiene:

$$c^2 = a^2 - b^2 + 2bx \quad /+b^2$$
$$\Leftrightarrow c^2 + b^2 = a^2 - b^2 + 2bx + b^2$$
$$\Leftrightarrow c^2 + b^2 = a^2 + 2bx \quad /-2bx$$
$$\Leftrightarrow c^2 + b^2 - 2bx = a^2 + 2bx - 2bx$$
$$\Leftrightarrow c^2 + b^2 - 2bx = a^2 \quad (i)$$

Pero por construcción geométrica se sabe que:

$$\cos(A) = \frac{x}{c} \quad \Rightarrow \quad \cos(A) \cdot c = x \quad (ii)$$

Sustituyendo (i) en (ii) se obtiene:

$$c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A) = a^2$$

Finalmente, por simetría se demuestra que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

A través del mismo procedimiento y trazando las alturas del vértice A y C, se obtiene lo siguiente:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(B)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$$

Cabe destacar que en demostración anterior se obtiene así el teorema general de Pitágoras.

Para efectos de esta secuencia didáctica se trabaja con las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos, a través de problemas no rutinarios. Sin embargo, podrían emerger algunas de las identidades, pero el objetivo de este capítulo es dar cuenta de la gama de relaciones que tienen las razones trigonométricas tanto en el ámbito de las funciones trigonométricas como con el teorema particular de Pitágoras.

CAPÍTULO III

MARCO DE REFERENCIA

Este capítulo, expone de forma teórica y práctica el diseño didáctico que se implementará en la investigación, diseño que tiene sus fundamentos en la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, ampliamente avalada por docentes y futuros docentes para lograr los aprendizajes esperados y significativos en los estudiantes.

3.1 Enfoque teórico del diseño didáctico

Guy Brousseau entre sus aportes propone un modelo desde el cual pensar la enseñanza como un proceso centrado en la producción de los conocimientos matemáticos en el ámbito escolar. La producción de conocimientos se entiende, como un proceso que implica prácticas y actores diversos que se concreta en una actividad que promueve y facilita, preferentemente de manera sistematizada, el acceso a los conocimientos, el desarrollo de habilidades, hábitos y actitudes. Es decir, producir conocimientos considera tanto establecer nuevas relaciones, como transformar y reorganizar otras. Cualquiera sea el caso, la producción de conocimientos implica validarlos, según normas y procedimientos aceptados por los diferentes referentes de la comunidad matemática. Luego, si consideramos una clase como un ámbito de producción de conocimiento, considera ya posturas respecto del aprendizaje, de la enseñanza del conocimiento matemático, los que deben ser validados por quien es el referente de la comunidad matemática, es decir, el profesor. Por lo tanto, quien enseña valida la producción del conocimiento en el aula y esto puede ser incluso por medio del uso de un fenómeno didáctico como el del deslizamiento metacognitivo.

Considerando lo anterior, nuestro enfoque será el que plantea la teoría de Brousseau, en el que intervienen el estudiante, profesor y el medio didáctico, lo que nos permitirá generar la diferencia con el enfoque tradicional habitualmente utilizado en el segundo medio. El medio didáctico, elemento fundamental que interviene en nuestro proceso de enseñanza-aprendizaje, se evidenciará en las relaciones entre una situación a-didáctica y didáctica, que se pondrán en práctica. En cuanto a la situación a-didáctica, nuestro análisis apriori será el medio para atenderla, pues un diagnóstico por medio de un cuestionario o guía de trabajo que nos permita evaluar los conocimientos previos de los estudiantes para iniciar la fase de realización de nuestro proyecto será la evidencia de la aplicación de este elemento. Luego, nuestra intervención por medio del profesor proporcionará el medio didáctico con el cual los estudiantes construyen su conocimiento sobre razones trigonométricas en la enseñanza.

Estos medios didácticos, y el contrato didáctico, el que Brousseau plantea como el conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y el conjunto de comportamientos que el alumno espera del docente, nos permitirán identificar los efectos que acontecen en medio de las aplicaciones de situaciones didácticas, efectos que nuestro referente teórico los identifica como las interacciones que acontecen en la situación didáctica y que interfieren, dificultan o inhiben la construcción del conocimiento que el estudiante pone en práctica en el medio didáctico que el profesor elabora. Algunos de estos son, el efecto Topaze, el efecto Jourdain, el uso abusivo de la analogía y el deslizamiento metacognitivo, sobre este último estará puesto nuestro énfasis de estudio.

El deslizamiento metacognitivo, refiere al hecho de que, en ciertas circunstancias, el profesor puede realizar la enseñanza tomando las explicaciones y medios heurísticos como objetos de estudio en lugar del verdadero conocimiento matemático. Para Brousseau, el ejemplo más llamativo de este efecto deriva nuevamente de la reforma de las matemáticas modernas: es el uso de gráficos para enseñar las estructuras matemáticas. La teoría de conjuntos, al convertirse en medio de enseñanza, devino objeto de ésta y se sobrecargó de convenciones y lenguajes que también fueron enseñados. Del mismo modo, creemos que este efecto se produce en el ámbito escolar de razones trigonométricas en la enseñanza, pues cuando una planificación de clases en ocasiones no logra transmitir el objeto matemático pretendido, el profesor no tiene más recursos o bien se ve obligado a volver a tomar el contenido y explicarlo nuevamente, se recurre, por ejemplo, al uso de reglas mnemotécnicas, pues la forma de la clase termina sustituyendo al fondo. Lo que en muchas ocasiones es usado por el profesor de manera implícita o inconsciente, pues el propósito termina siendo que el estudiante aprenda sin considerar si construye su conocimiento o si logra un aprendizaje significativo.

3.2 Utilización del enfoque teórico para el diseño didáctico

En la Teoría de Situaciones Didácticas se presentan diversos tipos de situaciones, dentro de ellas, las didácticas y las a-didácticas, dichas situaciones serán las que se vincularán con el diseño didáctico propuesto para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos.

Para contextualizar es necesario mencionar que en las situaciones didácticas interviene el profesor, el estudiante y el medio didáctico de tal forma que el profesor es quien guía a construir y facilitar el conocimiento al estudiante, por tanto, estas situaciones corresponden a las interrelaciones que se producen entre estos elementos. Mientras que la situación a-didáctica “es el proceso en el que el docente le plantea al estudiante un problema que asemeje situaciones de la vida real que podrá abordar a través de sus conocimientos previos, y que le permitirán generar, además, hipótesis y conjeturas que asemejan el trabajo que se realiza en una comunidad científica.” (Chavarría, 2006, p.2).

En las situaciones a-didácticas, que se producen en el proceso de resolución de problemas propuestos por el docente, existen tres situaciones (acción, formulación y validación). Barreiro (2012) señala que la situación de acción es el momento en que el estudiante debe leer y comprender un problema, poner sus concepciones y conocimientos implícitos con el medio, explorar el problema, utilizar conocimientos anteriores y reorganizarlos para emplearlo en ello, la segunda situación es la de formulación que, según el mismo autor, el alumno elabora conjeturas en base a las acciones realizadas sobre el problema y necesita comunicarlas. Esto le exige formular explícitamente las ideas que derivan de la confrontación entre los conocimientos implícitos y el medio. Por último, la tercera situación es la de validación que consiste en que los alumnos se ven obligados a aportar argumentaciones con el valor de pruebas, a confrontar con las de otros y finalmente a decidir en un proceso social y científico.

En el diseño e implementación de la secuencia didáctica se incorporan en dos oportunidades situaciones a-didácticas que son un aspecto clave de la Teoría de Situaciones Didácticas. En la clase 2 se presenta un problema no rutinario extraído de la tesis de Moraga (2021), mientras que en la clase 6 se implementa uno de elaboración propia, en ambos casos, están modificados y creados para que se trabajen los tres elementos de una situación a-didáctica. Posterior a ello en las dos clases se institucionaliza el contenido.

En las dos instancias la forma de trabajo es similar, en un primer momento el trabajo es de manera individual, se entrega el problema no rutinario, se lee y se contextualiza con el fin de comenzar la activación de conocimientos previos, es aquí donde se incorpora la situación de acción, ya que los estudiantes deben explorar el problema y utilizar los conocimientos adquiridos para resolverlo.

La segunda instancia de trabajo es en parejas, esto con el fin de incorporar la situación de formulación. Para esto, los estudiantes deben comunicar de forma colaborativa sobre qué acciones o estrategias son viables para resolver el problema y elaborar una posible solución.

Posteriormente, en ambos casos se incorpora la situación de validación, en la que las parejas presentan sus procedimientos y respuestas a los otros equipos de trabajo, para ello los estudiantes deben utilizar argumentos matemáticos y pruebas concretas con el fin de defender su postura frente a la resolución del problema.

Finalmente, tanto en la clase N°2 como en la N°6, se cierran con la institucionalización por parte de la profesora de los problemas.

De este modo es que la Teoría de Situaciones Didáctica está presente en la secuencia de clases diseñada ya que, se presentan situaciones y elementos claves que son fundamentales en esta teoría.

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA

Esta investigación de carácter cualitativo se basó en las metodologías de la Ingeniería Didáctica y el Estudio de Clases con el fin de caracterizar las estrategias que utilizaron los estudiantes para resolver los problemas no rutinarios de razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos. La ingeniería didáctica, según Artigué, es una investigación basada en la experimentación en clases que se ubica en el estudio de casos y que su validación se basa en la confrontación del análisis apriori y aposteriori. Del mismo modo, el estudio de clases como una de las metodologías utilizadas, según los autores Lim-Ratnam, Lee, Jiang y Sudarshan, tiene como propósito principal ayudar a los docentes a ser aprendices a lo largo de la vida a través del desarrollo y participación en una comunidad de aprendizaje profesional. En nuestro caso, con el fin de ayudar a mejorar las prácticas pedagógicas en el proceso de nuestra formación inicial docente.

4.1 Elementos de Ingeniería Didáctica

Artigué (1995) describe la metodología de la Ingeniería didáctica por medio de un proceso de investigación experimental, delimitado en cuatro fases: “(…) la fase 1 de análisis preliminar, la fase 2 de concepción y análisis apriori de las situaciones didácticas de la ingeniería, la fase 3 de experimentación y finalmente la fase 4 de análisis aposteriori y evaluación” (p. 38). Del mismo modo, la autora caracteriza la Ingeniería Didáctica como un esquema experimental basado en realizaciones didácticas, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Allí se distinguen dos niveles: el de micro-ingeniería donde se toman en cuenta principalmente la complejidad de los fenómenos del aula y el de la macro-ingeniería que es la que permite componer la complejidad de las investigaciones de micro-ingeniería con la de fenómenos asociados a la duración de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje.

Para efectos del presente trabajo, este se fundamentó en el nivel de microingeniería debido a que los objetivos a que se apuntan son los fenómenos que subyacen en el proceso de aprendizaje y enseñanza de la trigonometría analizados desde una secuencia didáctica, por ello se sustenta bajo las diferentes fases de análisis de la metodología de las que Artigue (1995) hace referencia.

Teniendo en cuenta la metodología enunciada anteriormente, se documentó en este proyecto una secuencia de clases que fue implementada en el 2do medio A del Instituto Hermanos Matte, la que se basó en las 4 fases de la ingeniería didáctica, la primera fase de análisis preliminares, la segunda fase de concepción y análisis apriori de las situaciones didácticas, la tercera fase de experimentación y la cuarta fase el análisis aposteriori y evaluación. Cada una de ellas caracterizadas a continuación de la siguiente manera:

La primera fase, según Artigue (1995) hace referencia a los análisis teóricos que, en general, están sobre el objeto matemático estudiado y que están relacionados con él. Aquí se identifican como los análisis preliminares más frecuentes los siguientes, el análisis preliminar fundamentado en el análisis epistemológico del contenido, el análisis de la enseñanza tradicional del mismo y sus efectos como el fenómeno didáctico del deslizamiento metacognitivo, además del análisis de las concepciones de los estudiantes. Para lo anterior, en cuanto al análisis epistemológico y didáctico, se revisaron textos y libros de historia de las matemáticas sobre razones trigonométricas. Con relación a las concepciones de los estudiantes, se realizó un diagnóstico, sin nota, por medio de una guía y evaluación que consideró diversos ejercicios con el fin de identificar las concepciones y los conocimientos previos de los estudiantes respecto al objeto de estudio.

La segunda fase, sobre la concepción y el análisis apriori. En esta fase se construyó la secuencia didáctica y se realizaron los respectivos análisis apriori los que son conjuntos de hipótesis que los estudiantes tienen respecto al objeto matemático. Lo que quiere decir que, “Si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a través de la interacción de un medio determinado, la teoría de las situaciones didácticas que sirve de referencia a la metodología de la ingeniería ha pretendido, desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones.” (Artigue 1998, p.44). Por lo tanto, el objetivo fue por medio de la variable micro didáctica -referidas a las relaciones entre el conocimiento, el profesor y el alumno con una situación-problema concreto- determinar y controlar al estudiante en un nivel descriptivo y predictivo, analizando lo qué podría ser su campo de acción, selección y decisión. Controlando que estos campos de comportamientos posibles, en caso de que estos intervengan, sean el resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado en el aprendizaje. Considerando siempre dentro de estos campos, el fenómeno didáctico del deslizamiento metacognitivo en cuanto a errores y dificultades que presenta la enseñanza de razones trigonométricas.

Lo anterior, se confrontó con el análisis aposteriori para la evaluación. De modo que, se elaboraron situaciones didácticas por medio de situaciones-problema que nos permitió observar las distintas fases del aprendizaje como lo son la acción, formulación, validación e institucionalización. Así también, en el análisis apriori desarrollado, el diseño de la situación didáctica de forma previa a la clase explicitó supuestos referidos a los procesos de enseñanza aprendizaje que se generaron en la situación y los resultados que desea producir los probables y los seguros.

La tercera fase, es la fase de realización de la ingeniería en el segundo medio. La que se inicia desde el momento en que se da el contacto entre el profesor investigador y los estudiantes. Esta fase de experimentación involucra la explicitación de los objetivos y condiciones de realización que fueron acordadas con el profesor titular o guía, con el fin de lograr la mayor participación de los estudiantes. Pues dada la naturaleza de estos últimos, todo lo que está relacionado con evaluaciones o experimentación voluntaria, no acceden a participar. Luego, con los estudiantes se estableció el contrato didáctico, para proseguir con la aplicación del instrumento de nuestra investigación. Se finalizó esta fase con un registro de las observaciones realizadas durante la implementación y en las actividades desarrolladas por los alumnos, detectando en las acciones cuando el deslizamiento metacognitivo afecta en el razonamiento para la resolución de un problema no rutinario. Finalmente, todos los datos recolectados se analizaron para proceder con la última fase que es el análisis aposteriori.

Cuarta y última fase, es la etapa en la que los datos recolectados a lo largo de la implementación, como las observaciones que se obtienen de las secuencias de enseñanza y las producciones de los estudiantes se completan con otros obtenidos de la aplicación de metodologías previas como cuestionarios, guías, información entregada por los estudiantes en clases, todos dentro de las sesiones de enseñanza contempladas para la investigación. Lo anterior con el fin de responder a nuestra pregunta inicial sobre, las estrategias que utilizan los estudiantes con problemas no rutinarios en contenidos que involucran razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos, por medio de la evaluación de los resultados obtenidos y su validación confrontando de manera fundamentada el análisis apriori con él aposteriori.

4.2 Metodología de Estudio de Clase

El Estudio de Clase es un proceso mediante el cual los profesores se empeñan en mejorar progresivamente sus métodos de enseñanza, a través de la observación y la crítica mutua de sus clases, se define como “un proceso mediante el cual los profesores trabajan en común para mejorar progresivamente sus métodos pedagógicos, examinándose y criticándose mutuamente las técnicas de enseñanza.” (Mena, 2006, p.1). El proceso del estudio de clase consiste en “la preparación, la clase a investigar y las sesiones de revisión” (Isoda, Arcavi, Mena, 2008). De acuerdo con el informe investigativo de Arturo Mena Lorca (2006) “El Estudio de Clases Japonés en Perspectiva” el proceso de estudio de clases consta de tres aspectos bien definidos, que se realizan con reiteración, de manera de mejorar progresivamente los diseños y la ejecución de clases.

La primera fase es Preparación (kyozai kenkyu). Trabajando en colaboración, los profesores buscan y seleccionan materiales relevantes para el propósito de la clase, refinan un primer diseño de acuerdo con las necesidades efectivas de los alumnos, y reúnen todo ello en un plan de clase. (Mena, 2006, p.2). En esta etapa, se realiza un trabajo para transformar un proyecto del currículo en uno que se pueda implementar en el aula. Comenzó con la búsqueda y selección de los materiales relevantes para la clase, y continúo con el refinamiento de su diseño, según las necesidades de los estudiantes. Esto se reúne en un plan de clase que puede ser visto como una herramienta de: enseñanza, observación y comunicación. De ahí su versatilidad y los resultados diversos que puede aportar en la reflexión de las prácticas. La implementación de la primera fase en nuestro proyecto consistió en trabajar sobre un contenido del Programa de Estudio que se debe enseñar en 2do Medio. En conjunto se investigó sobre problemas no rutinarios y se diseñó uno de acuerdo con el nivel cognitivo de los estudiantes lo que se detalla más adelante en el plan de clases.

La segunda etapa (kenkyu jyugyo), es la implementación de la clase en estudio, que se lleva a cabo en presencia de una cantidad variable de profesores, quienes observan el desarrollo de esta y realizan un registro de observaciones con aspectos positivos y de mejora (Mena, 2006, p.2). Esta fase, se realizó en presencia del profesor guía, y debido a protocolos administrativos y de seguridad del colegio, no pudo concurrir otro docente a observar la clase, sin embargo, fue grabada para su respectivo análisis.

La tercera etapa del proceso (jyugyo kentoukai), es una sesión de revisión con los observadores. Comienza con un breve preámbulo donde el profesor que impartió la clase explica su propósito sobre el plan de enseñanza, plan que compartió previamente con los docentes del equipo, se trabajan los conceptos y materiales pedagógicos que fueron usados en la intervención, como las características y/o estatus de los alumnos en cada etapa de la clase, así también los propósitos de cada problema y actividad (Mena, 2006, p.9). Finalmente, los participantes expresan opiniones y dudas sobre situaciones que surgieron durante la implementación, como en el contenido tratado, el rol formativo del profesor implicado, y las expresiones en las actividades de aprendizaje de los alumnos. De acuerdo con el estudio de clases realizado en nuestro proyecto, se realizó una sesión de revisión del video en el que se consideraron todos los elementos mencionados anteriormente, junto a un proceso de reflexiones profesionales con el fin de ir mejorando y adecuando cada clase al logro del aprendizaje de manera significativa en los estudiantes.

Es necesario mencionar Estudio de Clases es de un desarrollo cíclico, pues al término de las tres fases y según las conclusiones obtenidas del proceso de reflexión y análisis, se vuelve a implementar de la misma forma teniendo en cuenta todas las observaciones de mejoras a realizar. De este modo las clases están constantemente mejorando en busca de un aprendizaje significativo para los estudiantes. Por lo que, el proceso se puede resumir en identificación del problema, planificación de la clase, implementación, evaluación de la clase y revisión de resultados, reconsideración de la clase, implementación de la clase basada en reconsideraciones, evaluación y revisión, discusión de resultados.

CAPÍTULO V

SECUENCIA DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE

En este capítulo expone la secuencia de clases que se diseñó con el fin de lograr el objetivo de aprendizaje que corresponde al OA 8, el que se encuentra en el programa de estudio de segundo medio, y corresponde a lo siguiente, OA8: Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos. Para lo anterior, los estudiantes deben tener algunos conocimientos previos, como lo son semejanza de triángulos, teorema de Pitágoras, triángulos rectángulos.

La secuencia enseñanza aprendizaje está basada en la teoría de situaciones didácticas, con el fin de lograr que el estudiante sea el protagonista de su aprendizaje y el profesor tenga un rol de guía. Para ello, este diseño de clases contempla 6 sesiones, basadas en las metodologías de la Ingeniería Didáctica y el Estudio de Clases.

5.1 Descripción de la secuencia de enseñanza y aprendizaje

La secuencia de enseñanza y aprendizaje se aplicó en el establecimiento Instituto Hermanos Matte ubicado en la comuna de Santiago con dirección en Nataniel Cox #2235 el cual es Particular Subvencionado contando con más de 1.460 estudiantes, de carácter mixto y un índice de vulnerabilidad escolar del 70% (Junta Nacional de Auxilio Escolar y Becas, 2022).

La secuencia didáctica está basada en la Unidad 3 del Programa de Estudio de 2do medio, específicamente en el Objetivo de Aprendizaje 8 que consiste en:

Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos:

- Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos.
- Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo.
- Aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados.
- Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.

Para esto, se desarrolla en 6 sesiones de las cuales 5 son de 90 minutos (2 horas pedagógicas) y una de 45 minutos (1 hora pedagógica) donde la metodología de trabajo es en base al trabajo colaborativo, fomentando la participación de los estudiantes para la construcción del nuevo contenido. En el comienzo del contenido se presenta un problema no rutinario que consta de dos fases, la primera construcción y resignificación de las razones trigonométricas, y la segunda formalizar e institucionalizar el contenido. Para lo anterior, se proponen actividades y guías de trabajos que presentan ejercicios y problemas de la vida cotidiana, y así aplicar las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente. Por último, se finaliza el contenido implementando un problema no rutinario con el fin de evaluar si se adquirió el conocimiento del objeto matemático logrando un aprendizaje significativo.

Para el desarrollo de la secuencia didáctica se proponen las siguientes actividades utilizando la Teoría Antropológica de la Didáctica:

	TAREA	TÉCNICA	TECNOLOGÍA	TEORÍA
Sesión 1	Calcular medidas de catetos e hipotenusas en triángulos	Uso de regla graduada. Midiendo con	Sistema de medición decimal.	Demostración del teorema de Pitágoras.

	rectángulos. Establecer relaciones entre medidas de los lados de triángulos rectángulos. Establecer proporciones en situaciones de la vida cotidiana.	regla. Comparando medidas. (Razón). Comparar medidas.	Teorema de Pitágoras. Semejanza de triángulos. Razones. Sistema de medición decimal. Razones y proporciones. Teorema de Thales.	Función medida. Semejanza de figuras geométricas. Razones en el triángulo rectángulo. Función medida. Demostración de Teorema de Thales.

Sesión 2	Resolver problemas no rutinarios. Relacionar ángulos con su respectiva razón trigonométrica (seno, coseno y tangente). Aplicar razones trigonométricas del seno y coseno en triángulos rectángulos.	Uso de calculadora. Uso de cálculos que involucren operaciones elementales. Comparar medidas (razones).	Teorema de Pitágoras. Razones. Semejanza en el triángulo rectángulo.	Demostración del Teorema de Pitágoras. Relaciones. Definición formal de razones trigonométricas del seno y coseno. Semejanza en figuras geométricas.
Sesión 3	Calcular razones trigonométricas (seno, coseno y tangente). Encontrar la medida de catetos e hipotenusas. Resolver problemas	Uso de transportador para comprobar medidas angulares. Razones trigonométricas (seno,	Ángulos complementa-rios. $sen\ (\alpha) = cos\ (\beta)$ Razones.	Función medida. Postulado de la medida del ángulo. Teorema de las

	rutinarios. Calcular ángulos inscritos en triángulos rectángulos.	coseno y tangente). Uso de calculadora. Operaciones elementales.	Teorema de Pitágoras. Características y propiedades de triángulos. rectángulos.	cofunciones. Demostración del Teorema de Pitágoras. Teorema de la suma de ángulos interiores.
Sesión 4	Resolver un problema no rutinario relacionado con razones trigonométricas.	Uso de operaciones elementales. Razones trigonométrica s. Relación entre ángulos y sus razones.	Razones trigonométrica s del seno, coseno y tangente.	Definición formal de las razones trigonométrica s involucradas.
Sesión 5	Explicar las razones trigonométricas del	Uso de operaciones	Ángulos complementa-	Definición y concepto de

	seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos por medio de procedimientos propios y resultados. Resolver y aplicar razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos en problemas rutinarios y ejercicios.	elementales. Razones trigonométricas (seno, coseno y tangente). Relación entre ángulos y sus razones. Uso de calculadora.	rios. *sen (ⲁ) = cos (β)* Características y propiedades de triángulos rectángulos. Razones trigonométricas del seno, coseno y tangente.	las razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos.
Sesión 6	Mostrar que comprenden las razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos.	Uso de operaciones elementales. Razones trigonométricas (seno, coseno y tangente).	Ángulos complementa-rios. *sen (ⲁ) = cos (β)* Características y propiedades	Definición y concepto de las razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos.

	Aplicar razones trigonométricas para determinar ángulos o medida de lados. Resolver problemas rutinarios, ejercicios de razones trigonométricas con procedimientos de soluciones propias y resultados.	Relación entre ángulos y sus razones. Uso de calculadora.	de triángulos rectángulos. Razones trigonométricas del seno, coseno y tangente.	Métrica Postulado de la medida del ángulo. Teorema de las cofunciones. Demostración del Teorema de Pitágoras. Teorema de la suma de ángulos interiores.

5.2 Planes de clases

Los siguientes planes de clases corresponden a las 6 clases realizadas, de las cuales una de ellas corresponde a una hora pedagógica mientras que las restantes son de dos horas pedagógicas.

<table>
<tr><td colspan="4">PLAN DE CLASES</td></tr>
<tr><td>Eje Temático</td><td>Unidad o Tema</td><td>Unidad 3 Geometría: Razones trigonométricas.</td><td>Sesión</td></tr>
<tr><td>Objetivo General de la Unidad</td><td colspan="2">OA 8

Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos:

• Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos.
• Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo.
• Aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados.
• Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.</td><td>N° 1</td></tr>
<tr><td>Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje</td><td colspan="2">Recordar semejanza de triángulos, razones y proporcionalidad.</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Habilidad</td><td colspan="4">a) Argumentar y comunicar

b) Representar</td></tr>
<tr><td>Actitud</td><td colspan="4">a) Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas.

b) Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.

c) Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.

d) Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.</td></tr>
<tr><td>Momentos de la clase</td><td>Actividades de Aprendizajes</td><td>Intervención Docente</td><td>Recursos de Aprendizaje</td><td>Tiempo Estimado</td></tr>
<tr><td>Inicio</td><td>Actividad 1:

¿Qué es un triángulo?, ¿Cuáles son sus</td><td>Se saluda a los estudiantes y se realiza una actividad de</td><td>Material Audiovisual (PPT)

Plumones</td><td>20 minutos</td></tr>
</table>

	partes?, ¿Qué tipo de triángulos conocemos? ¿Se pueden establecer relaciones entre dos triángulos?	recordar conocimientos previos haciendo la siguiente actividad 1. Cabe destacar que estas preguntas están orientadas a recordar contenidos tales como razones, semejanza de triángulos, etc.	Pizarra.	
Desarrollo	Con material concreto se realiza la siguiente	Posterior a ello, se realiza una actividad para así identificar,	Material Audiovisual (PPT)	50 minutos

	actividad: -Calcula la medida de la hipotenusa de cada triángulo. - ¿Podrías establecer que los triángulos construidos son semejantes?, ¿por qué? -Calcula el valor de las siguientes razones planteadas. - ¿Qué relación existe entre las razones anteriores? -Si los lados del triángulo ABC se	relacionar, comparar y establecer conclusiones. Se les da un tiempo para que los estudiantes resuelvan y finalmente se revisa de manera colaborativa de modo que se comparen respuestas, se trabaje tanto desde las respuestas correctas como incorrectas.	Material concreto (triángulos impresos) Plumones y pizarra.	

	amplifican por 2, ¿qué sucede con los ángulos del triángulo? ¿Y con las razones entre los lados de los triángulos?			
Cierre	Problema: ¿Qué altura tiene un poste que proyecta una sombra de 16 *m*, al mismo tiempo que un observador de 1,80 *m* de estatura proyecta una sombra de 1,20 *m?*	Finalmente se presenta el problema en donde se aplica el planteamiento de razones y proporcionalidad. Para el desarrollo de este, se le pide a un estudiante que lo resuelva en la pizarra y posteriormente explique el	Material Audiovisual (PPT) Plumones y pizarra.	20 minutos

		procedimiento realizado. Se finaliza la clase despidiéndose de los estudiantes.		

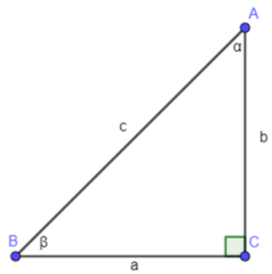
PLAN DE CLASES			
Eje Temático	Unidad o Tema	Unidad 3 Geometría: Razones trigonométricas.	Sesión
Objetivo General de la Unidad	OA 8 Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos: • Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos. • Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo.		N° 2

	• Aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados. • Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.	
Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje	Deducir razones trigonométricas a partir de un problema no rutinario. Formalizar el contenido de razones trigonométricas.	
Habilidad	a) Argumentar y comunicar b) Modelar c) Representar	
Actitud	a) Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas. b) Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales. c) Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición	

	a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas. d) Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.			
Momentos de la clase	Actividades de Aprendizajes	Intervención Docente	Recursos de Aprendizaje	Tiempo Estimado
Inicio	Problema: ¿Qué altura tiene un poste que proyecta una sombra de 16 *m*, al mismo tiempo que un observador de 1,80 *m* de estatura proyecta una sombra de 1,20 *m?*	La docente saluda a los estudiantes y se recuerda el problema trabajado anteriormente y se le solicita a un estudiante que en voz alta explique su razonamiento y procedimientos matemáticos para	Material Audiovisual (PPT) Plumones y pizarra. Preguntas dirigidas.	20 min

		llegar a la respuesta. Luego de esto, la docente repite el procedimiento y pregunta si hay alguna duda con respecto a lo trabajado.		
Desarrollo	Problema no rutinario: Adjuntado en Anexo 1.	Para continuar la clase, se presenta un problema con contexto de la vida cotidiana a partir de 5 partes en las cuales en cada uno se entregaban distintos datos	Material Audiovisual (PPT) Plumón y pizarra. Preguntas	50 min

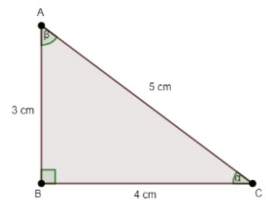
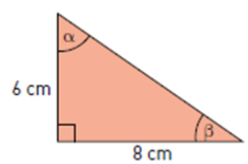
		para poder calcular lo solicitado. Luego, teniendo las nociones de las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente, se formaliza e institucionaliza el contenido, realizando un ejemplo.	dirigidas.	
Cierre	Se presenta el siguiente triángulo rectángulo y se les solicita identificar las razones	Por último, se realiza un ejemplo con el objetivo de reconocer las razones	Material Audiovisual (PPT)	20 min

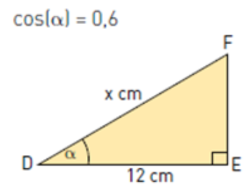
	trigonométricas de seno, coseno y tangente de ambos ángulos.  	trigonométricas de seno, coseno y tangente.	Plumones y pizarra. Preguntas dirigidas.	

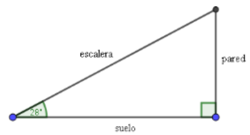
PLAN DE CLASES			
Eje Temático	Unidad o Tema	Unidad 3 Geometría: Razones trigonométricas.	Sesión
Objetivo General de la Unidad	OA 8 Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos: • Relacionándolas con las propiedades de la		N° 3

	semejanza y los ángulos. • Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo. • Aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados. • Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.	
Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje	Resolver ejercicios que involucran razones trigonométricas de seno, coseno y tangente. Identificar ángulos de elevación y depresión.	
Habilidad	a) Argumentar y comunicar b) Representar c) Resolver problemas	
Actitud	a) Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas. b) Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.	

	c) Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas. d) Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.			
Momentos de la clase	Actividades de Aprendizajes	Intervención Docente	Recursos de Aprendizaje	Tiempo Estimado
Inicio	Se recuerdan las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente, presentando un triángulo rectángulo con el trío pitagórico 3, 4 y 5, donde se solicita encontrar	Para comenzar la clase, se recuerdan las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente a partir de un ejemplo dado, es decir, se presenta un triángulo	Material Audiovisual (PPT) Plumones y pizarra.	15 min

	el seno, coseno y tangente de cada ángulo. 	rectángulo y ellos resuelven a partir del planteamiento de dichas razones.		
Desarrollo	1- Considerando el triángulo rectángulo, calcule las siguientes razones trigonométricas:  2- Calcule la medida del lado "x"	Para esto, se van proyectando diversos ejercicios que se resuelven de manera colaborativa. También destacar que se les da una breve introducción del cálculo de las	Material Audiovisual (PPT) Plumones y pizarra.	30 min

	y el área del siguiente triángulo:  3- Una escalera forma está apoyada sobre la parte más alta de un muro, de manera tal que forma con el plano horizontal un ángulo de 28°. Si se sabe que la escalera tiene una longitud de 5 metros. ¿A qué distancia se encuentra el pie	razones trigonométricas para obtener la medida de un lado o ángulo y por último, se definen los ángulos de depresión y elevación.		

	de la escalera del pie de la pared? (asuma que la pared es perpendicular a la horizontal del piso)  ¿Cuál es la altura de la pared?			
Cierre	Se presenta un triángulo rectángulo con un contexto dado para formar el ángulo de elevación y depresión para	Finalmente se plantea una actividad la cual se desarrolla de manera colaborativa en la pizarra.	Material Audiovisual (PPT) Plumones y pizarra.	15 min

	finalmente expresar las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente.			

PLAN DE CLASES			
Eje Temático	Unidad o Tema	Unidad 3 Geometría: Razones trigonométricas.	Sesión
Objetivo General de la Unidad	OA 8 Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos: • Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos. • Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo. • Aplicándolas para determinar ángulos o		N° 4

	medidas de lados. • Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.	
Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje	Resolver problemas rutinarios que involucran razones trigonométricas.	
Habilidad	a) Argumentar y comunicar b) Representar c) Resolver problemas	
Actitud	a) Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas. b) Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales. c) Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas. d) Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones	

	matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.

Momentos de la clase	Actividades de Aprendizajes	Intervención Docente	Recursos de Aprendizaje	Tiempo Estimado
Inicio	Actividad en donde se recuerda el ángulo de elevación y depresión.	La docente saluda a los estudiantes y recuerdan lo trabajado en la clase anterior. Se realizan preguntas generales y dirigidas para un trabajo colaborativo.	Material visual (PPT). Pizarra y plumones.	15 min

Desarrollo	Guía de trabajo 1 en Anexo 2.	Se proyectan los problemas de la vida cotidiana que requieren representar la situación por medio de un dibujo o expresión matemática. El primero se resuelve en la pizarra y explicando los procedimientos realizados, mientras que los siguientes se	Material visual (PPT). Pizarra y plumones. Cuadernos y lápices.	20 min.

		trabajan en forma colaborativa en grupos.		
Cierre	Problema: Alejandro está recostado en una plaza y observa desde el piso un edificio de 110 m de alto. Si el edificio está a una distancia de 110 m, ¿cuál es el ángulo de elevación con el que Alejandro lo observa?	Considerando un problema de la guía de trabajo se le solicita a un estudiante que explique el procedimiento realizado y se formaliza en la pizarra. Finalmente se despide del curso.	Pizarra y plumones.	15 min.

<table>
<tr><th colspan="4">PLAN DE CLASES</th></tr>
<tr><td>Eje Temático</td><td>Unidad o Tema</td><td>Unidad 3 Geometría: Razones trigonométricas.</td><td>Sesión</td></tr>
<tr><td>Objetivo General de la Unidad</td><td colspan="2">OA 8

Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos:
Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos.
Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo.
Aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados.
Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.</td><td>N° 5</td></tr>
<tr><td>Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje</td><td colspan="2">Resolver problemas de la vida cotidiana y ejercicios que involucren las razones trigonométricas.</td><td></td></tr>
</table>

Habilidades	a) Argumentar y comunicar b) Representar c) Resolver problemas			
Actitud	a) Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas. b) Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales. c) Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas. d) Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.			
Momentos de la clase	Actividades de Aprendizajes	Intervención Docente	Recursos de Aprendizaje	Tiempo Estimado
Inicio	Se recuerda lo trabajado en la	Se saluda a los estudiantes.	Material visual (PPT).	10 min.

	clase anterior a partir de una lluvia de ideas.	Luego, se presenta la guía de ejercicios subida en Classroom les sube a Classroom una guía de ejercitación sobre los contenidos que han trabajado durante las clases previas y les pide que prendan su Chromebook para que trabajen con la guía digital, les recuerda que una vez que finalicen deberán subir sus respuestas a Classroom.	Chromebook.	

Desarrollo	Se presenta una guía de ejercitación (anexo 3)	Se monitorea el avance de los estudiantes y resuelve de manera personal las dudas que puedan tener, si la duda persiste en varios estudiantes, deberá proyectar dicho problema en la pizarra y explicar al grupo curso de manera general.	Chromebook.	30 min.
Cierre	Se representan los problemas presentados en la guía por medio de dibujos en la	Finalmente, se desarrollan colaborativamente a partir de las ideas de los	Material visual (PPT). Chromebook	5 min

	pizarra.	estudiantes explicando así los procedimientos. Finalmente les recuerda que deben subir sus respuestas a Classroom y se despide del curso.	. Pizarra y plumones.	

PLAN DE CLASES			
Eje Temático	Unidad o Tema	Unidad 3 Geometría: Razones trigonométricas.	Sesión
Objetivo General de la Unidad	OA 8 Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos:		N° 6

<table>
<tr><td></td><td>Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos.
Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo.
Aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados.
Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.</td><td></td></tr>
<tr><td>Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje</td><td>Resolver un problema no rutinario utilizando conocimientos previos.</td><td></td></tr>
<tr><td>Habilidad</td><td colspan="2">a) Argumentar y comunicar

b) Representar</td></tr>
<tr><td>Actitud</td><td colspan="2">a) Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas.

b) Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.

c) Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros,</td></tr>
</table>

	considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas. d) Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.			
Momentos de la clase	Actividades de Aprendizajes	Intervención Docente	Recursos de Aprendizaje	Tiempo Estimado
Inicio	Se menciona sobre la aplicación del problema no rutinario. Instrucciones: 1- En los primeros 20 minutos deberán trabajar de manera individual en el problema	Se saluda a los estudiantes, para luego entregarles de manera impresa un problema no rutinario, explicándoles las instrucciones. Posteriormente se lee en conjunto	Problema no rutinario impreso. Material visual (PPT).	15 min

	entregado. En los próximos 35 minutos deberán comparar su respuesta con la de su compañero de puesto y analizar las estrategias de cada uno. Para finalizar 2 estudiantes al azar deberán compartir su procedimiento con sus compañeros. Está permitido el uso de calculadora.	el enunciado del problema preguntando si les quedó alguna duda.		

Desarrollo	Situación problema: Estás en un campamento y debes levantar un poste de forma perpendicular al suelo para izar las banderas de tu alianza. Para ello tienes un poste de 5 metros, una cuerda larga que podrás anclar por medio de una estaca a nivel del suelo, lo que te permitirá dar la tensión al poste por medio de un ángulo de	Se monitorea que los estudiantes estén trabajando acorde a lo establecido previamente, se limita a responder preguntas relacionadas con el desarrollo del problema. Una vez que los estudiantes hayan trabajado de manera individual en una primera instancia y en parejas en una segunda instancia del	Problema no rutinario impreso, cuaderno y lápices.	50 min

	elevación. Para realizar el trabajo cuentas con las herramientas necesarias como escuadra, calculadora, palas, estacas, martillo, etc. Responde a continuación: a) ¿Qué estrategia utilizarías para levantar el poste con la cuerda y determinar la medida de la cuerda, usando la estaca y un ángulo de elevación? Explica y justifica	problema, se indica que se procederá al cierre de la clase.		

	matemáticamente. b) Si desconoces la medida del poste que debes levantar de forma perpendicular al piso, pero sabes que entre la estaca que está a nivel del suelo y la base del poste hay 7 metros de distancia y el ángulo de elevación desde la estaca a la parte superior del poste es de 60°, ¿Puedes determinar la			

	medida del poste? Justifica tu respuesta por medio de un procedimiento matemático.			
Cierre	Se presentan las estrategias de resolución de los estudiantes en la pizarra explicando sus procedimientos.	Se les indica a tres estudiantes que expliquen sus procedimientos que utilizaron para dar solución al problema no rutinario. Una vez que se validan, se retoma el problema y se presentan dos formas de realizarlos y	Pizarra y plumones.	15 min

		finaliza la clase despidiéndose de los estudiantes.		

5.3 Guías de trabajo

Para el desarrollo de la secuencia didáctica, se presentan guías de trabajo que consisten en actividades (problemas y ejercicios) que involucren los contenidos trabajados en clases, para esto, se adjuntan a continuación:

Guía 1: Problemas que involucren razones trigonométricas[1].

<u>Guía 1: Razones trigonométricas</u>

Objetivo: Desarrollar y representar problemas de la vida cotidiana utilizando razones trigonométricas de seno, coseno y tangente.

1. Gabriel, de 1,62 m de altura, se encuentra a 5 m de la base de un edificio y observa el punto más alto de este con un ángulo de elevación de 30°.

a) Determine aproximadamente la altura del edificio.

b) Si Gabriel se aleja 2 metros de la base del edificio, ¿En cuánto varía el ángulo de elevación para el mismo punto?

2. En la imagen se muestra el modelo de una casa. El ángulo α de la pendiente del techo se mide en relación con la horizontal. Si el ancho de la casa es de b = 12m su largo c mide 20 m y el ángulo que forma el techo con la horizontal es $\alpha = 20°$. ¿Cuál es la altura h que tiene la punta del techo sobre el segundo piso?

3. Para cada uno de los siguientes problemas, trace un bosquejo que les

[1] Extraído de material de apoyo docente de Red SIP (2022).

permita representar cada situación:

a) La longitud del hilo que sujeta un volantín es de 18 m y el ángulo que forma este respecto al suelo es de 30°. ¿A qué altura está el volantín?

b) Violeta sube un resfalín que tiene una inclinación de 30° y 3 m de longitud. ¿Cuál es la mayor altura que Violeta puede alcanzar?

c) Un edificio tiene una altura de 72 m. Cuando el sol tiene un ángulo de elevación de 30°, ¿qué medida tiene la sombra que proyecta el edificio?

d) Un avión se encuentra a 2100 m de altura cuando comienza su descenso para aterrizar. ¿A qué distancia se encuentra de la pista, si para bajar aplica un ángulo de depresión de 20°?

e) Alejandro esta recostado en una plaza y observa desde el piso un edificio de 110 m de alto. Si el edificio está a una distancia de 110 3 m. ¿Cuál es el ángulo de elevación con el que Alejandro lo observa?

Guía 2: Problema no rutinario que involucra razones trigonométricas[2].

Finalizando el contenido

Objetivo: Resolver problema no rutinario utilizando conocimientos adquiridos.

Estás en un campamento y debes levantar un poste de forma perpendicular al suelo para izar las banderas de tu alianza. Para ello tienes un poste de 5 metros, una cuerda larga que podrás anclar por medio de una estaca a nivel

[2] Elaboración propia del problema no rutinario (2022).

del suelo, lo que te permitirá dar la tensión al poste por medio de un ángulo de elevación. Para realizar el trabajo cuentas con las herramientas necesarias como escuadra, calculadora, palas, estacas, martillo, etc. Responde a continuación:

a) ¿Qué estrategia utilizarías para levantar el poste con la cuerda y determinar la medida de la cuerda, usando la estaca y un ángulo de elevación? Explica y justifica matemáticamente.

b) Si desconoces la medida del poste que debes levantar de forma perpendicular al piso, pero sabes que entre la estaca que está a nivel del suelo y la base del poste hay 7 metros de distancia y el ángulo de elevación desde la estaca a la parte superior del poste es de 60°, ¿Puedes determinar la medida del poste? Justifica tu respuesta por medio de un procedimiento matemático.

5.4 Análisis apriori de situaciones de aprendizajes claves

A continuación, se presenta un problema no rutinario con su respectivo análisis apriori, con la finalidad de describir y predecir las posibles estrategias que pueden utilizar los estudiantes frente a dicha situación, Chamorro (2006) menciona que un análisis apriori "consiste en dar respuestas a ciertas preguntas, que buscan garantizar que la situación ha sido bien construida por tanto puede funcionar" (p.66). Realizar un análisis apriori ayuda a anteponerse a situaciones que pueden ocurrir en la implementación de una clase en el aula, por lo que nos prepara para saber cómo actuar frente a los distintos asuntos que pueden suceder durante la implementación.

5.4.1 Problema rutinario de introducción al contenido nuevo

Si los lados del triángulo rectángulo ABC se amplifican por 2

a) ¿Qué sucede con los ángulos del triángulo?

b) ¿Y con las razones entre los lados de los triángulos?

5.4.1.1 Análisis apriori

1. ¿Cuál es la respuesta a la situación? Escriba su procedimiento y explique.

Sea ΔABC rectángulo en C

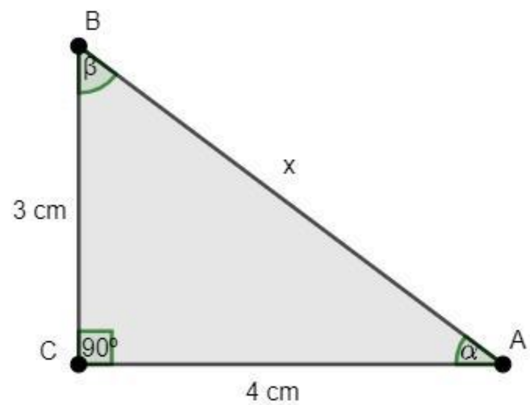


Ilustración 7: Elaboración propia

Para calcular la hipotenusa, por teorema de Pitágoras:

$$3^2 + 4^2 = x^2$$

$$9 + 16 = x^2$$

$$25 = x^2 \quad /\sqrt{}$$

$$\sqrt{25} = \sqrt{x^2}$$

$$5 = x$$

Por lo tanto, las medidas del triángulo son:

Con $\overline{AB} = 5\ cm, \overline{BC} = 3\ cm$ y $\overline{AC} = 4\ cm$

Si se amplifica por 2 los respectivos segmentos, se tiene:

$$\overline{A'B'} = 5 \cdot 2 = 10\ cm$$

$$\overline{B'C'} = 3 \cdot 2 = 6\ cm$$

$$\overline{A'C'} = 4 \cdot 2 = 8\ cm$$

Por criterio de semejanza LLL, ambos triángulos serán semejantes.

Por otra parte, estableciendo las razones se tiene:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$$

$$\frac{10}{5} = \frac{6}{3} = \frac{4}{8} = 2$$

La razón entre el ΔABC y $\Delta A'B'C'$ es 2. En cuanto a los ángulos, al amplificarlos los ángulos serían congruentes.

2. ¿Cuáles son los conocimientos en juego?

Los conocimientos en juego en este problema son: semejanza de triángulos, teorema de Pitágoras, razones, proporciones y operaciones elementales.

3. ¿Cuáles son los conocimientos adquiridos que necesita el alumno para resolver la situación?

Los conocimientos adquiridos que requiere el alumno son la semejanza de triángulos, teorema de Pitágoras, razones y proporciones.

4. ¿Cuáles serían las posibles estrategias de los/as alumnos/as para resolver la situación?

Algunas de las estrategias que pueden utilizar los estudiantes son:

- Estrategia 1: Caso específico con el triángulo rectángulo ABC dado.

Se encuentra el lado x (hipotenusa del triángulo), a través del teorema de Pitágoras, esto es:

$$x = 5$$

De esta forma, al amplificar los lados del triángulo se obtiene:

$$\overline{A'B'} = 2c$$

$$\overline{B'C'} = 2a$$

$$\overline{A'C'} = 2b$$

Por criterio de semejanza de triángulos LLL, los ángulos son congruentes y están en razón 2:1.

- Estrategia 2: Caso general con un triángulo rectángulo.

Sea ΔABC, se tiene:

$$\overline{AB} = c$$

$$\overline{BC} = a$$

$$\overline{AC} = b$$

Amplificando sus lados por 2:

$$\overline{A'B'} = 2 \cdot c = 2c$$

$$\overline{B'C'} = 2 \cdot a = 2a$$

$$\overline{A'C'} = 2 \cdot b = 2b$$

Por criterio de semejanza LLL, los ángulos respectivos serán congruentes.

5. ¿Cuáles son las posibles dificultades?

Las principales dificultades que pueden tener los estudiantes en el desarrollo del problema propuesto son:

- No interpretar correctamente el enunciado.
- No identificar los datos.
- No saber criterios de semejanza.
- No identificar los lados correspondientes de los triángulos para calcular las respectivas razones.

6. ¿Cuáles serían los posibles errores de los/as alumnos/as al resolver?

Los errores aritméticos son considerados los más comunes en el desarrollo de actividades matemáticas, estos se producen cuando se realizan cálculos incorrectos en instancias en las que se ocupan las operaciones elementales.

En este problema, los posibles errores que pueden cometer los estudiantes además de los comunes errores aritméticos son:

- Errores al calcular las razones.
- Plantear erróneamente las proporciones.

5.4.2 Problema no rutinario implementado

Estás en un campamento y debes levantar un poste de forma perpendicular al suelo para izar las banderas de tu alianza. Para ello tienes un poste de 5 metros, una cuerda larga que podrás anclar por medio de una estaca a nivel del suelo, lo que te permitirá dar la tensión al poste por medio de un ángulo de elevación. Para realizar el trabajo cuentas con las herramientas necesarias como escuadra, calculadora, palas, estacas, martillo, etc. Responde a continuación:

a) ¿Qué estrategia utilizarías para levantar el poste con la cuerda y determinar la medida de la cuerda, usando la estaca y un ángulo de elevación? Explica y justifica matemáticamente.

b) Si desconoces la medida del poste que debes levantar de forma perpendicular al piso, pero sabes que entre la estaca que está a nivel del suelo y la base del poste hay 7 metros de distancia y el ángulo de elevación desde la estaca a la parte superior del poste es de 60°, ¿Puedes determinar la medida del poste? Justifica tu respuesta por medio de un procedimiento matemático.

5.4.2.1 Análisis apriori

1. ¿Cuál es la respuesta a la situación? Escriba su procedimiento y explique.

La respuesta experta que se espera que los estudiantes expongan ante el problema propuesto es:

a)

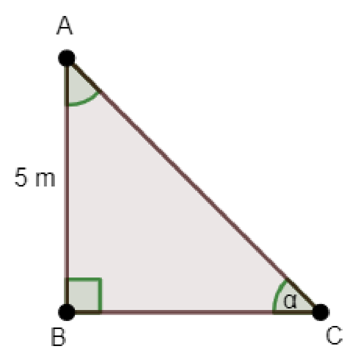


Ilustración 8: Elaboración propia

Se alza el poste (lado AB del triángulo rectángulo, cateto opuesto al ángulo) de forma perpendicular al piso y desde su extremo superior se amarra la cuerda (lado AC del triángulo rectángulo, hipotenusa) que será extendida y atada a la estaca que está de forma paralela al poste a una determinada distancia y se encuentra enterrada en el piso. La estaca será el punto desde donde se produce el ángulo de elevación (ángulo BCA, $\angle\propto$) con el extremo superior del poste.

Luego, por la razón trigonométrica del seno:

$$\sin(\alpha) = \frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{AC})}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{5}{m(\overline{AC})}$$

Desarrollando se tiene:

$$m(\overline{AC}) \cdot \sin(\alpha) = 5$$

$$m(\overline{AC}) = \frac{5}{\sin(\alpha)}$$

Por lo tanto, la medida de la cuerda que corresponde a la hipotenusa queda expresada por $m(\overline{AC}) = \frac{5}{\sin(\alpha)}$

b) Modelando la situación, se tiene que:

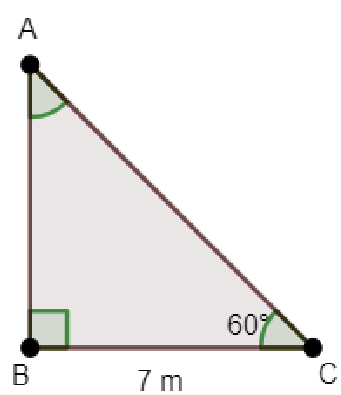


Ilustración 9: Elaboración propia

Sí, se puede determinar la medida del poste. Para ello se utiliza la razón coseno con la que se obtiene la hipotenusa y posteriormente con la razón seno se obtiene la medida de AB que corresponde a la medida del poste.

La medida del poste a la estaca es 7 m, esto es $m(\overline{BC}) = 7$ metros que corresponde al cateto adyacente al ángulo de elevación. Además, $m(\overline{AC})$ es la cuerda que corresponde a la hipotenusa, finalmente $m(\overline{AB})$ sería el poste que corresponde al cateto opuesto. En la razón trigonométrica del coseno:

$$\cos(\alpha) = \frac{m(\overline{BC})}{m(\overline{AC})}$$

Como se sabe que el ángulo de elevación es de 60º, sustituyendo se tiene:

$$\cos 60 = \frac{7}{m(\overline{AC})}$$

$$m(\overline{AC}) \cdot \cos 60 = 7$$

$$m(\overline{AC}) = \frac{7}{\cos 60}$$

$$m(\overline{AC}) = \frac{7}{0{,}5}$$

$$m(\overline{AC}) = 14$$

Entonces, $\overline{AC}$ mide 14 metros, que corresponde a la hipotenusa del triángulo. Luego, por medio de la razón seno:

$$\sin(\alpha) = \frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{AC})}$$

$$\sin 60 = \frac{m(\overline{AB})}{14}$$

$$14 \cdot \sin 60 = m(\overline{AB})$$

$$7\sqrt{3} = m(\overline{AB})$$

Por lo tanto, la medida de $\overline{AB}$, que corresponde a la altura del poste es 7√3m.

2. ¿Cuáles son los conocimientos en juego?

Los conocimientos en juego en este problema son el teorema de Pitágoras, la semejanza y relaciones del triángulo rectángulo, las razones trigonométricas del seno, coseno y tangente y la métrica.

3. ¿Cuáles son los conocimientos adquiridos que necesita el alumno para resolver la situación?

Los conocimientos adquiridos que requiere el alumno son las razones trigonométricas del seno, coseno y tangente, el teorema de Pitágoras, las razones y semejanzas de triángulos, las operaciones elementales tales como la adición, sustracción, multiplicación y división, el cálculo de razones y la métrica.

4. ¿Cuáles serían las posibles estrategias de los/as alumnos/as para resolver la situación?

Algunas de las estrategias que pueden utilizar los estudiantes son:

- Estrategia 1: Resolver por medio de razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos.
  Teniendo un ángulo de elevación y un cateto adyacente se tiene:

$$\sin(\alpha) = \frac{5}{m(\overline{AC})}$$

- Estrategia 2: Utilizar el teorema de Pitágoras para obtener la medida de los lados dejando solo expresado o asignando una medida para obtener lo solicitado.

Por teorema de Pitágoras se tiene que, para obtener la medida de la cuerda, en este caso, la hipotenusa del triángulo queda expresada como:

$$5^2 + (\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 \quad /\sqrt{}$$

$$\pm\sqrt{5^2 + (\overline{AB})^2} = \overline{AC}$$

Como se está buscando la longitud de un lado, se utiliza la solución positiva de la ecuación, por lo tanto, la medida de la cuerda es $\sqrt{5^2 + (\overline{AB})^2}$.

- Estrategia 3: Suponer o asignar una medida para la hipotenusa AC o para uno de los lados y determinar la razón del seno o del coseno según corresponda.

Como se sabe que la altura del poste es 5 metros, relacionándolo con el trío pitagórico 5, 12, 13, se plantean las siguientes razones trigonométricas que utilizan la hipotenusa para su cálculo:

$$sen(\alpha) = \frac{m(\overline{AB})}{13} \quad \cos(\alpha) = \frac{5}{13}$$

Cabe destacar que este es un caso específico. Por lo tanto, la medida de la cuerda debe ser de 13 metros.

- Estrategia 4: Suponer una medida del ángulo de elevación y determinar la razón trigonométrica que corresponde.

Suponiendo la medida de un ángulo de elevación, por ejemplo 45º, para obtener la medida de la hipotenusa, se calcula el seno de 45º obteniendo lo siguiente:

$$\sin 45 = \frac{5}{m\ (\overline{AC})}$$

Desarrollando, se tiene:

$$\sin 45 \cdot m(\overline{AC}) = 5$$

$$m(\overline{AC}) = \frac{5}{\sin 45}$$

$$m(\overline{AC}) = \frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$m(\overline{AC}) = 5\sqrt{2}$$

Por lo tanto, la medida de la cuerda es de $5\sqrt{2}$ metros.

No olvidar que esto es para la medida de un ángulo de elevación específico.

- Estrategia 5: Interpretar el enunciado mediante la representación de un triángulo isósceles para obtener sus medidas utilizando los criterios de la semejanza de triángulos.

A partir de dos cuerdas de igual medida que levanten el poste y teniendo un ángulo de elevación, por criterio de semejanza LAL, los triángulos son semejantes, por lo tanto, como ya se sabe la medida del poste (5 m), para obtener el ángulo de elevación se tiene a partir de la siguiente expresión:

$$\sin(\alpha) = \frac{5}{m(\overline{AC})}$$

5. ¿Cuáles son las posibles dificultades?

Las principales dificultades que pueden tener los estudiantes en el desarrollo del problema propuesto son:

- No lograr representar pictóricamente lo solicitado.
- Interpretar incorrectamente el enunciado, representando el ángulo y las medidas de forma errónea en el triángulo rectángulo que deben formar.
- No identificar o no saber ingresar los datos en la calculadora para obtener las razones trigonométricas del seno y coseno.

6. ¿Cuáles serían los posibles errores de los/as alumnos/as al resolver?

Los errores aritméticos son considerados los más comunes en el desarrollo de actividades matemáticas, estos se producen cuando se realizan cálculos incorrectos en instancias en las que se ocupan las operaciones elementales.

En este problema, los posibles errores que pueden cometer los estudiantes además de los comunes errores aritméticos son:

- Calcular inadecuadamente razones.
- Despejar las variables de las razones trigonométricas de forma incorrecta, esto puede producir determinar de forma errónea los catetos de la razón del seno o la del coseno.
- Obtener la longitud de la hipotenusa y no buscar la medida del cateto solicitado.
- No identificar correctamente las medidas entregadas en el problema en el respectivo triángulo rectángulo que deben formar.

CAPÍTULO VI

ESTUDIO DE CLASES

El presente capítulo tiene como propósito describir la implementación del estudio de clases y su aporte en el desarrollo de la formación inicial del profesional docente en el contexto de la implementación del contenido de razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos. Se realizó una secuencia de clases en las que su diseño propone la planificación de una clase fundamentada en la metodología del estudio de clases, según Lendínez (2020) citando Watanabe, Takahashi y Yoshida (2008), Doig y Groves (2011), Murata (2011), Shimizu (2014) y Fujii (2015), quienes la describen como un instrumento que permite a los docentes desarrollar su práctica y conocimiento profesional a través del diseño colaborativo y cuidadoso de una clase, de su implementación y observación directa en el aula, y de un análisis en conjunto posterior.

A continuación, se describe la planificación en detalle de la clase diseñada con la metodología enunciada, la clase de experimentación y su desarrollo, la discusión y los aspectos más relevantes detectados en la implementación y la reflexión pedagógica realizada por los pares al final de la intervención.

6.1 Descripción de la clase diseñada

La clase basada en la metodología de estudio de clases fue la que corresponde a la sesión seis de la secuencia didáctica y tiene por objetivo de aprendizaje resolver un problema no rutinario utilizando conocimientos previos. Sobre esto último, se considera parte de los conocimientos previos de los estudiantes el contenido de razones trigonométricas de seno, coseno y tangete en triángulos rectángulos, pues se formalizó su enseñanza en la sesión 3 del diseño de nuestra secuencia de clases. Es importante mencionar también, que la implementación de la sesión mencionada se fundamentó en el enfoque teórico de la teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau basada en los momentos de acción, formulación y validación.

Para poder continuar con la descripción de la clase diseñada en la que se realizó la implementación de nuestra investigación, es preciso considerar los conceptos asociados a un Problema no rutinario y rutinario pues, a lo largo de la secuencia didáctica se diseñaron diversos problemas de estos tipos, los que se distinguen fundamentalmente según Díaz y Poblete (1999) en que el no rutinario es un problema en el que no basta con aplicar una regla o un método de manera rutinaria, sino que se elabora una solución por medio de intuición y una búsqueda forzada, y en el problema rutinario el estudiante utiliza una serie de secuencias que involucra una comprensión de conceptos y algoritmos para llegar a soluciones. Luego, la sesión del estudio de clases consideró el diseño de un problema no rutinario el que contiene dos preguntas, la primera de ellas tiene como propósito que los estudiantes elaboren una estrategia la que deben argumentar y justificar matemáticamente. Mientras que la segunda propone que los estudiantes logren responder modelando la situación. Para resolver ambos problemas, los estudiantes desarrollaron la actividad en una primera fase de manera individual, luego de forma grupal expusieron sus estrategias.

6.2 Plan de clase en forma detallada

<table>
<tr><td colspan="4">PLAN DE CLASES</td></tr>
<tr><td>Eje Temático</td><td>Unidad o Tema</td><td>Unidad 3 Geometría: Razones trigonométricas.</td><td>Sesión</td></tr>
<tr><td>Objetivo General de la Unidad</td><td colspan="2">OA 8
Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos:
• Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos.
• Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo.
• Aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados.
• Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.</td><td>N° 6</td></tr>
<tr><td>Meta(s) u Objetivo de Aprendizaje</td><td colspan="2">Resolver un problema no rutinario utilizando conocimientos previos.</td><td></td></tr>
<tr><td>Habilidad</td><td colspan="3">a) Argumentar y comunicar
b) Representar</td></tr>
<tr><td>Actitud</td><td colspan="3">a) Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas.</td></tr>
</table>

	b) Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales. c) Trabajar en equipo en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas. d) Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.			
Momentos de la clase	Actividades de Aprendizajes	Intervención Docente	Recursos de Aprendizaje	Tiempo Estimado
Inicio	Se menciona sobre la aplicación del problema no rutinario. Instrucciones adjuntadas al final del plan de clase. (1)	Se saluda a los estudiantes, para luego entregarles de manera impresa un problema no rutinario, explicándoles las instrucciones. Posteriormente se lee en conjunto el enunciado del	Problema no rutinario impreso. Material visual (PPT).	15 min

		problema preguntando si les quedó alguna duda.		
Desarrollo	Se presenta el problema no rutinario de manera impresa adjuntado al final del plan de clase. (2)	Se monitorea que los estudiantes estén trabajando acorde a lo establecido previamente, se limita a responder preguntas relacionadas con el desarrollo del problema. Una vez que los estudiantes hayan trabajado de manera individual en una primera instancia y en	Problema no rutinario impreso, cuaderno y lápices.	50 min

		parejas en una segunda instancia del problema, se indica que se procederá al cierre de la clase.		
Cierre	Se presentan las estrategias de resolución de los estudiantes en la pizarra explicando sus procedimientos.	Se les indica a tres estudiantes que expliquen sus procedimientos que utilizaron para dar solución al problema no rutinario. Una vez que se validan, se retoma el problema y se presentan dos formas de realizarlos y finaliza la clase	Pizarra y plumones.	15 min

		despidiéndose de los estudiantes.		

Instrucciones (1)

1- En los primeros 20 minutos deberán trabajar de manera individual en el problema entregado.
2- En los próximos 35 minutos deberán comparar su respuesta con la de su compañero de puesto y analizar las estrategias de cada uno.
3- Para finalizar 2 estudiantes al azar deberán compartir su procedimiento con sus compañeros.
4- Está permitido el uso de calculadora.

Problema no rutinario (2)

Estás en un campamento y debes levantar un poste de forma perpendicular al suelo para izar las banderas de tu alianza. Para ello tienes un poste de 5 metros, una cuerda larga que podrás anclar por medio de una estaca a nivel del suelo, lo que te permitirá dar la tensión al poste por medio de un ángulo de elevación. Para realizar el trabajo cuentas con las herramientas necesarias como escuadra, calculadora, palas, estacas, martillo, etc. Responde a continuación:

a) ¿Qué estrategia utilizarías para levantar el poste con la cuerda y determinar la medida de la cuerda, usando la estaca y un ángulo de elevación? Explica y justifica matemáticamente.

b) Si desconoces la medida del poste que debes levantar de forma perpendicular al piso, pero sabes que entre la estaca que está a nivel del suelo y la base del poste hay 7 metros de distancia y el ángulo de elevación desde la estaca a la parte superior del poste es de 60°, ¿Puedes determinar la medida del poste? Justifica tu respuesta por medio de un procedimiento matemático.

6.3 Experimentación de la clase

La clase se desarrolló de manera presencial por el docente anfitrión en formación, y contó con la presencia del profesor jefe del curso y la asistencia de 41 estudiantes. Algunos aspectos que son necesarios mencionar para contextualizar tienen relación con el espacio de la sala, pues es pequeña y los puestos de trabajo de los estudiantes son individuales, por lo que, la disposición de las mesas de trabajo de los alumnos en al aula es bastante tradicional, todos los puestos miran al frente donde se encuentra la pizarra. Considerando esto, es decir, espacio y disposición del aula, la clase fue grabada para realizar la observación, discusión y reflexión de la implementación del estudio de clases.

La clase se inicia mencionando el objetivo de aprendizaje, resolver un problema no rutinario utilizando conocimientos previos, y se lee en conjunto las instrucciones de la actividad que se desarrolló. A continuación, se entregó a cada estudiante el problema no rutinario impreso en una hoja y se dio un espacio en el que resolvieron dudas sobre el enunciado del problema, surgiendo algunas como:

- A qué se refería levantar un poste perpendicular, específicamente lo que significa perpendicular.
- A qué se debe llegar o qué se debe calcular en la primera pregunta.
- La estrategia debe ser una ecuación o solo palabras.

Las dudas resueltas solo tenían relación con el enunciado y/o las preguntas de este, sin entregar información alguna sobre sus posibles formas de resolución o relacionadas con el objetivo del problema. Pues, como se describió anteriormente en el punto 6.1 de este capítulo, es fundamental que los estudiantes resuelvan de forma intuitiva, basado en sus conocimientos, creando sus propias estrategias y de este modo se cumpla el propósito de implementar un problema no rutinario.

La clase se realizó en dos horas pedagógicas divididas por un recreo de 20 minutos. En la primera hora los estudiantes realizaron la actividad y entregaron su trabajo. En la segunda hora, a la vuelta del recreo, 3 estudiantes salieron a la pizarra donde desarrollaron sus estrategias y las expusieron a sus compañeros. El primero de ellos utilizó el teorema de Pitágoras para resolver sugiriendo obtener la hipotenusa para encontrar la medida de la cuerda según lo solicitado en el problema. El segundo estudiante solo propuso como lo resolvería sin realizar desarrollo alguno, indicando que lo haría por medio de la razón trigonométrica del seno, y el último alumno explicó su resolución basada en la razón trigonométrica del seno, dejando una propuesta una expresión que le permitía encontrar el valor de la cuerda. Finalmente, una vez que fueron comprobadas las respuestas, la docente anfitriona formaliza el contenido de la clase demostrando la solución al problema no rutinario propuesto, validando el aprendizaje de los estudiantes.

6.4 Discusión de la clase

Según Lendínez (2020) basado en los autores, Watanabe, Takahashi y Yoshida (2008), Doig y Groves (2011), Murata (2011), Shimizu (2014) y Fujii (2015), tras la intervención del docente anfitrión, debe realizarse una discusión grupal, la que involucra a todos los docentes en formación y profesionales que participaron en la confección de la implementación. Esta discusión, está centrada en las estrategias y dificultades de los estudiantes, y se conecta con la pregunta de investigación. Su propósito es analizar la clase a la luz del objetivo con el fin de realizar mejoras en el plan de clases en lo didáctico, pedagógico y matemático. Considerando estos antecedentes y tal como se mencionó anteriormente en este capítulo en el punto de experimentación de la clase, es necesario mencionar que la sesión de la implementación fue grabada para poder realizar la discusión junto a otros profesores en formación y universitarios, quienes también estaban en antecedente de diseño de clase, su objetivo de aprendizaje y la actividad.

La implementación, se basó en el contenido de razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos y tenía como propósito la intervención de un problema no rutinario sobre el cual los estudiantes aplicarían diferentes estrategias de forma intuitiva y utilizando sus conocimientos previos. Posterior a la intervención, que fue documentada por medio de un video, se realizó la exhibición de este a los pares con quienes se generó la fase de discusión con el fin realizar las mejoras respectivas.
De la muestra del video y la fase de discusión se rescata lo siguiente:

- En cuanto al enfoque teórico, el momento de Validación de los estudiantes. Según Brousseau, este corresponde al instante en que los alumnos confrontan sus estrategias argumentando con conocimientos de modo que son quienes deciden el proceso y su resolución. Luego, los comentarios y sugerencias realizadas mencionan: “Considerar la participación de los estudiantes en el proceso validación. Es decir, en esta fase no solo basta con que los estudiantes expongan sus resoluciones, sino que, también las discutan, se corrijan entre ellos y propongan sus estrategias. Si esto no surge de forma espontánea y solo se vuelven meros oyentes, el docente debe conducir por medio de preguntas o motivar para que se produzca el diálogo entre los alumnos.
- El segundo componente que surgió en la discusión se relaciona con la sugerencia de mejora para un aspecto didáctico. Este corresponde a trabajar desde los errores de los estudiantes en los desarrollos de sus estrategias. Estos, según variadas investigaciones tienen distintas naturalezas, que van desde errores aritméticos, de comprensión o un conocimiento mal adquirido. Los estudiantes al resolver los cometen con bastante frecuencia, por lo tanto, además de reconocerlos estos se pueden evitar y corregir. Para ello es preciso reconocer la necesidad de utilizar el conocimiento previo, aunque esté incorrecto, como fuente para nuevos conocimientos.
- El otro elemento que emana de la discusión tiene que ver con un aspecto pedagógico, y se relaciona con el uso de la pizarra. Tres

estudiantes en la fase de validación expusieron sus desarrollos, los que fueron escritos en la pizarra, explicaron el resto del curso sus procedimientos y resultados. Luego, rescatamos del artículo La Pizarra como Medio de Enseñanza de la autora cubana Vivian A. Álvarez Ponce (2013), “El trabajo del maestro con pizarrón debe someterse a una profunda revalorización y que emplear este medio correctamente en su función como medio de enseñanza, exige una preparación científica por parte de los que se dedican a la educación de las nuevas generaciones” (p.105). Por lo tanto, el uso de lo trabajado en la pizarra nos permite formalizar el contenido que se enseñará utilizando lo que los estudiantes escribieron en esta en sus exposiciones, todo esto con el fin de validar sus procesos y desde ahí guiar el aprendizaje.

- Un último elemento que surgió en la discusión para la mejora de la aplicación de un problema no rutinario tiene relación con aquellos estudiantes que no realizaron la actividad. Por lo que, se concluyó que además de prever situaciones matemáticas, también hay que pensar en situaciones de poca participación, ya que esta clase al ser en base a la resolución de problemas es posible que los estudiantes no sientan interés si es que no hay una recompensa académica, al respecto es necesario considerar algunos elementos en que el docente pueda promover o motivar la participación de los estudiantes utilizando otro tipo de estrategia de trabajo. González-Fernández (2020) menciona que si bien no se pueden prever todos los escenarios de incertidumbre a los que nos enfrentaremos, sí existen algunos en que las variables en juego están bastantes bienes definidos, por ejemplo, las matemáticas y las conceptuales.

Por consiguiente, cada uno de estos aspectos relevantes que surgieron de la discusión de la observación de la clase son los que deben ser considerados para la mejora de la clase siguiente o una próxima implementación, lo que debe seguir siendo trabajados de forma colaborativa por los docentes implicados en la intervención.

6.5 Reflexión sobre el proceso de Estudio de Clases y aprendizajes profesionales

Fujii (2016) añade una quinta etapa, que denomina “reflexión, en la que el ciclo se documenta, el aprendizaje profesional se consolida, y nuevas cuestiones podrían emerger” (p.413). De acuerdo con esto, nuestro proceso de reflexión surge en torno a todas las implicancias que involucran la pregunta de investigación ¿Qué estrategias utilizan los estudiantes frente a problemas no rutinarios que involucren el contenido de razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos? basado en la Secuencia Didáctica de Guy Brousseau. Desde aquí surgen los objetivos y las diferentes fases de la investigación, algunas de estas necesarias de mencionar para este punto del capítulo son: el diseño del problema no rutinario y su reformulación, el diseño del plan de clases, el análisis apriori y aposteriori del problema, la experimentación de la clase y el proceso de discusión.

Una vez que se definió la problemática, se formularon los objetivos y la pregunta de investigación, se continuó con la etapa de diseñar una secuencia de clases en la que se aplicó al principio y al final de esta un problema no rutinario, con el propósito de que la enseñanza aprendizaje fuera de manera significativa en los estudiantes, que aprendieran sin los recursos mnemotécnicos y evitar el fenómeno didáctico del deslizamiento metacognitivo en la enseñanza del contenido. Luego, para el diseño del problema no rutinario fue necesario investigar sobre su definición y experiencias de aplicaciones, basándose en un artículo del 2001 de M. Verónica Díaz y Álvaro Poblete denominado “Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula” de la Revista de Didáctica de las Matemáticas, discutir diferentes situaciones y realizar varios esbozos al respecto. Sobre esta fase, podemos rescatar la importancia de la resolución de problemas al ser uno de los principales aspectos del proceso de aprendizaje en matemáticas, siendo la principal preocupación de los educadores e investigadores en Educación Matemática, sin embargo, no es fácil encontrar investigaciones sobre los problemas no rutinarios en el contexto de enseñanza de razones trigonométricas, por lo que, diseñar el problema significó formularlo y volver a formularlo en más de una instancia. De la primera formulación, se rescata que es importante considerar palabras claves dentro del problema que sean de conocimientos de los estudiantes para que se cumpla el objetivo. Como también que los conceptos de las palabras sean conocidas por los alumnos, pues no saberlas puede llevarlos a no lograr modelar el problema. Sobre la última formulación, fue crucial la retroalimentación de los pares pues con ellos se logra la crítica necesaria para ver si el objetivo tras el problema no rutinario se está cumpliendo. Según Blanco (1991) sobre la resolución de problemas; es importante el método, el proceso, la estrategia, ya que esta debería ser el foco del currículo de matemáticas. Por lo tanto, para el diseño del problema no rutinario fue clave la investigación, como también fue y será importante considerar las palabras claves y los conocimientos de los estudiantes, así como el trabajo en colaboración con los pares de la educación.

Luego, sobre el diseño del plan de clases, al ser una secuencia basada en el estudio de clases faculta que el trabajo sea colaborativo, que las consideraciones del contenido de enseñanza, los tiempos y los estudiantes, sea un trabajo no solo de un docente sino de varios. Esto permite, que existan diferentes miradas, conocimientos acabados y propuestas sobre cómo elaborar las clases, pues si bien cada contenido a enseñar tiene el objetivo de aprendizaje propuesto por el currículo, el que este se adquiera significativamente por los estudiantes es el propósito que se busca por quienes son partícipes del estudio de clases. Una vez que se define el contenido a enseñar y cuál será la sesión de implementación se realiza un análisis apriori del problema propuesto, en el que en conjunto se abordan las diferentes situaciones que podrían surgir frente a la aplicación y el desarrollo de los estudiantes.

En este análisis, es importante la información que entrega el docente anfitrión, pues puede afirmar los contenidos que ya están enseñados para abordar la secuencia de clases de nuestro estudio, así como algunos factores relacionados con el curso, la sala, los tiempos y las normas propias del establecimiento. Una vez hecha la implementación, la confrontación con el análisis aposteriori nos permite evaluar todo lo que hay que mejorar en cuanto a esta, pero principalmente si se logró o no el aprendizaje esperado con lo propuesto en parte de los objetivos. Y es que, si los estudiantes lograron resolver de forma intuitiva aplicando conocimientos previos un problema no rutinario, sin acudir a recursos de memoria o mnemotécnicos.

Sobre la experimentación, es necesario rescatar que la participación de los estudiantes es importante en una implementación diseñada con la teoría de situaciones didácticas, por lo tanto, hay que considerar posibles estrategias para aquellos estudiantes que no desean realizar la actividad. Pues el objetivo de aprendizaje no tiene el foco puesto sobre unos pocos estudiantes, sino que debiese de ser sobre todos, y esto es un elemento el que como docentes debemos trabajar en el aula. También como ya se mencionó en el punto 6.4, la fase de validación de la teoría de situaciones didácticas es necesario reforzar ya que parte del propósito de esta teoría es que los estudiantes construyan su aprendizaje y el profesor sea un guía en ello, por otra parte, es importante que entre los mismos alumnos refuercen sus aprendizajes aplicando sus conocimientos y enseñando sus estrategias, no solo los que exponen en la pizarra, sino que todos en general. De lo mismo, se desglosa el uso de la pizarra y las estrategias que los estudiantes plasmaron en esta, evitar borrar su trabajo y desde ahí realizar la formalización del contenido, pues de este modo no invalidamos lo hecho por ellos ya sea que esté correcto o no. Y, no olvidar considerar siempre el trabajo de los estudiantes, aunque estos tengan errores ya que desde ahí se puede realizar un trabajo de enseñanza que logra mayor significancia para ellos, pues así pueden ir detectando cuáles fueron los aciertos y fallas sobre sus estrategias. Luego, cada uno de estos elementos considerados en la etapa de experimentación y en las anteriores, pudieron ser rescatadas en una reflexión que nos permite la fase discusión. Esta última etapa, es una de las más relevantes, pues es la retroalimentación de todos quienes fueron partícipes de la observación de la clase implementada, se logran recoger todas las ideas que permiten realizar las mejoras a futuro, para cada clase que se quiera diseñar, para cada contenido nuevo a enseñar.

Por consiguiente, diseñar una clase con la metodología de estudios de clases, nos permitió tener un panorama amplio para preparar una clase con problemas no rutinarios, un desafío no menor para una clase donde los estudiantes están acostumbrados a la resolución de problemas de manera tradicional, con un enfoque más de ejercicio y por cantidades. Por consiguiente, “la resolución de problemas matemáticos involucra la idea de interacción de variados procesos cognitivos y aproxima la matemática a las situaciones cotidianas vinculadas a diferentes contextos, y pone de manifiesto el tipo de control intelectual que el alumno puede realizar sobre cada situación” (Díaz, Poblete, 1999). Esto, deja de manifiesto la ayuda en el aprendizaje de los estudiantes, pero también la preparación e implementación que implica un problema no rutinario nos deja aprendizaje profesional en cuanto a lo que significa preparar situaciones de clases que salen de lo tradicional, así como el realizarlo junto a los pares. Del mismo modo, hacer un proceso de reflexión con quienes están involucrados en la planificación, implementación y posterior discusión, como docentes en formación nos hizo conscientes que cada vez que se realiza una clase hay que tener en cuenta trabajar la introspección, como también considerar el consejo de los pares, esto con el fin de hacer un análisis individual y una indagación de los contenidos y las actividades propuestas. Y, por supuesto del consejo y diálogo con los pares, ver todos los puntos favorables y desfavorables con el fin recoger ideas para las mejoras y aplicarlas, generar un plan de acción para ellas y así la siguiente clase hacerlo y desempeñarse mejor. Por tanto, “El Estudio de Clases no lleva a ninguna manera particular de enseñanza, sino que sirve como vehículo para que los profesores consigan en colaboración un progreso en la enseñanza y el aprendizaje a partir de una mejor comprensión del aprendizaje del estudiante, del pensamiento y de las sub-comprensiones de éste, observándose unos con otros en clases. (Isoda, M. y Olfos, R., 2009, p.23). Finalmente, el estudio de clases nos ofrece una herramienta que favorece el mejoramiento profesional de profesores de matemática en formación, ya que, tras el proceso de preparación, reflexión e implementación de la clase se vive una oportunidad de desarrollo profesional desafiante que dio y da oportunidades para el desarrollo profesional docente.

CAPÍTULO VII

ANÁLISIS DE RESULTADOS

El análisis de resultados corresponde a la cuarta y última fase de los elementos de la metodología de la ingeniería didáctica, en esta etapa se trabajan con los datos recolectados producto de la implementación, las observaciones de la secuencia de enseñanza y las producciones de los estudiantes. Esto, con el fin de responder a nuestra pregunta inicial sobre las estrategias que usan los estudiantes con problemas no rutinarios en contenidos que involucran razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos. Para lo anterior, en este capítulo se presenta un análisis aposteriori de las situaciones claves de las propuestas de aprendizaje y enseñanza en concordancia con el enfoque teórico y su confrontación con los dos análisis apriori descritos anteriormente en capítulo 5.

Lo anterior con el fin de responder a nuestra pregunta inicial sobre, las estrategias que utilizan los estudiantes con problemas no rutinarios en contenidos que involucran razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos, por medio de la evaluación de los resultados obtenidos y su validación confrontando de manera fundamentada el análisis apriori con él aposteriori.

7.1 Análisis aposteriori de las situaciones de enseñanza y aprendizajes claves

El análisis aposteriori que se presentará a continuación está basado en los dos análisis apriori hecha a dos sesiones de la secuencia clases. Se eligieron estas sesiones considerando las actividades de aprendizaje claves para las situaciones de enseñanza de la investigación. El primero de ellos corresponde a la primera clase de la secuencia, en la que se plantea un problema rutinario y los estudiantes trabajan de forma colaborativa desarrollando las estrategias en sus cuadernos. La segunda sesión del análisis, que es la sesión 6, corresponde a la última clase de la secuencia didáctica donde se hizo la implementación del problema no rutinario, en la que los estudiantes trabajaron sus producciones en una hoja que tenía impreso el problema, que posteriormente entregaron siendo la evidencia para su análisis.

7.1.1 Análisis aposteriori de las situaciones de enseñanza y aprendizaje clave Sesión 1.

Esta sesión se realizó con la participación de 41 estudiantes. La actividad propuesta consistió en un problema rutinario de razones en un triángulo rectángulo con dos preguntas para resolución, su aplicación tiene como propósito enseñar y reforzar los conocimientos previos necesarios para contenido de razones trigonométricas, específicamente razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos. El problema es el enunciado a continuación:

- *Si los lados del triángulo rectángulo ABC se amplifican por 2:*

  a) ¿Qué sucede con los ángulos del triángulo?
  b) ¿Y con las razones entre los lados de los triángulos?

De este problema y las resoluciones de los estudiantes se desprenden los siguientes análisis:

1. **Análisis primera pregunta**

a) ¿Qué sucede con los ángulos del triángulo?

- **Estrategia utilizada por los estudiantes.**

Al menos unos 25 estudiantes utilizaron la estrategia de duplicar la medida de los lados del triángulo y de forma posterior a eso calculaban la razón según recordaban, relacionando los lados correspondientes y en otros casos lados que no correspondían. Denominaron a cada lado con una letra y en el triángulo que debían obtener asignaban la misma letra y luego calculaban la razón. Ahora, frente a la pregunta los estudiantes describieron la situación indicando de forma correcta en la mayoría de los casos, “que los ángulos se mantienen”, pues al construir ambos triángulos y obtener sus medidas observaban que los ángulos no tenían variación, otros sobreponían un triángulo sobre el otro y concluían que la medida de los ángulos se mantenía. Del mismo modo, otros estudiantes mencionaron que solo variaban la medida de los lados del triángulo pues eran triángulos semejantes “solo que más largos los lados”.

- **Errores frecuentes**

El error más común detectado frente a la pregunta sobre la medida del ángulo una vez que se duplica la medida de los lados del triángulo, corresponde a la que enunciaron algunos estudiantes al responder rápidamente que “también se duplicaba la medida de los ángulos”, sin embargo, al razonar un poco más sobre la pregunta, se daban cuenta que era imposible que se duplicaran. La menor cantidad de estudiantes justificaba en que “todo aumenta proporcionalmente, entonces si aumenta el doble la medida de los lados, también aumenta el doble la medida de los ángulos”. Otros estudiantes enunciaron que solo los ángulos que no eran el ángulo rectángulo se duplicaban, pues “el ángulo rectángulo no podía duplicarse porque sería un ángulo de 180° y con eso no puedes construir un triángulo”. Sin embargo, a pesar de que un par de alumnos comentaron lo anterior, la mayoría respondió correctamente que no se podía duplicar debido a que “la suma de los ángulos interiores de un triángulo debe sumar 180°, por lo tanto, no podía duplicarse”. Fue interesante observar el nivel de participación de los estudiantes al ir corroborando entre ellos las respuestas que entregaban, pues logró la participación de unos 25 estudiantes, quienes intentaban corregir a los compañeros que estaban equivocados a pesar de su argumento.

- **Dificultades**

La principal dificultad que se presentó para la primera pregunta se relacionó con que no recordaban los criterios de semejanza para considerar los ángulos correspondientes, luego los llevaba el error de calcular la razón de forma incorrecta, pues relacionaban de manera incorrecta los ángulos correspondientes y así calculaban la razón.

2. Análisis segunda pregunta

b) ¿Y con las razones entre los lados de los triángulos?

- **Estrategia utilizada por los estudiantes.**

En esta pregunta, la participación de los estudiantes fue menor, debido a que no estaban seguros de sus procedimientos y respuestas, por lo que, no se animaron a comentar sus estrategias y conclusiones. Al menos unos 15 estudiantes utilizaron la estrategia del caso general, que es duplicar la medida de los lados del triángulo y de forma posterior a eso calculaban la razón relacionando los lados correspondientes y en los otros casos lados que no correspondían, denominaron a cada lado con una letra y en el triángulo que debían obtener asignaban la misma letra y luego calculaban la razón. Del mismo modo, unos 3 estudiantes utilizaron la estrategia del caso particular, es decir, por medio del teorema de Pitágoras obtener el lado faltante y posterior a ello duplicar las medidas construyendo otro triángulo y considerando los lados correspondientes calcular la razón. Ahora, frente a la pregunta los estudiantes describieron la situación indicando de forma correcta en la mayoría de los casos, "que la razón corresponde a 2". Sin embargo, una cantidad de estudiantes calculó la razón solo de dos lados, y es de lo lados que tenían los datos, y concluían que el tercer lado también tendría la misma razón, pues al duplicar los lados la figura se duplicaba en tamaño entonces también el tercer lado tendría la misma razón.

- **Errores frecuentes**

  El error más común detectado frente a la pregunta sobre la razón es que realizaban el cálculo con lados que no eran correspondientes, como también realizaban el cálculo de la razón del primer triángulo, luego el cálculo de la razón del segundo triángulo y después estimaban la razón entre ambos triángulos, sin considerar la correspondencia de los lados en los triángulos semejantes para calcular la razón.

- **Dificultades**

  La principal dificultad que se presentó al igual que en la primera pregunta se relacionó con que no recordaban los criterios de semejanza para considerar los ángulos correspondientes y de este modo poder obtener la razón. Por otra parte, no todos recordaban el teorema de Pitágoras para obtener la medida del lado faltante.

3. Conclusiones

Se esperaba que los estudiantes desarrollaran la actividad aplicando conocimientos previos de conceptos como teorema de Pitágoras, semejanza de triángulos, razones y proporcionalidad. Que en conjunto fueran enunciando sus resultados y del mismo modo validarán sus propuestas comentando lo que consideraban correcto o no. Se evidenció que al menos el 90% del curso realizó la actividad, y que de quienes participaron el 60% logro las respuestas esperadas utilizando las estrategias del análisis apriori, el 40% restante tuvo errores al enunciar sus respuestas, y al revisar las situaciones se detectó que los estudiantes cometían errores aritméticos, y que faltaba dominio de los conocimientos previos pues confundían la correspondencia de los lados y por ende la expresión para calcular la razón. Sobre los errores Brousseau (1976), afirma que “el error no es solamente el efecto de la ignorancia, la incertidumbre, sino que es el efecto de un conocimiento anterior, que, a pesar de su interés o éxito, ahora se revela falso o simplemente inadecuado”, luego el error es un concepto equivocado, producto de combinaciones de los conocimientos previos de los alumnos, por lo tanto, para corregir esta situación la formalización de la actividad se basó en reforzar aquellos conocimientos previos más débiles que fueron la mayor dificultad en la actividad para generar el aprendizaje.

7.1.2 Análisis aposteriori de las situaciones de enseñanza y aprendizaje clave Sesión 6

Esta sesión corresponde a la implementación en la cual se basó la investigación. Se realizó a 40 estudiantes. Consistió en un problema no rutinario con dos preguntas, el objetivo de aprendizaje tras la actividad era que los estudiantes aplicaran razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos utilizando su intuición y conocimientos previos, sin recurrir a recursos mnemotécnicos para su resolución. El problema era el siguiente:

- *Estás en un campamento y debes levantar un poste de forma perpendicular al suelo para izar las banderas de tu alianza. Para ello tienes un poste de 5 metros, una cuerda larga que podrás anclar por medio de una estaca a nivel del suelo, lo que te permitirá dar la tensión al poste por medio de un ángulo de elevación. Para realizar el trabajo cuentas con las herramientas necesarias como escuadra, calculadora,* *palas, estacas, martillo, etc. Responde a continuación:*

a) ¿Qué estrategia utilizarías para levantar el poste con la cuerda y determinar la medida de la cuerda, usando la estaca y un ángulo de elevación? Explica y justifica matemáticamente.

b) Si desconoces la medida del poste que debes levantar de forma perpendicular al piso, pero sabes que entre la estaca que está a nivel del suelo y la base del poste hay 7 metros de distancia y el ángulo de elevación desde la estaca a la parte superior del poste es de 60°, ¿Puedes determinar la medida del poste? Justifica tu respuesta por medio de un procedimiento matemático.

Luego, de acuerdo con lo resuelto por los estudiantes, se realizó la siguiente clasificación:

Pregunta a)	Pregunta b)
Responde correctamente: 5 estudiantes Responde erróneamente: 13 estudiantes Responden de manera pictórica o solo argumentan: 7 estudiantes Responde correctamente, pero incompleta: 6 estudiantes No responde: 10 estudiantes	Responde correctamente: 27 estudiantes Responde erróneamente: 3 estudiantes Responde de manera pictórica o solo argumenta: 0 estudiantes No responde: 10 estudiantes

1. **Análisis primera pregunta**

a) ¿Qué estrategia utilizarías para levantar el poste con la cuerda y determinar la medida de la cuerda, usando la estaca y un ángulo de elevación? Explica y justifica matemáticamente.

- **Estrategias utilizadas por los estudiantes.**

Se consideraron tres estrategias, las que se previeron en el análisis apriori, y que fueron las más recurrentes de los estudiantes.

- Utilizan la razón trigonométrica del seno para dejar expresada la medida de la cuerda.

  Esta es la estrategia que corresponde a la respuesta esperada, debido a que solo tienen el valor del poste que es uno de los catetos del triángulo, aplicando la razón del seno resultaba solo la expresión que permitía obtener el resultado. Luego el estudiante a continuación justificó que para obtener la longitud de la cuerda era necesario saber el ángulo de elevación. Lo que está correcto, ya que ese dato no fue entregado en el enunciado del problema.

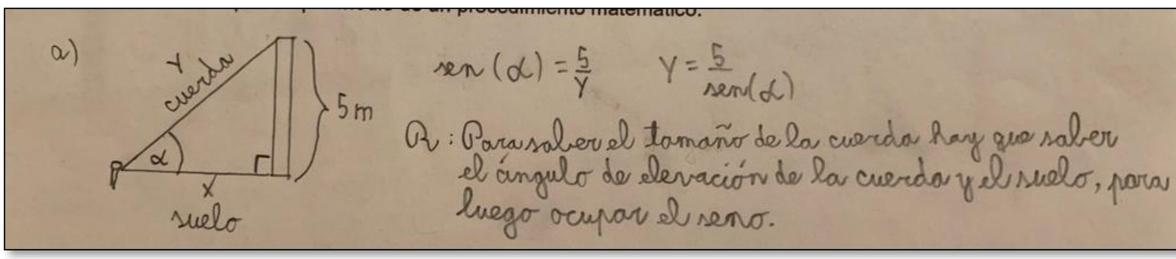
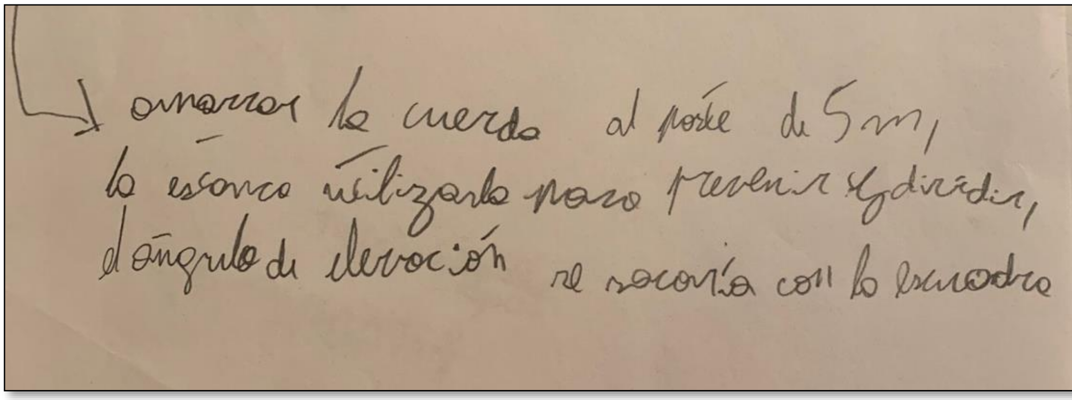


Ilustración 10: Producción de estudiante

- Representan el problema sin desarrollo.

  El primer estudiante representa el problema justificando, pero no realiza un desarrollo matemático simbólicamente. El estudiante logra comprender el enunciado e identificar algunos elementos para la resolución, sin embargo, no realiza la transposición a lo simbólico. Considera también algunos elementos de medición para obtener lo solicitado. Aun así, no obtiene la respuesta esperada.



amarrar la cuerda al poste de 5m,
la [illegible] utilizarla para prevenir su dirección,
el ángulo de elevación se sacaría con la escuadra

Ilustración 11: Producción de estudiante

Los dos estudiantes realizan una representación pictórica de sus análisis, pero dejan solamente expresado el bosquejo de sus resoluciones sin realizar un desarrollo matemático simbólicamente. El primer estudiante logra comprender el enunciado e identificar los elementos para la resolución, su respuesta es con un triángulo isósceles, pero no logra la transposición a lo simbólico para obtener la respuesta esperada. El segundo estudiante, es del mismo modo que el primero, con la salvedad que es por medio de un triángulo rectángulo, también no logra transposición a lo simbólico y no obtiene la respuesta esperada.

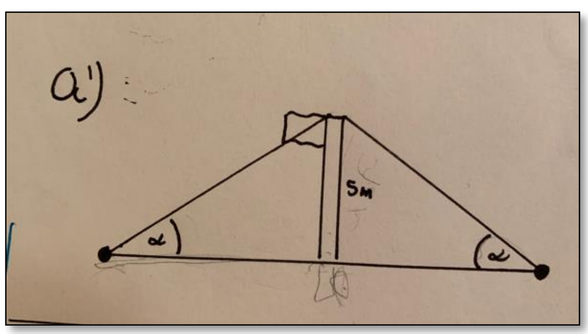


Ilustración 12: Producción de estudiante

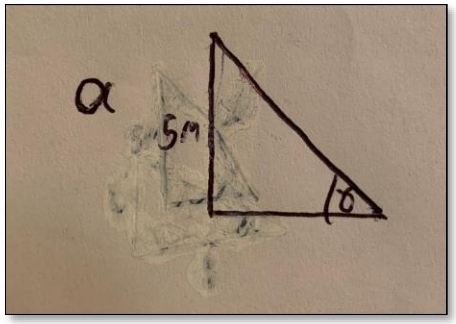


Ilustración 13: Producción de estudiante

- Utiliza el Teorema de Pitágoras y les da un valor a los catetos.

  El estudiante aplica una de las estrategias que se consideraron en el análisis apriori. Como el problema no entregaba todos los datos para que los estudiantes resolvieran, era una posibilidad que ellos se entregaran valores para uno de los catetos y así determinar por el teorema de Pitágoras la hipotenusa, que corresponde a la cuerda, o bien se podían otorgar un valor para la medida del ángulo de modo que pudieran aplicar la razón trigonométrica. En este caso el estudiante se dio un valor para el cateto adyacente al ángulo, luego obtiene la medida de la cuerda por medio del teorema de Pitágoras, si bien su estrategia y resultados era algo esperado, no aplica las razones trigonométricas que es el objetivo de aprendizaje.

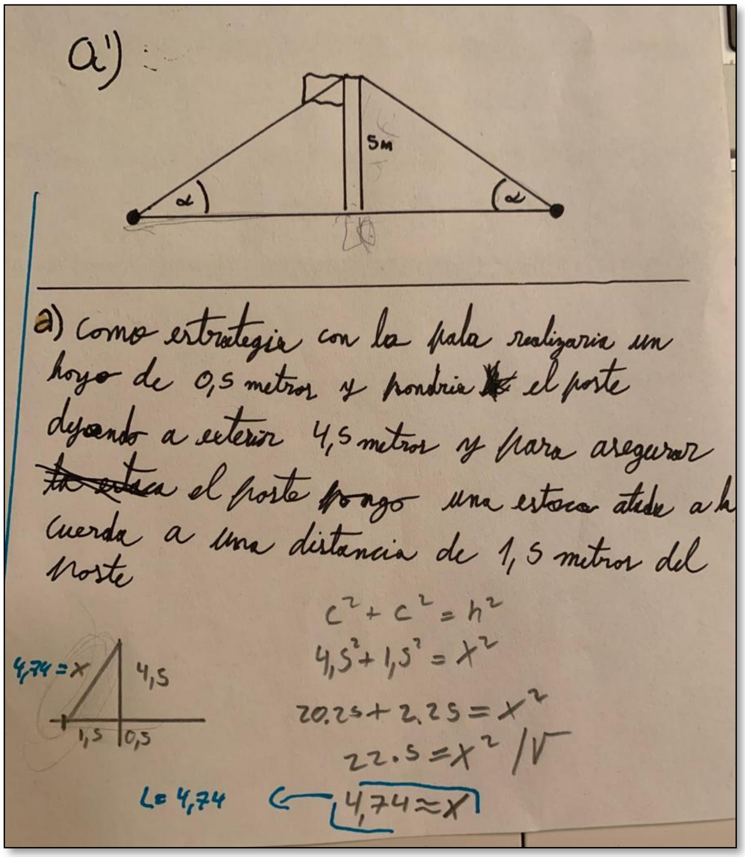


Ilustración 14: Producción de estudiante

- **Errores frecuentes.**

Algunos de los errores más comunes que se pudieron detectar en el análisis fueron los siguientes:

- Calcular de forma incorrecta las razones. Es decir, aplican razón del seno en vez de la del coseno, confundiendo los lados y el ángulo que corresponde a cada razón.
- Despejar las variables de las razones trigonométricas de forma incorrecta, y como consecuencia determinan de forma errónea los catetos de la razón del seno o la del coseno.
- Obtener la longitud de la hipotenusa y no buscar la medida del cateto solicitado.

- No identificar correctamente las medidas entregadas en el problema en el respectivo triángulo rectángulo que deben formar.

A continuación, algunos ejemplos que evidencian estos casos:

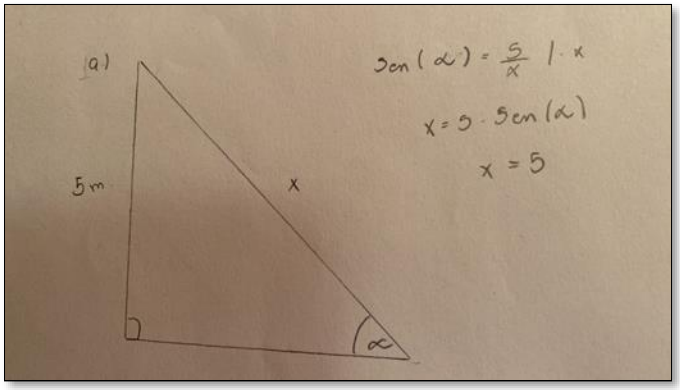


Ilustración 15: Producción de estudiante

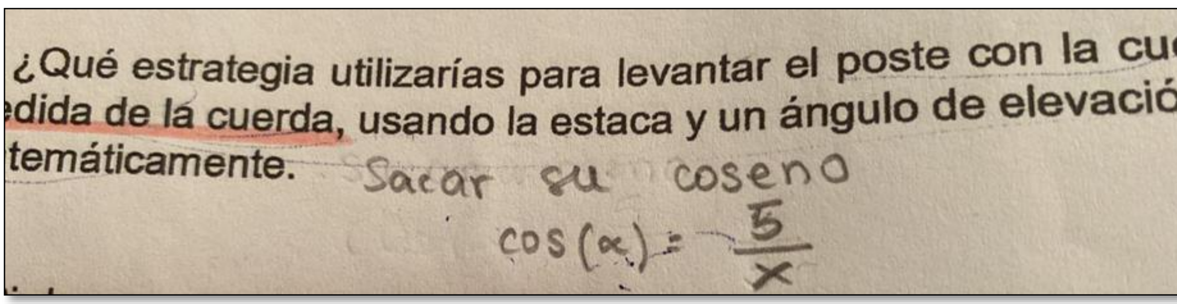


Ilustración 16: Producción de estudiante

- **Dificultades**

Algunas de las dificultades que se analizaron en la primera pregunta del problema propuesto, se relacionan con que no logran representar pictóricamente lo solicitado, ni realizar la transposición a lo simbólico. Los conocimientos previos se adquirieron de manera confusa por lo que no hay certeza en lo que aplican al momento de desarrollar. Interpretan incorrectamente el enunciado, representando el ángulo y las medidas de forma errónea en el triángulo rectángulo que deben formar. De acá surge más una dificultad de comprensión pues no logran relacionar los datos con lo solicitado. No identifican o no saben ingresar los datos en la calculadora para obtener las razones trigonométricas del seno y coseno.

2. Análisis segunda pregunta.

b) Si desconoces la medida del poste que debes levantar de forma perpendicular al piso, pero sabes que entre la estaca que está a nivel del suelo y la base del poste hay 7 metros de distancia y el ángulo de elevación desde la estaca a la parte superior del poste es de 60°, ¿Puedes determinar la medida del poste? Justifica tu respuesta por medio de un procedimiento matemático.

- **Estrategias utilizadas por los estudiantes**
  La segunda pregunta si bien utiliza los datos del enunciado original, tiene un carácter más de problema rutinario, pues entrega todos los datos necesarios para que los estudiantes apliquen las razones trigonométricas. De acá no surgieron muchas estrategias, pues más que una respuesta se espera un resultado por medio de aplicación de los conocimientos sin el ejercicio de la intuición. De todos quienes respondieron esta pregunta, 31 utilizaron tangente para determinar la medida del poste y 10 estudiantes no respondieron.

  - Utilizan la razón trigonométrica de la tangente para determinar la medida del poste. En este caso deben obtener un cateto, ya saben la medida del otro cateto y la medida del ángulo, por lo tanto, aplicando la razón de la tangente reemplazan los datos y obtienen lo solicitado.

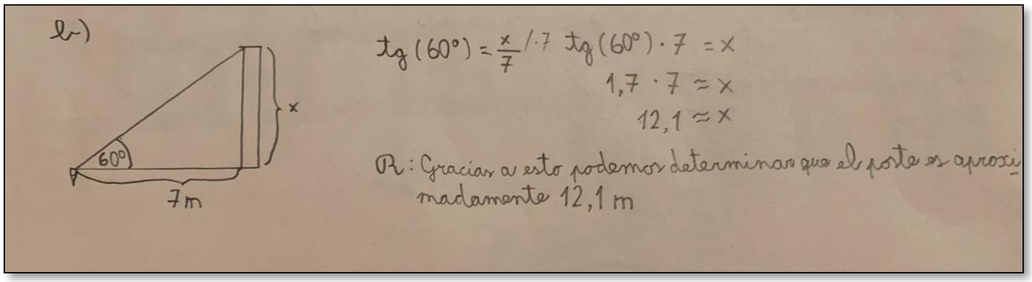


Ilustración 17: Producción de estudiante

- **Errores más frecuentes**

En cuanto a la pregunta en análisis, los errores más frecuentes son de carácter más aritmético y algebraico, pues los estudiantes identifican la razón trigonométrica que deben utilizar, pero no logran hacer el desarrollo algebraico necesario para despejar y obtener el cateto pedido. Esto se relaciona con que el problema entrega todos los datos que los estudiantes pueden identificar debido a que tienen los conocimientos previos del contenido y es más sencillo para ellos hacer una representación pictórica con todos los datos, de ahí que logran hacer la transposición a lo simbólico, pero no logran desarrollar lo algebraico.

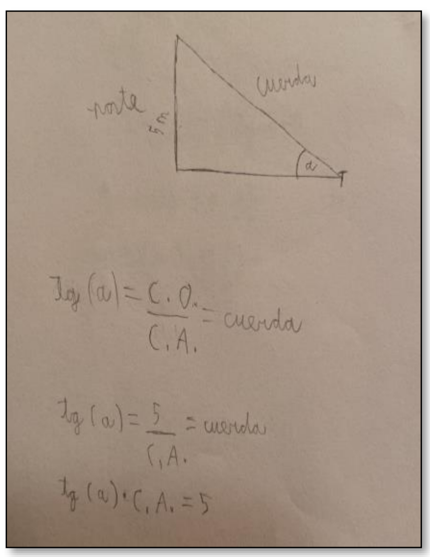


Ilustración 18: Producción de estudiante

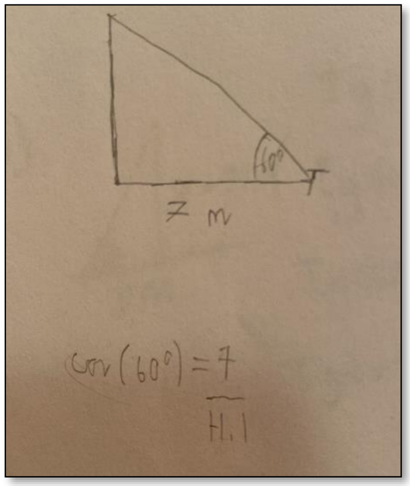


Ilustración 19: Producción de estudiante

- **Dificultades.**

  Sobre el análisis de las dificultades para la segunda pregunta, de manera muy similar al análisis de los errores, se detectan solo algunas, y también se relaciona con que los estudiantes tienen los conocimientos previos y que la confusión puede surgir al momento de realizar al procedimiento algebraico o bien no logra representar pictóricamente lo solicitado, lo que como consecuencia no logra la transposición a lo simbólico. Y de manera muy particular, no saben ingresar los datos en la calculadora.

3. Conclusión.

La modelación del enunciado genera una dificultad en los estudiantes, pues cuando logran representar pictóricamente de forma correcta aplicar los conocimientos del contenido es una tarea que no les genera mayor complejidad. Ahora en cuanto a no lograr la modelación puede surgir del hecho que no existe la costumbre de trabajar en la resolución de problemas sin que exista la intervención del profesor, quien habitualmente además de leer el problema suele explicar que es lo que tienen que resolver. Podríamos concluir que la enseñanza por medio de la resolución de problemas y en particular del no rutinario, está muy asociado al conductismo y que tal como lo postula Brousseau (1997) “Un obstáculo es un conocimiento para producir respuestas adaptadas a un cierto contexto que encuentra con frecuencia. Cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas”, puede convertirse en un obstáculo. Para los estudiantes, el cambio de desarrollar problemas sin las “recomendaciones o indicaciones” del profesor no es sencillo, y se evidenció en los resultados que se obtuvieron en la investigación. Además, sumado a lo anterior siguen existiendo dificultades y errores que tienen que ver con los conocimientos previos sobre los cuales no lograron los aprendizajes. Sin embargo, es evidente que cuando se realiza un trabajo que genera un desafío a los estudiantes, y posterior a ellos existe una formalización del contenido, se logra el aprendizaje de manera significativa.

7.2 Confrontación de los análisis apriori y posteriori

Teniendo en consideración las situaciones de enseñanza y aprendizajes claves, se presenta la primera situación en donde se trabajan los conocimientos previos para comenzar a introducir en nuevo contenido con su respectiva confrontación y, por otra parte, la segunda situación cuando el contenido ya fue formalizado e institucionalizado.

7.2.1 Confrontación de primera situación de enseñanza y aprendizaje clave

Cabe destacar que en primera instancia se trabaja de manera individual y luego se revisa de manera colaborativa en la pizarra, en este sentido es que al comienzo de la actividad los estudiantes no recordaban el teorema de Pitágoras, el cual es un contenido ya adquirido y necesario para este problema y el contenido nuevo. Es por esto por lo que se recuerdan en conjunto y se continúa con el problema planteado.

Con respecto al análisis apriori, la única estrategia trabajada fue la considerada como respuesta esperada, en donde a través del teorema de Pitágoras encontrar la hipotenusa del triángulo dado y así realizar lo solicitado en el problema. Sin embargo, a pesar de que los estudiantes ya saben el procedimiento a realizar, les dificulta el plantear las razones entre segmentos (de igual naturaleza) el cual fue una dificultad que se había previsto en el análisis apriori.

En cuanto a los errores, se presentaron errores previstos tales como en operaciones aritméticas y el cálculo de razones con un mal planteamiento.

Si bien, en un comienzo la tarea fue trabajado como un problema para el estudiante, el cual se define según Díaz y Poblete (2001) como que "requiere de una solución bajo ciertas condiciones específicas, si éste comprende la tarea, pero no encuentra una estrategia inmediata para su solución, y, finalmente, si es motivado para buscar la solución." (p. 34) el cual no resultó pues los estudiantes rápidamente sabían que se trabajaba con teorema de Pitágoras y el planteamiento de razones, es por esto que se transforma en un ejercicio, es decir, que el estudiante "encuentra de forma espontánea la solución, porque resulta ser la práctica de una rutina en la cual ya ha sido iniciado" (Díaz y Poblete, 2001, p.36) cometiendo así pocos errores y dificultades en el desarrollo de este.

7.2.2 Confrontación de la segunda situación de enseñanza y aprendizaje clave

En esta situación de enseñanza y aprendizaje clave el contenido ya fue adquirido y trabajado a través de ejercicios y problemas, es por esto que en esta instancia para finalizar el tema tratado se presenta un problema con dos partes, analizando cada una de ellas se tiene que:

A partir de los resultados obtenidos, relacionándolo con el análisis apriori se pueden obtener diversas conclusiones, de las cuales se desprenden diferencias y similitudes con respecto a lo trabajado.

Entre las similitudes se presentan las estrategias 1, utilizada mayoritariamente que consistía en resolver por medio de razones trigonométricas del seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos tal como se muestra en la siguiente imagen.

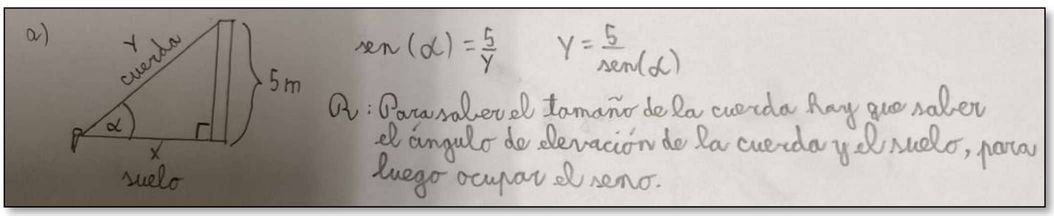


Ilustración 20: Producción de estudiante

Sin embargo, también se presentó un estudiante que utilizó una estrategia que no se previó en el análisis apriori en donde supone una medida de una estaca y asigna otros valores para calcular la medida de la cuerda tal como se presenta a continuación:

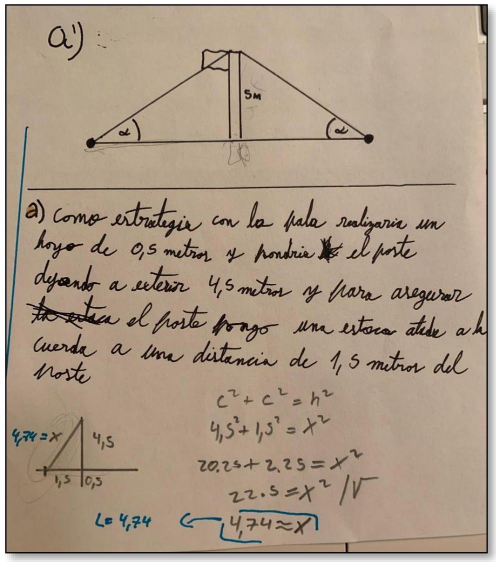


Ilustración 21: Producción de estudiante

De esta forma, se puede observar que a pesar de que el estudiante trabaja correctamente los contenidos matemáticos, el resultado a que llega es un caso particular del problema, por lo que no cumple con el objetivo del problema que es dejar una expresión matemática.

Por otra parte, se presentaron los errores previstos en el análisis apriori en cuanto al desarrollo de una operación aritmética y el uso de las razones trigonométricas como se presenta a continuación:

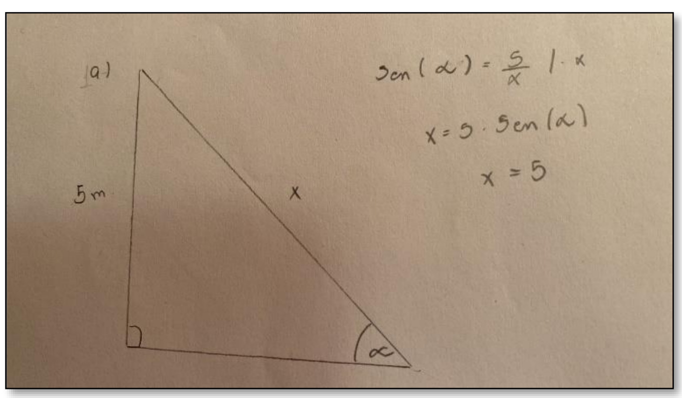


Ilustración 22: Producción de estudiante

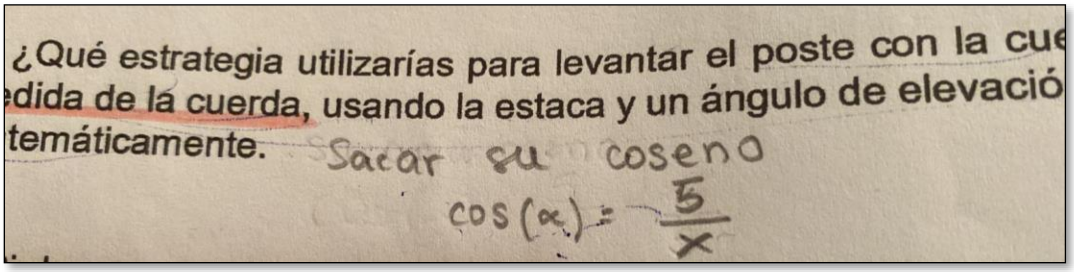


Ilustración 23: Producción de estudiante

Lo anterior deja en evidencia errores comunes al momento de desarrollar problemas que involucran el contenido de razones trigonométricas. Así mismo, los errores que se presentaron en la pregunta b) son de la misma naturaleza que los anteriores, como se evidencia a continuación:

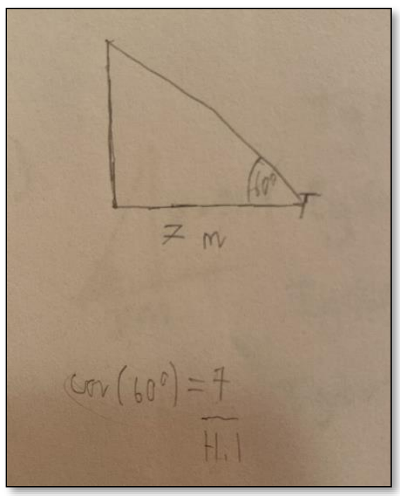


Ilustración 24: Producción de estudiante

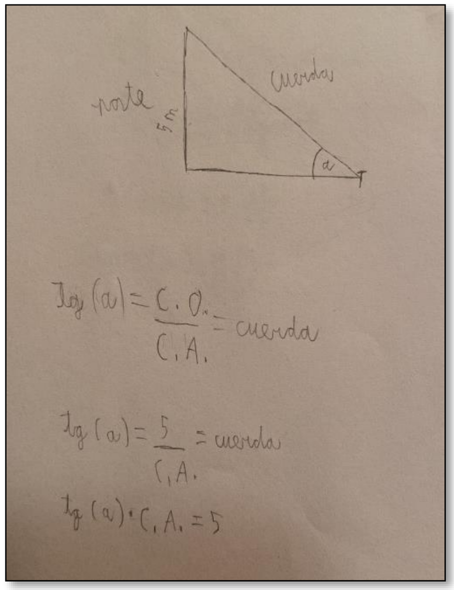


Ilustración 25: Producción de estudiante

En cuanto a las dificultades tanto en el enunciado como en el desarrollo no se presentaron ni quedaron evidencia de ellas, ya sea en el momento de la implementación como en la hoja de respuesta.

Sumado a lo anterior, al momento de realizar las modificaciones correspondientes en el análisis apriori del problema planteado, estas fueron en pos de mejora para la implementación, teniendo así, datos y resultados concretos con el objetivo de generar conclusiones con respecto al contenido trabajado y si este generó un aprendizaje significativo en los estudiantes sin caer en el deslizamiento metacognitivo o bien la memorización.

CONCLUSIONES

Tras un análisis a las diferentes dificultades que presenta la enseñanza de las razones trigonométricas en las salas de clases, nuestra investigación se basó en la siguiente pregunta ¿qué estrategias utilizan los estudiantes para resolver problemas no rutinarios de razones trigonométricas del seno y coseno en triángulos rectángulos? Se evidenció que la enseñanza de este contenido presenta dificultades para los profesores y es complejo de comprender por parte de los estudiantes, Fernández, Ruiz y Rico (2016) mencionan que “la trigonometría es un contenido escolar que resulta difícil de entender por los estudiantes”. Al respecto, conjeturamos que es debido a que la modelación de las diferentes situaciones o conflictos del diario vivir del ser humano matematizada por medio de las razones trigonométricas no es sencillo de entender y realizar su transposición para la enseñanza, o bien que al no ser una disciplina de la matemática pura sino que al surgir de diferentes transposiciones didácticas para su enseñanza su aprendizaje es dificultoso. Por consiguiente, su enseñanza se realiza por medio de métodos tradicionales, aplicando principalmente técnicas vinculadas a la ejercitación y la memorización, es decir, utilizan algoritmos como métodos de aprendizaje, lo que según Brousseau son denominados como fenómenos didácticos. Sobre estos últimos, el deslizamiento metacognitivo era nuestro interés, pues uno de los propósitos era enseñar sin técnicas las razones trigonométricas, que los estudiantes construyeran su aprendizaje. Para esto, el diseño de una secuencia de clases que involucró un problema no rutinario al inicio y al final de las sesiones, dejó en evidencia que los estudiantes, a pesar de todas sus dudas en la ejecución de resolución de un problema no rutinario, logran el aprendizaje. Pues, por medio de diferentes estrategias en sus producciones se observó que hay un razonamiento tras lo solicitado en el problema.

Para constatar lo expuesto anteriormente, la secuencia de clases diseñada con el propósito de caracterizar las estrategias que desarrollaron los estudiantes frente a un problema no rutinario, implicó para ellos todo un desafío en su metacognición, pues les permitió desarrollar un pensamiento propio frente a la solución del problema implementado. En este sentido, fue concluyente observar que los mayores porcentajes de logro frente al problema no rutinario y el rutinario fueron sobre este último, pues al ser un problema que se formuló de manera intencionada con todos los datos y valores necesarios, los estudiantes identificaron fácilmente qué razón trigonométrica les permitía obtener la respuesta esperada y el resultado correcto. No fue la misma situación para el problema no rutinario, pues es un problema que no tiene un método de solución o la aplicación de una regla, el estudiante tuvo que resolver intuitivamente basado en sus conocimientos previos y experiencias anteriores. Por lo tanto, al no tener información suficiente, se les dificulta en demasía resolver un problema de estas características recurriendo a las orientaciones del profesor para responder lo solicitado. Sin embargo, es importante considerar que a pesar de la dificultad que presentó para ellos el problema, algunos lo resolvieron según la respuesta esperada en nuestro análisis apriori, como también la mayoría de las estrategias que reflexionamos que surgirían. Además, frente a los dos tipos de problemas los estudiantes lograron representar pictóricamente sin ninguna dificultad y de forma correcta. Luego, al respecto podemos concluir que si bien la resolución de problemas desde tempranamente es parte de la enseñanza, lo es también la forma conductista en que se aprende, esto se constata en que los estudiantes presentan dificultad para entender los problemas cuando el profesor no les indica o les interpreta lo que deben resolver y de qué forma hacerlo. Entonces, de aquí surge un factor determinante en cuanto a la enseñanza aprendizaje de las razones trigonométricas y es, la forma tradicional de abordarla por medio de técnicas que “simplifican” su aprendizaje sin importar si es significativo o no y, la forma de aplicar lo aprendido a través de la resolución de problemas donde el estudiante espera constantemente la instrucción del profesor sobre qué y cómo deben resolver, acostumbrados incluso a que el docente les lea el problema. Lo que no permite la construcción del aprendizaje por parte de los estudiantes, pues contrario a esto último es la evidencia de aquellos estudiantes que fueron capaces de resolver el problema no rutinario según lo esperado, utilizando su intuición y un razonamiento sin técnica alguna. Y, aunque haya sido la menor cantidad del curso que logró resolver, demuestra que los estudiantes si aprenden sin la técnica tradicional emergida del deslizamiento metacognitivo.

De las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización de la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brosseau, implementadas para los fines de esta investigación, se puede concluir que los estudiantes leen, comprenden y exploran el problema de manera individual, realizando una estrategia en la que utilizan sus conocimientos previos. Sin embargo, necesitan ratificar constantemente sus desarrollos con el profesor, no dándose espacio para el trabajo en conjunto que les permita formular y validar sus aplicaciones. Del mismo modo, cuando requieren comunicar las acciones realizadas con sus pares lo realizan de manera asertiva, pero al generarse un diálogo de opiniones diferentes no son capaces de defender su propuesta, ni argumentar el porqué de esta. Entonces, cuando los estudiantes deben ser los protagonistas de su aprendizaje y validar su desarrollo frente al curso existe poca participación ya que, al no tener una aprobación previa del profesor sobre sus resultados, los estudiantes temen la exposición de sus estrategias a pesar de tener certeza del proceso que realizaron. Es así como, cuando el profesor comienza el proceso de institucionalizar el contenido, los estudiantes se disponen a aprender, asumiendo que este es el único momento de la clase en la ellos creen que se logra el aprendizaje.

Finalmente, si bien tras las evidencias observamos que no fue la mayoría de los estudiantes quienes respondieron a nuestra implementación según lo esperado, es necesario rescatar a aquellos que si lo hicieron. Pues, esto demuestra que es posible el aprendizaje significativo en los estudiantes sin las técnicas tradicionales, la mnemotecnia o la memorización. Los problemas no rutinarios de razones trigonométricas, pueden implicar todo un desafío tanto para la enseñanza por parte de los profesores como para el aprendizaje por parte de los estudiantes, pero no algo difícil ni imposible de hacer, pues más que la dificultad propia de abordar los contenidos por medio de problemas no rutinarios, son las tradiciones de la enseñanza y los procesos de cambio el mayor obstáculo que surge. En algunos contenidos, el proceso de pasar de la enseñanza conductista a la constructivista no es rápido, y creemos que comienza desde los primeros encuentros de los estudiantes con la matemática y no solamente cuando una unidad del programa de forma particular lo requiere, pues “Saber que enseñar no es transferir conocimiento, sino crear las posibilidades para su propia producción o construcción” (P. Freire, 1997, pág.47), es el objetivo del todo de un docente de matemática.

BIBLIOGRAFÍA

Abonia, L. F., & Miranda, W. S. (2017). *Un acercamiento histórico a las razones trigonométricas seno y coseno para la implementación de una actividad en el aula.*

Álvarez Ponce, V. A., Alonso Uría, R. M., Muñiz Rizo, M. E., & Brito Ruiz, A. (2013). La pizarra como medio de enseñanza. *Educación Médica Superior*, *27*(1), 103-111.

Artigue M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, en P. Gómez (ed): *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericano/ Una empresa docente.

Artigue, M. (1998). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P., (Eds.). Ingeniería didáctica en educación matemática. Colombia. Una empresa docente.

Ávila, A. (2001). El maestro y el contrato en la teoría Brousseauniana. *Educación matemática*, 13(3), 5-21.

Blanco Nieto, L. J. (1991). *Conocimiento y acción en la enseñanza de las matemáticas de profesores de EGB y estudiantes para profesores*. Cáceres: Universidad de Extremadura, Servicio de Publicaciones, 1991.

Brousseau, G. (1976). La problématique et l'enseignement des mathématiques. *XXVIIIème Rencontre de la CIEAEM*, Louvain la Neuve, Bélgica.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: didáctico/didactic to algebra study* (Vol. 7). Libros del Zorzal.

Brousseau, G. (2007). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage (primera edición en francés, 1998).

Brousseau, G., & D'Amore, B. (2018). Los intentos de transformar análisis de carácter metacognitivo en actividad didáctica De lo empírico a lo didáctico. *Educación matemática*, *30*(3), 41-54.

Brown, S.A. (2005). *The trigonometric connections: Students' understanding of sine and cosine*. Unpu-blished doctoral dissertation, Illinois State University, Illinois.

Carrillo Serrano, H. A. (2006). *Recursos nemotécnicos de las funciones trigonométricas básicas.* (Doctoral dissertation).

Chacón, A., García, G., Rupin, P., Setz, J. & Villena, M. (2019) *Texto del estudiante Matemática 2do Medio*. Editorial SM.

Chamorro, M. (2006). *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil.* https://unmundodeoportunidadesblog.files.wordpress.com/2016/02/didactica-matematicas-en-infantil.pdf

Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. *Cuadernos*, 2, 1-10.

De Kee, Mura & Dionne (1996) citado por Cortes, G & Espinosa, G (2007) En: "Estudio Socioepitemologicos de la Razón Trigonométricas. *Elementos para la construcción de su Naturaleza Proporcional*. CICATA-IPN. Mexico.w

De Kee, S., Mura, R. y Dionne J. (1996). La comprensión des notions de sinus et de cosineschez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics*, 16, 2,19-22.

Díaz, E., Ortíz, N., Morales, K., Rebolledo, M., Barrera, R., Norambuena, P. (2021) *Texto del estudiante Matemática 2do Medio*. Editorial SM.

Díaz, M., & Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas en el aula. Números. *Revista Didáctica de las Matemáticas*. Volumen 45. p. 33-41.

Doig, B. & Groves, S. (2011). Japanese Lesson Study: Teacher Professional Development through Communities of Inquiry. Mathematics Teacher Education and Development, 13(1), 77-93.

Fernández, E. M., Hidalgo, J. F. R., & Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *34*(3), 51-71.

FREIRE, P. (1997). Pedagogía de la Autonomía. México DF: Siglo XXI (Trabajo original publicado en 1996).

Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: a critical process of Lesson Study. ZDM Mathematics Education, 48(4)

Fujii, T. (2015). The Critical Role of Task Design in Lesson Study. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), Task design in mathematics education (pp. 273-286). Cham, Suiza: Springer.

Isoda M., Arcaví A. y Mena A. (2008). El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas, Chile. Ediciones Universitarias de Valparaíso, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Jácome, G., y Montiel, G. (2008). Estudio socioepistemológico de la razón trigonométrica. Elementos para la construcción de su naturaleza proporcional. *Memoria de La IX Escuela de Invierno En Matemática Educativa*, 419–432.

Junta Nacional de Auxilio Escolar y Becas (2022). Índice de vulnerabilidad escolar 2022.

Masjuan, G., Arenas, F. & Villanueva, F. (2013) *Geometría analítica y trigonometría*. Universidad de Chile.

Mena A. (2006). *El estudio de clases japonés en perspectiva.* Valparaíso, Chile. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Ministerio de Educación. (2016). Matemática. Programa de Estudio 2° Medio. Santiago de Chile: Unidad de currículum y evaluación.

Moraga, A. (2021) *Propuesta de diseño para la resignificación de las razones trigonométricas seno y coseno en estudiantes de enseñanza media en Chile.* [Tesis de Magíster, Universidad Alberto Hurtado]. Repositorio Institucional - Universidad Alberto Hurtado.

Murata, A. (2011). Introduction: conceptual overview of lesson study. En L. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds.), Lesson study research and practice in mathematics education (pp. 1- 12). Dordrecht, Países Bajos: Springer

Murillo, F. (2003). *La investigación sobre eficacia escolar en Iberoamérica. Revisión internacional sobre estado del arte*. Convenio Andrés Bello-Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, España, y CIDE, Chile.

[Resultados prueba END]. (2021) *Evaluacion nacional diagnostica Resultados individuales Aplicación año 2021.* [Archivo PDF]. file:///C:/Users/lcmun/Downloads/20241177-0_2022-09-13.pdf

Retamal, I. G., Pino-Fan, L. R., & Arredondo, E. H. (2020). Paradojas didácticas observadas en la gestión de los teoremas de Euclides. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *34*, 651-677.

Rueda, G. (2012). *Aproximación a la enseñanza de las razones trigonométricas a través del trabajo experimental en matemáticas en el grado décimo*. Universidad del Valle. Santiago de Cali.

Shimizu, Y. (2014). Lesson study in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 358-360). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Takahashi, A.; Watanabe, T y Yoshida, M (2008). English Translation of the Japanese Mathematics Curricula in the Course of Study. Grades 1-9.

Torres, G. M., Daza, F. A., & Mansilla, F. V. (2006). *Trigonometría y geometría analítica*. Eds. Universidad Católica de Chile.

Watanabe, T., Takahashi, A. & Yoshida, M. (2008). Kyozaikenkyu: A critical step for conducting effective lesson study and beyond. En F. Arbaugh & P. M. Taylor (Eds.), Inquiry into Mathematics Teacher Education (Vol. 5, pp. 131–142). Association of Mathematics Teacher Educators (AMTE). Monograph Series.

ANEXOS

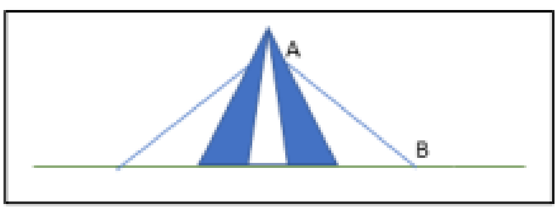
- Anexo 1: Problema no rutinario[3]

a) Andrés se encuentra de camping con sus amigos y deben armar las carpas. El instructor a cargo les dice que debe tener mucho cuidado con las cuerdas que conectan la carpa con el suelo, puesto que estas representan la forma principal de mantener todo en su lugar. La forma de armar la carpa se muestra en la imagen a continuación.

1. ¿De qué forma podría medir la distancia entre el punto A y el suelo para que sea la menor medida posible? Trace una recta en el dibujo y fundamente.

2. ¿Qué ángulo forma la recta de la pregunta anterior con el suelo?

3. ¿Qué figura geométrica se puede identificar? ¿Cómo se relaciona cada componente con el problema?



A: Punto donde la cuerda se amarra a la carpa.

B: Punto donde la cuerda se amarra al suelo.

b) El instructor les comenta a sus estudiantes que la cuerda debe formar un ángulo con el suelo de 37°, lo que se logra con una razón de 0,6 al dividir la altura del punto A con el largo de la cuerda entre los puntos A y B.

1. Si el instructor tiene el punto A a una altura de 1,2 m, ¿cuál es el largo de la

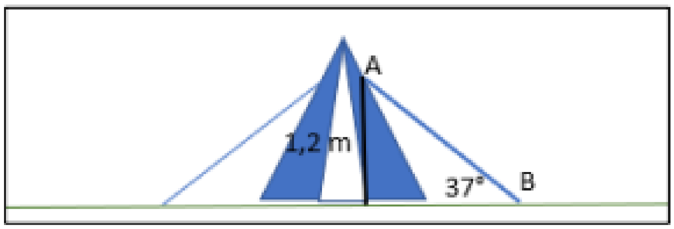
[3] Extraído de Tesis de grado de Moraga (2021) (Propuesta de diseño para la resignificación de las razones trigonométricas seno y coseno en estudiantes de enseñanza media en Chile)

cuerda necesaria?

2. ¿Si todas las carpas deben utilizar el mismo ángulo, serviría que todos mantengan la misma razón con distintas medidas?

Fundamente.

3. Utilizando la información del instructor, ¿qué largo de cuerda (A-B) usará Andrés si su punto A está a una altura de 1,5 m?

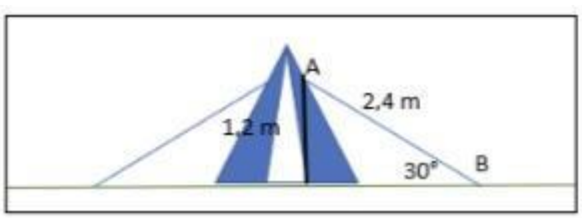


c) Al otro día, el clima era distinto y la velocidad del viento era mayor, por lo que el instructor aumentó el largo de la cuerda a 2,4 m, para así lograr un ángulo de 30°, como se muestra en la figura siguiente.

1. ¿Cuál sería la nueva razón para utilizar las carpas?

2. En estas nuevas condiciones, ¿qué largo de la cuerda debería usar Andrés?

3. ¿A qué componente del problema se encuentra vinculada la razón? ¿Altura del punto A, largo de la cuerda A-B o al ángulo? Fundamente.



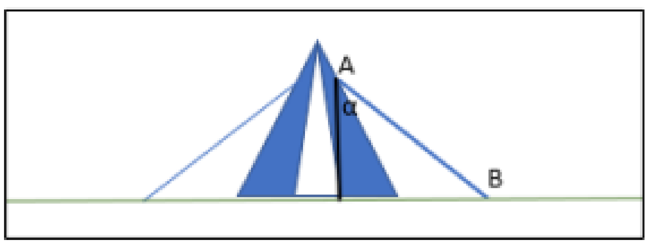
d) Al finalizar el campamento, Andrés le preguntó al instructor cómo supo la razón nueva en función del clima, este le respondió que usaba una tabla que llevaba en su libreta:

1. ¿Los valores de la tabla aplicarían a cualquier carpa? ¿Por qué?

2. ¿Cómo determinaría el valor de otro ángulo sin utilizar calculadora? Explique.

Clima	Ángulo	Altura/largo
Soleado o nublado con brisa suave	37°	0,6
Soleado o nublado con fuerte viento	30°	0,5
Lluvioso	25°	
Lluvioso con fuerte viento	20°	0,34

e) Años después, Andrés se había convertido en instructor y debía orientar en el armado de las carpas. Sin embargo, él prefería usar el ángulo que formaba la cuerda con la recta de la altura en el punto A, como lo muestra la siguiente imagen:



Decidió armar su carpa con las dimensiones de un clima soleado y viento suave, es decir, con una altura del punto A igual a 1,5 m y un largo de cuerda A-B de 2,5m, y se fijó que el ángulo era de 53°. 1. ¿Cómo se relaciona el ángulo que midió con el que utilizó en el pasado?

f) Posteriormente, prefirió hacer también una nueva tabla en función del ángulo en el punto A, como se muestra a continuación:

Clima	Ángulo	Altura/largo
Soleado o nublado con brisa suave	53°	0,6
Soleado o nublado con fuerte viento		
Lluvioso		
Lluvioso con fuerte viento		

1. ¿Cuáles son los valores restantes para los ángulos de la tabla?

2. Utilizando la nueva tabla, ¿cuál sería el largo de la cuerda necesario si el ángulo es para un clima lluvioso con fuerte viento?

3. ¿Existe algún cambio si se utiliza esta tabla o la usada por el instructor para armar las carpas? ¿Qué consideraciones habría que tener?

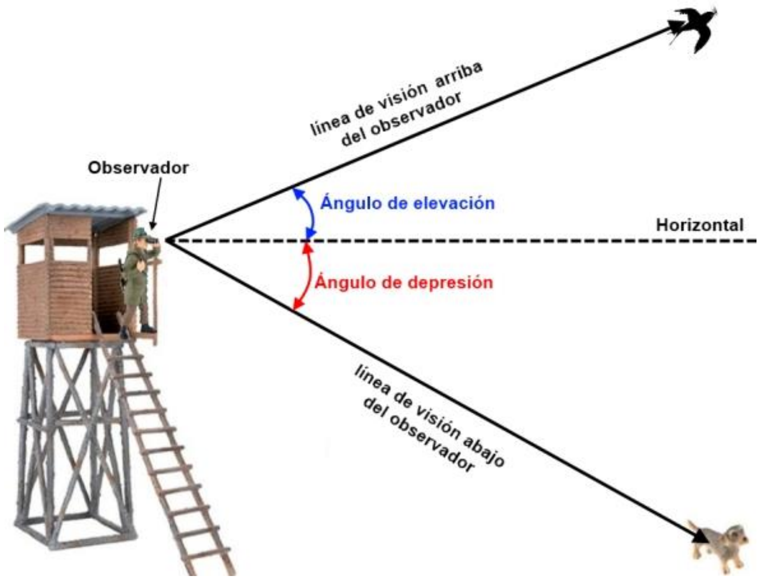
4. ¿Es necesario tener ambas tablas para las razones y los ángulos? Fundamente.

- Anexo 2: Ejercicio trabajado en clase[4].

Recordando…

Al mirar un objeto, éste puede estar sobre la vista o bajo la vista, lo que determina un ángulo de elevación o de depresión, según sea el caso. Ambos se forman con la línea recta que une la vista con el objeto observado y la horizontal, tal como lo indican los siguientes dibujos:

[4] Extraído del material de apoyo docente de Red SIP (2022)

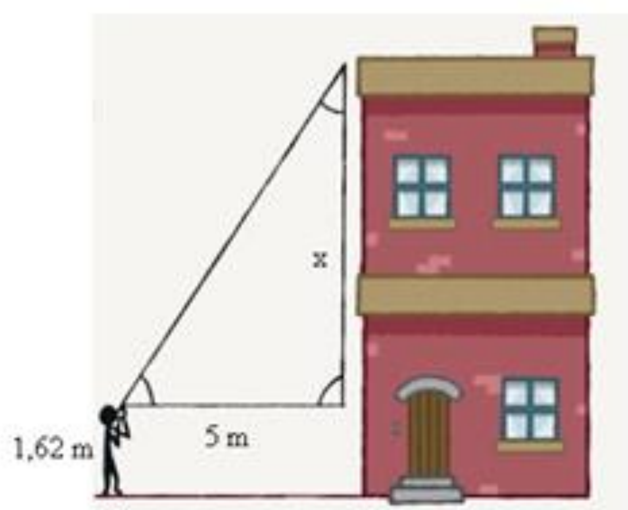


<u>Ejercicios</u>

Gabriel, de 1,62 m de altura, se encuentra a 5 m de la base de un edificio y observa el punto más alto de este con un ángulo de elevación de 30°.

a) Determine aproximadamente la altura del edificio.

b) Si Gabriel se aleja 2 metros de la base del edificio, ¿en cuánto varía el ángulo de elevación para el mismo punto?



- Anexo 3: Guía de trabajo[5] .

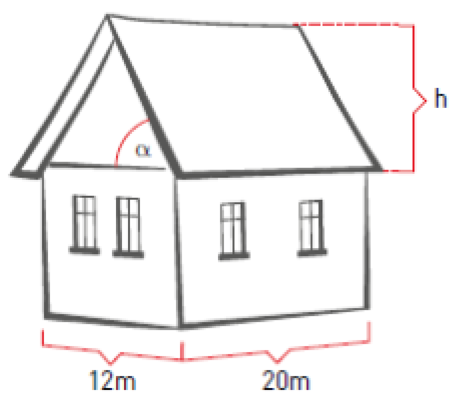
Guía 1: Razones trigonométricas

1. Gabriel, de 1,62 m de altura, se encuentra a 5 m de la base de un edificio y observa el punto más alto de este con un ángulo de elevación de 30°.

a) Determine aproximadamente la altura del edificio.

b) Si Gabriel se aleja 2 metros de la base del edificio, ¿en cuánto varía el ángulo de elevación para el mismo punto?

2. En la imagen se muestra el modelo de una casa. El ángulo de la pendiente del techo se mide en relación con la horizontal. Si el ancho de la casa es de b = 12 m su largo c mide 20 m y el ángulo que forma el techo con la horizontal es α =20, ¿cuál es la altura h que tiene la punta del techo sobre el segundo piso?



3. Para cada uno de los siguientes problemas, trace un bosquejo que les permita representar cada situación:

a) La longitud del hilo que sujeta un volantín es de 18 m y el ángulo que forma este respecto al suelo es de 30°. ¿A qué altura está el volantín?

[5] Extraído del material de apoyo docente de Red SIP (2022).

b) Violeta sube un resfalín que tiene una inclinación de 30° y 3 m de longitud.

¿Cuál es la mayor altura que Violeta puede alcanzar?

c) Un edificio tiene una altura de 72 m. Cuando el sol tiene un ángulo de elevación de 30°, ¿qué medida tiene la sombra que proyecta el edificio?

d) Un avión se encuentra a 2100 m de altura cuando comienza su descenso para aterrizar. ¿A qué distancia se encuentra de la pista, si para bajar aplica un ángulo de depresión de 20°?

e) Alejandro está recostado en una plaza y observa desde el piso un edificio de

110 m de alto. Si el edificio está a una distancia de $110\sqrt{3}$ m, ¿cuál es el ángulo de elevación con el que Alejandro lo observa?